Экзамен (теор.мин.)

1) лемма о поведении реш. ур-я $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$; $k(x) = (x-a)\varphi(x)$

а) Пусть $u_1(x), u_2(x)$ – два ЛН реш. ур-я $L[u] \equiv (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = 0$, $x \in (a,b)$, коэф-т k которого удв. $\begin{cases} k(x) \geq 0, & x \in [a,b] \\ k(x) = (x-a)\varphi(x) \\ \varphi(a) \neq 0, & \varphi(x) \in C[a;b] \end{cases}$

$u_1(x) = (x-a)^n v(x)$, $\begin{cases} v(x) \in C[a;b] \\ v(a) \neq 0, \; n \geq 0 \end{cases}$,

то второе реш. неогр. возр. при $x \to a$

б) Пусть вып. усл. $u_1(a)$, тогда если $u_1(x)$ огр. при $x = a$ $(a=0)$, то $u_2(x)$ имеет логарифм. особенность

* $\left[|u_1(a)| < \infty \to u_2(x) \sim \ln(x-a) \right]$ *.

Если $u_1(x)$ имеет в т. $x=a$ нуль n-ого пор., то $u_2(x)$ имеет ~~нуль n-ого пор~~ полюс n-ого пор.

* $\left[u_1(x) \sim (x-a)^n \to u_2(x) \sim (x-a)^{-n} \right]$ *

2) Ур-е Бесселя и его ФСР. Опр. ф-ций в ФСР. Их графики.

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y(x)=0$$

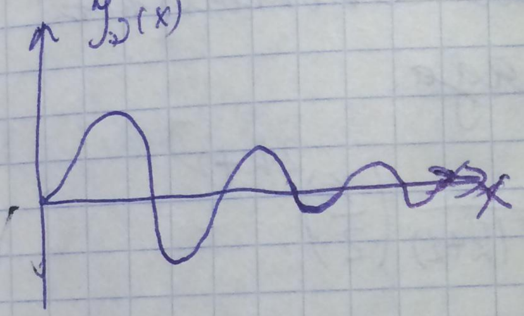
ФСР: $\{J_\nu, N_\nu\}$; $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ – $\forall \nu$

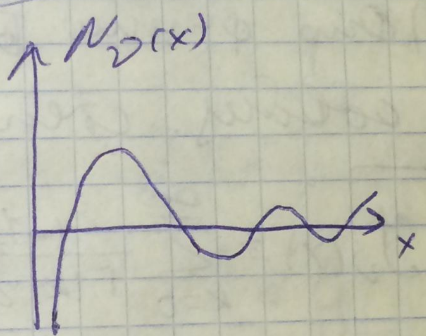
$\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ – $\nu \notin \mathbb{Z}$

J – ф-ция Бесселя;

N – ф-ция Неймана.

H – ф-ция Ханкеля.





3) Опр. цил. ф-ций. Пример и график.

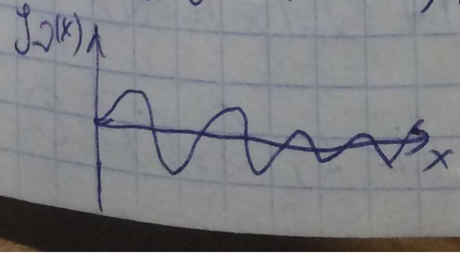
Любое реш. ур-я Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y(x)=0$$

назыв. цил. ф-цией.

Пример: ф-ция Бесселя пор. ν.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$



4) Особые т. ф-ции, явл. реш. ур-я Бесселя

ур-е Бесселя:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

реш. – ф-ция Бесселя $J_\nu(x)$ или $J_{-\nu}(x)$

Особые точки: $\{0;\infty\}$.

5) Опр. ф-ции Бесселя с помощью обобщ. степ. ряда.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

6) ф-лы для ф-ций Бесселя пор. $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$
Всегда ли они выраж. через элем. ф-ции?

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ ;\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

В общем случае выразить нельзя, но полуцелого пор. выразить можно

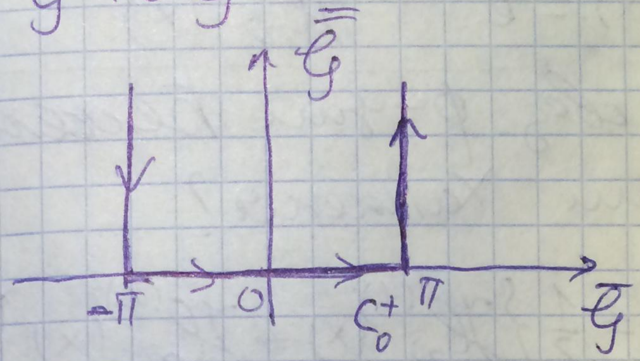
$$J_{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)\right\}$$

$P_n(t)$; $Q_n(t)$ – многочлены: $P_n(0)=1$; $Q_n(0)=0$

7) Инт. представ. для ф-ции Бесселя

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0^+} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + i\bar{\bar{\varphi}}$$

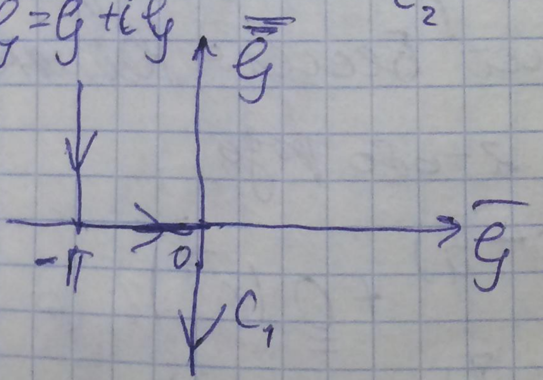


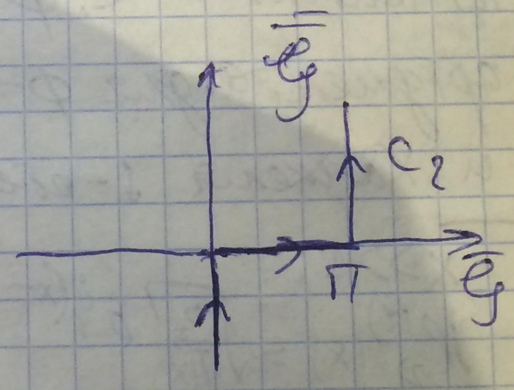
8). Опр. ф-ций Бесселя, Неймана и Ханкеля.

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi$$

$\varphi = \bar{\varphi} + i\bar{\bar{\varphi}}$





Ф-ция Бесселя - всякое реш. ур-я Бесселя.

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right\}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left\{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right\}$$

9) Ф-ла, связывающая ф-ции Ханкеля полож. и отриц. индексов

$$\mathcal{H}^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\pi\nu}\mathcal{H}^{(1)}_{\nu}(x)$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\pi\nu}\mathcal{H}^{(2)}_{\nu}(x)$$

10) Как связ. ф-ции Бесселя и ф-ции Ханкеля?

$$J_{\nu}(x) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{H}^{(1)}_{\nu}(x) + \mathcal{H}^{(2)}_{\nu}(x)\right\}$$

11) Как связ. ф-ции Неймана и ф-ции Ханкеля?

$$N_{\nu}(x) = \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{H}^{(1)}_{\nu}(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{\nu}(x)\right\}$$

12) Асимптотич. ф-лы при больших знач аргумента для ф-ций Бесселя, Неймана и Ханкеля 1-ого и 2-ого рода.

$x \gg 1$.

$$\mathcal{H}^{(1)}_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$J_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$N_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

13) Описание поведения ф-ций Бесселя, Неймана и Ханкеля вблизи нуля.

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \quad \nu \geq 0$$

$$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \begin{cases} \pm i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0 \\ \mp i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$$

14) Постановка задачи на СЗ для ф-ций Бесселя. Где она возникает?

$$\cancel{\alpha\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} x) - \beta J_n(\sqrt{\lambda} x) = 0}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, & 0 \leq r \leq a \\ \alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\big|_{r=a} = 0, & |\alpha| + |\beta| \neq 0 \\ |R(0)| < \infty, & R(r) \not\equiv 0 \end{cases}$$

Реш: $R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)$

$\Downarrow$

$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$

$\Downarrow$

Задача на СЗ: $\alpha\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$

Возникает в круговых областях.

15) Т. Стеклова в случае задачи на СЗ для ф-ции Бесселя

Всякая дважды дифф. на $[0, a]$ ф-ция $f(r)$, огр. при $r = 0$ и обращ-ся в нуль при $r = a$, м.б. разложена в абс. и равномерно сх. ряд по ф-циям Бесселя:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r \right),$$

$$A_m = \frac{\int_0^a f(r) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r \right) r \, dr}{\|J_n\|^2}$$

$$\|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2} \left(J_n' \left(\mu_m^{(n)} \right) \right)^2$$

16) Постановка задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае ГУ 1-ого рода. СФ-?

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & M \in U_0^{r_0} \\ u(P) = 0, & P \in C_0^{r_0} \end{cases} \qquad \overline{U}_0^{r_0} = U_0^{r_0} + C_0^{r_0}$$

$$\text{СФ: } u_{k,n}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

$k = 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$J_n \left(\mu_k^{(n)} \right) = 0 \quad ; \quad \mu_k^{(n)} = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0$$

17) Постановка задачи Ш-Л для оператора Лапласа в круге для ГУ 2-ого рода. (СФ-?)

