Уорчаке.

~~Билет 1~~

1.1) принцип max для гармонич. ф-ции

Неравная тождественно постоянной ф-ция $u(M)$, гармонич. в обл. D и непр. в замкнутой связной и огр. обл. $\bar{D}$, достигает своего max знач. только на границе обл. D

Док-во:

1) от противного

пусть max в внутрен. точке $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ док., что оно же достигается и на границе S. ~~обл D~~

* обл. D называется связной, если 2 любые точки обл. D можно соед. ломаной в этой обл.

Пусть $u(M_0) \geq u(M)$, $M \in \bar{D}$

Применим т. о среднем

(1) $u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^R} u(p)\, d\sigma_p \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^R} u(M_0)\, d\sigma_p = u(M_0)$

$\Sigma_{M_0}^{R} \in D$ (т.е. не касается границы S)

Если хотя бы в одной точке сферы $u(P) < u(M_0)$, то по непрерывности это будет некой малой окр. т. P $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ теорема вып. не будет

$(1) \Rightarrow \quad u(M) < u(M_0)$

$$\overset{\Downarrow}{u(P)}\Big|_{\Sigma_{M_0}^{R}} = u(M_0)$$, а значит

расш. по непрерывности сферу $\Sigma_{M_0}^{R_0}$

мы получим, что $u(M^*) = u(M_0)$

$M^* \in \Sigma_{M_0}^{R_0} \cap S$

В силу доказанного $\Rightarrow K_{M_0}^{R} \in D$, $u\big|_{K_{M_0}^{R}} = u(M_0)$

"Понастроим шаров"

последний шар накроет $\bar{M} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(M_0) = u(\bar{M}) \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ только в обл. D.

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\frac{\partial u_P}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right\}d\sigma_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{D}}L[u(Q)]\frac{e^{ikr_{QM_0}}}{r_{QM_0}}dV_Q,\quad M_0\in\mathcal{D}$$

$$L[u]=\Delta u+k^2u.$$

$$g(M,M_0)=\frac{e^{ikr_{MM_0}}}{4\pi r_{MM_0}}+v(M,M_0)$$

$$\Delta v+k^2v=0$$

$$v(M)=\int\limits_S\nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)d\sigma_P.$$

Можно свести к инт. ур-ю Фредгольма с непрерывн. ядром.

$$\Delta u+cu=-f(M)$$

$$u(M)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-c}v_n(M)$$

$c\neq\lambda_n \Rightarrow$ реш. $\exists$ и ед.

$c=\lambda_{n_0} \Rightarrow$ если это и кратное СЗ, ему соотв. набор СФ.

1.2) т. ∃ и ед. реш. внутр. краевой задачи для ур-я Гельмгольца в случае ГУ общего вида.

Если $\lambda_n \neq C$, то класич. реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u + Cu = -f(M), & M \in D \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(P), & P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}$$

единственно

Док-во:

От противного: $\exists u_1, u_2 : u_1 \neq u_2$

$u = u_1 - u_2 \Rightarrow$ похоже на задачу:

$$\begin{cases} \Delta v_n + \lambda_n v_n = 0, & M \in D \\ \alpha \frac{\partial v_n}{\partial n} + \beta v_n = 0, & P \in S \end{cases}$$

$C \neq \lambda_n \Rightarrow$ только трив. реш.

$C = \lambda_n \Rightarrow$ неодн. задача имеет много реш.

$C = k^2 \Rightarrow$ если фунд. реш $\frac{e^{-ikr}}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф-ция Грина имеет вид:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial u_P}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right\} d\sigma_P +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{D}} L[u(Q)]\frac{e^{ikr_{QM_0}}}{r_{QM_0}} dV_Q , \quad M_0 \in \mathcal{D}$$

$$\Delta[u] = \Delta u + k^2 u.$$

$$g(M,M_0) = \frac{e^{ikr_{MM_0}}}{4\pi r_{MM_0}} + v(M,M_0)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

$$v(M) = \int\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right) d\sigma_P.$$

Можно свести к инт. ур-ю Фредгольма с непрерыв. ядром.

$$\Delta u + cu = -f(M)$$

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - c} v_n(M)$$

$c \neq \lambda_n \Rightarrow$ реш. $\exists$ и ед.

$c = \lambda_{n_0} \Rightarrow$ если это и кратное СЗ, ему соотв. набор СФ.

2.1) Т. о нулях КОП

КОП $P_n(x)$ имеет n вещ. нулей, располож. строго внутри отрезка $[a, b]$.

Док-во:

Пусть $P_0(x) = 1$

$$\int_a^b P_n(x) P_0(x) p(x) dx = \int_a^b P_n(x) p(x) dx = 0 \quad (1)$$

$n > 0$

~~$p(x) > 0 \Rightarrow [(1)] \Rightarrow$~~

$p(x) > 0 \Rightarrow$ из (1) $\Rightarrow P_n(x)$ меняет знак в точках $x_1, \dots, x_k$.

$x_i \neq x_j$; $x_i, x_j \in (a; b)$

$P_n(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)\, \varphi_n(x)$

$1 \le k \le n$, т.е. полином имеет n нулей

Если док, что $k = n$, то теорема будет доказана от противного:

Пусть $k < n$

$$\tau_k(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i(x) \quad (2)$$

в силу нормальности системы

(1), (2) $\Rightarrow$ всякий КОП мб записан след. образом:

$$p_n(x) = \tau_k(x)\varphi_n(x)$$

$$(3) \quad \int_a^b p_n(x)\tau_k(x)p(x)\,dx = \int_a^b \tau_k^2(x)\varphi_n(x)p(x)\,dx \neq 0$$

$$(4) \quad \int_a^b p_n(x)\tau_k(x)p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k} c_i \int_a^b p_i(x)p_n(x)p(x)\,dx = 0$$

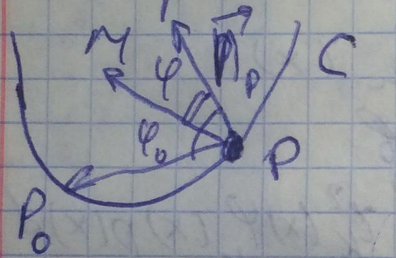
(3), (4) $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $k = n$

2.2) Пот-ал двойного слоя. Его св-ва.

Опр: Лог. пот-алом двойного слоя назыв. интеграл

$$w(M) = \int_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P = \int_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P$$

C – ориентированная кривая.



$\vec{n}_P$ – внутр. нормаль

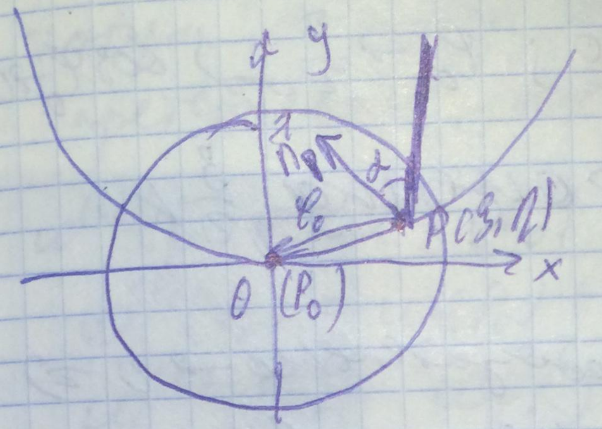
Кривая класса А – плоская кривая с непр. ограниченной кривизной

Кривая А такова, что:

1) В каждой точке P кривой $\exists$ непр. касательная (нормаль)

2) Для каждой т. P_0 кривой класса А $\exists$ такое $\delta > 0$, что часть кривой, лежащая внутри круга $U_{P_0}^{\delta}$: $C^{\delta} = C \cap U_{P_0}^{\delta}$

Т.1 Пусть $|\nu(P)| < N \Rightarrow \omega(M)$ опр. всюду на п-ти (только опр!)



1) $P_0 \notin C \Rightarrow$ инт. $\exists$

2) $P_0 \in C \Rightarrow$ доказан не равн. сх, а прост сх.

$\varphi_n = (\vec{n}_P, \hat{\ } \vec{r}_{PP_0})$

$\vec{n}_P = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$; r_{PP_0}

$(\vec{n}_P, \vec{r}_{PP_0}) = r_{PP_0} \cdot \underset{\uparrow}{1} \cdot \cos\varphi_0 = \xi \sin\alpha - \eta\cos\alpha$ — оценим по модулю

$(|\vec{n}| = 1)$

$\cos\alpha > \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\right| < \frac{|\xi|\cdot|\sin\alpha| + |\eta|\cdot\overset{\le 1}{|\cos\alpha|}}{|r_{PP_0}|^2} < \frac{k|\xi|^2 + \frac{1}{2}k|\xi|^2}{r^2_{PP_0}} \le \frac{3}{2}k \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ядро интеграла мажорировано $k \Rightarrow$ сх.

$$\left|\int_{C^\delta} \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\,dl_P\right| < 2N\cdot\frac{3}{2}k\int_{-\delta}^{+\delta} d\xi = 6Nk\delta < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ когда $P_0 \in C \Rightarrow$ ~~дтоб~~ инт. сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пот-пот-ал $\exists$, когда $P_0 \notin C$; $\exists$ когда $P_0 \in C$

Равн. сх, когда $\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\right| \le \frac{3}{2}k$

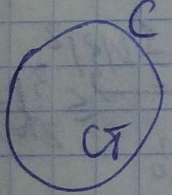
$P \to P_0 \Rightarrow r_{PP_0} \to 0$; $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi_0 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неопр $\frac{0}{0} \Rightarrow$ оценка $\frac{3}{2}k$

$P \to M \Rightarrow \cos$ не обязательно $\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ будет сх., но не равномерно

Лог. пот-ал двойного ~~X~~ слоя только в $\mathbb{R}^2$



Т.2 Пот-ал $\overset{o}{W}(M)$ ($c\ \nu_0 = \mathrm{const}$) имеет вид: $\overset{o}{W}(M) = \int_C \nu_0 \frac{\partial}{\partial n_P} dl_P = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & M \in G \\ \pi\nu_0, & M \in C \\ 0, & M \notin \overline{G} \end{cases}$

Док-во:

Применить 3-ю ф-лу Грина в 2D к ф-ции ν_0 и учесть смену знаков нормалей

Т.3 Пусть $\nu(M)$ – кус.-непр. огр. ф-ция ($|\nu(M)| < N$)

тогда в точках её непр. $W(M)$ претерпевает скачок, равный:

$$W^{(i)}(P_0) - W^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0) \quad (1)$$

$$W^{(i)}(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0) \quad (2)$$

$$W^{(e)}(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0) \quad (3) \quad , P_0 \in C$$

Док-во: из Т.2 => (1)-(3) для $\overset{\circ}{W}(M)$

Расм. $$\mathcal{I}(M) = \int_C (\nu(P) - \nu(P_0)) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P = W(M) - \overset{\circ}{W}(M) \quad (6)$$

Должны док-ть, что $\mathcal{I}(M)$ – непр. ф-ция => => док-ть сх. в точках

пот-ал $W(M)$ должен скакать, как и $\overset{\circ}{W}(M)$

$\nu(P)$ – непр. => $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |\nu(P) - \nu(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ (4)
$r_{PP_0} < \delta$

(1) => если на дуге C^δ $\cos\varphi$ не меняет знак, то $\int_{C^\delta} \frac{|\cos\varphi|}{r_{PP_0}} \le 2\pi$ (5)

$\cos\varphi$ не меняет знак $\Rightarrow$ в точке наблюдения видим одну и ту же сторону кривой.

однозначность $y = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists C^{\delta}$: чтобы была видна только одна сторона

$(4), (5) \Rightarrow \left| \int_{C^{\delta}} (\nu(P) - \nu(P_0)) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}} dl_P \right| < \varepsilon,$

~~$\forall M \in U^{\delta}_{P_0}$~~ $\forall M \in U^{\delta}_{P_0}$ $\Rightarrow$ равн. сх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ непр. $y(M)$

$(6) \Rightarrow \omega^{(i)}(P_0) = \overset{0}{\omega}{}^{(i)}(P_0) + y(P_0) =$

$= \pi\nu(P_0) + \underbrace{\overset{0}{\omega}(P_0) + y(P_0)}_{\omega(P_0)} =$

$= \pi\nu(P_0) + \omega(P_0)$

Аналогично: $\omega^{(e)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = -\pi\nu(P_0) + \omega(P_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0)$

3.1) Т. ед. реш. ур-я теплопр. на беск. прямой.

