

ММФ (экзамен)

Теоретический минимум

1. Лемма о поведении решений ур-ния $(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = 0$, $x \in (a, b)$, где $k(x) = (x-a)\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$, в особых точках.

см. ММФ(К) - п. 1.

2. Ур-ние Бесселя и его ФСР. Определение ф-ции, входящих в эту ФСР, и их графики.

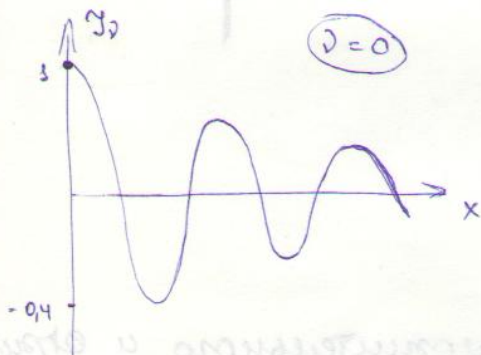
см. ММФ(К) - п. 2.

3. Определение цилиндрической ф-ции. Пример цилиндрической ф-ции и ее график.

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Любое ненулевое решение ур-ния Бесселя наз. цилиндрической ф-цией.

$$Y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} - \text{ф-ция Бесселя.}$$



4. Особые точки ф-ции, которые являются решениями ур-ния Бесселя.

$$x = 0, x = \infty.$$

5. Определение ф-ции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда.

$$Y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

6. Формулы для функций Бесселя порядков $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить $\frac{1}{3}$ элементарные функции?

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \quad Y_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

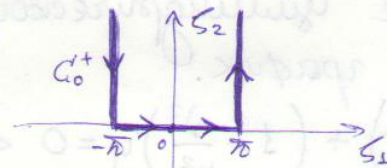
Всегда можно $Y_{n+\frac{1}{2}}(x)$ выразить $\frac{1}{3}$ элементарные функции:

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) \right\}, \text{ здесь}$$

$P_n\left(\frac{1}{x}\right), Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ - многочлены; $P_n(0) = 1, Q_n(0) = 0$.

7. Интегральное представление для функций Бесселя.

$$Y_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_0^+} e^{-ix \sin s + i\nu s} ds$$

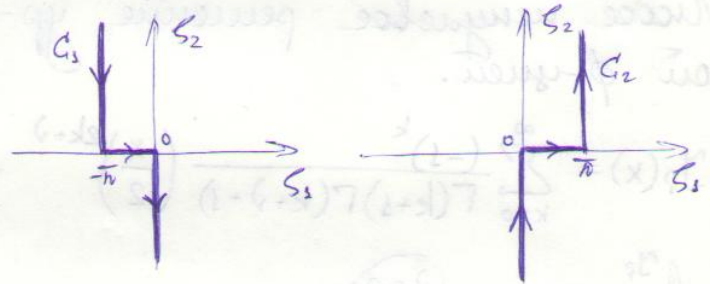


8. Определение функций Бесселя, Хеймана, Ханкеля.

$$Y_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin s + i\nu s} ds$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_2} e^{-ix \sin s + i\nu s} ds$$



$$N_{\nu}(x) = \frac{1}{2i} \left(H_{\nu}^{(1)}(x) - H_{\nu}^{(2)}(x) \right)$$

9. Формула, связывающая функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.

$$\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(x) &= e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(x) \\ H_{-\nu}^{(2)}(x) &= e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{можно задать определение} \\ \text{функций Ханкеля,} \\ \text{помогив в них} \\ \nu = -\pi - \alpha \end{array} \right.$$

10. Как связаны функции Бесселя и Ханкеля?

$$Y_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \left\{ H_{\nu}^{(1)}(x) + H_{\nu}^{(2)}(x) \right\}$$

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = i \frac{Y_{\nu}(x) e^{-i\nu\pi} - Y_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}$$

$$Y_{-\nu}(x) = \frac{1}{2} \left\{ H_{\nu}^{(1)} e^{i\nu\pi} + H_{\nu}^{(2)} e^{-i\nu\pi} \right\}$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = -i \frac{Y_{\nu}(x) e^{i\nu\pi} - Y_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}$$

11. Как связаны функции Неймана и функции Ханкеля? (3)

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i} (H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x))$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = Y_\nu(x) + iN_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)) + iN_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = Y_\nu(x) - iN_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)) - iN_\nu(x)$$

12. Асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля.

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

13. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.

В окр-ти нуля при $x > 0$: $Y_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \nu > 0, x \rightarrow 0;$

$$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}, & \nu = 0, \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \begin{cases} \pm i \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}, & \nu = 0, \\ \mp i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0. \end{cases}$$

14. Задача на СВ для функций Бесселя.

$$\begin{cases} z^2 R'' + zR' + (\lambda z^2 - n^2)R = 0, & 0 \leq z \leq a, \\ \left(\alpha \frac{dR}{dz} + \beta R\right)\Big|_{z=a} = 0, & |\alpha| + |\beta| \neq 0, \\ |R(0)| < \infty, & R(z) \neq 0; \end{cases}$$

Общее решение: $R_n(z) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}z) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}z)$

т.к. $N_n(\sqrt{\lambda}z)$ — неогр. в $z=0$, то $C_2 \equiv 0$. Положим $C_1 = 1$. Тогда СВ исходной задачи имеет вид $R_n(z) = J_n(\sqrt{\lambda}z)$. Подставив это в граничное условие, получим дисперсионное уравнение:

$$\boxed{\alpha \sqrt{\lambda} Y_n'(\sqrt{\lambda} a) + \beta Y_n(\sqrt{\lambda} a) = 0} - \text{задача на СЗ для функции Бесселя.} \quad (4)$$

15. Теорема Стеклова в случае задачи на СЗ для функции Бесселя:

„ Пусть $f(z) \in C^{(2)}[0, a]$, $|f(0)| < \infty$ и $f(a) = 0$. Тогда любая такая функция может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд: $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m Y_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}} z)$, где

$$A_m = \frac{\int_0^a f(z) Y_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}} z) z dz}{\|Y_n\|^2}, \quad \|Y_n\|^2 = \frac{a^2}{2} (Y_n'(\sqrt{\lambda_m^{(n)}} a))^2.$$

16. ЗУЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1^{го} рода. Вид СФ.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & 0 \leq z \leq a, \\ u|_{z=a} = 0, \\ |u(0)| < \infty, & u \neq 0; \end{cases} \quad u_{nk}(z, \varphi) = Y_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$
 $k = 1, 2, \dots$

$$\lambda_k^{(n)} - k\text{-й корень уравнения } Y_n(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

17. ЗУЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 2^{го} рода. Вид СФ.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & 0 \leq z \leq a, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a} = 0, \\ |u(0)| < \infty, & u \neq 0; \end{cases} \quad u_{nk}(z, \varphi) = Y_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$
 $k = 1, 2, \dots$

$$\lambda_k^{(n)} - k\text{-й корень уравнения } Y_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

18. Характеристическое уравнение для определения СЗ ЗУЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий смешанного типа $(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \beta u)|_{z=a} = 0, |\alpha| + |\beta| \neq 0$:

$$\alpha \sqrt{\lambda} Y_n'(\sqrt{\lambda} a) + \beta Y_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

19. Общая формула для квадрата нормы СФ заданы на СЗ (5) для цилиндрических функций.

$$\|u_{nk}\|^2 = \|Y_n\|^2 \|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{(\lambda_{kn}^{(w)})^2 - n^2}{a^2 h^2}\right) Y_n'^2(\sqrt{\lambda_{kn}^{(w)}} a) \cdot \varepsilon_n \pi$$

ГУ заданы так: $\left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu\right)\Big|_{z=a} = 0$; $\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$

20. СФ круга для граничных условий Дирихле и Неймана.