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & M \in U_0^{r_0} \\ u'(P) = 0, & P \in C_0^{r_0} \end{cases} \qquad \bar{U}_0^{r_0} = U_0^{r_0} + C_0^{r_0}$$

$$СФ: u_{k,n}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

$$J_n'(\mu_k^{(n)}) = 0 \ ; \ \mu^{(n)} = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0$$

---

18) Хар. ур-е для опр. СЗ задачи Ш-Л для оператора Лапласа в круге в случае ГУ различного типа.

$$\alpha \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0\right) + \beta J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0\right) = 0$$

---

19) Общая ф-ла для квадрата нормы СФ задачи на СЗ для цил. ур-ий.

$$\|R_{kn}\|^2 = \frac{r_0^2}{2}\left\{ \left(J_n'(\mu_k^{(n)})\right)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{(\mu_k^{(n)})^2}\right) J_n^2(\mu_k^{(n)}) \right\}$$

---

20) СФ круга для ГУ Дирихле и Неймана

$$u_{nk}(r, \varphi) = J_{nk}\left(\frac{\mu_n^k}{r_0} r\right) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

Дирихле - 1-ого рода: $J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0\right) = 0$; $\mu_k^{(n)} = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0$

Неймана - 2-ого рода: $J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r_0\right) = 0$

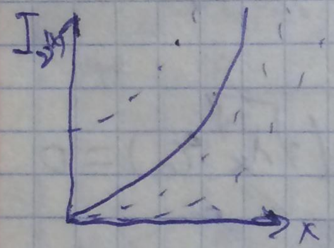
21) Ур-е для цил. ф-ций чисто мнимого аргумента. ФСР этого ур-я.

$$\cancel{y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)}-\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

ФСР: $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ $\Big|$ $x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0$

22) Опр. ф-ции Инфельда. Её график

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

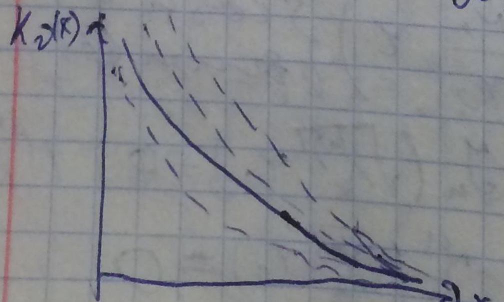


23) асимпт. ф-ла при больших знач. аргумента для ф-ции Инфельда.

$$I_\nu(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1+\underline{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

24) Опр. ф-ции Макдональда. Её график.

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)=\frac{\pi}{\sin\nu\pi}\{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\}$$



25) Асимпт. ф-ла для ф-ции Макдональда. Откуда она следует?

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

Следует из асимпт. ф-л для ф-ции Ханкеля (1)

* $\nu \neq n \Rightarrow K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin \pi\nu}\{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\}$

$\nu = n \Rightarrow K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu i H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})\right]$

---

26) Опр. классических ортог. полиномов

Система полиномов $\{p_n(x)\}$ всех степеней, заданная на отрезке $[a;b]$ назыв. системой КОП, если эти полиномы ортог. на $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, удв. ур-ю Пирсона:

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x).$$

$\tau(x)$ – лин. ф-ция; $\tau(x) = Ax + B$.

$A, B = const$, опр. из усл. $x^m \sigma(x) \rho(x)\Big|_a^b = 0$

$\forall m = 0, 1, 2 \dots$

Ф-ция $\sigma(x)$ опр. след. образом:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty, b \neq +\infty \\ x - a, & a \neq -\infty, b = +\infty \\ b - x, & a = -\infty, b \neq +\infty \\ 1, & a = -\infty, b = +\infty \end{cases}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right)$$

27) т. о нулях КОП.

КОП $P_n(x)$ имеет n вещ. нулей, располож. строго внутри $[a;b]$.

28) Являются ли производные КОП тоже КОП? Если да, то с каким весом ортог?

Производные $P_n'(x)$ тоже явл. КОП, заданными на $[a;b]$ и ортог. с новым весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.

29) Ур-е для КОП

$$\sigma(x) P_n''(x) + \tau(x) P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0$$

30) Постановка задачи на СЗ для КОП на отрезке с усл. в особых точках

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{\sigma(x)\rho(x)\frac{dy(x)}{dx}\right\} + \lambda_n \rho(x) y_n(x) = 0 \\ |y(a)| < \infty \\ |y(b)| < \infty \end{cases}$$

31) ф-ла для СЗ задачи Ш-Л. для КОП

$$\lambda_{n,m} = -(n-m)\left\{\frac{n-m-1}{2}\,\sigma'' + \tau_m'\right\}.$$

32) общая ф-ла для КОП. (общая ф-ла Родрига)

$$P_n = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\,\rho(x)\right\}; \quad C_n = \frac{n!\,a_n}{A_{nm}}; A_{nm} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,m}$$

33) Опр. полиномов Якоби.

КОП, заданные на $[-1, 1]$ и ортог. на нём с весом $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, наз-ся полиномами Якоби.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}$$

34) ф-ла Родрига для полиномов Якоби.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}$$

35) Опр. полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра - частный случай полиномов Якоби с $\alpha = \beta = 0$; $\rho(x) = 1$.

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$$

36) Задача на СЗ для полиномов Лежандра. (3-?)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+\lambda_n y=0 \\ |y(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

$\lambda_n = n(n+1)$

37) Квадрат нормы для полиномов Лежандра

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

38) Опр. полиномов Лагерра. Формулировка задачи, реш. которой они явл?

Полином Лагерра – КОП, опр. на $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ и ортог. там с весом

$p(x) = x^\alpha e^{-x}$

Задача:

Найти значения параметра λ, при которых $\exists$ нетрив. реш. ур-я

$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right\}+\lambda x^\alpha e^{-x}y=0$ на $\mathbb{R}^+=[0;+\infty)$, непр. на $\overline{\mathbb{R}}^+$ и квадратично интегрируемо на ней.

$|y(0)|<\infty; \ |y(\infty)|<\infty$

40) Производящая ф-ция КОП.

Производящая ф-ция КОП — это ф-ция $\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{P}_n(x)}{n!}z^n$; $\bar{P}_n(x)=\frac{P_n(x)}{C_n}$

общая ф-ла $\Psi(x,z)=\frac{1}{1-\delta'(t_0)z}\frac{p(t_0)}{p(x)}$

39) Полиномы Эрмита. Задача, реш. кот. они явл?

КОП, заданные на всей беск. прямой $\mathbb{R}^1$, непр. на ней и кв. инт. с весом e^{-x^2} назыв. полиномами Эрмита

$$H_n(x)=(-1)^n e^{+x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

Задача: Найти все λ, при которых $\exists$ нетрив. реш. ур-я $\frac{d}{dx}\left\{e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right\}+\lambda e^{-x^2}y(x)=0$, непр. и кв. инт. с весом e^{-x^2} на всей беск. прямой $\mathbb{R}^1$; $|y(\pm\infty)|<\infty$

41) Производящая ф-ция полиномов Лежандра.

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

42) Явл. система полиномов Лежандра замк. и полной? Формулир. соотв. утв.

Опр. 1: Ортог. система ф-ций $\{\varphi_n(M)\}$ назыв. полной в $L_2(D)$, если $\nexists f(M) \in L_2(D)$, ортог. ко всем ф-циям системы φ_n, и отличной от нуля.

Опр 2: Ортог. система $\{\varphi_n(M)\} \in L_2(D)$ назыв. замкнутой в пр-ве $L_2(D)$, если $\forall f \in L_2(D)$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ и $\exists \{C_n\}$: $\|f(M) - \sum\limits_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n \varphi_n(M)\| < \varepsilon$.

Утв: система КОП явл. полной.

Полнота есть следствие замкнутости

Система полиномов Лежандра явл. замк. и полной на $[-1; 1]$

43) Т. Стеклова для полиномов Лежандра.

Всякая дважды непр.-диф. на отр. ф-ция $f(x)$ ($f(x) \in C^{(2)}[-1;1]$) разлагается в абс. и равн. сх. ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x); \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

44) Присоед. ф-ции Лежандра.

Присоед. ф-ция Лежандра:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$P_n(x)$ - полиномы Лежандра.

45) Задача на СЗ для присоед. ф-ций Лежандра.

СЗ - ?

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, \; x \in (-1;1) \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

$$\lambda_n = n(n+1)$$

46) Квадрат нормы для присоед. ф-ций Лежандра

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$$

47) Явл. система присоед. ф-ций Лежандра замк. и полной? Утв. -?

Система присоед. ф-ций Лежандра явл. замк. и полной в $L_2[-1;1]$

$L_2[-1,1]$ - пр-во ф-ций, опр. на $[-1,1]$, таких, что интеграл $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ существует (конечен)

48) Т. Стеклова для присоед. ф-ций Лежандра.

$\forall f(x) \in C^{(2)}[-1;1]$, $f(\pm 1) = 0$ разлагается в абс. и равн. сх. ряд. по присоед. ф-циям Лежандра.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x)$$

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x)\, dx$$

$n = 0, 1, \ldots$

m - параметр

---

49) Опр. сферических ф-ций.

Задача на СЗ для сф. ф-ций

Опр.: Сф. ф-ции - огр. на ед. сфере реш. ур-я $\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) + \mu Y(\theta,\varphi) = 0$, удв. усл. периодичности $Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi)$

Задача на СЗ:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) + \mu Y(\theta,\varphi) = 0 \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi) \\ |Y(0,\varphi)| < \infty; \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty \end{cases}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

50) Явл. система сф. ф-ций замк. и полной? Чб-?

Система сферич. ф-ций явл. замк. полной $\{Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)\}$ на ед. сфере Ω, что явл. следствием замк. и полноты системы присоед. ф-ций Лежандра при $\theta \in [0; \pi]$ и замк. системы триг. ф-ций при $\varphi \in [0; 2\pi]$

51) Усл. ортог. для сферич. ф-ций.

Сферич. ф-ции, соотв. различным значениям λ ~~по~~ ортог. на поверхности сферы Σ. $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)} Y_{n_2}^{(m_2)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$

52) квадрат нормы для сф ф-ций.

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \varepsilon_m \pi, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

53) т. Стеклова для сферич. ф-ций.

$\forall f(\theta, \varphi) \in C^{(2)}(\Omega)$ разлагается в абс. и равн. сх. ряд. по сф. ф-циям $f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$

$$C_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

54) Опр. шаровых ф-ций. Явл. шаровые ф-ции СФ соотв. задачи на СЗ? Обоснуйте.

ф-ции $u(r, \varphi) = r^n Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ – шаровые

$v(r, \varphi) = \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ ф-ции

Нет, не явл.