классич. реш. задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^1 \\ |u(x,t)| < M, \ (x,t) \in \overline{\Omega_\infty} \end{cases}$$

Док-во: от противного с исп. ф-ции-барьера

$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$u_1(x,t) \neq u_2(x,t)$

ограничим обл., переходя к обл. $\overline{\Omega}^L_T$ и построим ф-цию-барьер.

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \ (x,t) \in \Omega_\infty \\ v(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}^1 \\ |v(x,t)| < 2M, \ (x,t) \in \overline{\Omega_\infty} \end{cases}$$

барьер: $w_L(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left\{\frac{x^2}{2} + a^2 t\right\}$

$(w_L)_t = a^2 (w_L)_{xx}, \ (x,t) \in \Omega_T$

см. какие знач. ф-ция имеет в нуле и $\pm L$

$x \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow$ ф-ция ≥ 0 (т.к. x^2)

$w_L(x,0) \geq 0 = |v(x,0)|$

$w_L(\pm L, t) \geq 2M > |v(\pm L, t)|$

по принципу сравнения $\Rightarrow |v(x,t)| < w_L(x,t)$

$(x,t) \in \overline{\Omega}^L_T$

т.к. подобрали и знаем, как устроена ф-ция-барьер:

$$-\frac{4M}{L^2}\left\{\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0\right\} \leq v(x_0, t_0) < \frac{4M}{L^2}\left\{\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0\right\}$$

x_0, t_0 – fixed произв. точка $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ переход $L \to \pm\infty \Rightarrow w_L \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. о двух милиционерах,

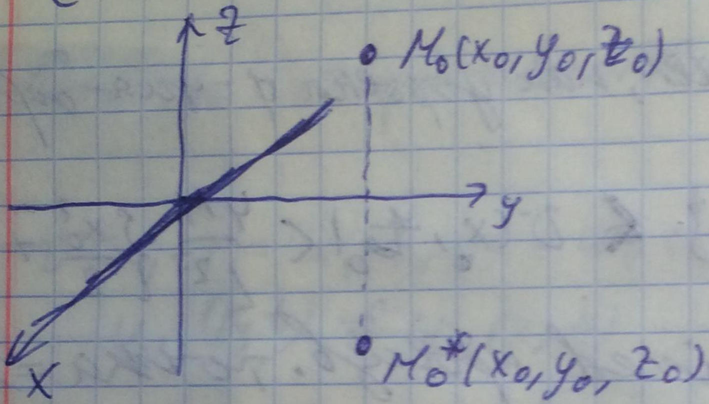
т.к. обе части равенства $\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x_0, t_0) = 0 \Rightarrow u_1(x_0, t_0) = u_2(x_0, t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие.

3.2) Построить ф-цию Грина задачи Дирихле для ур-я Лапласа в верхнем полупр-ве.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & 0 < z < \infty, \ -\infty < x, y < +\infty \\ u(x, y, 0) = \mu(x, y); & -\infty < x, y < +\infty \end{cases}$$



считаем, что в M_0 и M_0^* помещён точечный источник.

$\Downarrow$

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_0^*}}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в M_0 – полож. ед. источник

в M_0^* – отрицат. ед. источник

одн. ГУ вып.: $g(M, M_0) = 0$

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_{MM_0^*} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$$

Реш:

$$u(M_0) = -\int\limits_{\text{обл}\{z=0\}} \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(x,y)\, dx\, dy}{\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\}^3}$$

4.1) Т. ∃ классич. реш. ур-я теплопр. на отрезке.

Пусть ф-ция $\varphi(x) \in C[0,l] \cap Q^{(1)}[0,l]$ и пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда классич. реш. задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0,l), \ t \in (0;+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [0;+\infty) \end{cases}$$

существует и представимо в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$,

где $C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$ (!)

Док-во:

Для док-ва нужно обосновать обобщ. принцип суперпозиции.

Пусть ф-ции $u_n(x,t)$ явл. частными реш. линейного ДУ $L[u_n(x,t)] = 0$

Тогда ф-ция $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ также явл. реш. ~~этого~~ ур-я, если все дифференциальные операции вх. в оператор L, можно вып. путём почленного диф. ряда

Докажем прежде всего справедливость обобщ. принципа суперпозиции в обл. $t \geq \bar{t} > 0$

Нам нужно док-ть равномерную сх рядов, полученных при почленном диф. рядов $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Для док-ва равн. сх. рядов исп. признак Вейерштрасса (построим мажорантный ряд

$$\varphi(x) \in C[0, l] \Rightarrow |\varphi(x)| < M \overset{(2)}{\Rightarrow} |c_n| < 2M \quad (3)$$
$x \in [0, l]$

Пусть $u_n(x,t) = c_n e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$ (4)

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -c_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -c_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \quad (6)$$

мажорантный ряд для рядов (5)–(6): $Nn^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \bar{t}}$ (7)

($\bar{t}$ обеспечивает сх ряда)

(7) сх. по признаку Д'Аламбера $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряды с членами (5)–(6) будут равн. сх. при $t \geq \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ произв.) в открытой обл.

Для док-ва равн. сх. ряда (1) в замк. обл., исп. св-ва рядов Фурье.

Пусть периодич. с периодом $2l$ ф-ция $F(x)$, заданная на $[-l, l]$, $F(x) \in C^{(k)}[-l, l] \cap Q^{(k+1)}[-l, l]$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k \{|a_n| + |b_n|\}$ сх.

a_n, b_n – коэф-ты разложения

Если речь идёт о $f(x)$, заданной на $[0, l]$, то нужно, чтобы к сформулир. выше усл. (т.к. речь выше идёт о разлож. по sin), добавить разложение

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ -f(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

при этом для непр. ф-ции и непр. её чётных производных нужно треб., чтобы

$$f^{(2p)}(0) = f^{(2p)}(l) = 0, \quad p = 0, 1, \ldots$$

непр. нечётных произв. при нечёт. продолж. осуществ. автоматически

в силу усл. теоремы, сх. будет ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, явл. мажорантным для ряда (1) в замк. обл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ обобщ. принцип суперпозиции заключается везде.

4.2) Док., что система полиномов Лежандра исчерпывает все СФ задачи Ш-Л.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + \lambda y(x) = 0, & x \in (-1, 1) \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}$$

$y(x) = P_n(x) \Rightarrow \lambda_n = -n\left\{\frac{n-1}{2}\beta'' + \varepsilon''\right\} =$

$= -n\left\{\frac{n-1}{2}(-2) - 2\right\} = n(n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_n = n(n+1)$

Док-во:

Пусть $y(x) \neq P_n(x)$

$y(x)$ – СФ задачи Ш-Л;

соотв. СЗ: $\lambda \neq n(n+1)$

Тогда по ортогональности СФ имеем:

$(y, P_n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$

и в силу полноты системы $P_n(x)$, получаем, что

$y(x) \equiv 0$ при $x \in (-1, 1)$, т.е. не явл. СФ

(т.е. кроме всех полиномов Лежандра)

5.11 Принцип max. для ур-я параб. типа

Класс. реш. одн. ур-я теплопр.

$\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u)$,

коэф-ты которого удов:

$\rho(M) = c(M)\tilde{\rho}(M) > 0;\ k(M) > 0,\ M \in D$,

во внутр. точках цилиндра

Q_T не может достигать

знач. больше, чем наибольшее

из НУ и ГУ

~~Док-во~~:

[короче для док-ва:

$M = \max \begin{Bmatrix} u(M,0), & u(P,t) \\ M \in \overline{D}, & P \in S,\ t \in [0,T] \end{Bmatrix}$

то тогда $u(M,t) \leq M$]

Док-во:

Пусть в точке $(M_0, t_0) \in Q_T$

ф-ция $u(M_0, t_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t)$, $\alpha > 0$

α - некий параметр

$v(M_0, t_0) = u(M_0, t_0) = M + \varepsilon$

кроме того, если хотим опр. в нач. момент времени и на границе max знач. u, v, то

$$\max\left\{\begin{matrix} u(M,0) & v(P,t) \\ M\in\overline{D} & P\in S,\ t\in[0,T] \end{matrix}\right\} \le M+\alpha T < M+\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

для этого „<" возьмём $\alpha < \frac{\varepsilon}{2T}$

$v(M,t)\in C(\overline{Q}_T) \Rightarrow$ по т. Вейерштрасса она в цилиндре Q_T достигает max знач.

Пусть max знач. в т. $M_1, t_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow v(M_1,t_1) \ge v(M_0,t_0) = M+\varepsilon \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow$ т. M_1, t_1 — внутр. точка цилиндра (т.к. на границе $< M+\frac{\varepsilon}{2}$)

$\Downarrow$

для v наплишем усл. max:

$\frac{\partial v}{\partial t}(M_1,t_1) \ge 0$, $\operatorname{grad} v(M_1,t_1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta v(M_1,t_1) \le 0 \quad (3)$

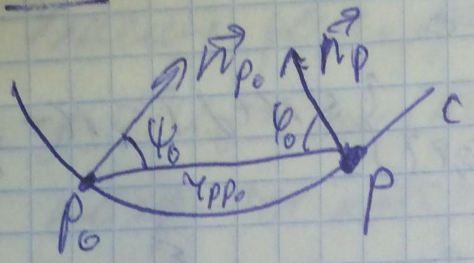
(3) $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_1) \ge \alpha > 0$; $\operatorname{grad} u(M_1,t_1)=0 \Rightarrow$

$\Delta u(M_1,t_1)=0$

$$\Rightarrow \overset{>0}{\rho(M_1)}\,\overset{>0}{u_t(M_1,t_1)} \ne \overset{>0}{k(M_1)}\,\overset{\le 0}{\Delta u(M_1,t_1)} + \overset{=0}{\operatorname{grad} k(M_1)\cdot\operatorname{grad} u(M_1,t_1)}$$

равенство не вып. $\Rightarrow$ противоречие

5.2) Вывод ф-лы для разрыва нормальной производ. пот-ала простого слоя



$$\frac{\partial v(M)}{\partial n_i} = \int_C \mu(P)\,\frac{\cos\psi}{r_{PM}}\,dl_P \qquad (1)$$

φ_0 и ψ_0 дают два союзных инт. ур-я.

$(\varphi+\alpha)+\psi=\pi \Rightarrow \psi=\pi-(\alpha+\varphi)\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\psi=-\cos(\alpha+\varphi)=$

$=-\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi \quad (2)$

$$(1),(2)\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n_i} = -\underbrace{\int_C \underbrace{\mu(P)\cos\alpha}_{\tilde v(P)}\cdot\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}\,dl_P}_{\text{пот-ал двойного слоя (слойность опр. ядом)}} +$$

$$+\underbrace{\int_C \mu(P)\sin\varphi\,\frac{\sin\alpha}{r_{PM}}\,dl_P}_{\text{"сходится"}}$$

$P_0\in C \Rightarrow \left|\frac{\sin\alpha}{r_{PP_0}}\right| < k$; $\sin\varphi\le 1$; $\mu(P)\le N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ равн. сх

скачок: $\vartheta(P_0) = \mu(P_0)$, $\cos\alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(i)} = -\pi\mu(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)$$

аналогично $\left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(e)} = \pi\mu(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(e)} - \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(i)} = 2\pi\mu(P_0)$$

6.1) Док-ть замк. систем присоед. ф-ций Лежандра.

Система присоед. ф-ций Лежандра $\{P_n^{(m)}(x)\}$ полна в $L_2(-1,1)$

Док-во:

$\forall f(x) \in L_2(-1,1)\ \exists g(x) \in C[-1,1]$:

$\forall \varepsilon' > 0\ \|f - g\| < \varepsilon'$

т.к. $g(x) \in C[-1,1]$, то в силу леммы ($*$) можно построить ф-цию $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \tilde{\varphi}(x)$:

$\forall \varepsilon'' > 0\ \ \|g(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon''$

$\tilde{\varphi}(x) \in C[-1,1]$, тогда по т. Вейерштрасса $\forall \varepsilon''' > 0\ \exists N = N(\varepsilon''')$, $\exists \{\bar{C}_n\}$, $\exists \{Q_n(x)\}$:

$$\max_{x \in [-1,1]} |\tilde{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N} \bar{C}_n Q_n(x)| < \varepsilon'''$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n Q_n(x) = \sum_{n=m}^{N+m} C_n \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

$$\max_{x \in [-1;1]} |\tilde{\varphi}(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}| < \varepsilon''';$$

$0 \leq (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$

$$\max_{x\in[-1;1]} |\varphi(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)| < \varepsilon'''$$

$$\|\varphi(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\| \leq \sqrt{2}\,\varepsilon'''$$

пт. правило треуг:

$$\|f(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| +$$

$$+\|g(x) - \varphi(x)\| + \|\varphi(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\| < \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' < \varepsilon$$

$\Rightarrow \varphi \in D$.