Дирихле: $u|_{z=a} = 0 \rightarrow u_{nk}(z, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_{kn}^{(w)}} z) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots \\ k=1, 2, \dots \end{matrix}$

$\lambda_{kn}^{(w)}$ - k-й корень ур-ния $J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$.

Неймана: $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=a} = 0 \rightarrow u_{nk}(z, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_{kn}^{(w)}} z) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots \\ k=1, 2, \dots \end{matrix}$

$\lambda_{kn}^{(w)}$ - k-й корень ур-ния $J_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0$.

21. Ур-ние для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. ФСР этого ур-ния.

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$$

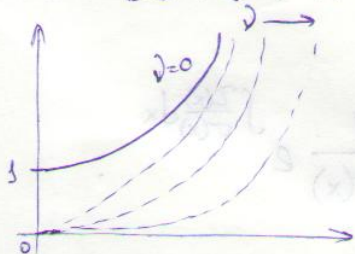
$\{I_\nu(x), K_\nu(x)\}$ - ФСР

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \{i^{-\nu} Y_\nu(ix)\} - \text{функция Уиндхельфа.}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1/2} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\} - \text{функция Макдональда.}$$

22. Определение функции Уиндхельфа. Её график.

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} - \text{функция Уиндхельфа.}$$

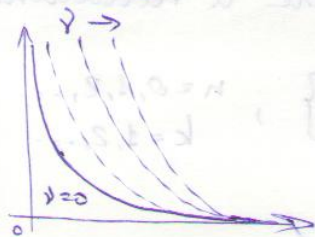


23. Асимптотическая формула при больших значениях аргумента для функции Инфрейда.

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

24. Определение функции Макдональда. Её график.

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) - \text{функция Макдональда.}$$



25. Асимптотическая формула для функции Макдональда.

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu \cdot i \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{i(ix)} \left\{ \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-3/2}) \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

26. Определение классических ортогональных полиномов.

Система $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных на отрезке $[a, b]$, наз. системой КОП, если они ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, а весовая функция $\rho(x)$ явл. решением дифференциального ур-ния Пурсона: $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$, $a < x < b$,

где $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условию: $x^m \sigma(x)\rho(x)|_a^b = 0$, $m = 0, 1, \dots$

Функция $\tau(x)$ - линейная функция вида $\tau(x) = Ax + B$, функция $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty, b \neq \infty, \\ x-a, & a \neq -\infty, b = +\infty, \\ b-x, & a = -\infty, b \neq +\infty, \\ 1, & a = -\infty, b = +\infty. \end{cases}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} e^{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx}$$

27. Теорема о нулях КОП: (7)

» КОП $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a, b]$.

28. Производные $p_n'(x)$ также являются КОП, заданными на отрезке $[a, b]$ и ортогональными с весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.

29. Ур-ние для КОП.

Если весовая функция удовлет. ур-нию Пурсона и на концах интервала (a, b) выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \rho(x)\sigma(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} \rho(x)\sigma(x) = 0, \text{ то}$$

ортогональный многочлен $p_n(x)$ явл. решением ур-ния:

$$\sigma(x)p_n'' + \tau(x)p_n' + \lambda_n p_n = 0, \text{ где } \lambda_n = -n\left(\tau' + \frac{\sigma''(n-1)}{2}\right)$$

30. Задача на СЗ для КОП на отрезке с условиями в особых точках.

$$\begin{cases} (\sigma(x)\rho(x)p_n'(x))' + \lambda p_n(x) = 0, & x \in [a, b], \\ |p_n(a)| < \infty, & |p_n(b)| < \infty. \end{cases}$$

31. Формула для СЗ ЗШЛ для КОП.

$$\lambda_n = -n\left(\tau' + \frac{\sigma''(n-1)}{2}\right)$$

32. Общая формула для КОП (общая ф-ла Родрига).

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \sigma^n(x)\rho(x) \right\}, \text{ где } C_n = \frac{n! A_n}{A_{nn}}, \text{ } A_{nm} = (-1)^n \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{k,m}.$$

33. Определение полиномов Якоби.

КОП, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, наз. полиномами Якоби и обозначаются $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

34. Формула Родрига для полиномов Якоби. (8)

$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$, поэтому:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\}.$$

35. Определение полиномов Лежандра.

КОП, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = 1$, наз. полиномами Лежандра и обозначаются $P_n(x)$. $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$.

36. Задача на СЗ для полиномов Лежандра. Выражение СЗ для полиномов Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + \lambda y = 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

$$\lambda_n = n(n+1).$$

37. Выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n a_n n! C_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

38. Определение полиномов Лагерра. Задача, решениями которой они являются.

КОП, заданные на отрезке $[0, \infty]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, наз. обобщёнными полиномами Лагерра и обозначаются $L_n^\alpha(x)$. Если $\alpha = 0$, то полиномы наз. просто полиномами Лагерра и обозначаются $L_n(x)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^\alpha e^{-x} y = 0, \\ |y(0)| < \infty, |y(\infty)| < \infty. \end{cases}$$

39. Определение полиномов Эрмита. Задача, решением которой они являются.

КОП, заданные на отрезке $[-\infty, +\infty]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$, наз. полиномами Эрмита и обозначаются $H_n(x)$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda e^{-x^2} y = 0, \\ |y(\pm\infty)| < \infty. \end{cases}$$

40. Определение производящей функции КОП.

Ф-ция $\Psi(x, z)$, разложение которой в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид: $\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{c_n n!} z^n$, где

$\{P_n(x)\}$ - система КОП, наз. производящей функцией КОП.

41. Выражение производящей функции полиномов Лежандра.

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2-2zx}}$$

42. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой или полной? Сформулируйте соотв. утв.

Система КОП является полной. Полнота является следствием замкнутости. Система полиномов Лежандра является замкнутой и полной на отрезке $[-1, 1]$.

Система $\%_2$ (ортогональных) ф-ций $\{P_n(x)\}$ наз. полной, если не существует непр. ф-ции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем ф-циям данной системы.

Система $\%_2$ ф-ций $\{P_n(x)\}$ наз. замкнутой на (a, b) , если любую непр. ф-цию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности, при помощи ЛК ф-ций $\{P_n(x)\}$. Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0 \exists S_n = \sum_{i=1}^n c_i P_i : \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon$.

43. Теорема Стеклова для полиномов Лежандра: (10)

„Всякая дважды диф-мая на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$, где $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, n=0, 1, \dots$ “

44. Определение присоединённых функций Лежандра:

Присоединёнными функциями Лежандра наз. функции, определённые соотношениями: $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

45. Задача на СЗ для присоединённых функций Лежандра.

СЗ присоединённых функций Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m}{1-x^2} \right) y = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

$$\lambda_n = n(n+1).$$

46. Выражение квадрата нормы для ПФЛ.

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

47. Является ли система ПФЛ замкнутой и полной? Сформулируйте соотв. утв.

Система ПФЛ явл. замкнутой и полной в $L_2[-1, 1]$.

$L_2[-1, 1]$ — пр-во функций, определённых на $[-1, 1]$, таких, что интеграл $\int_{-1}^1 f^2(x) dx$ существует (конечен).

48. Теорема Стеклова для ПФЛ:

„Всякая непр. и дважды диф-мая на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)$, обращающаяся в нуль на его концах, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x), \text{ где } f_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_n^{(m)}(x) dx, n=0, 1, \dots, m=0, 1, \dots, n.$$

49. Определение сферических функций. Задача на СЗ для сферических функций. (11)

Сферические функции — ограниченные на единичной сфере решения ур-ния:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \\ Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi), \\ |Y(0, \varphi)| < \infty, |Y(\pi, \varphi)| < \infty; \end{cases}$$

обладающие непрерывными до 2^{го} порядка производными.