т.к., например, СФ – это ф-ции вида

$$u_{nkm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}}{a} r\right) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

---

55) Задача на СЗ для шара для разных [illegible]

~~Дирихле~~:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\Big|_{r=a} = 0 \end{cases} \qquad u = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} u$$

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi} Y + \mu Y = 0 \\ Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi) \\ Y(\theta, \varphi) \neq 0 \end{cases}$$

Д: $u_{r=a} = 0$

$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, a) = 0$

Н: $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0$

$\sqrt{\lambda} a\, J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} a) - \frac{1}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} a)$

56) СФ шара

$$u_{nkm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}}{a} r\right) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}}{a}\right)^2 ; \quad Д: J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$$

$$Н: \mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$$

57) Характеристики УРЧП 2-ого пор. (2 перем).

~~корен~~

инт. кривые $a_{11} d^2y + 2a_{12} dx dy + a_{22} d^2x = 0$

назыв. характеристиками ур-я

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0$$

---

58) Опр. ур-ий эллиптического, гиперболического и параболического типов (2 перем.) и их каноническ. формы

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$$

ур-е $a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

называв. ур-ем в т. $M_0(x_0, y_0)$:

1) гиперб. типа, если $\Delta(x_0, y_0) > 0$

2) эллипт. типа, если $\Delta(x_0, y_0) < 0$

3) параб. типа, если $\Delta(x_0, y_0) = 0$

каноническ. форма:

1) гиперб: $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \Phi$

2) эллипт: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

3) параб: $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

59, 60, 61) опр. ур-ий параб., гиперб., эллипт. типа в случае многих перем. Его канонич. форма

Ур-я

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0$$

в т. M_0 назыв. ур-ем:

1) эллипт. типа, если все $\bar{a}_{ll}(M_0)$ $(l = 1, \dots, n)$ одного знака

канонич: $\sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k \xi_k} + \Phi = 0$

2) гиперболич. типа, если один из коэф-тов $\bar{a}_{ll}(M_0)$ одного знака, а остальные $n-1$ коэф-тов — другого

канонич.: $u_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{k=2}^{n} u_{\xi_k \xi_k} + \Phi$

$\sum_{k=1}^{m} u_{\xi_k \xi_k} = \sum_{k=m+1}^{n} u_{\xi_k \xi_k} + \Phi$ → (ультрагип: $1 \to m$)

3) параболич. типа, если ~~хотя~~ один коэф-тов $\bar{a}_{ll}(M_0)$ ~~одного знака, а $m-n$ коэф-тов — другого ($m > 1$, $n-m \geq 1$)~~ равен нулю

канонич: $\sum_{k=1}^{n-m} (\pm u_{\xi_k \xi_k}) + \Phi = 0$

$(m > 0)$

62) Опр. корректно поставленной задачи по Адамару.

Матем. задача назыв. поставленной корректно (по Адамару), если:

1) реш. задачи $\exists$

2) реш. задачи единственно

3) реш. задачи непр. зависит от вх. данных (т. е. устойчиво)

63) Пример постановки начально-краевых задач для теплопроводности и колебаний и пример. опр. классич. реш. этих задач.

(В опр. будет дана и постановка).

1) ~~теплопроводности~~ колебания:

Ф-ция $u(M,t)$ назыв. класс. реш нач. - краевой задачи

$$\begin{cases} (1)\ \rho(M)\, u_{tt} = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\, u) + f(M,t) & (M,t)\in Q_\infty \\ (2a,б)\ u(M,0) = \varphi(M)\ \ (\text{или } u_t(M,0) = \psi(M)), & M\in\overline{D} \\ (3)\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n_P} + \beta(P)\, u = \mu(P,t), & P\in S,\ t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

если она удв. след. усл:

1) $u(M,t) \in C^{(2)}(Q_\infty) \cap C^{(1)}(\overline{Q}_\infty)$

2) удв. ур-ю (1) в классическом смысле (подставим - получ-тся)

3) непр. примыкает к НУ и ГУ

2) теплопроводность:

ф-ция $u(M,t)$ назыв. классич. реш. нач.-краевой задачи ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} C(M)\rho(M)u_t = \operatorname{div}(K(M)\operatorname{grad}u) + f(M,t) & (1) \\ u(M,0) = \varphi(M), \quad M \in \overline{D} & (2) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n_P} + \beta(P)u = \mu(P,t), \quad P \in S,\ t \in [0,T] & (3) \end{cases}$$

если она удв. след. усл.:

1) $u(M,t) \in C^{(2,1)}_{M,t}(Q_T) \cap C^{(1,0)}_{M,t}(\overline{Q_T})$

2) удв. ур-ю (1) в классич. ~~смысле~~

3) непр. примыкает к НУ и БУ

$$\alpha(P)\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0), \quad P \in S$$

64) Общая схема метода разделения ~~...~~ переменных (метод Фурье), к реш. каких задач можно свести реш. нач-краевой задачи в лин. случае? (редукция полной задачи)?

Рассм. задачу:

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[u] = L_M[u], & (M,t) \in Q_\infty \\ u(M_0) = \varphi_0(M), \dots, \dfrac{\partial^m u(M,0)}{\partial t^m} = \varphi_m(M), & M \in \overline{D} \\ N_P[u(P,t)] = 0, \ P \in S, & t \in [0;+\infty) \end{cases}$$

следуя основной идее метода разд. перем., рассм. вспомог. задачу:

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[w] = L_M[w], & (M,t) \in Q_\infty \\ N_P[w(P,t)] = 0, \ P \in S, & t \in [0;+\infty) \\ w(M,t) = v(M) T(t) \\ w(M,t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{P_t[T(t)]}{T(t)} = \frac{L_M[v]}{\rho v(M)} = -\lambda$$

$\Downarrow$

приходим к задаче на СЗ

$$\begin{cases} L_M[v] + \lambda \rho(M) v = 0, & M \in D \\ N_P[v(P)] = 0, & P \in S \end{cases}, \quad \begin{cases} P_t[T] + \lambda T(t) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^k T}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(M) \end{cases}$$

65) Задача Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа с ГУ Дирихле на границе S обл. $\mathcal{D}$ и осн. св-ва СЗ и СФ этой задачи

$$\begin{cases} L_M[v] + \lambda \rho(M) v = 0, \ M \in \mathcal{D} & (1) \\ v(P) = 0, \ P \in S & (2) \end{cases}$$

Св-ва:

1) Пусть $k(M) \in C^{(1)}(\bar{\mathcal{D}})$; $\rho(M), q(M) \in C(\bar{\mathcal{D}})$, тогда $\exists$ бесконечное счётное мн-во СЗ задачи (1)–(2) и соотв. СФ

2) СФ задачи (1)–(2), соотв. СЗ задачи, ортогональные с весом $\rho(M)$

3) система СФ $\{v_k(M)\}$ задачи (1)–(2) замкнута в пр-ве $L_2(\mathcal{D})$ => она полна в $L_2(\mathcal{D})$ и исчерпывает все реш. задачи (1)–(2)

4) СЗ задачи (1)–(2) вещ. и неотриц. при усл. $\rho(M), k(M) > 0$; $q(M) \geq 0$, $\alpha(P), \beta(P) \geq 0$; $\alpha + \beta = 0$, $P \in S$

Ортог между собой; т. Стеклова.

66) 1-ая и 2-ая ф-лы Грина. Усл. применимости

1-ая ф-ла Грина:

$$\int\limits_D v(M) L_M[u(M)]\,dV = \int\limits_S k(P)\, v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$

$$- \int\limits_D k(M)\, \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v\, dV - \int\limits_D q(M)\, u(M)\, v(M)\, dV$$

усл. применимости:

$u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D})$

$v(M), k(M) \in C^{(1)}(D) \cap C(\overline{D})$

$q(M) \in C(\overline{D})$

2-ая ф-ла Грина:

$$\int\limits_D \{ v L_M[u] - u L_M[v] \} dV = \int\limits_S k(P) \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n_P} - u \frac{\partial v}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P$$

усл. применимости:

$u(M), v(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D})$

67) 3-я ф-ла Грина для 2D и 3D. (?)

3D:

$$\Omega_3 u(M_0) = \int\limits_S \left\{ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} d\sigma_P -$$

$$- \int\limits_D \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M \; ; \quad \Omega_3 = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in D \\ 2\pi, & M_0 \in S \\ 0, & M_0 \notin \overline{D} \end{cases}$$

2D:

$$\Omega_2 u(M_0) = \int\limits_\Gamma \left\{ \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right\} d\sigma_P - \int\limits_G \Delta u(M) \ln \frac{1}{r_{MM_0}} dS_M$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in G \\ \pi, & M_0 \in \Gamma \\ 0, & M_0 \notin \overline{G} \end{cases}$$

68) Опр. гармонич. ф-ции. Пример. Явл. гармонич. ф-ция беск. диф? Обоснование.

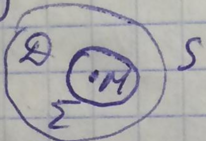
1) Опр. ф-ция $u(M)$ назыв. гармонич. в обл. D, если $u(M) \in C^{(2)}(D)$; $\Delta u = 0$, $M \in D$

Пример: ~~3-я ф-ла Грина~~. гармонич. полином:

$$r^n Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = \sum_{p+q+r=n} C_{pqr}\, x^p y^q z^r$$

2) $\exists$ производные всех порядков.

Обосн.:



3-я ф-ла Грина:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_{PM}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \right\} d\sigma_P$$

$\Downarrow$

по т. о диф. собств. инт. инт. можно диф. по коорд. $\forall$ число раз

$\Downarrow$

$\exists$ произв. ~~$\forall$~~ пор.

69) т. Гаусса и т. о среднем для гармонич. ф-ций.

1) т. Гаусса:

Пусть $u(M)$ - гармонич. в обл. D ф-ция.