лемма (*):

$\forall f(x) \in C[-1, 1]$ можно строить φ-цию $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x) \in C[-1, 1]$, которая приближает φ-цию $f(x)$ на обр. $[-1, 1]$ в среднем

6.2) Построить ф-цию Грина задачи Неймана для ур-я теплопр. на полупрямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty^+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \bar{\mathbb{R}}^+ \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t \in [0; +\infty) \\ |u(x,t)| < M, & (x,t) \in \Omega_\infty^+ \end{cases}$$

$\cancel{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi,t)\,\Phi(\xi)\,d\xi}$

$\nu(t) \equiv 0;\ f(x,t) \equiv 0$

Продолжим ф-цию $\varphi(x)$ чётным образом: $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$

на отриц. полуось

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi,t)\,\Phi(\xi)\,d\xi = u(x,t)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0, & t \in [0; +\infty) \\ \Phi(\xi) = \varphi(\xi), & \xi \geq 0 \end{cases} ;\ \text{ГУ и НУ на } \bar{\mathbb{R}}^+ \text{ вып.}$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} g(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^{-\infty} g(x,\xi,t)\,\varphi(-\xi)\,d\xi$$

$$\Rightarrow |\xi \to -\xi| \Rightarrow u(x,t) = \int_0^{\infty} g_2(x,\xi,t)\,d\xi$$

$$g_2(x,\xi,t) = g(x,\xi,t) + g(x,-\xi,t)$$

$$\cancel{g_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}}$$

$$g_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}$$

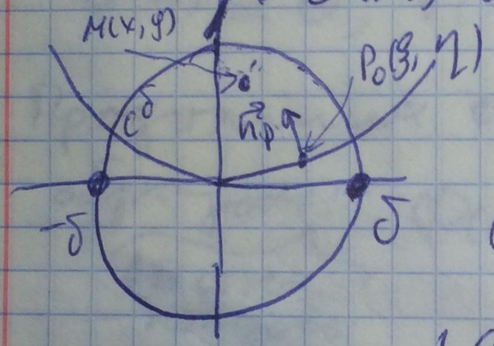
7.1) Т. о непр. лог-ал простого слоя

Пусть ф-ция $\mu(x)$ инт. и огр.
Тогда лог. пот-ал простого слоя $v(x)$ непр. всюду на п-ти $\left[v(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)\right]$

Док-во:

1) $M_0 \notin C \Rightarrow$ инт. собств.

2) $M_0 \equiv P \in C$.
тогда для док-ва нужно док-ть равн. сх. инт. $v(x)$ в т. $M \Rightarrow$
$\Rightarrow$ непр. $v(M)$ всюду в $\mathbb{R}^2$



круг: $U^\delta_{P_0}$
оценим интеграл по C
(нужно док-ть верность $\forall \delta$)

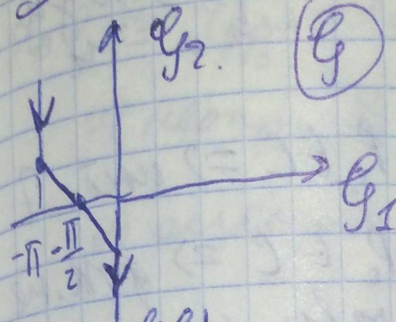
$|\xi - x| \leq r_{PM}$; $dl_P = \frac{d\xi}{\cos\alpha} < 2\, d\xi$

(т.к. можем взять α: $\cos\alpha > \frac{1}{2}$)

$$\left|\int_{C^\delta} \mu(P) \ln\frac{1}{r_{PM}}\, dl_P\right| < 2N \int_{-\delta}^{+\delta} \ln\frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ равн. сх. в т. $P_0 \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow$ непр. в т. $M_0 \Rightarrow$ непр. всюду на б.

7.2) Асимптотика ~~Ф~~ для Бесселя при больших знач. арг.



$f(g)$; $\varphi(g)$;

G: $C \subset G$

$$\int_C e^{x f(g)} \varphi(g)\, dg = e^{x f(g_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(g_0)|}}\, \varphi(g_0) e^{i\psi} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}}) \right\}$$

$(x \gg 1)$

$f'(g) = 0$

$\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(g_0))$

$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin g + i\nu g}\, dg$; $f(g) = -i \sin g$

$f'(g_0) = -i \cos g_0 = 0 \Rightarrow g_0 = -\frac{\pi}{2}$

$f(g_0) = -i \sin(-\frac{\pi}{2}) = i$; $f''(g_0) = i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\arg f''(g_0) = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}(\pi - \frac{3}{2}\pi) = -\frac{\pi}{4}$

$\varphi(g) = e^{i\nu g} \Rightarrow \varphi(g_0) = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}$

$H_\nu^{(1)}(x) = e^{ix} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}}) \right\}$

Последняя ф-ла м. б. аналитич. продолжена на компл. п-ть z вида: $|\arg z| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$

Она же при вещ x:

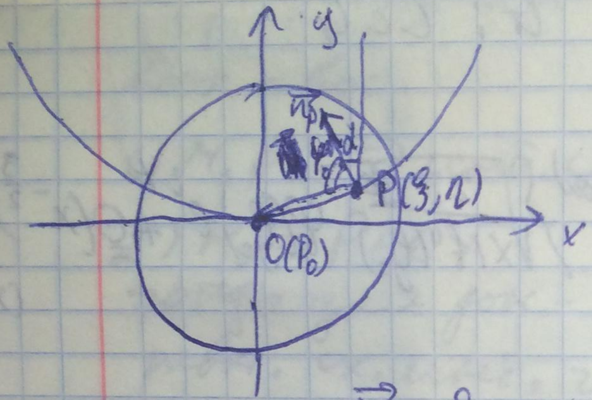
$H_\nu^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})$; $H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})$

$J_\nu(x) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}) + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})$

8.1) Т. о ∃ пот-ала двойного слоя.

Пусть $|\nu(P)| < N \Rightarrow w(M)$ опр. всюду на п-ти.

Док-во:



1) $P_0 \in C \Rightarrow$ инт. ∃.

2) $P_0 \in C \Rightarrow$ док. не равн. сх, а просто сх.

$$\varphi_n = (\widehat{\vec{n}_P, \vec{r}_{PP_0}})$$

$$\vec{n}_P = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}; \quad \vec{r}_{PP_0} = \{-\xi; -\eta\}$$

$$(\vec{n}_P, \vec{r}_{PP_0}) = r_{PP_0} \cdot \underset{(|\vec{n}|=1)}{1} \cdot \cos\varphi_0 = \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha \Rightarrow$$

оценим по модулю

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\right| < \frac{|\xi| \cdot |\sin\alpha| + |\eta| \cdot |\cos\alpha|}{|r_{PP_0}|^2} < \frac{k|\xi|^2 + \frac{1}{2}k|\xi|^2}{r_{PP_0}^2} \le \frac{3}{2}k$$

$\le 1.$

~~=> ядро интеграла мажорировано~~

$\Rightarrow$ ядро интеграла мажорировано $k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сх

$$\left|\int_{C^\delta} \mu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}} dl_P\right| < 2N \cdot \frac{3}{2}k \int_{-\delta}^{\delta} d\xi = 6Nk\delta < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ когда $P_0 \in C \Rightarrow$ этот инт. сх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пот. пот-ал ∄, когда $P_0 \notin C$, $\exists_!$ когда $P_0 \in C$

равн. сх., когда $\left|\frac{\cos \varphi_0}{r_{PP_0}}\right| \leq \frac{3}{2} k$ (1)

$P \to P_0 \Rightarrow r_{PP_0} \to 0$; $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi_0 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неопр $\frac{0}{0} \Rightarrow$ [в силу структуры] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ оценка $\frac{3}{2} k$

$P \to M \Rightarrow$ не обязательно $\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ будет сх., но не равномерная

Лог. пот-ал двойного слоя $\exists$ только в $\mathbb{R}^2$

8.2) произв. ф-ция для полиномов Лагерра

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\{x^n e^{-x}\}; \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\lambda_n = -n\left\{\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'\right\} = n$$

$$\tau(x) = -x + 1$$

$$\|L_n\|^2 = c_n (-1)^n a_n n! \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^n(x)\,\rho(x)\,dx$$

$$c_n = \frac{1}{n!}; \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}; \quad \sigma(x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|L_n\|^2 = \frac{1}{n!}(-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n!} n! \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$$

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n =$$

$$= \frac{1}{1-\sigma'(t_0)} \cdot \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}$$

$$t - x - tz = 0 \Rightarrow t_0 = x + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\underbrace{\sigma'(t_0)}_{=1} z} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{x}{1-z}\right)}{e^{-x}} = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{x z}{1-z}\right)$$

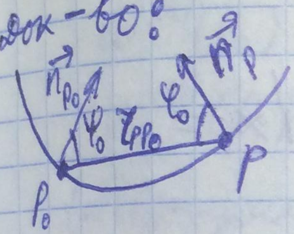
$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{x z}{1-z}\right)$$

9. Т. о разрыве нормальной производной пот-ала простого слоя

Пусть ф-ция $\mu(P)$ – кус.-непр. огр. ф-ция $(|\mu(P)|<N)$ тогда в точках непр. ф-ции $\mu(P)$ производная по внутр. нормали от $v(M)$ претерпевает скачок

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(e)} - \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(i)} = 2\pi\mu(P_0),\ P_0\in C$$

док-во:



$$\frac{\partial v(M)}{\partial n_i} = \int_C \mu(P)\frac{\cos\psi}{r_{PM}}dl_P \quad (1)$$

φ_0 и ψ_0 дают два союзных инт. ур-я

$$(\varphi+\alpha)+\psi=\pi \Rightarrow \psi=\pi-(\alpha+\varphi)\Rightarrow \cos\psi=-\cos(\alpha+\varphi)=$$

$$=-\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n_i} = \underbrace{-\int_C \underbrace{\mu(P)\cos\alpha}_{\tilde v(P)}\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}dl_P}_{\text{непр} \Rightarrow \text{пот-ал двойного слоя}} + \underbrace{\int_C \mu(P)\sin\varphi\frac{\sin\alpha}{r_{PM}}dl_P}_{\text{скачет}}$$

$$P_0\in C \Rightarrow \left|\frac{\sin\alpha}{r_{PP_0}}\right| < k;\ \sin\varphi\le 1;\ \mu(P)\le N \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ равн. сх.