50. Явл. ли система сферических функций замкнутой или полнотой? Сформулируйте соотв. утв.

Система сферических функций явл. замкнутой на единичной сфере $\Sigma: \{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, т.к. любая функция $f(\theta, \varphi)$, имеющая непр. вторые производные, может быть аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций. Из замкнутости системы сфер. функций вытекает её полнота.

51. Условие ортогональности для сферических функций.

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta, \varphi) Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = 0, \text{ где } 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2.$$

52. Выражение квадрата нормы для сферических функций.

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \|P_n^{(m)}\|^2 \|\Phi_n(\varphi)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \pi \varepsilon_m, \text{ где } \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m=0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

$$n=0, 1, 2, \dots, m=0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

53. Теорема Стеклова для сферических функций:

„Всякая непрерывная и дважды непрерывно диф-мая на единичной сфере функция $f(\theta, \varphi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \int_{nm} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi), \text{ где } \int_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

54. Определение шаровых функций. Явл. ли шаровые функции (12)
 СФ соотв. задаче на СЗ?

Шаровые функции — ограниченные частные решения ур-ния Лапласа в шаре: $\Delta u = 0, 0 \leq r \leq a$. Явное выражение для ШФ:

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

ШФ не явл. СФ соотв. задаче на СЗ, т.к. СФ шара — это функции вида: $u_{lm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} r \right) Y_n^{(m)}(r, \theta, \varphi)$, где

$\mu_k^{(n+1/2)}$ — k -й корень ур-ния $\alpha \mu J'_{n+1/2}(\mu) + (\beta \alpha - \frac{\alpha}{2}) J_{n+1/2}(\mu) = 0$ при фикс. n .

55. Задача на СЗ для шара в случае линейных граничных условий различного типа:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0$$

$$u|_{r=a} = 0 \quad \leftarrow \text{Дирихле}$$

Неймана \rightarrow

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

$$J_{n+1/2}(\mu) = 0 \rightarrow \mu_k^{(n+1/2)} \\ \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} \right)^2$$

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0 \rightarrow \mu_k^{(n+1/2)} \\ \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} \right)^2$$

56. СФ шара для граничных условий Дирихле и Неймана.

$$u_{lm} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} r \right) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\text{Дирихле: } \mu_k^{(n+1/2)} \text{ из } J_{n+1/2}(\mu) = 0;$$

$$\text{Неймана: } \mu_k^{(n+1/2)} \text{ из } \mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0.$$

57. Что такое характеристики ур-ния в частных производных второго порядка в случае 2^x переменных? (13)
 \neq линейное от-но старших производных ур-ние 2^{20} порядка:
 ка: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$.

Ур-ние $a_{11}(dy)^2 + 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0$ наз. характеристическим для 1^{20} ур-ния, а интегралы этого ур-ния наз. характеристиками.

58. Определение ур-ний эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае 2^x переменных и их канонические формы.

Ур-ние $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ в точке M наз. ур-нием:

а) гиперболического типа, если в т. M : $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

б) параболического типа, если в т. M : $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;

$$u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

в) эллиптического типа, если в т. M : $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$;

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

59. Определение ур-ний параболического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

пусть $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ - точка области D . Построим квадратичную форму: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j$.

Невырожденным линейным преобразованием $S_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} t_j$, $i = \overline{1, n}$, $\det \|A_{ij}\| \neq 0$ квадратичная форма всегда может быть приведена к каноническому виду: $\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i^2$

При этом согласно знаку инерции число положительных, (14) отрицательных и равных нулю коэф-тов λ_i в канонической форме квадратичной формы явл. инвариантом и не зависит от линейного преобразования.

Если в т. М. квадратичная форма в канонической форме имеет хотя бы один из коэф-тов $\lambda_i = 0$, то исходное ур-ние наз. ур-нием параболического типа.

Канон. форма:
$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm \lambda_i x_i^2) + \Phi = 0 \quad (m \geq 0).$$

60. Определение ур-ния гиперболического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

Если в т. М. все $\lambda_i \neq 0$, но существуют как положительные, так и отрицательные λ_i , то ур-ние наз. ур-нием гиперболического типа.

Канон. форма:
$$\lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + \Phi = 0.$$

61. Определение ур-ния эллиптического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

Если в т. М. все коэф-ты λ_i одного знака, то ур-ние наз. ур-нием эллиптического типа.

Канон. форма:
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \Phi = 0.$$

62. Определение корректно поставленной задачи по Адамару.

Математическая задача называется поставленной корректно, если:

- 1) решение задачи существует;
- 2) решение задачи единственно;
- 3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных, т.е. устойчиво.

63. Примеры постановки начально-краевых задач для ур-ния теплопроводности и колебаний. Определение классических решений этих задач.

Ур-ние колебаний:

(15)

Найти решение ур-ния $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $t > 0$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{aligned} \right\} t > 0 \quad \left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l.$$

Пусть задана ~~задача~~ ограниченная область D с кусочно-шаговой границей S . Начально-краевая задача для ур-ния колебаний в области D замыкается в определении в цилиндре $\bar{Q}_\infty = \bar{D} \times [0, \infty)$ функции $u(M, t)$, удовлетворяющей в Q_∞ ур-нию колебаний, начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t), & (M, t) \in Q_\infty, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \quad u_t|_{t=0} = \psi(M), \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = \mu(P, t) \Big|_{P \in S}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0. \end{cases}$$

Классическим решением НКЗ для ур-ния колебаний явл. функция $u(M, t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре \bar{Q}_∞ , имеющая непрерывные производные второго порядка в открытом цилиндре Q_∞ , удовлетворяющая в Q_∞ ур-нию, начальным и граничным условиям.

Ур-ние теплопроводности:

Краевая задача для ограниченного стержня.

Найти решение ур-ния $u_t = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 < x < l \\ u(0, t) &= \mu(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Пусть задана отр. обл. D с кусочно-шаговой границей S . НКЗ для ур-ния теплопроводности в обл. D замыкается в определении в цилиндре $\bar{Q}_\infty = \bar{D} \times [0, \infty)$ функции $u(M, t)$, удовл. в Q_∞ ур-нию теплопроводности, начальным и граничным условиями:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), M \in \Omega, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), M \in \Omega, \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = \mu(P, t) \Big|_{P \in S}, |\alpha| + |\beta| \neq 0. \end{cases}$$

Классическим решением ИКЗ для ур-ния теплопроводности явл. ф-ция $u(M, t)$, непр. вместе с 3-ми производными в замкн. цилиндре \bar{Q}_∞ , имеющая непр. производные 1-го по-рядка по t и второго по M в открытом цилиндре Q_∞ , удовл. в Q_∞ ур-нию, начальным и граничным условиям.

64. Общая схема метода разделения переменных (метода Фурье). К решению каких задач можно свести решение об-щей ИКЗ в линейном случае (редукция полной задачи)?

Метод Фурье:

пусть задана следующая задача:

найти решение ур-ния $\rho P_t[u] = Lu$, удовл. гр. и нач. условиям:

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(M), k=0, 1, \dots, l-1.$$

Тогда решение этого ур-ния можно получить в виде про-изведения $u(M, t) = v(M)T(t)$, причём ф-ции $v(M)$ и $T(t)$ опреде-ляются из вспомогательных задач:

$$\begin{cases} P_t(T) + \lambda T = 0, \\ \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(M). \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Lv + \lambda v = 0, v(M) \neq 0, M \in \Omega, \\ \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v \right) \Big|_S = 0; \end{cases}$$

Полная постановка ИКЗ имеет вид:

$$\begin{cases} \rho P_t[u] = Lu + f, M \in \Omega, \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = \mu(P, t), P \in S, \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(M), k=0, 1, \dots, l-1 \end{cases}$$

В силу линейности решение этой за-дачи можно свести к сумме решений трёх задач:

- 1) Задачи для однородного ур-ния с неодн. начальным и однор. граничными условиями ($f \equiv 0, \mu = 0, \varphi_k \neq 0$);
- 2) Задачи для однородного ур-ния с однород. ИУ и неоднор. ГУ ($f \equiv 0, \mu \neq 0, \varphi_k = 0$).