Тогда $\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial u(P)}{\partial n} d\sigma_P = 0$; $\Sigma \subset D$

(замеч: если $u(M) \in C^{(1)}(\overline{D}) \Rightarrow \Sigma$: граница $S_{обл. D}$)

2) т. о среднем

Если $u(M)$ аналит. в обл. D и сфера $\Sigma_{M_0}^{R} \in D$. Тогда

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{R}} u(P)\, d\sigma_P.$$

70) Принцип max. и принцип сравнения для гармонич. ф-ций

1) принцип max

Неравная тождественно постоянной ф-ция $u(M)$, гармонич. в обл. D и непр. в замкнутой связной и огр. обл. $\overline{D}$, достигает своего max. знач. только на границе обл. D.

2) принцип сравнения

Пусть $u(M)$ и $v(M)$ - гармонич. в обл. D ф-ции, непр. в $\overline{D}$. И пусть $u(P) \leq v(P)$, $P \in S$.

Тогда $u(M) \leq v(M)$, $M \in \overline{D}$

71) т. единств. реш. внутр. краевой задачи для ур-я Лапласа в случае ГУ Дирихле. Метод док-ва - ?

Классическое реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), M \in D \\ u(P) = g(P), P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\overline{D}) \end{cases}$$

единственно.

Док-во: от противного

Пусть $\exists$ два реш. $u_1(M)$ и $u_2(M)$

Рассм. $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$; $u_1(M) \neq u_2(M)$

$\Downarrow$

задача $\begin{cases} \Delta w(M) = 0; M \in D \\ w(P) = 0, P \in S \\ w(M) \in C^{(2)}(P) \cap C(\overline{D}) \end{cases}$

Применяя принцип max, получим $w(M) \leq 0$, $M \in \overline{D}$

Применяя принцип min, получим.

$w(M) \geq 0$, $M \in \overline{D}$

$\Downarrow$

$w(M) = 0$, $M \in \overline{D}$

$\Downarrow$

$u_1(M) = u_2(M)$, $M \in \overline{D}$

$\Downarrow$

противоречие.

72) Т. единств. реш. внутр. краевой задачи для ур-я Лапласа в случае ГУ 3-его рода. Метод док-ва - ?

Классич. реш. задачи

$$\begin{cases} \cancel{\Delta u = -f(M), M \in D} \; \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) - q(M)k(M) = -f(M) \quad M \in D \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_P = \mu(P); \; P \in S, \quad h = h(P) > 0 \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}) \end{cases}$$

единственно

Док-во:

~~Используя 1-ую ф-лу Грина показываем, что задача имеет только нулевое реш.~~

$k(M), q(M) > 0$; $\alpha(P), \beta(P) > 0$

от противного -

расм: $w(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ одн. ур-е с одн. ГУ $\Rightarrow$ интегрируем.

$$\int_D w \operatorname{div}\{k(M)\operatorname{grad} w\} dV - \int_D q(M) w^2 dV = 0$$

$\cancel{\int_S k(P) w(P)}$ и применим 1-ую ф-лу Грина.

$$\int_S k(P) w(P) \underbrace{\frac{\partial w(P)}{\partial n}}_{= -\frac{\beta}{\alpha} w} dS_P - \int_D k(M) \operatorname{grad}^2 w \, dV - \int_D q(M) w^2 dV = 0$$

$w(M) = 0 \Rightarrow u_1(M) = u_2(M), \forall M \in \bar{D} \Rightarrow$ противоречие

73) Имеет ли место единств. реш. внутр. краевой задачи для ур-я Лапласа в случае ГУ 2-ого рода? обоснование - ?

Нет, не единственно и опр. с точностью до произв. const

Рассм. задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), \ M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P) = h(P), \ P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}) \end{cases}$$

Пусть $\exists u_1, u_2$: $u = u_1 - u_2$; $u_1 \neq u_2$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial n}(P) = 0$

Если в 1-ой ф-ле Грина $u = v$; $\operatorname{grad} u = 0$

$u(M) = const$

$\Downarrow$

класс. реш. второй внутр. краевой задачи не единственно и опр. с точностью до произв. const.

74) регулярная на ∞ ф-ция в случае 2 и 3 измер.

3D ф-ция $u(M)$ назыв. регулярной на ∞ в 3D-случае, если при всех дост. больших $r > r_0$ имеют место след. оценки:

$$|u| < \frac{A}{r}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2}$$

2D

В 2D случае ф-ция $u(M)$ назыв. регулярной на ∞, если она имеет конечный предел на ∞

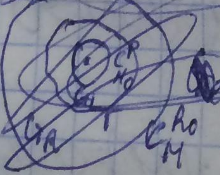
75) Т. ед. внешней задачи Дирихле для ур-я Лапласа в 2D. Метод док-ва – ?

Т. Классич. реш. задачи $\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in G_e \\ u(P) = g(P), & P \in \Gamma \\ |u(M)| < N, & M \in \overline{G_e} \end{cases}$ единственно

Док-во: от противного методом барьеров.

~~Пусть $\exists u_1, u_2: u_1 \neq u_2$; $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$~~

~~$\begin{cases} \Delta w(M) = 0, & M \in G_e \\ w(P) = 0, & P \in \Gamma \\ |w(M)| < N, & M \in \overline{G_e} \end{cases}$; $|u(M)| < N_i$, $i = 1, 2 \Rightarrow N = N_1 + N_2$.~~



~~G_e $G_R = G_e \cap U^K_{M_0}$; ф-ция барьер.~~

~~$v(M, R) = N \dfrac{\ln \frac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln \frac{R}{\rho}}$~~

7б) док-во для 2D.

Пусть $\exists$ реш. $u_1, u_2 : u_1 \neq u_2$.

$$w(M) = u_1(M) - u_2(M)$$

$$\begin{cases} \Delta w(M) = 0; & M \in G_e \\ w(P) = 0, & P \in \Gamma \\ |w(M)| < N, & M \in \overline{G_e} \end{cases}$$

$|u_l(M)| < N_l;\ l = 1, 2 \Rightarrow N = N_1 + N_2$

$$G_R = G_e \cap U^R_{M_0}$$

G_e.   Ф-ция барьер:

$$v(M,R) = N \frac{\ln \frac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln \frac{R}{\rho}}$$

см. как ведёт себя на Γ и $C^R_{M_0}$

$\Delta_M v(M,R) = 0;\ v|_\Gamma \geq 0$ (т.к. R в обл. G_i);

$v|_{C^R_{M_0}} = N \quad ; \quad w|_\Gamma = 0; \quad |w|_{C^R_{M_0}} < N \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ применяя принцип. max $\Rightarrow$

$\Rightarrow |w(M)| < v(M,R),\ M \in G^R$

фикс точку $\overline{M} \in G^R \Rightarrow$ при $R \to \infty$ ф-ция $v(M,R) \to 0$

$-v(\overline{M},R) < w(\overline{M}) < v(\overline{M},R) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. о двух милиционерах $\Rightarrow w(\overline{M}) = 0$, $\forall \overline{M} \in G_e \Rightarrow u_1 = u_2,\ M \in G_e \Rightarrow$ противоречие

75) Т. ед-ти реш. внешней задачи Дирихле для ур-я Лапласа в 3D. Метод док-ва-?

Решение задачи $\begin{cases}\Delta u(M)=0, & M\in D_e\\ u(P)=g(P), & P\in S\\ u(M)\rightrightarrows 0, & M\to\infty\end{cases}$ единственно

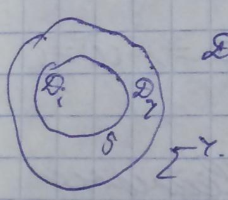
Док-во: Пусть $w(M)=u_1(M)-u_2(M)$.

$$\begin{cases}\Delta w(M)=0, & M\in D_e\\ w(P)=0, & P\in S\\ w(M)\rightrightarrows 0, & M\to\infty\end{cases}$$

Пусть $u_1\neq u_2$ (принцип max неприменим, т.к. обл. не огр.)

чтобы применить принцип max, нужно искуственно огр. обл.

$w(M)\rightrightarrows 0,\ M\to\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R: \forall r>R\ \ |w(M)|<R$



D_e $\quad D_r=D_e\cap\bar K^r$

В D_r принцип max применим.

$D_r:\ u|_S=0;\quad |u|_{\Sigma^r}<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |u(M)|<\varepsilon,\ M\in D_r^*$

Фix нек. точку $\bar M\in D_r: |u(\bar M)|<\varepsilon$.

ε-произвольно $\Rightarrow u(\bar M)=0,\ \bar M\in D_r$

$r\to\infty \Rightarrow D^r\to D^e \Rightarrow u(\bar M)=0,\ \forall\bar M\in D^e \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1=u_2,\ M\in D_e \Rightarrow$ противоречие

77) Имеет ли место ед. решения внешней краевой задачи с граничными усл. Неймана для ур-я Лапласа в 2D и 3D. Обоснование - ?

(3D): реш. задачи $\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D_e \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P) = f(P), P \in S \\ u(M) \rightrightarrows 0, M \to \infty \end{cases}$ Единственно

Док-во: используем метод от противного и энергетический метод.

$\exists u_1, u_2 : u_1 \neq u_2 ; \omega(M) = u_1(M) - u_2(M)$

$\begin{cases} \Delta \omega(M) = 0, M \in D_e \\ \omega(P) = 0, P \in S \\ \omega(M) \rightrightarrows 0 \end{cases}, M \to \infty$

Применим к ω 1-ую ф-лу Грина:

$$u = v = \omega \Rightarrow \int_{D_e} \omega \Delta \omega dV = \int_S \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{D_e} grad^2 \omega dV$$

$grad\, \omega = 0 \Rightarrow \omega = C = const \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \omega = 0$

$u_1(M) = u_2(M), M \in D_e$

(2D) В 2D реш. внешней задачи Неймана опр. с точностью до аддитивной конст. т.е. $u_1 - u_2 = C = const$ $(C \neq 0)$, т.к. нет усл. в 2D (нет усл. равн. сх. к 0)

78) В чём состоит различие в постановках и св-вах. реш. внутр. и внешних краевых задач для ур-я Лапласа в 2D и 3D?