скачок: $\tilde v(P_0)=\mu(P_0) \Rightarrow [\cos\alpha=1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(i)} = -\pi\mu(P_0)+\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)$$

аналогично: $\left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(e)} = \pi\mu(P_0)+\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)$

вычтем.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(e)} - \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0)\right)^{(i)} = 2\pi\mu(P_0)$$

9-2) Производящая ф-ция для полиномов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{+x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$a_n = 2^n$$

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right\} + \lambda e^{-x^2} y(x) = 0$$

$$\lambda_n = 2n$$

$$\|H_n\|^2 = C_n (-1)^n n!\, a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx =$$

$$= (-1)^n (-1)^n n! \cdot 2^n \sqrt{\pi}$$

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (-z)^n =$$

$$= \frac{1}{1 - \underbrace{z'(t_0) z}_{=0}} \frac{e^{-t_0^2}}{e^{-x^2}}$$

$$t - x - z = 0 \Rightarrow t_0 = x + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (-z)^n = \frac{e^{-(x+z)^2}}{e^{-x^2}} = e^{-2xz - z^2}$$

$$z \to -z \Rightarrow \Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = e^{2xz - z^2}$$

10.1) Т. о разрыве пот-ала двойного слоя:

Пусть $\nu(M)$ — кусочно-непр. огр. ф-ция ($|\nu(P)| < N$). Тогда в точках её непр. $w(M)$ претерпевает скачок, равный: $w^{(i)}(P_0) - w^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0)$ (1)

$w^{(i)}(P_0) = w(P_0) + \pi\nu(P_0)$ (2);

$w^{(e)}(P_0) = w(P_0) - \pi\nu(P_0)$ (3), $P_0 \in C$

($w(P_0)$ - прямое знач. $w(M)$ на кривой C)

Док-во:

$$\overset{0}{w}(M) = \int_C \nu_0 \frac{\partial}{\partial n_P} dl_P = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & M \in C_i \\ \pi\nu_0, & M \in C \\ 0, & M \in C_e \end{cases} (4) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (1)-(3) для пот-ала $\overset{0}{w}(M)$

~~Пусть $\nu(P)$~~

Пусть $\nu_0 = \nu(P_0)$, $P_0 \in C$ - в точке непр. $\nu(P)$

Рассм. интеграл:

$$\mathcal{I}(M) = \int_C (\nu(P) - \nu(P_0)) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P = w(M) - \overset{0}{w}(M) \quad (5)$$

мы должны док-ть, что $\mathcal{I}(M)$ - непр. ф-ция $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ док-ть сх. в точках

пот-ал $w(M)$ должен скакать, как и $\overset{0}{w}(M)$

$\vartheta(P)$ - непр. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: |\vartheta(P)-\vartheta(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ (6)

$r_{PP_0} < \delta$

(4) $\Rightarrow$ если на дуге C^δ $\cos\varphi$ не меняет знак, то интеграл $\int\limits_{C^\delta} \frac{|\cos\varphi|}{r_{PP_0}} \leq 2\pi$ (7)

~~cos не меняет~~

cos не меняет знак $\Rightarrow$ в точке наблюд. видим одну и ту же сторону кривой

однозначность $y=f(x) \Rightarrow \exists C^\delta$, чтобы была видна только одна сторона

(6)(7) $\Rightarrow \left| \int\limits_{C^\delta} (\vartheta(P)-\vartheta(P_0)) \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}} dl_P \right| < \varepsilon, \forall M \in U^\delta_{P_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ равн. сх $\Rightarrow$ непр $J(M)$

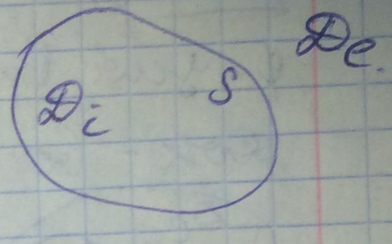
(5) $\Rightarrow \omega^{(i)}(P_0) = \overset{0}{\omega}{}^{(i)}(P_0) + J(P_0) =$

$= \pi\vartheta(P_0) + \omega(P_0)$

Аналогично: $\omega^{(e)}(P_0) = -\pi\vartheta(P_0) + \omega(P_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 2\pi\vartheta(P_0)$

10.2) т. ед. реш. внеш. краевой задачи для ур-я Лапласа в 3D с ГУ Дирихле.



$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in D_e \\ u(P) = g(P), & P \in S \\ u(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

от противного

$\omega(M) = u_1(M) - u_2(M)$

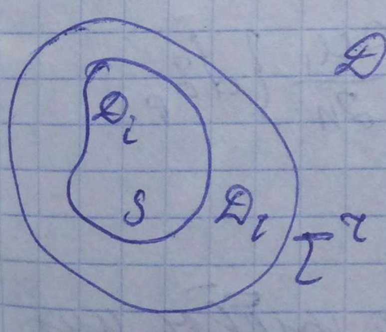
$$\begin{cases} \Delta \omega = 0, & M \in D_e & (1) \\ \omega(P) = 0, & P \in S & (2) \\ \omega(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty & (3) \end{cases}$$

Пусть $u_1 \neq u_2$.

чтобы применить принцип max, нужно искуственно обр. обл.

$(3) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists R : \forall r > R \quad |\omega(M)| < R$

Рассм. обл. D^r



$D^r = D_e \cap \bar{K}^r$

в D^r применим принцип max

$D^r : u|_S = 0 \; ; \; |u|_{\Sigma^r} < \varepsilon \Rightarrow |u(M)| < \varepsilon, \; M \in D^r$

віх нек. точку $\bar{M} \in D^r : |u(\bar{M})| < \varepsilon$

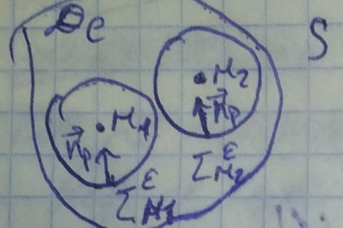
ε - произвольно $\Rightarrow u(\bar{M}) = 0, \; \bar{M} \in D^r$

$r \to \infty \Rightarrow D^r \to D^e \Rightarrow u(\bar{M}) = 0, \forall \bar{M} \in D^r \Rightarrow u_1 = u_2, \; M \in D^e \Rightarrow$ против

11.1) Т. о симметрии ф-ции Грина для ур-я Лапласа с ГУ Дирихле.

Ф-ция Грина симм. по своему арг. и параметру

Док-во:



обл. $D^\varepsilon = D \setminus \{K^\varepsilon_{M_1} \cup K^\varepsilon_{M_2}\}$

" \ " — " без "

рассм. 2 ф-ции => M_1 и M_2:

$u_1(M) = g(M, M_1)$

$u_2(M) = g(M, M_2)$

т.к. $u_1(M)$, $u_2(M)$ в D^ε — гармонич. =>

=> можем написать 2-ую ф-лу Грина:

$$\int_{D^\varepsilon} \{u_1 \overset{=0}{\Delta u_2} - u_2 \overset{=1}{\Delta u_1}\} dV = \int_S \{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\} d\sigma_p +$$

$$+ \int_{\Sigma^\varepsilon_{M_1} \cup \Sigma^\varepsilon_{M_2}} \{\overset{=0}{u_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} - \overset{=0}{u_2} \frac{\partial u_1}{\partial n}\} d\sigma_p$$

т.к. нормаль внешняя, то учтём инт. по полной поверхности

u_1, u_2 — ф-ции Грина задачи Дирихле =>

=> (т.к. M_1 и M_2 — изолир.) => гармонич.

и $\Delta u_2 = 0$; $\Delta u_1 = 1$ => $u_1 = 0$; $u_2 = 0$

$$\int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_1}} \left\{ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right\} d\sigma = \int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_2}} \left\{ u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right\} d\sigma \quad (1)$$

Преобр. левую часть равенства

$$\int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_1}} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PM_1}} \frac{\partial u_2(P)}{\partial n} - u_2(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{4\pi r_{PM_1}} \right) \right\} d\sigma_P +$$

$$+ \underbrace{\int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_1}} \left\{ v_1(P, M_1) \frac{\partial u_2(P)}{\partial n} - u_2(P) \frac{\partial}{\partial n_P} v_1(P, M_1) \right\} d\sigma_P}_{= 0 \Leftarrow \int\limits_{K^{\varepsilon}_{M_1}} \{ v_1 \underset{0}{\Delta u_2} - u_2 \underset{0}{\Delta v_1} \} dV} = -u_2(M_1) \quad (2)$$

v_1 - гармонич; u_2 - гармонич. в шаре K_1^{ε}

$\int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_1}}$ дает u_2 в т. M_1; $\frac{\partial}{\partial n} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \Leftarrow P \in \Sigma^{\varepsilon}_{M_1}$

аналогично:

$$\int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_2}} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PM_2}} \frac{\partial u_1(P)}{\partial n} - u_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{4\pi r_{PM_2}} \right) \right\} d\sigma_P = -u_1(M_2) \quad (3)$$

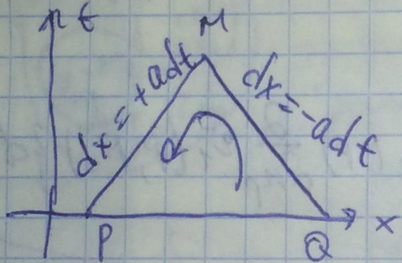
$(1) - (3) \Rightarrow u_2(M_1) = u_1(M_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(M_1, M_2) = g(M_2, M_1)$

11.2) Ф-ла для реш. неодн. ур-я колеб. на беск. прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

хар. треуг.



Если $F(x,t) \in C^{(1)}(D) \cap C(\overline{D})$, то $\int\limits_D \frac{\partial F}{\partial t}\,dx\,dt = -\int\limits_\Gamma F\,dx$

$$\int\limits_D \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dt = +\int\limits_\Gamma F\,dt$$

В кач-ве D выберем треуг. и инт. по D:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_D \{u_{tt} - a^2 u_{xx}\}\,dx\,dt = \frac{1}{2a}\int\limits_\Gamma f(x,t)\,dx\,dt$$

$$\int\limits_D u_{tt}\,dx\,dt = -\int\limits_P^Q u_t\,dx - \int\limits_Q^M u_t\,dx - \int\limits_M^Q u_t\,dx =$$

$$= -\int\limits_P^Q u_t\,dx + \int\limits_Q^M u_t\,dx - \int\limits_M^P u_t\,dx$$

если сделать то же самое с u_{xx}:
(на PQ $\int = 0$, т.к. там $t=0$), то

$$\int\limits_D u_{xx}\,dx = \underbrace{\int\limits_P^Q u_x\,dt}_{=0} + \int\limits_Q^M u_x\,\underbrace{dt}_{=-\frac{1}{a}dx} + \int\limits_M^Q u_x\,\underbrace{dt}_{=\frac{1}{a}dx}$$

$$u(M) = \frac{u(P)+u(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_P^Q u_t\,dx + \frac{1}{2a}\iint\limits_{\Delta PQM} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

11.1) ~~[illegible]~~ Леммы о поведении реш. в особой точке для ур-я спец. ф-ций $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$, $x \in (a,b)$, где $k(x) = (x-a)\varphi(x)$, $\varphi(x) \neq 0$

11.1) Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ — два ЛН реш. ур-я $L[u]=0$, $x \in (a,b)$ коэф-т $k(x)$ которого удов. $\{k(x) \geq 0,\ x\in[a;b];\ k(x)=(x-a)\varphi(x),\ \varphi(x)\in C[a;b],\ \varphi(a)\neq 0\}$

$u_1(x) = (x-a)^n v(x)$, $v(x) \in C[a;b]$.

$v(a) \neq 0$, $n \geq 0$, то второе реш.

необх. возрастает при $x \to a$.

(усл. огр. в нуле: $\lim\limits_{x\to a} k(x)u'(x) = 0$)

Док-во:

$$0 = u_1 \underbrace{L[u_2]}_{0=} - u_2 \underbrace{L[u_1]}_{0=} = (k(x)(u_1u_2' - u_1'u_2))' = 0$$

$$k(x)(u_1u_2' - u_1'u_2) = C_1.$$

Расм. последнее ур-е на интервале, где $k(x) > 0$

$$W[u_1,u_2] = u_1u_2' - u_1'u_2 \neq 0$$

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{u_1u_2' - u_1'u_2}{u_1^2(x)} = \frac{C_1}{k(x)\,u_1^2(x)}$$

$$u_2(x) = u_1(x)\cdot\left\{C_1\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dz}{k(z)u_1^2(z)} + C_2\right\}$$

(C_2 связано с x_0)

т.к. нас интересует поведение 1Н решения u_2, то C_2 можно положить равным нулю.

C_1 можно положить равным 1,

т.к. ур-е одн., и его реш. опр.

с точностью до мультипликативной const

$$u_2(x) = (x-a)^n v(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dz}{(z-a)^{2n+1}\underbrace{\psi(z)v^2(z)}_{=\varphi(z)}}$$

$\varphi(x)\in C[a;b]$; $\varphi(a)\neq 0$

отодвинем x_0 так, чтобы $\varphi(z)\neq 0$ всюду от a до x_0

$\varphi(x)\neq 0$, $x\in[a;x_0]$. для т. о среднем

$$u_2(x) = \frac{(x-a)^n}{\varphi(z^*)}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dz}{(z-a)^{2n+1}}$$

$$u_2(x) = \frac{v(x)}{\varphi(z^*)}\begin{cases}\left.\dfrac{(x-a)^n}{-2(z-a)^{2n}}\right|_{x_0}^{x}, & n>0\\ \ln(z-a)\Big|_{x_0}^{x}, & n=0\end{cases}$$

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0)$$

$$f_1(x) = \frac{v(x)}{\Psi(z^*)} = \begin{cases} -\frac{1}{2n(x-a)^n}, & n>0 \\ \ln(x-a), & n=0 \end{cases}$$

$$f_2(x, x_0) = \frac{v(x)}{\Psi(z^*)} = \begin{cases} \frac{(x-a)^n}{2n(x_0-a)^{2n}}, & n>0 \\ -\ln(x_0-a), & n=0 \end{cases}$$

12.) Пусть вып. усл. 11. Тогда если $u_1(x)$ огр. при $x=a$ $(n=0)$, то $u_2(x)$ имеет логарифмич. особенность

$(|u_1(a)| < \infty \to u_2(x) \sim \ln(x-a))$

Если $u_1(x)$ имеет в т. $x=a$ нуль n-ого пор., то $u_2(x)$ имеет полюс n-ого пор.