2) Задачи для неоднородного ур-ния с одноп. НУ и одноп. ГУ (17)
 $\Gamma U (\xi \neq 0, \mu = 0, \varphi_k = 0)$.

65. Постановка ЗЦЛ для оператора Лапласа с ГУ Дирихле на границе S области D . Основные св-ва СФ и СЗ этой задачи.

ЗЦЛ: Найти значения λ , при которых \exists нетривиальные решения ур-ния, удовл. ГУ Дирихле:
$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_S = 0; \end{cases}$$

Св-ва СФ и СЗ:

- 1) \exists бесконечно много СЗ $\{\lambda_n\}$ и СФ $\{u_n\}$; СЗ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастают. Каждому СЗ соответствует лишь конечное число СФ.
- 2) при СЗ задачи Дирихле положительны: $\lambda_n > 0, \forall n$.
- 3) СФ ортогональны м/у собой: $\int u_n(M) u_m(M) dV = 0, n \neq m$.

4) теорема разложимости Стеклова:

"Произвольная дважды непр-но диф-ная в D функция $f(M)$, удовлетворяющая однородному ГУ, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по СФ данной задачи:

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(M), \text{ где } f_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_D f(M) u_n(M) dV.$$

66. Первая и вторая формулы Грина. Условия их применимости.

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ - функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри замкнутой области $T + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T .

Тогда имеет место:

а) 1^я ф. Грина:
$$\int_T u \Delta v dV = \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV,$$

где $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ - производная по направлению внешней нормали.

Можно записать и несколько иначе:

$$\int_T u \Delta v dV = \int_{\Sigma} k u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_T (k \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u + q u v) dV,$$
 где k, q - непр. в замкнутой области $T + \Sigma$ функции, причём $k(M)$ - непрерывно диф-на в открытой области T .

$$\delta) \text{ 2}^{\text{я}} \text{ ф. Грина: } \int_T (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (18)$$

Можно записать несколько иначе:

$$\int_T (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\Sigma} k \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \text{ где } k, q - \text{непр. в замкн. об-}$$

ласти $T + \Sigma$ ф-ции, причём $k(M)$ - непрерывно диф-ма в открытой области T .

67. Третья формула Грина для 2D- и 3D-случаев.

$$\underline{3D}: \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0}} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Delta u}{R_{M_0}} dV = \begin{cases} u(M_0), M_0 \in D, \\ u(M_0)/2, M_0 \in S, \\ 0, M_0 \notin D+S. \end{cases}$$

Здесь M_0 - фиксированная точка области D .

$$\underline{2D}: \frac{1}{2\pi} \int_G \left(\ln \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{M_0}} \right) dl - \frac{1}{2\pi} \int_D \Delta u \ln \frac{1}{R_{M_0}} d\sigma =$$

$$= \begin{cases} u(M_0), M_0 \in D, \\ u(M_0)/2, M_0 \in G, \\ 0, M_0 \notin D+G. \end{cases}$$

68. Определение гармонических ф-ций. Примеры. Является ли гармоническая ф-ция бесконечно диф-мой?

Ф-ция $u(M)$ наз. гармонической в области T , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2^{го} порядка включительно и удовлетворяет в этой области ур-нию Лапласа.

Пример: $u(z, \varphi) = \frac{z}{a} \sin \varphi$ - гарм. ф-ция в круге $0 \leq z \leq a$, т.к. имеет непр. частные производные любого порядка и удовлетворяет в указанной области ур-нию Лапласа $\Delta u = 0$ с граничным условием $u(z, \varphi)|_{z=a} = \sin \varphi$.

Гармоническая ф-ция явл. ∞ -но диф-мой, она имеет в области T производные всех порядков. Это следует из 3^{ей} ф. Грина, т.к. при $M_0 \in D$ поверхностные интегралы явл. собственными и их можно дифференцировать по координатам любое число раз.

69. Теорема Гаусса и теорема о среднем для гармонических функций. (19)

Т. Гаусса: „Если $u(M)$ — функция, гармоническая в области T , ограниченной поверхностью Σ , то имеет место соотношение:

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \text{ где } \Sigma - \text{любая гладкая замкн. поверхность, целиком принадлежащая области } T.$$

Т. о среднем: „Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T , а M_0 — какая-нибудь точка, лежащая внутри области T , то имеет место формула: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a} u dS$, где Σ_a — сфера радиуса a с центром в т. M_0 , целиком лежащая в обл. T “.

70. Принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.

Принцип максимума: „Если функция $u(M)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$ удовл. уравн. $\Delta u = 0$ внутри T , то максимальное и минимальное значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ “.

Принцип сравнения: „Если $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны внутри T и если $u(M) \leq v(M)$ на границе Σ , то $u(M) \leq v(M)$ всюду внутри T “.

71. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для уравн. Лапласа в случае Γ Дирихле. Каким методом она доказывается?

„Внутренняя задача Дирихле не может иметь двух различных классических решений“.

Это утверждение д-тся от противного. Построив функцию разности двух классических решений, следует показать, что она тождественно равна нулю.

72. Теорема единственности решения внутренней краевой задачей для ур-ния Лапласа в случае ГУ 3-го рода. Каким методом она доказывается?

„3^я краевая задача для ур. Лапласа:
$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), M \in D, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = f(M); \end{cases}$$
 где $h \neq 0$, причём $h = h(P) > 0$ при всех $P \in S$, не может иметь двух различных классических решений.“

Идея д-ва: показать, что краевая задача
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = 0; \end{cases}$$
 имеет только нулевое решение, используя 1^ю формулу Грина.

73. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для ур-ния Лапласа в случае ГУ 2-го рода?

Нет, не имеет.

$$\neq 2^{\text{ю}} \text{ КЗ: } \begin{cases} \Delta u = -F(M), M \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f(M); \end{cases}$$

Если предположить существование двух различных классических решений этой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$, то для их разности $u = u_1 - u_2$ будем иметь $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$. Полагая в 1^{ей} ф-ле Грина $v = u$, получим $\text{grad} u = 0 \Rightarrow u(M) = \text{const}$, поэтому классическое решение 2^{ой} КЗ не единственно и определяется с точностью до произвольной постоянной.

74. Определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трёх переменных.

а) Гармоническая функция 3^х переменных $u(M) \equiv u(x, y, z)$ наз. регулярной на бесконечности, если $|u| \leq \frac{A}{z}$, $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{z^2}$, $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{A}{z^2}$, $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \leq \frac{A}{z^2}$ при достаточно большом $z \gg z_0$.

б) Функция 2^х переменных $u(M) \equiv u(x, y)$ наз. регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

75. Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерном случае. Каким методом она доказывается?

„Внешняя 1^я КЗ для гармонических функций с 3^{ми} независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности.“

76. Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

„Внешняя 1^я КЗ для гармонических функций с 2^{ми} независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности.“

Идея д-ва: допустим существование 2^х различных решений $u_1(M)$ и $u_2(M)$ и их разность $u = u_1 - u_2$. $u(M)$ можно параметризовать функцией $u_{R_1} = N \frac{\ln(R_{\text{max}}/R)}{\ln(R_1/R)}$. Если неограниченно увеличивать R_1 , то $u_{R_1}(M) \rightarrow 0$ при $R_1 \rightarrow \infty$, откуда следует, что $u(M) = 0$.

77. Имеет ли место единственность решения внешней КЗ с ГУ Неймана для уравнения Лапласа в двумерном и трёхмерном случаях?