Внеш: В 3D есть усл равн. сх. на ∞
$(u(M) \rightrightarrows 0,\ M \to \infty)$

В 2D не равн-сх, а огр. $(\ |u(M)| < K,\ M \in G_e\ )$

~~Внутр: в 2D и 3D реш. ед. в задаче Дирихле. в 3D реш. задачи Неймана ед, в 2D — нет. (внутр)~~

79) Опр. ф-ции Грина внутр. задачи Дирихле для оператора Лапласа в 3D. и реш. с помощью Грина -?

Ф-ция Грина явл. реш. задачи Дирихле для оператора Лапласа, если она имеет вид $g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$

и удв. краевой задаче $\begin{cases} \Delta_M g(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M \in D \\ g(P, M_0) = 0, & P \in S \end{cases}$

(v - гармонич. в D ф-ция)

80) Опр. ф-ции Грина внутр. задачи Дирихле для ур-я Лапласа в 2D и реш. с помощью ф-ции Грина.

Ф-ция Грина явл. реш. задачи Дирихле для оператора Лапласа, если она имеет вид $g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0)$ и

удв. краевой задаче $\begin{cases} \Delta_M g(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M \in G \\ g(P, M_0) = 0, & P \in \Gamma \end{cases}$

81) опр. ф-ции Грина решения внутр. задачи Неймана для ур-я в 3D и реш. задачи с помощью ф-ции Грина.

Ф-ция Грина явл. реш. задачи Неймана для оператора, если она имеет вид

$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$ и удв. краевой задаче

$$\begin{cases} \Delta_M g(M, M_0) = \delta(M, M_0), & M \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial g}{\partial n_P}(P, M_0) = \tilde{c}, & P \in S \end{cases}$$

— 17 82) Метод ф-ций Грина реш. краевых задач для ур-я Лапласа

Рассм. задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M) \\ u(P) = \mu(P), P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(\mathcal{D}) \cap C^{(1)}(\bar{\mathcal{D}}) \end{cases}$$

Применяем 3-ю ф-лу Грина и рассм. гармонич. ф-цию $v(M, M_0)$, т.е.

$$\Delta_M v(M, M_0) = 0, \quad v \in C^{(2)}(\mathcal{D}) \cap C^{(1)}(\bar{\mathcal{D}})$$

и применим 2-ую ф-лу Грина

получим $g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$

Требуем, чтобы $g(P, M_0) = 0$

и тогда решение:

$$u(M_0) = -\int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)\, d\sigma_P + \int_{\mathcal{D}} f(M)\, g(M, M_0)\, dV_M$$

79) $u(M_0) = -\int\limits_S u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)\, d\sigma_P +$

$+\int\limits_D f(M) g(M, M_0)\, d\sigma_P$

81) $u(M_0) = \int\limits_S g(P, M_0)\, h(P)\, d\sigma_P +$

$+\int\limits_D g(M, M_0)\, f(M)\, dV_M + const$

83) объёмный потенциал. Его исп. при реш. ур-я Пуассона.

Интеграл $V(M) = \int\limits_D \frac{\rho(Q)}{r_{MQ}} dV_Q$ назыв ~~потенциалом двойного слоя~~ объёмным пот-алом

Он явл. обобщ. реш. ур-я Пуассона:

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

84) опр. равн. сх. несобств. интеграла, завис. от параметра.

интеграл $u(M) = \int\limits_D f(M, Q)\rho(Q) dV_Q$

назыв. равн. сх. в т. M_0, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left| \int\limits_{D^\delta} f(M, Q)\rho(Q) dV_Q \right| < \varepsilon$

$\forall M \in K^\delta_{M_0}$ и $\forall D^\delta \subset K^\delta_{M_0}$ и содержащей точку $M_0 \in D^\delta$

85) Опр. потенциалов простого и двойного слоя в 2D и 3D.

3D.

пот-ал простого слоя: $V(M) = \int\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P$

(?) пот-ал двойного слоя: $W(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r^2_{PM}} d\sigma_P$

$+ \; w(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM}}\right) d\sigma_P$

2D

пот-ал простого слоя: $V(M) = \int\limits_C \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P$

(?) пот-ал двойного слоя: $W(M) = \int\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P$

$+ \; w(P) = \int\limits_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P$

86) поверхность Ляпунова.

пов. Ляпунова S-пов., облад. след. св-вами:

1) В каждой точке поверхности $\exists$ непр. нормаль (касательная п-ть)

2) Для каждой точки P_0 $\exists \delta > 0$ для всех точек поверхности, что часть пов S^δ попадающая внутрь шара $K^\delta_{P_0}$ в локальной СК с центром в т. P_0 представима в виде однозначной ф-ции $z = f(x, y)$

3) Угол γ между нормалями в точках P_1 и P_2:

$\gamma(P_1, P_2) = (\vec{n}_{P_1} \hat{;} \vec{n}_{P_2}) \le A r^\lambda_{P_1, P_2}$; $\lambda \in (0; 1]$; $P_1, P_2 \in S^\delta$

87) Т. о сущ. и непр. потенциала простого слоя.

Пусть ф-ция $\mu(x)$ интегрируема и огр. Тогда лог. пот-ал простого слоя $V(x)$ ~~всюду~~ непр. на плоскости $[V(x) \in C(\mathbb{R}^2)]$

88) Т. о существования потенциала двойного слоя.

Пусть $|\nu(P)| < N \Rightarrow$ лог. пот.-ал. двойного слоя $W(M)$ огр. всюду на плоскости.

89) Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя?

Нет, т.к. потенциал простого слоя явл. непр. ф-цией во всём пр-ве.

90) Чему равно значения пот-ала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне поверхности?

Ф-ла скачка пот-ала двойного слоя при переходе через несущую поверхность?

$$\overset{\circ}{w}(M) = \int_C \nu_0 \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & M \in G \\ \pi\nu_0, & M \in C \\ 0, & M \notin G \end{cases}$$

(в 3D увел. в 2 раза)

$$w^{(i)}(P_0) - w^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu_0$$

41) Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для ур-я Лапласа к союзным ~~ур~~ инт. ур-ям Фредгольма

Рассм. внутр. задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f(P), & P \in S \end{cases}$$

Реш. ищем в виде пот-ала простого слоя:

$$u(M) = \oint_S \mu(P) \frac{dS_P}{r_{MP}}$$

$\mu(P)$ опр. из ГУ: $\left(\frac{\partial u}{\partial n_e}\right)_i^* = \left(\frac{\partial u}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P_0) = f(P_0), P_0 \in S$

$$\Downarrow$$

$$\mu(P) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{r_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S \quad (1)$$

(Необх. усл. ∃реш.: $\oint_S f(P) dS = 0$)

Одновременно рассм. внеш. задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in D_e \\ u|_S = f \end{cases}$$

(и рег. на ∞)

Реш. ищем в виде:

$$u(M) = \underbrace{-\oint_S \nu(P)\,\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{MP}}\,dS_P}_{\text{пот-ал двойного слоя}} + \underbrace{\frac{\alpha}{r_{MO}}}_{\text{пот-ал точечного заряда}}$$

O – вн.

опр. $\nu(P)$: $\lim\limits_{M\to P_0\in S} u(M) = f(P_0)$, $P_0\in S$.

$$-\oint_S \nu(P)\,\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R}\,dS - 2\pi\nu(P_0) + \frac{\alpha}{r_{P_0O}} = f(P_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\,\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PP_0}}\,dS_P = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\alpha}{r_{P_0O}} - f(P_0)\right\} \quad (2)$$

$P_0\in S$

(1) и (2) – союзные инт. ур-я.

92) Т. ∃ реш. внутр. задачи Дирихле для ур-я Лапласа. Метод док-ва

Классическое реш. задачи.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in D \\ u(P) = g(P), & P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\overline{D}) \end{cases}$$

существует и притом единственно.

Метод док-ва:

Ищем ~~реш~~. реш. задачи в виде потенциала двойного слоя с неизв. плотностью $\nu(P)$

$$u(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} \, d\sigma_P$$

Далее рассм. внутр. пред. знач. и получим инт. ур-е Фредгольма 2-ого рода с полярным ядром.

$$K(P, P_0) = \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}^2}$$

~~Далее рассм. союзное инт. ур-е~~

Если $\lambda \neq \lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$, то ур-е Фредгольма 2-ого рода разрешимо и обратимо при $\forall$ непр. правой части.

(или точно прив. реш. об производной)

93). Т. Э реш. внешней задачи Неймана для ур-я Лапласа в 3D. Метод док-ва.

Внеш. задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in D_e \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_e}(P) = f(P), & P \in S \\ u(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

в обл. D_e имеет и притом единственное классическое реш. при $\forall$ непр. ф-ции $f(M)$.

Метод док-ва:

Ищем реш. в виде $u(M) = \int_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P$

Рассм. внеш. пред. знач. и получим инт. ур-е Фредгольма 2-ого рода.

В 3D реш. внеш. задачи Неймана единственно.

Далее показываем, что $\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ не явл. СЗ союзных ур-ий.

Получим внутр. задачу Дирихле с ГУ $u_i(P) = 0$

Её реш. единственно $\Rightarrow u(M) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(P_0) = 0 \Rightarrow \mu(P) = 0, P \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ не явл. СЗ союзных ур-ий.

при любых непр. $f(P)$

94) Т. ∃ реш. внутр. задачи Неймана для ур-я Лапласа! метод док-ва.

Внутр. задача Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u(M)=0, & M\in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P)=h(P), & P\in S \\ u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}$$

имеет в обл. D классич. реш., опр. с точностью до произв. const при любой непр. $h(M)$, удв.:

$$\int_S h(P)\,d\sigma_P=0$$

Метод док-ва:

Ищем реш. в виде пот-ала простого сл.

Далее рассм. предельн. внутр. пред. знач. и получим два сопряженных ур-я Фредгольма 2-ого рода.

К сопряженному ур-ю приведёт внеш. задача Д. Её реш. рассм. в виде пот-ала двойного слоя.

Реш. внутр. задачи Неймана опр. с точностью до аддитивной const $\Rightarrow v_{0k}(M)=C_k$.

95) т. ∃ реш. внешн. задачи Дирихле для ур-я Лапласа. Метод док-ва.