$(u_1(x) \sim (x-a)^n \to u_2(x) \sim (x-a)^{-n})$

12.2) общая ф-ла Родрига для КОП

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}p_n^{(m)}(x)\right)}_{=p_n^{(m+1)}(x)}\right\} + \lambda_{n,m}\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x) = 0$$

$$\lambda_{n,0} \equiv \lambda_n$$

Найдём выраж. для λ_n

$$\sigma(x) = \sigma(0) + x\sigma'(0) + \frac{x^2}{2}\sigma'' \leftarrow \text{const}$$

$$\tau(x) = \tau(0) + x\tau'$$

$$p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$\sigma(x)\,p_n''(x) + \tau(x)\,p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0$$

$$a_n \underbrace{\left\{\frac{n(n-1)}{2}\sigma'' + n\tau' + \lambda_n\right\}}_{=0} x^n + \dots = 0$$

$$\lambda_n = -n\left\{\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'\right\}$$

$$\lambda_{n,m} = -(n-m)\left\{\frac{n-m-1}{2}\sigma'' + \tau_m'\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}(x)\,p_n^{(m+1)}(x)\right\} + \lambda_{n,m}\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x) = 0$$

$$\rho_0(x)\,p_n(x) = \frac{1}{\lambda_{n,0}}\frac{d}{dx}\left\{\rho_1(x)\,p_n'(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{n,0}\cdot\lambda_{n,1}} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left\{p_2(x)\, P_n''(x)\right\} \div \frac{1}{A_{n,m}} \frac{d^m}{dx^m}\left\{p_m(x)\, P_n^{(m)}(x)\right\}$$

$$A_{n,m} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{n,m}$$

Если $m = n \Rightarrow P_n^{(n)}(x) = n!\, a_n$.

$$p(x)\, P_n(x) = \underbrace{\frac{n!\, a_n}{A_{n,n}}}_{= C_n = \text{const}} \frac{d^n}{dx^n} p_n(x)$$

$$P_n(x) = \frac{C_n}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\, p(x)\right\}$$

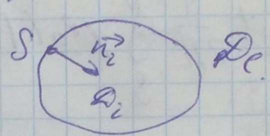
13.1) т. ∃ реш. внутр. задачи Дирихле и внеш. задачи Неймана для ур-я Лапласа в 3D.

В 3D внутр. задача ~~Дирихле~~ Дирихле и внеш. задача разрешимы ед. образом при любых граничных ф-циях и их реш. выраж. в виде пот-ал ~~ар~~ двойного и простого слоя соответственно.

Док-во:

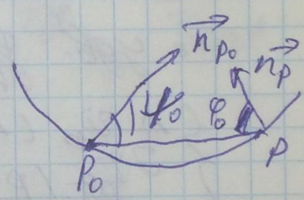
Расм. внутр задачу Д.

$$\begin{cases} \Delta w(M) = 0, & M \in D_i \\ w(P) = g(P), & P \in S \end{cases}$$



ищем реш. в виде

$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P$$



$$w^i(P_0) = 2\pi\nu(P_0) + \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = g(P_0), \quad P_0 \in S$$

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} g(P_0) \qquad (1)$$

$$K(P, P_0) = \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} = \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)$$ перейдём к союзному инт. ур-ю

$$K(P_0, P) = \frac{\cos\varphi_0}{r_{P_0P}^2} = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\frac{1}{r_{P_0P}}\right)$$

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = \frac{1}{2\pi} h(P_0), \quad P_0 \in S \quad (2)$$

где
$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, & M \in D_e \\ \frac{\partial v}{\partial n}(P) = h(P), & P \in S \\ v(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

$$v(M) = \int\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$

$$\left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial n_{P_0}}\right)^e = \frac{\partial v_{P_0}}{\partial n_{P_0}} + 2\pi\mu(P_0) = h(P_0)$$

$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ – не явл. СЗ

Пусть $\lambda_0 \sim \mu_0(P)$

$$v_0(M) = \int\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$

$$\mu_0(P) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu_0(P)\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, d\sigma_P = 0$$

v_0 удв. ур-ю Лапласа в D_e.

$$\begin{cases} \Delta v_0(M) = 0, & M \in D_e \\ \frac{\partial v_0}{\partial n_P}(P) = 0, & P \in S \\ v(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

В силу ед. реш. внеш. задачи Неймана в 3D $\Rightarrow v_0(M) = 0,\ M \in D_e$

И т.к. $v_0(M) \in C(\mathbb{R}^3) \Rightarrow v_0(M) = 0,\ M \in \overline{D_e} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0(P) = 0, & P \in S \\ \Delta v_0(M) = 0, & M \in D_i \end{cases}$$

В силу ед. реш. внутр. задачи Дирихле: $\underset{M \in D_i}{v_0(M) = 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_0(M) \equiv 0$

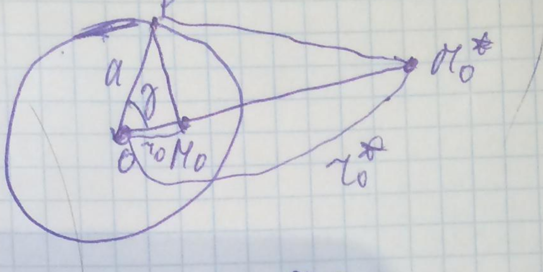
$$\underbrace{\left(\frac{\partial v_0}{\partial n_P}(P)\right)^{(e)}}_{=0} - \underbrace{\left(\frac{\partial v_0}{\partial n_P}(P)\right)^{(i)}}_{=0} = 4\pi\mu_0(P),\ P \in S \Rightarrow \mu_0(P) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ не явл. СЗ

применим альтернативу Фредгольма $\Rightarrow$ ур-я (1) и (2) разреш. ед. образом при $\forall$ непр. $g(P)$, $h(P)$

13.2) Ф-ция Грина задачи Дирихле для ур-я Лапласа в шаре метод эл-стат. изображ.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in K_0^a \\ u(P) = \mu(P), & P \in \Sigma_0^a \end{cases}$$



$r_0 r_0^* = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0$ и M_0^* – сопряж. отн радиуса a в сфере Σ_0^a

$\Delta OPM_0 \sim \Delta OPM_0^*$ по углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [подобие] $\Rightarrow \dfrac{r_0}{a} = \dfrac{a}{r_0^*} = \dfrac{r_{PM_0}}{r_{PM_0^*}}$

$r_0 r_0^* = a^2 \Rightarrow \dfrac{r_0}{a} = \dfrac{a}{r_0^*}$

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_{MM_0}} + \underbrace{\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{PM_0^*}}}_{\text{гармонич. ф-ция.}}\right\}$$

На пов $S \Rightarrow g(M, M_0) = 0 \Rightarrow$ все ус. вып-

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{a^2 - r_0^2}{r_{PM}^3}\, \mu(P)\, d\sigma_P.$$

14.1) т. ∃реш. внутр. задачи Неймана и внеш. задачи Дирихле для ур-я Лапласа

1) В 3D внутр. задача Неймана разрешима при вып. необх. усл. ∀ непр. $h(P)$ и её реш. опр. с точностью до аддитивной const.

2) В 3D внеш. задача Дирихле разрешима и при том единств. образом при ∀ граничных ф-циях и её реш. выраж. в виде пот-ала двойного слоя.

Док-во:

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, & M \in D_i \\ \dfrac{\partial v(P)}{\partial n_P} = h(P), & P \in S \end{cases}$$

$$V(M) = \int_D \frac{\mu(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_{P_0}}(P_0)\right)^{(i)} = -2\pi\mu(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n_{P_0}}(P_0) = h(P_0) \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\cancel{\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, d\sigma_P = -\frac{1}{2\pi} g(P_0)}$$

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, d\sigma_P = -\frac{1}{2\pi} h(P_0)$$

союзное: $\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, d\sigma_P = -\frac{1}{2\pi} g(P_0)$ –

– возникает из внеш. задачи Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta w(M) = 0, & M \in D_e \\ w(P) = g(P), & P \in S \\ w(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r^2_{PM}}\, d\sigma_P$$

$\nu(P) = \nu_0 = \text{const}$ – с.ф. при $\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi}$

$$\nu_0 - \frac{\nu_0}{2\pi}\underbrace{\int_S \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, d\sigma_P}_{=2\pi} = 0$$

Пусть $\operatorname{rang}\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = r \Rightarrow \mu_{0,k}(P)$ — с.ф.

$k = 1, 2, \dots, r$

$$V_{0,k}(M) = \int_S \frac{\mu_{0,k}(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$

$$\begin{cases} \Delta V_{0,k}(M) = 0, & M \in D_i \\ \dfrac{\partial V_{0,k}}{\partial n_P}(P) = 0, & P \in S \end{cases}$$

$V_{0,k} = C_k; \quad M \in \bar{D}_i; \quad k = 1, \dots, r$

$$V(M) = \int_S \left\{ \mu_{0,k}(P) - \frac{C_k}{C_i}\mu_{0,i}(P) \right\} \frac{1}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$ — пот-ал простого слоя.

$V(M) = 0, M \in \bar{D}_i \Rightarrow V(P) = 0, P \in S \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta V(M) = 0, & M \in D_e \\ V(P) = 0, & P \in S \\ V(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty \end{cases}$$

Аналогично $V(M) = 0, M \in \bar{D}_i$, $V(M) = 0, M \in \mathbb{R}^3$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_P}(P)\right)^{(e)} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_P}(P)\right)^{(i)} + 4\pi \underbrace{\left\{\mu_{0,k}(P) - \frac{C_k}{C_i}\mu_{0,i}(P)\right\}}_{=0}$$

$$\mu_{0,k}(P) = \frac{C_k}{C_i}\mu_{0,i}(P)$$

при $\forall k$ $\operatorname{rang}\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = 1 \sim \mu_0(P)$

$$V_0(M) = \int_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_P$$ — пот-ал Робена

$$\int_S \frac{\partial V(P)}{\partial n_P} d\sigma_P = 0$$

$\int_S \nu_0 h(P)\, d\sigma_P = 0$ — усл. разреш. ВЗН

ур-я Фредгольма для внутр. задачи Неймана ~~и внеш. задачи.~~ ~~Дирихле.~~

$\cancel{\int_S g(P) \mu_0(P)\, d\sigma_P = 0}$

Внеш. задача Дирихле разрешима при $\int_S g(P) \mu_0(P)\, d\sigma_P = 0$, что противоречит ед. реш. задачи Дирихле.

~~13,14) [illegible] задачи Дирихле методом [illegible] отображений.~~

1(ч.2) Ф-ла Д'Аламбера.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow (dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 семейства хар.: $dx - a\,dt = 0$; $dx + a\,dt = 0$

$x - at = C_1$

$x + at = C_2$

$\xi = x - at$; $\eta = x + at \Rightarrow U_{\xi\eta} = 0$

$$\left.\begin{aligned} U_\xi &= f(\xi) \\ U_\eta &= f_2(\eta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U(\xi,\eta) = \int f(\xi)\,d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$

$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$u_t(x,0) = -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x)$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz$$

$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

15.1) Т. ед. реш. внеш. краевой задачи для ур-я Лапласа в 3D. с ГУ Неймана.

~~Реш задачи~~ Классич. реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \; M \in D_e & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P) = h(P), \; P \in S & (2) \\ u(M) \rightrightarrows 0, \; M \to \infty & (3) \end{cases}$$

единственно.

Док-во: от противного и мт. энерг. метод.

$u_1 \neq u_2$.