В 2D-случае: нет. Решение внешней задачи Неймана (если оно \exists) определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

В 3D-случае: да. Неединственное решение имеет только внутренняя задача Неймана.

78. В чём состоит различие в постановках и св-вах решений внутренних и внешних КЗ для уравнения Лапласа в двумерном и трёхмерном случае?

В том

79. Определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерном случае и вид решения с помощью функции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ u|_S = f; \end{cases}$ (22)

Функция $G(M, P)$ наз. функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D , если удовлетворяет следующим условиям:

а) $G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v$, где v - гармоническая в D функция;

б) $G(M, P)|_{P \in S} = 0$.

$$u(M) = - \int_D \int \frac{\partial G}{\partial n_P} dS_P + \int_D G F dV.$$

80. Определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и вид решения с помощью функции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ u|_{\Gamma} = f; \end{cases}$

Функция $G(M, Q)$ наз. функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D на плоскости, если удовлетворяет следующим условиям:

а) $G(M, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MQ}} + v$, где v - гармоническая в D функция;

б) $G(M, Q)|_{Q \in \Gamma} = 0$, где Γ - замкн. контур, граница D .

$$u = - \int_{\Gamma} \int \frac{\partial G}{\partial n} dl + \int_D G F d\sigma.$$

81. Определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трёхмерном случае и вид решения задачи с помощью функции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S = f; \end{cases}$

Функция $G(M, Q)$ наз. функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в области D , если:

а) $G(M, Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, где v - гармоническая в D функция;

б) $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 - площадь пов-ти S .

$$u(M) = \int_S f G dS + \frac{1}{S_0} \int_S u dS + \int_D G F dV. \quad (23)$$

82. Метод функций Грина решения краевых задач для уравнения Лапласа.

83. Определение объёмного потенциала. Использование объёмного потенциала при решении уравнения Пуассона.

Интеграл $V(M) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}} dV_Q$, где $\rho(Q)$ — ограниченная интегрируемая функция, определённая в области D , наз. объёмным потенциалом.

Если $\rho(M)$ интегрируема с квадратом, то $V(M)$ является обобщённым решением уравнения Пуассона $\Delta V(M) = -4\pi\rho$.

84. Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Уч. интеграл вида $V(M) = \int_D F(M, Q) f(Q) d\tau_Q$, где $F(M, Q)$ — функция, неограниченная при $M=Q$ и непрерывная по M , а $f(Q)$ — ограниченная функция. Этот интеграл наз. равномерно сходящимся в т. M_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall M \in K_{\delta(\varepsilon)}^{M_0} \forall Q \in D_{\delta(\varepsilon)} : \left| \int_{D_{\delta(\varepsilon)}} F(M, Q) f(Q) d\tau_Q \right| \leq \varepsilon$.
Здесь $K_{\delta(\varepsilon)}^{M_0}$ — шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром M_0 .

85. Определение потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трёхмерном случаях.

а) Потенциалом простого слоя в трёхмерном случае наз. интеграл вида $V(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}$, где S — нек. пов-ть; $\mu(P)$ — функция, заданная на пов-ти S ; функция μ наз. плотностью потенциала простого слоя.

В двумерном случае потенциал простого слоя имеет вид: $V(M) = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P$, где C — некоторая кривая.

б) Потенциалом двойного слоя в трёхмерном случае наз. (24) интеграл вида: $W(M) = - \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$, где S - двусторонняя пов-ть, \vec{n}_P - внешняя нормаль к пов-ти S в точке P (в том случае, когда пов-ть S незамкнута, внешняя нормаль выбирается произвольно), $\nu(P)$ - ф-ция, заданная на пов-ти S ; ф-ция ν наз. плотностью потенциала двойного слоя.

$W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} dS_P$, где φ - угол $\angle \vec{n}_P, \vec{PM}$ между внутренней нормалью к пов-ти S в точке P и вектором \vec{PM} .

В двумерном случае потенциал двойного слоя имеет вид: $W(M) = - \int_G \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P = \int_G \nu(P) \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} dl_P$, где \vec{n}_P - внешняя нормаль к кривой G в точке P , φ - угол $\angle \vec{n}_P, \vec{PM}$ между внутренней нормалью в точке P и вектором \vec{PM} . В случае незамкнутой кривой направление внешней нормали выбирается произвольно.

86. Определение поверхности Липшува.

Пов-ть S наз. пов-тью Липшува, если выполнены следующие условия:

1) В каждой точке пов-ти S существует определённая нормаль (или касательная м-ть).

2) \exists такое число $d > 0$, что прямые, параллельные нормали в т. P пов-ти S , пересекают не более одного раза часть пов-ти S , лежащую внутри шара радиуса d с центром в т. P .

3) Угол $\chi(M, P) = (\vec{n}_M, \vec{n}_P)$ \angle нормальми в точках M и P пов-ти S удовл. условию: $\chi(M, P) \leq A R_{MP}^\delta$, где $A, \delta = \text{const}$, $A > 0$, $0 < \delta \leq 1$. При этом т. M принадлежит части пов-ти S , находящейся внутри сферы радиуса d с центром в т. P .

87. Теорема о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.

» Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью $|\mu(P)| \leq N$, заданной на гладкой пов-ти S , явл. непрерывной ф-цией во всем пр-ве. Гладкость пов-ти определяется наличием непрерывной нормали в каждой точке.

88. Теорема о существовании потенциала двойного слоя. (25)

„Потенциал двойного слоя $W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} dS_P$ с непрерывной и ограниченной плотностью $|\nu| \leq C$ на пов-ти S существует, т.е. явл. сходящимся $\forall \epsilon$ интегралом при $M \in S$.“

89. Претерпевает ли разрыв при переходе $\forall z$ несущую пов-ть потенциал простого слоя?

Нет, т.к. потенциал простого слоя явл. непрерывной функцией во всем пр-ве (по п. 87).

90. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей пов-ти?

Формула скачка потенциала двойного слоя при переходе $\forall z$ несущую пов-ть.

Потенциал двойного слоя $W(M_0) = -\gamma_0 \int_S \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} dS_P$ имеет значение:

а) $4\pi\gamma_0$, если M_0 лежит внутри пов-ти S ;

б) $2\pi\gamma_0$, если M_0 лежит на пов-ти S ;

в) 0, если M_0 лежит снаружи пов-ти S .

Потенциал двойного слоя в некоторой т. P_0 , лежащей на пов-ти S , явл. разрывной функцией, для которой имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} W_0^{\circ}(P_0) &= W_S^{\circ}(P_0) + 2\pi\nu(P_0) \\ W_{\text{н}}^{\circ}(P_0) &= W_S^{\circ}(P_0) - 2\pi\nu(P_0) \end{aligned} \right\},$$
 где $W_0^{\circ}(P_0)$ ($W_{\text{н}}^{\circ}(P_0)$) — предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к т. P_0 с внутренней (наружной) стороны.

Ф-ла скачка потенциала: $W_0^{\circ}(P_0) - W_{\text{н}}^{\circ}(P_0) = 4\pi\nu(P_0)$.

91. Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для ур-ния Лапласа к союзным интегральным ур-ниям Фредгольма.

а) Внутренняя задача Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u|_S = f; \end{cases}$
(S -пов-ть Лемнуова.)

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Внешняя задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n_e} \right|_S = f; \end{cases} \quad u \rightarrow 0 \text{ на } \infty. \quad (26)$

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -\frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S$$

Итак, инт. ур-ния для внутр. задачи Дирихле и для внеш. задачи Неймана явл. связанными инт. ур-ниями, и исследование этих двух задач следовало бы вести одновременно.