внеш. задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u(M)=0, \ M\in D_e \\ u(P)=g(P), \ P\in S \\ u(M) \rightrightarrows 0, M\to\infty \ (3D); \quad |u(M)|<N \ (2D) \end{cases}$$

$u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C(\overline{D})$

имеет и притом единственное классическое реш. при любой непр. ф-ции $g(M)$

метод док-ва:

ищем реш. в виде пот-ала двойного слоя. $u(M)=\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2_{PM}}d\sigma_P$ и

расм. пред. знач.

$$u^{(e)}(P_0)=-2\pi\nu(P_0)+u(P_0)=g(P_0)$$

приходим к инт. ур-ю Фредгольма второго рода.

$$\int_S\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}d\sigma_P=2\pi \Rightarrow \lambda_0=-\frac{1}{2\pi} \text{ явл.}$$

с.з., которому соотв с.ф. $\nu_0=\mathrm{const}$.

(см. ~~внеш~~ внутр. задачу Неймана)

96) Необх. усл. разрешимости внутр. задачи Неймана для ур-я Лапласа. Откуда оно следует?

Внутр. задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \; M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P) = h(P), \; P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}) \end{cases}$$

имеет реш., если вып. усл.

$$\int_S h(P)\, d\sigma_P = 0$$

Оно следует из т. Гаусса.

97) потенциал Робена. его физ. смысл

Пот-ал Робена опр. интегралом

$$V(M) = \int_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P.$$

μ_0 - с Ф ур-я:

$$2\pi \mu(P_0) + \oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \cdot \frac{1}{r_{PP_0}}\, d\sigma_P = 0$$

Физ смысл: потенциал, создаваемый зарядами на проводящей поверхности

98) фунд. реш. ур-я Гельмгольца в 2D и 3D.

$$\Delta u + cu = -f(M)$$

Если $c = k^2 > 0$; $k = \bar{k} + i\bar{\bar{k}}$

3D: $\dfrac{e^{ikr}}{r}$; $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$; $\dfrac{\cos kr}{r}$

2D: $H_0^{(1)}(kr)$; $H_0^{(2)}(kr)$

Если $c = -\varkappa^2 < 0$:

3D: $\dfrac{e^{\varkappa r}}{r}$; $\dfrac{e^{-\varkappa r}}{r}$

2D: $K_0(\varkappa r)$

99) Поверхностные пот-алы простого и двойного слоя для ур-я Гельмгольца

простого слоя: $V(M) = \int\limits_S \mu(P) \dfrac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} dS_P$

двойного слоя: $W(M) = -\int\limits_S \nu(P) \dfrac{\partial}{\partial n_P} \dfrac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} dS_P$

100) В чём отличие принципа max для ур-я Лапласа и Гельмгольца.

Ур

Для ур-я Лапласа $\Delta u = 0$ ~~верно~~ принцип max вып. всегда. (кроме $u \equiv const$)

Для ур-я Гельмгольца $\Delta u + cu = 0$ вып. только при $c<0$

Принцип max для гармонич. ф-ций: Неравная тождественно постоянной ф-ция $u(M)$, гармонич. в обл D и непр. в замк. связной и огр. обл $\overline{D}$ достигает своего max знач. только на границе обл. D

Принцип max для ур-я Гельмгольца: Реш. ур-я $\Delta u - æ^2 u = 0$, огр. и непр. в замк. обл $\overline{D}$ не может достигать во внутренних точках обл. D положит. max и отриц. min знач.

Принцип. max. для ур-я Гельмгольца:
классич. реш. ур-я $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$
$u(M) = C^{(2)}(D) \cap C(\overline{D})$ во внутр. точках
обл. D не может достигать положит. max
и отрицат. min. знач.

---

101) В каком случае имеет место единственность реш. внутр. краевых задач для ур-я Гельмгольца? Формулировки соотв. теорем?

---

1) классическое реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = -f(M), & M \in D \\ u(P) = \mu(P), & P \in S \end{cases}$$

$f(M)$ — ?

единственно.

2) Если $\lambda_n \neq c$, то классич. реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u + cu = -f(M), & M \in D \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(P), & P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}$$

единственно.

102) Принцип max и принцип сравнения для ур-я параболич. типа

1) принцип max

Классическое реш. одн. ур-я теплопроводности $\rho(M)u_t = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u)$ коэф-ты которого удов. усл.

$\rho(M) = c(M)\bar{\rho}(M) > 0$; $k(M) > 0$, $M \in D$,

во внутр. точках цилиндра Q_T не может достигать значений больше, чем наибольшее из начального и граничного значений

2) принцип сравнения

1) Пусть $u_1(M,t)$; $u_2(M,t)$ — классич. реш одн. ур-я теплопроводности.

$\rho(M)u_t = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u)$, непр. в $\bar{Q}_T$

$u_1(M,t)$; $u_2(M,t) \in C(\bar{Q}_T)$

тогда если $u_1(M,0) \geq u_2(M,0)$, $M \in \bar{D}$

и ~~если~~ $u_1(P,t) \geq u_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$

то тогда $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$

$(M,t) \in \bar{Q}_T$

2) если снова $u_1(M,t); u_2(M,t) \in C(\overline{Q_T})$ и
$|u_1(M,0) - u_2(M,0)| < \varepsilon, \quad M \in \overline{D}$
и $|u_1(P,t) - u_2(P,t)| < \varepsilon, \; P \in S, \; t \in [0,T]$,
то $|u_1(M,t) - u_2(M,t)| < \varepsilon; \; (M,t) \in \overline{Q_T}$

---

103) т. единств. и т. устойчивости
реш. внутр. нач.-краевой задачи Дирихле
для ур-я параб. типа. метод док-ва - ?

Задача Дирихле:

$$\begin{cases} u_t = L_M[u] + f(M,t), & (M,t) \in Q_T \quad (1) \\ u(M,0) = \varphi(M), \; M \in \overline{D} & (2) \\ u(P,t) = \mu(P,t); \; P \in S; \; t \in [0,T] & (3) \end{cases}$$

1) т. единств.:
классическое реш. задачи (1)-(3) единственно

Док-во:

от противного $\Rightarrow v = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{принцип max} \Rightarrow \le 0 \\ \text{принцип min} \Rightarrow \ge 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ (1)-(3)
$\Rightarrow u_1 = u_2$

2) устойчивость:
классич. реш. задачи (1)-(3) устойчиво по НУ и ГУ

док-во: $\exists u_1(M,t) \sim \varphi_1(M), \mu_1(P,t)$
$u_2(M,t) \sim \varphi_2(M), \mu_2(P,t)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} |\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| < \varepsilon \\ |\mu_1(P,t) - \mu_2(P,t)| < \varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow |u_1(M,t) - u_2(M,t)| < \varepsilon, \; (M,t) \in \overline{Q_T} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [принцип сравнения] $\Rightarrow$ ЧТД

104) ∃ классич. реш. нач.-краевой задачи Дирихле для одн. ур-я теплопр. на отрезке

Пусть ф-ция $\varphi(x) \in C[0,l] \cap Q^{(1)}[0,l]$ и пусть $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда классич. реш. задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0,l),\ t \in (0;+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [0;+\infty) \end{cases}$$

существует и представимо в виде $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$,

где $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

*$Q^{(k)}[0,l]$ – класс ф-ций, имеющих кусочно-непр. производные на отрезке $[0,l]$ до k-ого пор. включительно

105) Ф-ция Грина для ур-я теплопр. на отрезке в случае ГУ Дирихле. В чём физ. смысл?

$$g(M,Q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q).$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{на отр.:}\\ \begin{cases} g(M,Q,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n \xi}{l}, & t>0 \\ g(M,Q,t) = 0, & t<0 \end{cases}\end{array}}$$

физ смысл:

$g(M, M_0, t)$ – температура тела D в т. M_0 в момент времени t, если в момент $t=0$ действовал мгновенный точечный источник.

---

106) Начальная задача для ур-я теплопр. на беск. прямой. Т. ед. реш. нач. задачи для ур-я теплопр на беск прямой.

1)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1 & (2) \\ |u(x,t)| < M, & (x,t) \in \overline{\Omega}_\infty & (3) \end{cases}$$

$\Omega_T = \mathbb{R}^1 \times (0, T]$; $\overline{\Omega}_T = \mathbb{R}^1 \times [0, T]$

Т. ед:

класс. реш. задачи (1)-(3) единственно

107) Т. ∃ классич. реш. задачи Коши для ур-я теплопр. на беск. прям.

Пусть ф-ция $\varphi(x)$ непр. на R^1 и огр. на этой прямой, тогда ф-ла Пуассона $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$

выраж. классич. реш. задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (x,t)\in\Omega_\infty \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R^1 \\ |u(x,t)|<M, & (x,t)\in\Omega_\infty \end{cases}$$

---

108) фунд. реш. ур-я теплопр. на беск. прямой, его св-ва и физ. смысл

фунд. реш: $g(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$

Св-ва:

1) $g(x,\xi,t)>0$; $(x,t)\in\Omega_\infty$; $\xi\in R^1$

2) $g(x,\xi,t)=g(\xi,x,t)$, т.е. симм по x и ξ

3) фунд. реш. ур-я теплопр. на беск. прямой явл. реш. задачи

$$\begin{cases} g_t=a^2g_{xx}, & (x,t)\in\Omega_\infty \\ g(x,\xi,0)=\delta(x,\xi), & x\in R^1;\ \xi\in R^1 \end{cases}$$

физ. смысл:

ф-ция $g(x, \xi, t)$ – температура бесконечной прямой в т. x в момент времени t, если в т. ξ в момент $t = 0$ было выделено мгновенно некоторое кол-во тепла Q_0.

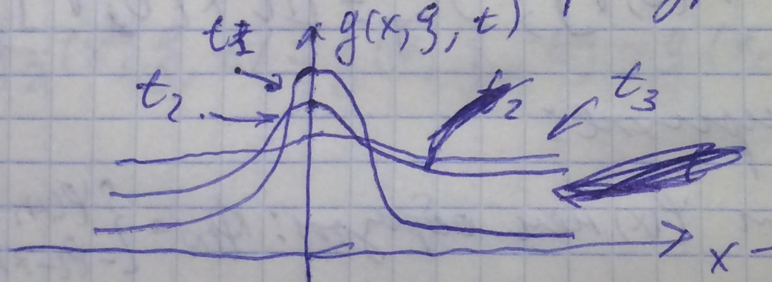
(т. е. работал мгновенный точечный источник Q_0)

(Q_0 – его мощность)

---

109) Парадокс бесконечной теплопроводности. Чем можно его объяснить?