$w(M) = u_1(M) - u_2(M)$

$$\begin{cases} \Delta w(M) = 0, \; M \in D_e \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) = 0, \; P \in S \\ w(M) \rightrightarrows 0, \; M \to \infty \end{cases}$$

Применим к w 1-ую ф-лу Грина:

$$u = v = w \Rightarrow \int\limits_{D_e} w \underbrace{\Delta w}_{\substack{=0 \\ (\text{из } (1))}} dV = \int\limits_S w \underbrace{\frac{\partial w}{\partial n}}_{\substack{=0 \\ (\text{из } (2))}} d\sigma - \int\limits_{D_e} \operatorname{grad}^2 w \, dV \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} w = 0 \Rightarrow w = C = const \Rightarrow$ из (3) $\Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow w = 0 \Rightarrow u_1(M) = u_2(M), \; M \in D_e \Rightarrow$ противоречие

15.2) ~~опр.~~ Вронского ф-ций Бесселя и Ханкеля.

$$W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = -\frac{i}{\sin \nu\pi} W[J_\nu, J_{-\nu}]$$

$\nu \neq n$

$$H_\nu^{(1)} = \frac{i}{\sin \nu\pi} \left(J_\nu(x) e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x) \right)$$

Если есть 2 ЛН реш. диф ур-я 2-ого рода:

$$W[y_1, y_2] = \frac{C}{x}$$

$$y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = 0$$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = C \exp\left(-\int p(x) dx\right)$$

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow H_\nu^{(1)} = \frac{i}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x) e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)\right)$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_\nu}{x}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{x^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2 p(x)\right\}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + x^2 Q(x)\right\}$$

$$|p(0)| < \infty; \quad |Q(0)| < \infty$$

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left\{2x p(x) + x^2 p'(x)\right\}$$

$$J_{-\nu}(x) = -\frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{2x Q(x) + x^2 Q'(x)\right\}$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = -\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) J_{-\nu}(x) + x S(x)$$

$$|S(0)| < \infty$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)} + x R(x); \quad |R(0)| < \infty$$

$$\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu) = \nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi\nu}{\sin \nu\pi}$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} + x R(x) = \frac{C_\nu}{x} \Rightarrow C_\nu = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

Теперь снимем ограничение $\nu \neq n$.

$$W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = -\frac{i}{\sin\nu\pi} W[J_\nu, J_{-\nu}] \Rightarrow W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \left(H_\nu^{(1)}(x)\right)^* \Rightarrow W[J_\nu, H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x}$$

16.1) Т. ед. реш. внеш. краевой задачи для ур-я Лапласа в 2D с ГУ Дирихле.

Классич. реш. задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in G_e \\ u(P) = g(P), & P \in \Gamma \\ |u(M)| < N, & M \in \overline{G_e} \end{cases}$$

единственно.

Док-во: от противного методом барьеров

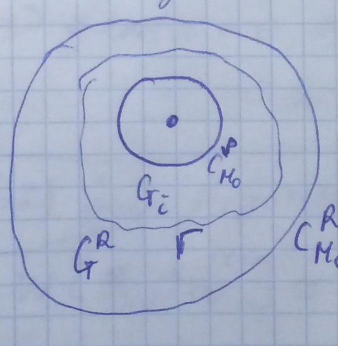
Пусть $\exists$ реш u_1, u_2 : $u_1 \neq u_2$

$w(M) = u_1(M) - u_2(M)$

$$\begin{cases} \Delta w(M) = 0, & M \in G_e \\ w(P) = 0, & P \in \Gamma \\ |w(M)| < N, & M \in \overline{G_e} \end{cases}$$

$|u_l(M)| < N_l$, $l = 1, 2 \Rightarrow N = N_1 + N_2$

док-во сводится к картинке



G_e.

Нас интересует G^R:

$G^R = G_e \cap Ш^R_{M_0}$

Построим ф-цию-барьер:

$$v(M, R) = N \frac{\ln \frac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln \frac{R}{\rho}}$$

См, как ведёт себя на Γ и $C^R_{M_0}$

$\Delta_M v(M, R) = 0$ (т.к. v — гармонич. ф-ция)

$v|_\Gamma \geq 0$ (т.к. R в обл. G_e) ; $v|_{C^R_{M_0}} = N$

$w|_\Gamma = 0$; $|w||_{C^R_{M_0}} \leq N$ $\Rightarrow$ применяя принципа max $\Rightarrow$

$\Rightarrow |w(M, R)| < v(M, R)$, $M \in G^R$

fix точку $\overline{M} \in G^R \Rightarrow$ при $R \to \infty \Rightarrow$ ф-ция барьер $\to 0$

$-v(\overline{M}, R) < w(\overline{M}) < v(\overline{M}, R) \Rightarrow$ по т. о двух милиционерах $\Rightarrow$

$\Rightarrow w(\overline{M}) = 0$, $\forall \overline{M} \in G_e \Rightarrow u_1 = u_2$, $M \in G_e \Rightarrow$ противоречие

16.2) асимптотика ф-ции Инфельда при $x \gg 1$.

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$$

$\nu \neq n$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} \cdot \frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right\} =$$

$$= \frac{i^{-\nu}}{2}\left\{e^{+i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})\right] +\right.$$

$$\left. + e^{-i(i\pi x)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})\right]\right\} =$$

$$= \frac{i^{-\frac{\nu}{2}}}{2} e^x \left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}\nu}}_{i^\nu} e^{i\frac{\pi}{4}} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})\right] =$$

$$= e^x\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + \underline{\underline{O}}(x^{-\frac{3}{2}})\right]$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

17.1) представление ф-ции Бесселя в виде обобщ. степ. ряда

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

$$(k(x)u'(x))'-q(x)u(x)=0$$

$x=0$ - особая $\Rightarrow y(x)=x^{\sigma}(a_0+a_1x+\dots+a_mx^m+\dots)=$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+\sigma} \quad (1)$$

$a_0\neq0$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \quad (2)$$

(1) $\rightsquigarrow$ (2) и приравн. коэф-ты:

$(\sigma^2-\nu^2)a_0=0 \Rightarrow \sigma^2=\nu^2 \Rightarrow \sigma=\pm\nu,\ \mathrm{Re}\,\nu\geq0$

$$((\sigma+1)^2-\nu^2)a_1=0 \Rightarrow a_1=0$$

$$((\sigma+2)^2-\nu^2)a_2+a_0=0$$

. . . . .

$$((\sigma+m)^2-\nu^2)a_m+a_{m+2}=0$$

$$a_{2k}\neq0;\ a_{2k+1}=0$$

$$a_m=-\frac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)} \quad (3)$$

$\sigma+m\pm\nu\neq0$

$\sigma=\nu;\ m=2k$

(3) $\Rightarrow a_{2k}=-\dfrac{a_{2k-2}}{2^2(\nu+k)k} \Rightarrow a_{2k}=\dfrac{(-1)^k a_0}{(\nu+k)\dots(\nu+1)k!\,2^{2k}}$

Реш. с точностью до произв. множителя

$a_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$

$(\nu+k)\dots\underbrace{(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}_{\Gamma(\nu+2)}=\Gamma(\nu+k+1) \Rightarrow J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$

$k!=\Gamma(k+1)$

17.2) Произв. ф-ция для полиномов Лежандра.

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n! \frac{(-1)^n}{2^n n!}} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) (-2z)^n = \frac{1}{1 - g'(t_0) z}$$

$$t - x - (1 - t^2) z = 0 \Rightarrow z t^2 + t - (x + z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0^{(\pm)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(x+z) z}}{2z}$$

$$\lim_{z \to 0} t_0^{(+)} = x; \quad \cancel{\lim_{z \to 0} t_0^{(-)} = -\infty}$$

$$\frac{1}{1 - g'(t_0) z} = \frac{1}{1 + 2 t_0^{(+)} z} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4xz + 4z^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) (-2z)^n = \frac{1}{\sqrt{1 + 4xz + 4z^2}}$$

$$2z \to z$$

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

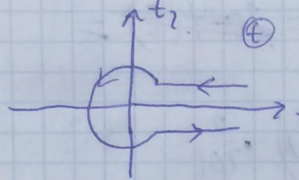
18.1) инт. представ. ф-ции Бесселя

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t} t^{-z-1}\, dt$$

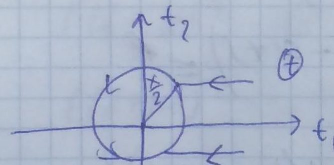
$$z = k+\nu \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi k}e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-k-\nu}\frac{dt}{t}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \Rightarrow$$

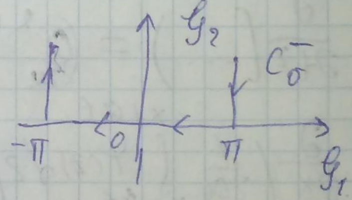
$$\Rightarrow J_\nu(x) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{\overbrace{(-1)^k e^{i\pi k}}^{=1}}{k!}\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k\right\}\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{dt}{t} \quad (1)$$



$$t = \frac{x}{2}e^{-i(\zeta-\pi)} \quad (2)$$



γ на (t) $\to C_0^-$ на (ζ)



$$\frac{dt}{t} = \frac{d\zeta}{i}$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k} = e^{\frac{x^2}{4t}}$$

$$(1) \Rightarrow J_\nu(x) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{\frac{x^2}{4t}-t}\cdot\left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu}\frac{dt}{t}$$

$$\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu = e^{i\nu(\zeta-\pi)}$$

$$\frac{x^2}{4t} - t = t\left\{\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - 1\right\} \overset{(2)}{=} \frac{x}{2}e^{-i(\zeta-\pi)}\left\{e^{2i(\zeta-\pi)} - 1\right\} =$$

$$= i\frac{x}{2i}\left\{e^{i(\zeta-\pi)} - e^{-i(\zeta-\pi)}\right\} = ix\sin(\zeta-\pi) = -ix\sin\zeta$$

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_0^-} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}\,d\zeta \Rightarrow |C_0^- \to C_0| \Rightarrow J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} e^{-ix\sin\zeta+i\nu\zeta}\,d\zeta$$

18.2) Т. $\exists$ класс. реш. одн. ур-я колеб. на беск. прямой.

Подставим ф-лу Д'Аламбера в ур-е:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{a^2}{2}\varphi_{tt}(x-at) + \frac{a^2}{2}\varphi_{tt}(x+at) + \frac{1}{2a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz =}$$

$$\cancel{= \frac{a^2}{2a}\varphi_{xx}(x-at) + \frac{a^2}{2a}\varphi_{xx}(x+at) + \frac{a}{2a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\right) = \cancel{a\psi(z) + a\psi(z) = 2a\psi(z)} =$$

$$= \left(a\psi(x+at) + a\psi(x-at)\right)\cdot\frac{1}{2a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\ldots) = \left(\frac{a^2}{2a}\psi_t(x+at) - \frac{a^2}{2a}\psi_t(x-at)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\right) = \frac{1}{2a}\left(\psi(x+at) - \psi(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ldots) = \frac{1}{2a}\left(\psi_x(x+at) - \psi_x(x-at)\right)$$

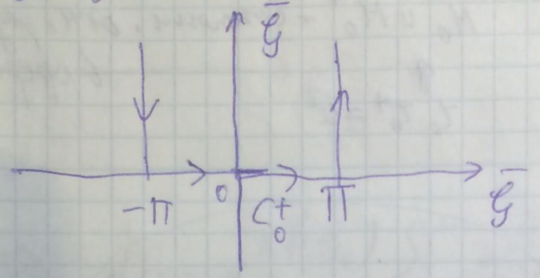
$$-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\varphi_{tt}(x-at) + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\varphi_{tt}(x+at) + \frac{a}{2}\psi_t(x+at) - \frac{a}{2}\psi_t(x-at) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2}\varphi_{xx}(x-at) + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2}\varphi_{xx}(x+at) + \frac{a^2}{2a}\psi_x(x+at) - \frac{a^2}{2a}\psi_x(x-at)$$

19.1) инт. представ. ф-ций Ханкеля 1 и 2 рода.

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0^+} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\, d\xi$$

$$\xi = \bar{\xi} + i\bar{\bar{\xi}}$$



Ищем реш. ур-я. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$

$$y(x) = \int_C e^{-ix\sin s}\, \phi(\xi)\, d\xi$$

C уходит на ∞, но там, где сх.

Пусть $x > 0$ – веще.

Инт. сх, если.