б) Внешняя задача Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \text{ и регулярна} \\ u|_S = f; \end{cases} \quad \text{на } \infty.$

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{R_{P_0 O}} - f(P_0) \right\}, \quad P_0 \in S, \quad \alpha = \text{const.}$$

Внутренняя задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n_e} \right|_S = f; \end{cases}$

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Итак, инт. ур-ния для внеш. задачи Дирихле и для внутр. задачи Неймана явл. связанными инт. ур-ниями, и исследование этих двух задач можно вести одновременно.

92. Теорема существования решения внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа. Метод еѐ док-ва.

„Внутр. задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D, \\ u|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в области D , ограниченной пов-тью S , имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной ф-ции $f(M)$.“

Идея д-ва: задача сводится к инт. ур-нию Фредгольма. (27)

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0$$
: Далее док-тя, что это ур-ние (уже однородное соотношение) имеет только тривиальное решение методом от противного.

93. Теорема существования решения внешней задачи Неймана для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае. Метод её док-ва.

„Внешняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D_e, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции $f(M)$.”

Идея док-ва: задача сводится к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -\frac{1}{2\pi} f(P_0)$$
. Разрешимость задачи сводится к вопросу о разрешимости инт. ур-ния, которое, согласно I т. Фредгольма имеет и притом! решение при любой непр. ф-ции f , поскольку соотв. однородное ур-ние (см. п. 92) имеет только тривиальное решение.

94. Теорема существования решения внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа. Метод её док-ва.

„Внутр. задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в обл. D имеет классическое решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной, при любой непр. ф-ции $f(M)$, удовл. ур-нию: $\int_S f(P) dS = 0$.”

Идея док-ва: —//—

95. Теорема существования решения внешней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа. Метод её док-ва.

„Внешняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D_e, \\ u|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции f .”

Метод дек-ва: решение ищется параллельно с союзным (28) инт. ур-нием для внутр. задачи Неймана.

96. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа. Откуда оно следует?

~~Внутр. однородная задача $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S = f; \end{cases}$ достаточно нека-~~
~~краевая задача $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0; \end{cases}$ имеет только нулевое решение.~~

$\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S = f; \end{cases}$ Ф-ла Гаусса: $\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow \int_S f(P) dS = 0.$
 Это явл. необходимым условием разрешимости внутр. задачи Неймана.

97. Потенциал Робена. Его физический смысл.

Потенциал Робена определяется интегралом:

$$V(M) = \int_S \frac{\mu_0(P)}{R_{MP}} d\sigma_P \text{ в } D + \Sigma, \text{ где } D - \text{область, ограниченная}$$

замкнутой пов-тью S , а $\mu_0(P)$ - сф

ур-ние: $2\pi\mu(P_0) + \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} d\sigma_P = 0, P_0 \in S.$

Физ. смысл: это потенциал, создаваемый зарядами на проводящей пов-ти, а его плотность есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой пов-ти.

98. Фундаментальное решение ур-ния Гельмгольца в двумерном и трёхмерном случаях.

а) двумерной случай: ур. Гельмгольца: $\Delta_2 u + \epsilon u = 0$

при $\epsilon = k^2 > 0$: $H_0^{(1)}(kR_{mm_0}), H_0^{(2)}(kR_{mm_0}), N_0(kR_{mm_0})$;

при $\epsilon = -\chi^2 < 0$: $K_0(\chi R_{mm_0}).$

б) трёхмерный случай: $\Delta u + cu = 0$ (29)

при $c = k^2 > 0$: $\frac{e^{ikR_{MPO}}}{R_{MPO}}$, $\frac{e^{-ikR_{MPO}}}{R_{MPO}}$, $\frac{\cos kR_{MPO}}{R_{MPO}}$;

при $c = -\chi^2 < 0$: $\frac{e^{-\chi R_{MPO}}}{R_{MPO}}$.

99. Определение поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для ур-ния Гельмгольца.

$V(M) = \int_S \mu(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$ - потенциал простого слоя.

$W(M) = - \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$ - потенциал двойного слоя.

100. В чём отличие принципа максимума для ур-ния Лапласа и Гельмгольца?

Принцип максимума для ур-ния Гельмгольца:

„Решение ур-ния $\Delta u - \chi^2 u = 0$, определённое и непрерывное в замкнутой области $D \cup S$, не может достигать во внутренних точках области D положительных максимальных и отрицательных минимальных значений.“

Принцип максимума для ур-ния Лапласа:

„Если ф-ция $u(M)$, определённая и непр. в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяет ур-нию $\Delta u = 0$ внутри T , то максимальное и минимальное значения ф-ции $u(M)$ достигаются на пов-ти Σ .“

101. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для ур-ния Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

1. Первая КЗ для ур-ния Гельмгольца $\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = 0, M \in \Omega, \\ u|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$

не может иметь более одного.

2. Вторая и третья КЗ для ур-ния Гельмгольца (30)
 $\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = 0, M \in D, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ не могут иметь более одного классического решения при $h(P) \geq 0$.

102. Принцип максимума и принцип сравнения для ур-ния параболического типа.

Принцип максимума:

„Если функция $u(M, t)$, определённая и непрерывная в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0, T]$, удовлетворяет ур-нию

$$\rho(M)u_t = \underbrace{\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u)}_{L[u]} + f(M, t), M \in D, t \geq 0,$$

то максимальное и минимальное значения функции $u(M, t)$ достигаются или в начальный момент, или в точке границы $P \in S$:

$$M = \max \{ u(M, 0), u(P, t), M \in \bar{D}, P \in S, t \in [0, T] \}.$$

Принцип сравнения:

„Пусть $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ — два классических решения ур-ния теплопроводности $\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) + f(M, t), M \in D, t \geq 0$, непрерывных в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0, T]$.

а) Если имеют место соотношения:

$$\begin{cases} u_1(M, 0) \leq u_2(M, 0), M \in \bar{D}, \\ u_1(P, t) \leq u_2(P, t), P \in S, t \in [0, T]; \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(M, 0) \leq u_2(M, 0), M \in \bar{D}, \\ u_1(P, t) \leq u_2(P, t), P \in S, t \in [0, T]. \end{cases}$$

то $u_1(M, t) \leq u_2(M, t)$ во всем цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0, T]$.

б) Если имеют место соотношения:

$$\begin{cases} |u_1(M, 0) - u_2(M, 0)| \leq \varepsilon, M \in \bar{D}, \\ |u_1(P, t) - u_2(P, t)| \leq \varepsilon, P \in S, t \in [0, T]; \end{cases} \quad \text{то } |u_1(M, t) - u_2(M, t)| \leq \varepsilon, M \in \bar{D}.$$

103. Теорема единственности и теорема устойчивости решения внутренней НКЗ Дирихле для ур-ния параболического типа. Метод их док-ва.

Т. единственности: „Внутренняя НКЗ Дирихле:

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) + f(M,t), \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in D, \\ u(P,t) = \mu(P,t), P \in S, t \in [0, T], \\ \varphi(P) = \mu(P,0), P \in S; \end{cases}$$

может иметь только одно классическое решение." Док-во проводится от противного. (31)

Устойчивости: „Классическое решение задачи“

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) + f(M,t), \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in D, \\ u(P,t) = \mu(P,t), P \in S, t \in [0, T]; \end{cases}$$

устойчиво по начальным и граничным значениям в равномерной норме.

104. Теорема существования классического решения ИКЗ Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.

„Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, имеет на нём кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи“

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t > 0; \end{cases}$$

представимое рядом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, n=1,2,\dots$

105. Функция Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чём её физ. смысл?

общий вид:

$$\begin{cases} G(M,Q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q), t \geq 0, \\ G(M,Q,t) \equiv 0, t < 0; \end{cases}$$

где $\{v_k\}$ — СФ отрезка, λ_k — СЗ отрезка ($n=0,1,\dots$)

Для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} G(M,Q,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi, t \geq 0, \\ G(M,Q,t) \equiv 0, t < 0; \end{cases}$$

Физ. смысл: температура тела D в точке M в момент времени t , если возбуждение тела производится мгновенным точечным источником, действующим в момент времени $t=0$ в точке Q .