парадокс бесконечной теплопроводности заключается в том, что в сколь угодно отдалённых от ξ точках, и сколь угодно близких к $t = 0$, температура отлична от нуля.



т. е. тепло „расплывается")

Этот пример показывает, что мы подошли к пределу Э модели выраж. ур-ем теплопроводности (т. к. при выводе этого ур-я не учитывали инерционность процесса движения молекул)

110) Нач.-краевая задача для ур-я теплопр. на полубеск. прямой. В чем заключ. „метод продолжения" для построения реш. нач.-краевой задачи для ур-я теплопр. на полупрямой для задач Дирихле и Неймана.

(D): $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega^+_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\mathbb{R}}^+ \\ u(0,t) = \mu(t), & t \in [0;+\infty) \\ |u(x,t)| < N, & (x,t) \in \overline{\Omega}^+_\infty \end{cases}$

(N): $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega^+_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\mathbb{R}}^+ \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t \in [0;+\infty) \\ |u(x,t)| < N, & (x,t) \in \overline{\Omega}^+_\infty \end{cases}$

$\Omega^+_T = \overline{\mathbb{R}}^+ \times (0;T]; \quad \overline{\Omega}^+_T = \overline{\mathbb{R}}^+ \times [0;T]$

Задача Дирихле:

Продолжим $\varphi(x)$ неч. образом: $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$

Расм.:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi = u(x,t)$$

Почему оно реш?

$\text{ур.}(D)$ на $\mathbb{R}^+$ вып; $\Phi(\xi) = \varphi(\xi)$; $u(0,t) = 0$

+ немного

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty} g(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\int_0^{-\infty} g(x,\xi,t)\,\varphi(-\xi)\,d(-\xi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\xi\to-\xi| \Rightarrow u(x,t)=\int_0^{+\infty} g_1(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$g_1(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)-g(x,-\xi,t)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right]$$

Задача Неймана:

Продолжим $\varphi(x)$ чётным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

аналогично получим.

$$g_2(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)+g(x,-\xi,t)$$

111) Ф-ция Грина для ур-я теплопр. на полупрямой в случае ГУ Дирихле

$$g_1(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)-g(x,-\xi,t)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right)$$

112) Ф-ция Грина для ур-я теплопр. на полупрямой в случае ГУ Неймана

$$g_2(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)+g(x,-\xi,t)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right)$$

113) общий вид решения нач.-краевой задачи для неодн. ур-я теплопр. в случае одн. ГУ

D ($u(0,t)=0$):

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty g_1(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$g_1(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)-g(x,-\xi,t)$$

N ($\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$):

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty g_2(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$g_2(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)+g(x,-\xi,t)$$

R ($\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+h\,u(0,t)=0$):

$$u(x,t)=\int_0^\infty g_3(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^\infty g_3(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$g_3(x,\xi,t)=g(x,\xi,t)+g(x,-\xi,t)-2h\int_0^\infty g(x,-\xi-\eta,t)e^{-h\eta}d\eta$$

$$g_3(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}-2h\int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-h\eta}\,d\eta\right\}$$

114) Нач. задача для ур-я теплопр. в пр-ве. и т. единств. её реш.

1) $$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), & (M,t) \in \Omega_T^3 \quad (1) \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \mathbb{R}^3 \quad (2) \\ |u(M,t)| < N, & (M,t) \in \overline{\Omega}_T^3 \quad (3) \end{cases}$$

2) Классическое реш., огр. в Ω_3, задачи (1)-(3) единственно.

115) т. $\exists$ класс. реш. задачи Коши для ур-я теплопр. в пр-ве.

Если ф-ция $\varphi(M)$ непр. и огр. в $\mathbb{R}^3$, то ф-ла $u(M,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} g_3(M,Q,t)\,\varphi(Q)\,dV_Q$

определяет при $(M,t) \in \Omega_T^3$ класс. реш. задачи (1)-(3) при $f(M,t) \equiv 0$

$$g_3(M,Q,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}\right]$$

~~#5) 1.) классич. реш. задачи Коши для ур-я теплопр. в пр-ве.~~

17)

№16) общий вид реш. одн. ур-я теплопр. на полубеск. прямой при одн. НУ и неодн. ГУ Дирихле. Принцип Дюамеля.

1)

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

2) Принцип Дюамеля:

Пусть надо решить одн. ур-е теплопр. с одн. НУ и неодн. ГУ (1-ого рода), тогда это реш. выраж. ф-лой

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(x, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau,$$ где

$G(x,t)$ – это реш. той же задачи с граничной ф-цией, равной 1.

117) т. ед. реш. общей. нач.-краевой задачи для ур-я колеб.
Метод док-ва — ?

Классич. реш. задачи.

$$\begin{cases} \rho(M)u_{tt} = L_M[u] + f(M,t), (M,t) \in Q_\infty \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M) \end{cases}, M \in \overline{D}$$
$$N_p[u(P,t)] = \mu(P,t), P \in S, t \in [0;+\infty)$$

единственно

$$\left(\begin{aligned} L_M[u] &= \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) \\ N_p[u] &= \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u \end{aligned} \right)$$

Док-во: от противного
$\exists u_1; u_2;\ u_1 \neq u_2;\ v = u_1 - u_2$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_D \{\rho(M)v_t^2 + k(M)\operatorname{grad} v\} dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_D \{\rho v_t u_{tt} + k \operatorname{grad} v \operatorname{grad} v_t\} dV$$

Прим. 1-ую ф-лу Грина.

$$\frac{dE}{dt} = \int_D \underbrace{v_t\{\rho v_{tt} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v)\}}_{=0} dV - \int_S k(P) v_t \frac{\partial v_t}{\partial n_p} d\sigma_p$$

$$\frac{dE}{dt} = -\int_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)} v_t v\, d\sigma_p = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)} v^2 d\sigma_p$$

$$\frac{d}{dt}\Big\{\underbrace{E(t)+\frac{1}{2}\int\limits_{S} k\,\frac{\beta}{\alpha}\,v^2\,d\sigma_P}_{=C=const}\Big\}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v(M,0)=0 \Rightarrow \text{grad}\, v(M,0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из НУ $\Rightarrow v_t(M,0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(t)=0 \Rightarrow v_t=0,\ \text{grad}\, v=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v=C \Rightarrow C=0 \Rightarrow u_1=u_2 \Rightarrow$ противоречие

---

118) Т. Э классич. реш. нач.-краевой задачи для одн. ур-я колеб. на отрезке в случае одн. ГУ Дирихле.

Пусть ф-ция $\varphi(x)\in C^{(2)}[0,l]\cap Q^{(3)}[0,l]$,

$\psi(x)\in C^{(1)}[0,l]\cap Q[0,l]$, причём

$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0;\ \psi(0)=\psi(l)=0$

Тогда классич. реш. задачи (3)

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in(0,l);\ t\in(0;+\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x);\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in[0,l] \\ u(0,t)=0;\ u(l,t)=0, & t\in[0;+\infty) \end{cases}$$

и представимо ф-лой:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\omega_n t+b_n\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\Big)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi$$

$$b_n = \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi \;;$$

$$\cancel{\frac{1}{\omega_n}b_n = \frac{2}{l\,\omega_n}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi} \qquad \omega_n = \frac{\pi a n}{l}.$$

119) Опр. ф-ция влияния мгновенного точечного импульса (ф-ции Грина) для ур-я колеб. на отрезке.

$$g(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}$$

$$\omega_n = \frac{\pi a n}{l}$$

120) Постановка нач. ~~краевой~~ задачи на беск. прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,; & (x,t)\in\Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x)\,, & x\in\mathbb{R}^1 \end{cases}$$

(21) Ф-ла Д'аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

---

(22) Метод распр. волн. (подробнее ?)

Метод распр. волн заключается в поиске решения ур-я колеб. в виде суперпозиции двух волн, распр. в противоположных направлениях.

---

(23) т. ∃ и ед. классич. реш. задачи Коши для одн. ур-я колеб. на беск. прямой.

Если $\varphi \in C^{(2)}(\mathbb{R}^1)$; $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, то классич. реш. ~~∃ и ед.~~ задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cancel{f(x,t)}, & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

существует и единственно.

124) Т. устойчивости реш. задачи Коши для ур-я колеб. на беск. прямой

реш. задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

устойчиво по начальным данным φ и ψ.

т.е. если $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^1$

$\int_a^b |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz < \varepsilon$, $\forall a, b$.

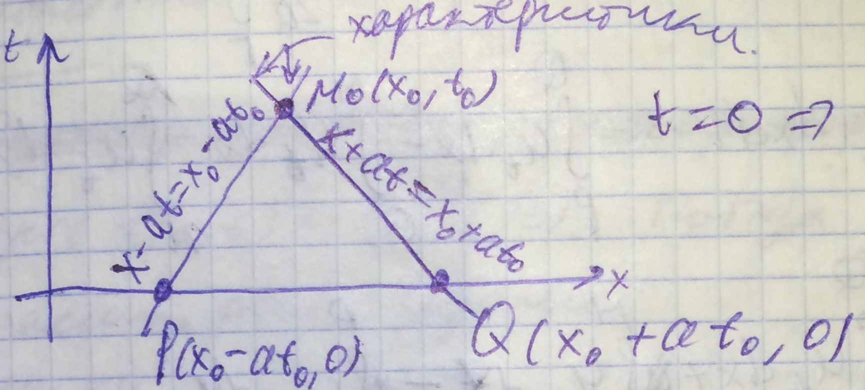
тогда $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon(1+T)$

$\forall (x,t) \in \Omega_T$

(устойчивость имеет локальный характер)

(т.е. от 0 до $+\infty$ нет устойчивости)

125) характеристич. треуг. на фазовой пл-ти.