$\mathrm{Im}(i\sin\xi) < 0$; $\xi = \bar{\xi} + i\bar{\bar{\xi}}$

$$\sin(\bar{\xi} + i\bar{\bar{\xi}}) = \sin\bar{\xi}\, ch\,\bar{\bar{\xi}} + i\underbrace{\cos\bar{\xi}\, sh\,\bar{\bar{\xi}}}_{\mathrm{Im}(\sin\varphi)}$$

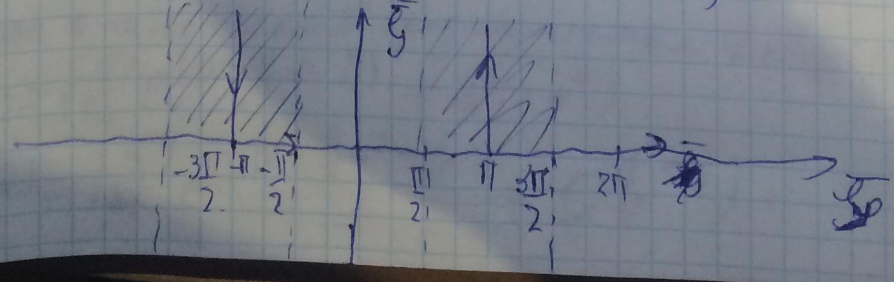
$\cos\bar{\xi}\; sh\,\bar{\bar{\xi}} < 0$

a) $\bar{\bar{\xi}} > 0 \Rightarrow sh\,\bar{\bar{\xi}} > 0 \Rightarrow \cos\bar{\xi} < 0$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \bar{\xi} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

б) $\bar{\bar{\xi}} < 0 \Rightarrow sh\,\bar{\bar{\xi}} < 0 \Rightarrow \cos\bar{\xi} > 0$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \bar{\xi} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2$



Φ - ф-ия $\varphi(\xi)$

$L_\nu[y] = x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y$

$L_\nu[y] = 0$

$K(x,\xi) = e^{-ix\sin\xi}$

$y(x) = \int\limits_C K(x,\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi$

$L_\nu[y] = \int\limits_C L_\nu[K(x,\xi)]\cdot\Phi(\xi)\,d\xi$

$L_\nu[K] = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-ix\sin\xi} + x\frac{\partial}{\partial x}e^{ix\sin\xi} + (x^2-\nu^2)e^{-ix\sin\xi} =$

$= \{-x^2\sin^2\xi - ix\sin\xi + x^2-\nu^2)\,K(x,\xi)$

$L_\nu[K] = (x^2\cos^2\xi - i\,x\sin\xi - \nu^2\}K.$

$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}K(x,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{-ix\sin\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\{-ix\cos\xi\, e^{-ix\sin\xi}\} =$

$= \{ix\sin\xi - x^2\cos^2\xi\}K(x,\xi)$

$L_\nu[K] = -K_{\xi\xi} - \nu^2K$

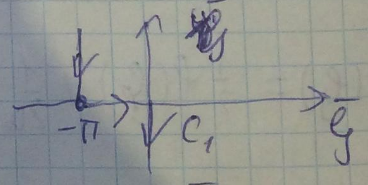
$L_\nu[y] = 0 \Rightarrow -\int\limits_C (K_{\xi\xi} + \nu^2K)\,\Phi(\xi)\,d\xi = 0$

исп. двукратное инт. по частям

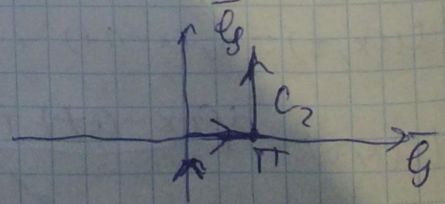
$\int\limits_C (\underbrace{\Phi'' + \nu^2\Phi}_{\text{пусть это } 0})\,K(x,\xi)\,d\xi = 0$

$\Phi'' + \nu^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\xi) = e^{\pm i\nu\xi}$

$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$



$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$



19.2) Ф-ла Даламбера

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow$ хар. ур-е: $(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 семейства характеристик:

$dx - a\,dt = 0 \Rightarrow x - at = c_1$

$dx + a\,dt = 0 \Rightarrow x + at = c_2$

$\{\xi = x - at;\ \eta = x + at\} \Rightarrow U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$

инт. по η: $U_\xi = \tilde{f}(\xi)$

(?) инт. по ξ: $U_\eta = f_2(\eta)$ $\Rightarrow U(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\xi)\, d\xi + f_2(\eta) \Rightarrow$

$\Rightarrow U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$

$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$u_t(x,0) = -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x)$

инт. и $* \frac{1}{a} \Rightarrow -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\, dz,\ x \in \mathbb{R}^1$

$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\, dz \Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\, dz$

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2}\varphi(\xi) - \frac{1}{2a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \psi(z)\, dz$$

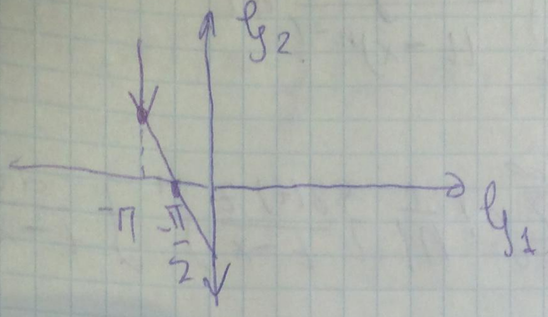
$$f_2(\xi) = \frac{1}{2}\varphi(\xi) + \frac{1}{2a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \psi(z)\, dz \qquad , \xi \in \mathbb{R}^1$$

$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz$$

~~21.2) Св-ва фунд. реш. ур-я теплопр. на беск. прямой~~

20.1) Асимптотика ф-ций Ханкеля при $x \gg 1$



$f(\zeta), \varphi(\zeta)$; $G: C \in G$

$$\int\limits_C e^{xf(\zeta)} \varphi(\zeta)\, d\zeta = e^{xf(\zeta_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(\zeta_0)|}}\, \varphi(\zeta_0) e^{i\psi} + \underline{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \right\}$$

$(x \gg 1)$

$f'(\zeta_0) = 0$; $\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(\zeta_0))$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} d\zeta$$

$f(\zeta) = -i\sin\zeta \Rightarrow f'(\zeta_0) = -i\cos\zeta_0 = 0 \Rightarrow \zeta_0 = -\frac{\pi}{2}$

$f(\zeta_0) = -i\sin(-\frac{\pi}{2}) = i$

$f''(\zeta_0) = i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

~~$\arg f''(\zeta_0) = i\sin(-\frac{\pi}{2}) = \dots$~~

$\arg f''(\zeta_0) = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}(\pi - \frac{3}{2}\pi) = -\frac{\pi}{4}$

$\varphi(\zeta) = e^{i\nu\zeta} \Rightarrow \varphi(\zeta_0) = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}$

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{ix}\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \right\}$$

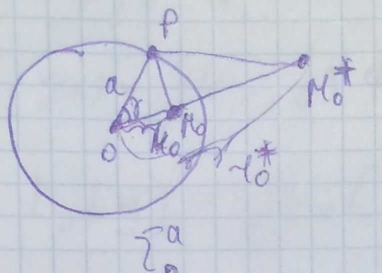
Последняя ф-ла м.б. аналит. продолжена на компл. п-ть z всюда: $|\arg z| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-\frac{3}{2}})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-\frac{3}{2}})$$

20.2.) Ф-ция Грина задачи Дирихле для ур-я Лапласа в шаре методом эл-стат. изображений

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in K_0^a \\ u(P) = \mu(P), & P \in \Sigma_0^a \end{cases}$$



M_0 и M_0^* – сопряж. отн. радиуса a в сфере Σ_0^a

$\Uparrow$

$r_0 r_0^* = a^2$

треуг. OPM_0 $\sim$ треуг. OPM_0^*

$r_0 r_0^* = a^2 \Rightarrow \dfrac{r_0}{a} = \dfrac{a}{r_0^*}$; подобие $\Rightarrow \dfrac{r_0}{a} = \dfrac{a}{r_0^*} = \dfrac{r_{PM_0}}{r_{PM_0^*}}$

ф-ция Грина:

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_{MM_0}} - \underbrace{\frac{a}{r_0}\,\frac{1}{r_{MM_0^*}}}_{\text{гармонич. ф-ция}}\right\}$$

M и на пов. $S \Rightarrow g(M, M_0) = 0 \Rightarrow$ все усл. вып. для ф-ции Грина.

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_0^a} \frac{a^2 - r_0^2}{r_{PM}^3}\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

порядок суммирования и инт.:

$$\Rightarrow u(M,t)=\int_{D}\int_{0}^{t} g(M,Q,t-\tau)\,f(Q,\tau)\,dV\,d\tau$$

$$g(M,Q,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} K_n(t-\tau)\,v_n(M)\,v_n(Q)$$

К. 21.2 (3)): $g(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2+ik(x-\xi)}\,dk \Rightarrow |t=0| \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x,\xi,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\xi)k}\,dk=\delta(x,\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это ~~фунд. реш. обобщ.~~ фунд. реш. явл. обобщ. ф-цей $\Rightarrow$ 21.3

22.1) Ф-ла Кирхгофа

локальное время т. M_0: $t' = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$

$(r, \varphi, \theta, t) \to (r, \varphi, \theta, t') \Rightarrow u \to U;\ f \to F$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\Delta U = \frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right) - \frac{1}{a^2}F(M, t')$$

U от t завис. как от параметра.

$t' = 0 \Rightarrow$ Рассм. как ур-е Пуассона $\Rightarrow$

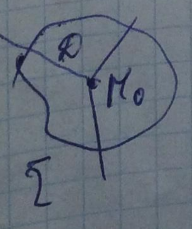
$\Rightarrow$ реш. с помощью 3-ей ф-лы Грина

Ф-ла Кирхгофа — 3-я ф-ла Грина для ур-я:

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U}{\partial n_P}(P,0) - U(P,0)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right\} d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}(M,0)\right) dV_M + \frac{1}{4\pi a^2}\int_D \frac{F(M,0)}{r_{MM_0}} dV_M$$

сведём к инт. по пов. Σ



любой луч., исх. из M_0, пересекает Σ 1 раз.

~~22.1) Ф-ла Кирхгофа~~

$$J = \frac{1}{4\pi}\int_{D} \frac{2}{a r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial t'}\right) dV_M = \left[dV_M = r^2 dr\, d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{2}{r}\, r\, \frac{\partial u}{\partial t'}\, d\omega = \left[d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right] =$$

инт. по углам

$$= \left[\begin{array}{l}\text{умножим}\\ \text{и поделим на } r\end{array}\right] = \frac{1}{4\pi}\int \frac{2}{a r}\frac{\partial u}{\partial t'}(P,0)\, r^2 d\omega$$

$$\underbrace{r^2 d\omega}_{\substack{\text{беск. малый}\\ \text{эл.-т сферы}\\ \text{радиуса } r}} = \cos(\vec{n}_P, \hat{\ } \vec{r})\, d\sigma_P = \frac{d r_{PM_0}}{d n_P}\, d\sigma_P$$

$$\frac{dr}{dn_P} = (\operatorname{grad} r, \vec{n}) = (\underset{\text{орт } r}{\vec{i}_r}, \vec{n}) = \cos(\vec{n}_P, \hat{\ } r_{PM_0})$$

$$u(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n_P}(P,0) - u(P,0)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \underline{\frac{2}{a r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t'}(P,0)\frac{d r_{PM_0}}{d n_P}}\right\} d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_{D}\frac{F(M,0)}{r_{MM_0}}\, dV_M$$

$$(r, \varphi, \theta, t') \to (r, \varphi, \theta, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_P} = \frac{\partial u}{\partial n_P} + \frac{\partial u}{\partial t}\overset{=-\frac{1}{a}}{\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)}\cdot\frac{dr}{dn_P} \quad \left(= -\frac{1}{2}\ \text{подчёркнутого}\right)$$

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{d r_{PM_0}}{d n_P}\right\} d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_{D}\frac{f\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}\, dV_M.$$

22.2) Общая схема метода разделения перем.

1) Расс. задачу для одн. ур-я неодн. НУ и одн. ГУ

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[u] = L_M[u], \quad (M,t) \in Q_\infty \\ u(M_0) = \varphi_0(M), \ \dots, \ \dfrac{\partial^m u(M,0)}{\partial t^m} = \varphi_m(M), \ M \in \overline{D} \\ N_P[u(P,t)] = 0, \ P \in S, \ t \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Расс. вспомог. задачу.