106. Постановка начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Теорема единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Постановка задачи: Найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области $-\infty \leq x \leq +\infty, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), -\infty \leq x \leq +\infty, t \geq 0$, и нач. условию: $u(x, 0) = \varphi(x), -\infty \leq x \leq +\infty$;

Теорема единственности:

„Задача для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), -\infty \leq x \leq +\infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), -\infty \leq x \leq +\infty; \end{cases}$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\bar{\Omega}$.“
($\bar{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0, T]$)

107. Теорема существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

„Если $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой функция, то формула $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$ определяет при $(x, t) \in \bar{\Omega}$ классическое решение задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), x \in \mathbb{R}^1, \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$ “
(здесь $G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)$)

108. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Его св-ва и физический смысл.

$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ — функ. решение уравнения теплопроводности.

Св-ва: а) $G(x, \xi, t)$ определена при $t > 0$ и положительна $G(x, \xi, t) > 0, x, \xi \in \mathbb{R}^1$;

б) $G(x, \xi, t)$ удовл. по переменным x и t однородному уравнению теплопроводности $G_t = a^2 G_{xx}, (x, t) \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^1$.

в) $G(x, \xi, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-\xi)} d\xi = \delta(x, \xi)$. Значит, $G(x, \xi, t)$ на \mathbb{R}^1 явл. решением задачи Коши:

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, (x, t) \in \bar{\Omega}, \\ G(x, \xi, 0) = \delta(x, \xi), x, \xi \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

2) Принцип взаимности (св-во симметрии):

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z).$$

т.е. действие в точке (x, y, z) источника, находящегося в точке (ξ, η, ζ) , равно действию в точке (ξ, η, ζ) такого же источника, помещённого в точку (x, y, z) .

Функция $G(x, \xi, t)$ с физ. точки зрения представляет собой температуру в точке x в момент времени t , если в начальный момент $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется некоторое количество тепла $q > 0$. А т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) dx = 1$, то количество тепла на бесконечной прямой не изменяется с течением времени.

109. Что такое „парадокс бесконечной теплопроводности“? Чем его можно объяснить?

Из вида функции $G(x, \xi, t)$ следует, что температура точки бесконечной прямой, сколь угодно далеко расположенной от точки ξ , где находится источник, и в моменты времени, сколь угодно близкие к начальному моменту $t=0$, отлична от нуля. Это явление противоречит конечной скорости распространения тепла и носит название „парадокса ∞ -ной теплопроводности“. Указанный парадокс связан с недостаточной полнотой феноменологической физической модели, применяемой при выводе уравнения теплопроводности. Для построения более полной математической модели следует использовать дополнительные физические соображения, учитывающие, в частности, молекулярную структуру вещества.

110. Постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. В чём заключается „метод продолжения“ для построения решения НКЗ для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?

Постановка задачи: Найти орг. функцию $u(x, t)$, определённую в области $x > 0, t > 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x > 0, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \beta u(0, t) = \mu(t), \quad t > 0,$$

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Метод продолжения: требуется решить задачу на полупрямой: (34)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0, \\ |u(x, 0)| < M, & x > 0; \end{cases}$$

где ГУ имеют вид $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu(t)$ (Неймана) или $u(0, t) = \mu(t)$ (Дирихле). Тогда можно решить вспомогательную задачу, записав решение в виде суммы $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где $u_1(x, t)$ представляет вначале только НУ, а $u_2(x, t)$ — только ГУ.

Для функции $u_1(x, t)$, удовлетворяющей ур-нию, введём вспомогательную функцию $U(x, t)$, определённую на \mathbb{R}^1 , удовлетворяющую ур-нию и условиям:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0, \\ U(x, 0) = \psi(x); \end{cases} \text{ где } \psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \text{ (Дирихле),}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0, \\ U(x, 0) = \psi(x); \end{cases} \text{ где } \psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \text{ (Нейман).}$$

Тогда решение задачи для $u_1(x, t)$ удастся записать в виде:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 t} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

111. Ф-ция Грина для ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае ГУ Дирихле.

$$G_1(x, \xi, t) = G(x, \xi, t) - G(x, -\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}t} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right\}.$$

112. Ф-ция Грина для ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае ГУ Неймана.

$$G_2(x, \xi, t) = G(x, \xi, t) + G(x, -\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}t} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right\}.$$

113. Общий вид решения НКЗ для неоднородного ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае однородных ГУ.

Требуется решить задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0, \\ |u(x, 0)| < M, & x > 0; \end{cases}$$

где ГУ имеют один из видов:

a) $u(0, t) = 0$ (Дирихле): $u(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G_1(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$, где (35)

$$G_1(x, \xi, t-\tau) = G(x, \xi, t-\tau) - G(x, -\xi, t-\tau)$$

б) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ (Нейман): $u(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G_2(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$, где

$$G_2(x, \xi, t-\tau) = G(x, \xi, t-\tau) + G(x, -\xi, t-\tau)$$

в) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + hu(0, t) = 0$ (3^{го} рода):

$$u(x, t) = \int_0^\infty G_3(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^\infty G_3(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi \cdot d\tau$$
, где

$$G_3(x, \xi, t) = G(x, \xi, t) + G(x, -\xi, t) - 2h \int_0^\infty G(x, -\xi-\eta, -t) e^{-h\eta} d\eta.$$

114. Постановка начальной задачи для уравнения теплопроводности в пр-ве. Теорема единственности её решения.

Постановка задачи: Найти функцию $u(M, t)$, удовн. уравнению теплопроводности и нач. условию:
$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), & (M, t) \in \Omega_3, \\ u(M, 0) = \varphi(M), & M \in \mathbb{R}^3; \end{cases}$$

здесь $\Omega_3 = \mathbb{R}^3 \times (0, T] = \{(M, t) : M \in \mathbb{R}^3, t \in (0, T]\}$,

$$\bar{\Omega}_3 = \mathbb{R}^3 \times [0, T].$$

Теорема единств-ти: „Поставленная выше задача имеет лишь одно классическое решение, ограниченное в Ω_3 “.

115. Теорема существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пр-ве.

„Если функция $\varphi(M)$ непр. и огр. во всем трёхмерном пр-ве \mathbb{R}^3 , то ф-ла $u(M, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(M, Q, t) \varphi(Q) dV_Q$ определяет при $(M, t) \in \Omega_3$ классическое решение задачи Коши для уравн-ти в пр-ве:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), & (M, t) \in \Omega_3, \text{ при } f(M, t) \equiv 0. \text{ Здесь:} \\ u(M, 0) = \varphi(M), & M \in \mathbb{R}^3; \end{cases}$$

$$G(M, Q, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^3 \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t} \right).$$

116. Общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Принцип Даламбера. (36)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = \mu(t), & t > 0, \mu(0) = 0, \\ |u(x, t)| \leq C, & x > 0, t > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

Эта формула была построена с помощью интеграла Даламбера:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} W(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \text{ где } W(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4a^2 t}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Такой приём построения НКЗ с неодн. ГУ в виде интеграла Даламбера явл. частным случаем общего метода решения данного класса линейных НКЗ, известного под названием принципа Даламбера.

117. Теорема единственности решения общей НКЗ для уравнения колебаний. Метод её док-ва.

Задача:
$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - \rho u + f, & (M, t) \in Q_{\infty}, \\ u(M, 0) = \varphi(M), \\ u_t(M, 0) = \psi(M), & M \in \bar{D}, \\ \alpha(P) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P) u = \mu(P, t), & P \in S, t \in [0, \infty), |\alpha| + |\beta| \neq 0; \end{cases}$$

может иметь только одно классическое решение.