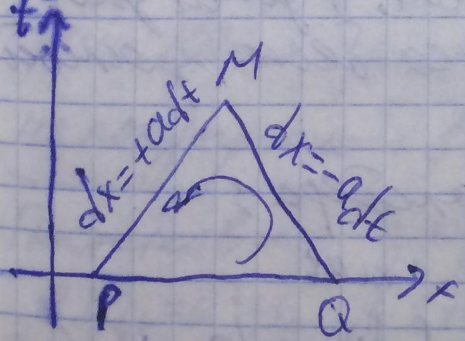


$t = 0 \Rightarrow x = x_0 \pm a t_0$

$$u(M_0) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int_P^Q \psi(z)\,dz$$

126) В чем сост. метод интегрирования по фазовой пл-ти.

~~...~~ Реш. неодн. задачи получается методом инт. по фазовой пл-ти.



Если $F(x,t) \in C^{(1)}(D) \cap C(\overline{D})$,

то $$\iint_D \frac{\partial F}{\partial t}\,dx\,dt = -\oint_\Gamma F\,dx$$

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dt = +\oint_\Gamma F\,dt$$

В кач-ве D выберем треуг. и инт. по нему

$$\frac{1}{2a}\int_{\mathcal{D}}\{u_{tt}-a^2u_{xx}\}\,dx\,dt=\frac{1}{2a}\int_{\Gamma}f(x,t)\,dx\,dt$$

$$\int_{\mathcal{D}}u_{tt}\,dx\,dt=-\int_P^Q u_t\,dx-\int_Q^M u_t\,dx-\int_M^Q u_t\,dx=$$

$$=-\int_P^Q u_t\,dx+\int_Q^M u_t\,d\cancel{x}-\int_M^P u_t\,d\cancel{x}$$

$$\int_{\mathcal{D}}u_{xx}\,dx\,dt=\int_P^Q u_x\underbrace{dt}_{=0}+\int_Q^M u_x\underbrace{dt}_{=-\frac{1}{a}dx}+\int_M^Q u_x\underbrace{dt}_{=\frac{1}{a}dx}$$

$$u(M)=\frac{u(P)+u(Q)}{2}+\frac{1}{2a}\int_P^Q u_t\,dx+\frac{1}{2a}\int_{\Delta PQM}f(x,t)\,dx\,dt$$

---

127) общая ф-ла реш. нач. задачи для неодн. ур-я колеб. на беск. прямой.

общая ф-ла Д'Аламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

128) т. ∃ и ед. классич. реш. неодн. ур-я колеб. на беск. прямой.

~~Пусть ф-ция f(x, t) непр. диф.~~

Пусть $f(x,t) \in C^{(1)}(\Omega)$. Тогда классич. реш. задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

существует, единственно и опр. ф-лой:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

---

129) В чем сост. „метод продолжения" построения реш. ~~нач~~-краевой задачи для ур-я колеб. на полупрямой в случае одн. ГУ Дирихле и Неймана. (3)

Постановка задачи.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty^+ \\ u(x,0) = \varphi(x);\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^+ \\ \text{либо } u(0,t) = \cancel{\mu(t)} & \text{Д} \\ \text{либо } u_x(0,t) = \cancel{\mu(t)} & \text{Н} \end{cases}$$

+ Лемма.

Метод продолжения; $f\equiv 0$; $\mu \equiv 0$

Задача Дирихле:

φ и ψ продолжим нечётным образом:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases};\quad \psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

тогда

$$u(x,t)=\frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(z)\,dz=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz, & 0<t\le\frac{x}{a}\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{-x+at}^{x+at}\psi(z)\,dz, & t\geq\frac{x}{a}\end{cases}$$

Задача Неймана

φ и ψ продолжим чётным образом

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases};\quad \psi_2(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

тогда

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz, & 0<t\le\frac{x}{a}\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(-x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz+\int\limits_{0}^{-x+at}\psi(z)\,dz\right\}, & t\geq\frac{x}{a}\end{cases}$$

130) Реш. нач. - краевой задачи для одн. ур-я колеб. на полупрямой в случае одн. НУ и неодн. ГУ Дирихле.

Как его получить?

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = 0 & , x \in \overline{\mathbb{R}}^+ \\ u(0,t) = \mu(t), & t \in [0; +\infty) \end{cases}$$ - краевой режим.

$\xrightarrow{\quad}$

$u(x,t) = f(x-at)$ - получ. через распр. краевого режима

Опр. f из НУ:

$f(x) = 0; \quad -af'(x) = 0, \; x \geq 0$

$f(-at) = \mu(t), \; t \geq 0$

$\Downarrow$

$\underset{\Leftarrow\, x-at}{f(y)} = \mu\left(-\frac{y}{a}\right); \quad y \leq 0$

$\Downarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{x}{a} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & t \geq \frac{x}{a} \end{cases}$$

131) Задача Коши для ур-я колеб. в пр-ве

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), & (M,t) \in \Omega^3_\infty \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M), & M \in \overline{D} \end{cases}$$

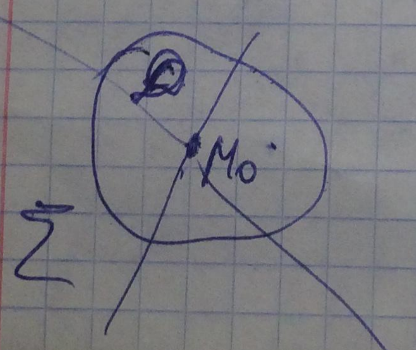
$$\Omega^3_\infty = \mathbb{R}^3 \times (0; +\infty)$$

---

132) Ф-ла Кирхгофа.

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \frac{1}{a r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) \frac{\partial r_{PM_0}}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{D} \frac{f\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}} \, dV_M$$



133) Ф-ла Пуассона, выраж. реш. задачи Коши для ур-я колеб. в 3D.

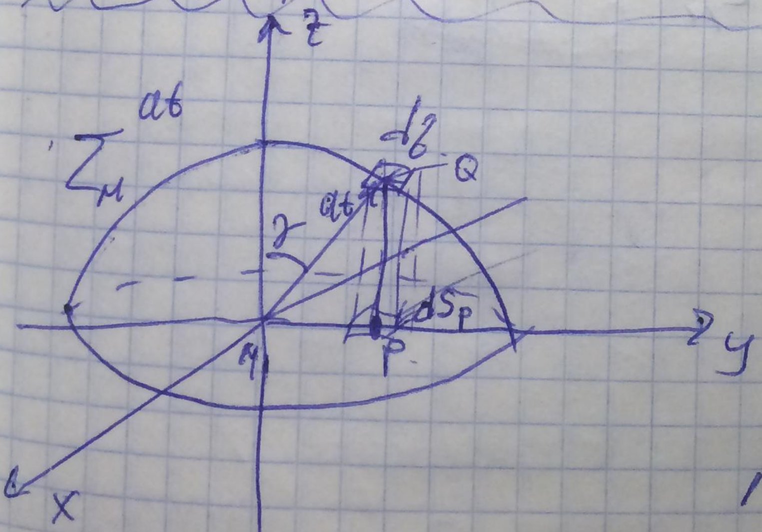
$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma^{at_0}_{M_0}}\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\,d\sigma_P+\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\Sigma^{at_0}_{M_0}}\frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\,d\sigma_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K^{at_0}_{M_0}}\frac{f\left(M,t_0-\frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}\,dV_M.$$

134) „метод спуска" Адамара.

Смысл: из большего числа измерений получаем ф-лу для меньшего числа измерений

не нужно



Возьмём верхнее полусферие.

$M=(x,y)$

$P=P(\xi,\eta)$

Найдём связь между $d\sigma$ и dS_P

133) Ф-ла Пуассона, выраж. реш. задачи Коши для ур-я колеб. в 3D.

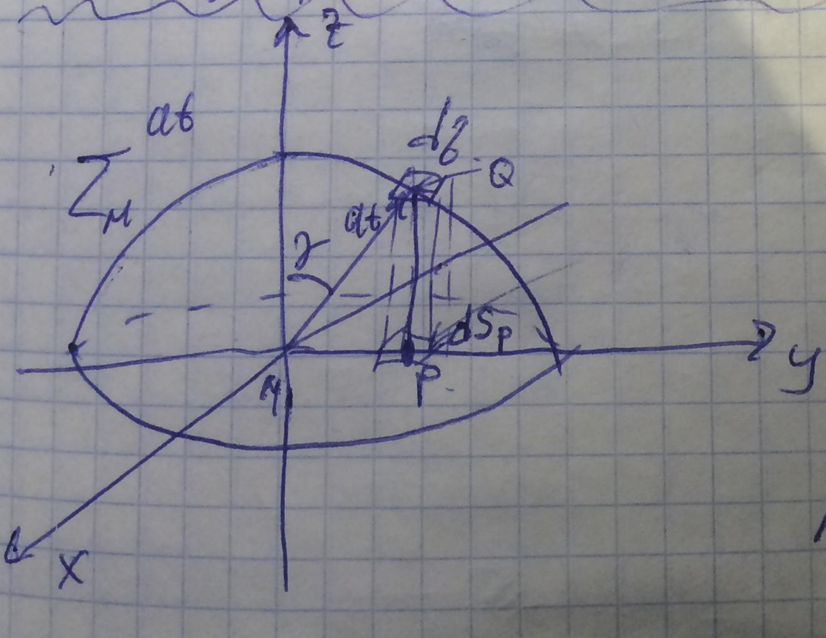
$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{M_0}^{at_0}} \frac{f\left(M, t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}\, dV_M.$$

134) „метод спуска" Адамара.

Смысл: из большего числа измерений получаем ф-лу для меньшего числа измерений

не нужно



Возьмём верхнее полушарие.

$M=(x,y)$

$P=P(\xi,\eta)$

Найдём связь между $d\sigma$ и dS_P

135) Ф-ла Пуассона в 2Д.

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\text{круг}\to\, U_M^{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{U_M^{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{U_M^{a\tau}} \frac{f(\xi,\eta;\,t-\tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$