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[w] = L_M[w], \quad (M,t) \in Q_\infty \\ N_P[w(P,t)] = 0, \ P \in S, \ t \in [0; +\infty) \\ w(M,t) = v(M) T(t) \\ w(M,t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$\frac{P_t[T(t)]}{T(t)} = \frac{L_M[v]}{\rho v(M)} = -\lambda$$

Приходим к задаче на СЗ:

$$\begin{cases} L_M[v] + \lambda \rho(M) v = 0, \ M \in D \\ N_P[v(P)] = 0, \ P \in S \end{cases}$$

Временная часть:

$$P_t[T_n(t)] + \lambda_n T_n(t) = 0, \quad t \in [0; +\infty).$$

λ_n – некит параметр, явл. СЗ задачи для v:

$$\alpha_{m+1}(t) T_n^{(m+1)}(t) + \dots \ \alpha_0(t) T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = 0$$

Для реш. построим ФСР: система $\forall n+1$ независ. реш.

$$T_{n,k}^{(l)}(0) = \delta_{kl}$$

↑ общее реш. ↖ частное реш.

См., что полученная система реш. ЛН.

Вронскиан:

$$W[T_{nn}(0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{nk} T_{nk}(t)$$

Реш: $u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \sum_{k=0}^{m} C_{nk} T_{nk}$

$$\frac{\partial^l u(M,0)}{\partial t^l} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \sum_{k=0}^{\infty} C_{nk} T_{nk}^{(l)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nl} v_n(M) = \varphi_l(M),$$
$M \in \overline{D}$

$$C_{nl} = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \rho(M) \varphi_l(M) v_n(M) dV$$

2) Рассм. задачу для неодн. ур-я. одн. НУ и одн. ГУ

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[u] = L_M[u] + F(M,t), & (M,t) \in Q_\infty \quad (1) \\ u(M,0) = 0, \ldots \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = 0; & M \in \overline{D} \\ N_P[u(P,t)] = 0, \ P \in S, & t \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Будем искать реш. задачи по СФ задачи для v, считая, что они ортонорм.

$\|v_n(M)\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M)$$

далее предполаг., что $F(M,t) = \rho(M) f(M,t)$

$$u_n(t) = \int_D \rho(M) u(M,t) v_n(M) dV, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Умножим ур-е (1) слева и справа на СФ

$$f_n(t) = \int_D F(M,t)\, v_n(M)\, dV = \int_D \rho(M)\, f(M,t)\, v_n(M)\, dV$$

$$P_t[u_n(t)] = \underbrace{\int_D v_n(M)\, L_M[u(M,t)]\, dV}_{\text{применим 2-ую ф-лу Грина с учетом одн. гу.}} + f_n(t) \qquad (2)$$

$$L_M[v_n] = -\lambda_n \rho v_n \quad (3)$$

$$\begin{cases} (2),(3) \Rightarrow P_t[u_n(t)] + \lambda_n u_n(t) = f_n(t) & (4) \\ u_n^{(l)}(t) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m. & (5) \end{cases}$$

инт. $u_n(t)$ можно т.к. ряд диф. под знаком интеграла $\Rightarrow$ (5)

$$u_n(t) = \int_0^t k_n(t-\tau)\, f_n(\tau)\, d\tau \qquad (6)$$

(6) $\to u(M,t) \Rightarrow$ учитывая $f_n(t)$ и меняя ~~знак~~ порядок суммирования и инт. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(M,t) = \int_D \int_0^t g(M,Q,t-\tau)\, f(Q,\tau)\, dV\, d\tau$$

$$g(M,Q,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t-\tau)\, v_n(M)\, v_n(Q)$$

(1.2(3)): $g(x,\xi,t) = \frac{1}{...} \int^{\infty} e^{-a^2k^2 + ik(x-\xi)} ...$

23. 1) Ф-ла Пуассона в 3D.

~~Перепишем~~

Пусть $P \in \Sigma_{M_0}^{at_0} \Rightarrow u\left(P, t_0 - \frac{\overset{=at_0}{r_{PM_0}}}{a}\right) = u(P,0) = \varphi(P)$

аналогично: $\frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) = \frac{\partial u(P,0)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(P)}{\partial r}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}(P,0) = \psi(P)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi) + \frac{\psi}{ar}\right\} d\sigma_P = \left[\begin{gathered} d\sigma_P = r^2 d\omega, \text{ т.к.} \\ \text{мы на пов. сферы} \end{gathered}\right] =$$

~~[умножим и поделим]~~ = ~~[Ω не завис. от $\frac{\partial}{\partial t_0}$ ⇒ $\frac{\partial}{\partial t_0}$ вынесется из-под инт.]~~ =

$$= \left[\begin{gathered}\text{умножим и} \\ \text{поделим на } r\end{gathered}\right] = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)\Big|_{r=at_0} d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{r\psi}{a}\, d\omega =$$

$$= \left[\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t_0} \text{ вынесется из-под} \\ \text{инт., т.к. } \Omega \text{ от} \\ \text{него не зависит}\end{gathered}\right] = \left[\begin{gathered}\text{умножим на } r^2 \\ \text{и поделим на } r^2; \\ \Omega \to \Sigma_{M_0}^{at_0}\end{gathered}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P$$

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\, d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_{K_{M_0}^{at_0}} \frac{f\left(M, t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}\, dV_M.$$

23.2) Построить ф-цию Грина для ур-я Лапласа внутр. задачи Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), & M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P) = h(P), & P \in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}) \end{cases}$$

$$\cancel{\oint_S \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) \Delta_P \neq \Delta}$$

Если строить ф-цию аналогично тому, как было в случае задачи Дирихле, то придём к задаче для ф-ции v:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & M \in D \\ \frac{\partial v}{\partial n}(P) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right), & P \in S \end{cases}$$

но т.к. $\int\limits_S \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) d\sigma_P = -1$, то необх. усл. разреш. задачи для v не вып.

последняя ф-ла получается из 3-ей ф-лы Грина при $u(M) \equiv 1$

Будем строить ф-цию Грина задачи Неймана общего вида, т.е. предполаг., что для ф-ции Грина получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta_M g(M, M_0) = \delta(M, M_0), & M \in D \\ \frac{\partial g}{\partial n_P}(P, M_0) = \tau, & P \in S \end{cases}$$

для v: $$\begin{cases} \Delta_M v = 0, & M \in D \\ \frac{\partial v}{\partial n_P}(P) = \tau - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) \end{cases}$$

усл. разрешимости

$$\int\limits_S \left(\tau - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\right) d\sigma_P = 0 \Rightarrow \tau S = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{1}{S}$$

σ - площадь пов. S.

$$u(M_0) = \int_S \Big\{ g(P, M_0) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(P)}_{= h(P)} - u(P) \underbrace{\frac{\partial g(P, M_0)}{\partial n_P}}_{= \tau} \Big\} d\sigma_P -$$

$$- \int_D \underbrace{\Delta u(M)}_{= -f(M)} \cdot g(M, M_0)\, dV_M$$

$$u(M_0) = \int_S g(P, M_0)\, h(P)\, d\sigma_P + \int_D g(M, M_0)\, f(M)\, dV_M + \text{const}$$

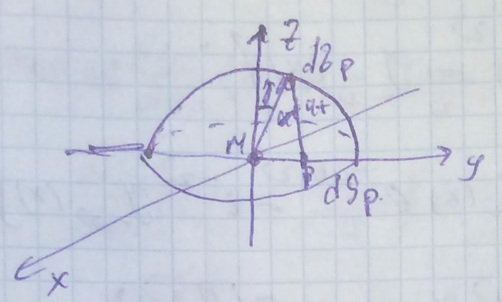
$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

Прим: для верхнего полупр - ва:

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{r_{MM_0^*}} \right\}.$$

24.1) С помощью метода спуска Адамара получить ф-лу Пуассона в 2D.

$\varphi = \varphi(x, y)$; $\psi = \psi(x, y)$; $f = f(x, y, t)$ $\Rightarrow u(x, y, t)$



Возьмём верхнее полушарие.

Найдём связь между $d\sigma$ и dS_P.

$M = M(x, y)$; $P = P(\xi, \eta)$

$$dS_P = d\xi\, d\eta = \cos\gamma \cdot d\sigma = \frac{\sqrt{(at)^2 - r_{PM}^2}}{at} \Rightarrow \left.\frac{d\sigma}{r}\right|_{r=at} = \frac{1}{at}\frac{dS_P}{\cos\gamma} =$$

$$= \frac{1}{at} \cdot \frac{at}{\sqrt{(at)^2 - r_{PM}^2}}\, d\xi\, d\eta = \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{K_M^{at}} \frac{f\left(Q, t - \frac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}}\, dV_Q = \text{[сводим к повторным инт.]} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} d(a\tau) \int\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f(Q, t-\tau)}{r_{QM}}\, d\sigma_Q =$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f(Q, t-\tau)}{r_{QM}}\, d\sigma_Q$$

теперь в последней ф-ле перейдём к 2D:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{U_M^{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{U_M^{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int\limits_{U_M^{a\tau}} \frac{f(\xi, \eta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

24.2) Асимптотика ф-ции Макдональда при $x \gg 1$.

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(x)$$

1) $\nu \neq n$.

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\sin \nu\pi}\left\{ J_\nu(x) e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right\}.$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu \cdot i \cdot \frac{i}{\sin \nu\pi}\left\{ i^\nu J_\nu(x) e^{-i\pi\nu} - i^{-\nu} J_{-\nu}(x)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{i^\nu}{\sin \nu\pi}\left\{ i^{-\nu} J_{-\nu}(x) - i^\nu J_\nu(x) e^{-i\pi\nu}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{ J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)\right\}.$$

$$\nu \neq n \Rightarrow K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{ J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)\right\}$$

2) $\nu = n$.

$$K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x) = \left|\text{неопр } \frac{0}{0}\right| =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\left\{ \left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right\}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu i H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{i(ix)} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-\frac{3}{2}})\right]$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

~~вычисл. задачи Неймана для ур-я Лапласа в 3D.~~

25.1) Ур-е для присоед. ф-ций Лежандра.

Исх. из ур-я для полиномов Лежандра.

$$u(x) = P_n(x) \Rightarrow (1-x^2)u''(x) - 2xu'(x) + n(n+1)u(x) = 0$$

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)}(x)\, v^{(m-k)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)}(x) + \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)}(x) + n(n+1)u^{(m)}(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\cancel{m}\,2} C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)}(x) = \{l=k+1\} = \sum_{l=1}^{\cancel{m+1}\,2} C_m^{l-1} (1-x^2)^{(l)} u^{(m-l+2)}(x)$$

$$1 = C_m^0 (1-x^2)u^{(m+2)}(x) + \underbrace{(C_m^1 + C_m^0)}_{m+1}\underbrace{(1-x^2)'}_{=-2x} u^{(m+1)}(x) + \underbrace{(C_m^2 + C_m^1)}_{\frac{m(m-1)}{2}+m}\underbrace{(1-x^2)''}_{=-2} u^{(m)}(x) + n(n+1)u^{(m)}(x) = 0$$

$$(1-x^2)u^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)u^{(m+1)}(x) + \{n(n+1) - m(m+1)\}u^{(m)}(x) = 0$$

$$v(x) = u^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

$$(1-x^2)v''(x) - 2x(m+1)v'(x) + \{n(n+1) - m(m+1)\}v(x) = 0$$

Замена: $v(x) = (1-x^2)^{-m/2}y(x)$; $y(x) = P_n^{(m)}(x)$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

23.2) т. ед. реш. внутр. краевой задачи для ур-я Гельмгольца

от противного: $u = u_1 - u_2$ => ~~похоже на задачу~~:

=> похоже на след. задачу:

$$\begin{cases} \Delta v_n + \lambda_n v_n = 0, \ M \in D \\ \alpha \frac{\partial v_n}{\partial n} + \beta v_n = 0 \end{cases}$$

$C \neq \lambda_n$ => только трив. реш.

$C = \lambda_n$ => неодн. задача имеет много реш.

$C = k^2$ => если фунд. реш. $\frac{e^{-ikr}}{r}$ =>

=> Ф-ция Грина имеет вид:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial u_P}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right\} d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_D L[u(Q)]\frac{e^{ikr_{QM_0}}}{r_{QM_0}} dV_Q$$

$$L[u] = \Delta u + k^2 u$$

$$g(M, M_0) = \frac{e^{ikr_{MM_0}}}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

$$v(M) = \int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right) d\sigma_P$$

можно свести к инт. ур-ю Фредгольма

$$\Delta u + cu = -f(M)$$

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - C} v_n(M)$$

$C \neq \lambda_n$ => реш. $\exists$ и ед.

$C = \lambda_{n_0}$ => если это и кратное СЗ, след соотв. набор СФ.