Идея док-ва: предположим \exists -ние $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ - решения.

$\neq v(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$. \neq вспомогательную функцию:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho v^2 + k \operatorname{grad}^2 v) dV. \text{ Оказывается, что } E(t) \equiv 0 \Rightarrow v(M, t) \equiv 0.$$

118. Теорема существования классического решения НКЗ для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных ГУ Дирихле.

„Пусть в задаче $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$ функция $\varphi(x) \in C^{(2)}[0, l]$ и имеет на $[0, l]$ кусочно-непрерывную третью производную, причём:

$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$; а функция $\psi(x) \in C^{(1)}[0, l]$ и имеет на $[0, l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда решение этой задачи существует и равно:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n \cos \frac{\lambda_n a t}{l} + \psi_n \frac{\sin \frac{\lambda_n a t}{l}}{\frac{\lambda_n a}{l}} \right\} \sin \frac{\lambda_n x}{l}, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \varphi_n \\ \psi_n \end{cases} = \frac{2}{l} \int_0^l \begin{cases} \varphi(\xi) \\ \psi(\xi) \end{cases} \sin \frac{\lambda_n \xi}{l} d\xi.$$

119. Определение функции влияния многомерного точечного источника (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n t)}{\lambda_n t} V_n(M) V_n(Q), \text{ где } V_n, \lambda_n - \text{СФ и СЗ ЗЩЛ:}$$

Явно: $G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n a} \sin \frac{\lambda_n x}{l} \sin \frac{\lambda_n \xi}{l} \sin \frac{\lambda_n a t}{l}$
(это суп.)

$$\begin{cases} L_n[V_n] + \lambda_n V_n = 0, & M \in \Omega, \\ N_P[V_n(P)] = 0, & P \in S; \\ \|V_n\| = 1. \end{cases}$$

120. Постановка начальной задачи для уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Найти функцию $u(x, t)$, определённую при $t \geq 0$ на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, удовл. уравнению и нач. условиям:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

121. Формула Даламбера.

Решение одномерного волн. уравнения: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), -\infty < x < +\infty, t > 0$, с нач. условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$ и $u_t(x, 0) = \psi(x), -\infty < x < +\infty$, имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

P.S. $u(x, t) = f_1(x-at) + f_2(x+at)$

122. В чём состоит метод распространяющихся волн?

Метод состоит в поиске решения ур-ния колебаний в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях: функция $u(x,t)$ ищется в виде суммы $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$, каждая из которых представляет неизменной профилей, перемещающийся вправо или влево по оси x .

123. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть функция $\varphi(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, а функция $\psi(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$. Тогда классическое решение задачи Коши:
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x); \end{cases}$$

существует и единственно, и определяется ф-лой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

124. Теорема устойчивости решения задачи Коши для ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть начальные ф-ции $\varphi_\alpha(x)$ и $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, двух задач Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_\alpha(x), \\ u_t(x,0) = \psi_\alpha(x); \end{cases} \quad \text{удовлетворяют условиям:}$$
$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и}$$
$$\int_a^b |\psi_1(z) - \psi_2(z)|^2 dz \leq \varepsilon^2 (b-a)$$

для любых конечных a и b ($a < b$). Тогда для решений этих задач при $t \in [0, T]$ выполняется нер-во: $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon(1+T), -\infty < x < +\infty, t \geq 0.$ ”

125. Что такое „характеристический треугольник“ на фазовой плоскости?

Выберем на фазовой плоскости фиксированную точку $M(x_0, y_0)$ и проведём $\frac{2}{3}$ кривые характеристики $x-at = x_0 - at_0$ и $x+at = x_0 + at_0$. Эти характеристики пересекут ось x соответственно в точках $P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$, значение ф-ции в т. $M(x_0, t_0)$ равно $u(x_0, y_0) = f_1(x_0 - at_0) + f_2(x_0 + at_0)$. Таким образом, значение ф-ции $u(x,t)$ в т. $M(x_0, t_0)$ определяется значениями ф-ций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках

$P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$ соответственно, являющиеся вершинами- (39)
 ми $\triangle MPQ$, образованного отрезками двух характеристик и от-
 резком оси x . Этот треугольник наз. характеристическим \triangle -ком
 точки $M(x_0, t_0)$.

126. В чём состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?

Для решения ур-ния колебаний интегрируем ур-ние колеба-
 ний по „характеристическому \triangle -ку“ (умножив предварительно
 на $1/2a$) и применяем к результату ф-лу Грина.

127. Общая формула решения начальной задачи для неодн.
 ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = f_1(x-at) + f_2(x+at) + \frac{a}{2} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

128. Теорема существования и единственности классического реше-
 ния неодн. ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть функция $f(x, t)$ непрерывно диф-ма при $-\infty < x < +\infty, t > 0$. То-
 га решение задачи существует, единственно, и определяется ф-лой:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \int_{\tau}^t f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

129. В чём состоит „метод продолжения“ построения решения НКЗ
 для ур-ния колебаний на полупрямой в случае однородных ГУ
 Дирихле и Кэймана?

В задаче Дирихле функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаютя нечётным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}, \text{ а в задаче Кэймана-} \\ \text{чётным образом:}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

и уже продолженные функции подставляются в ф-лу Даламбера.

130. Решение ИКЗ для однородного ур-ния колебаний на полу- (40) прямой в случае однородного НУ и неодн. ГУ Дирихле. Какими методами можно его получить?

Решение одномерного волнового ур-ния:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$$

$$\text{с одноп. НУ: } \left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

и неодн. ГУ: $u(0, t) = \mu(t), t > 0$, имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{x}{a}, \\ \mu(t - \frac{x}{a}), & t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Это можно получить, если искать функцию $u(x, t)$ в виде:

$$u(x, t) = f(x - at).$$

131. Постановка задачи Коши для ур-ния колебаний в 3-ве.

Найти функцию $u(M, t)$, удовл. ур-нию:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t), \quad (M, t) \in \Omega_3, \quad \Omega_3 = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$$

$$\text{и НУ: } \begin{cases} u(M, 0) = \varphi(M), \\ u_t(M, 0) = \psi(M). \end{cases}$$

132. Формула Кирхгофа.

Для решения ур-ния $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t), (M, t) \in \Omega_3$

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P} \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) - u \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} \frac{\partial u}{\partial t} \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) \frac{\partial R}{\partial n_P} \right\} dS_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Omega} \frac{f(M, t_0 - \frac{R_{M_0 M}}{a})}{R_{M_0 M}} dV_M, \quad \text{где } R = R_{M_0 P}, S - \text{ произв. замкнутая замкн. пов-ть; } \Omega - \text{ область, ограниченная пов-тью } S.$$

133. Формула Пуассона, выражающая решение задачи Коши для ур-ния колебаний в 3-мерном пр-ве.

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}^M} \frac{\varphi(P)}{R_{MP}} dS_P + \int_{S_{at}^M} \frac{\psi(P)}{R_{MP}} dS_P \right\}, \quad \text{где } S_{at}^M - \text{ сфера радиуса } at \text{ с центром в т. } M.$$

134. В чём состоит „метод спуска Адамара“? (41)

Метод состоит в том, чтобы из ф-лы решения с большим числом пространственных переменных получить ф-лу с меньшим числом пространственных переменных. Применении не только к ур-нию колебаний.

135. Формула Пуассона, выражающая решение задачи Коши для ур-ния колебаний в двумерном пр-ве.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{U_{at}^m} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \int_{U_{at}^m} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{U_{at}^m} \frac{f(\xi, \eta, t-\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}, \text{ где } U_{at}^m \text{ — круг радиуса } at \text{ с центром в т. М.}$$