ММФ (экзамен).

Письменная часть.

Билет 1.

1. Принцип максимума для гармонической ф-ции.

„Гармоническая в области D ф-ция, отличная от постоянной, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, достигает своих максимальных и минимальных значений только на границе S области D." здесь $\overline{D} = D \cup S$.

Д-во:

т.к. ф-ция $u(M)$ непр. в $\overline{D}$, то она достигает своего максимального значения в этой замкн. области. Д-ем, что это максимальное значение достигается ф-цией $u(M)$ на пов-ти S.

П: пусть ф-ция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D:

$$u_0 = \max_{\overline{D}} u(M) = u(M_0) \geq u(M), \quad M \text{ — любая точка области } \overline{D}.$$

Окружим точку M_0 сферой $\Sigma_\rho^{M_0}$ радиуса ρ, целиком лежащей в области D, и применим теорему о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(M_0)\,dS = u(M_0) \cdot \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} dS = u(M_0)$$

Написанная цепочка соотношений верна только в случае, если:

$$u(P)\big|_{\Sigma_\rho^{M_0}} \equiv u(M_0).$$

Действительно, т.к. крайние элементы цепочки равны, то:

$$\oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS = 4\pi\rho^2 u(M_0).$$

Если теперь предположить, что хотя бы в одной точке P_0 сферы $\Sigma_\rho^{M_0}$:

$u(P_0) < u(M_0)$, то это нер-во, в силу непр-ти $u(M)$, будет иметь место и в некоторой окрестности точки P_0 на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$, откуда:

$$\oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS < 4\pi\rho^2 u(M_0), \text{ что приводит к противоречию.}$$

След-но, всюду на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$: $u(P) \equiv u(M_0)$.

Поскольку ρ произвольно, то его можно выбрать так, чтобы сфера $\Sigma_\rho^{M_0}$ касалась пов-ти S. Точку касания обозначим M^*. В точке M^* и достигается максимальное значение $u_0 = u(M_0)$.

Применяя проведённые рассуждения к гармонической ф-ции $v \equiv -u$, д-жем достижение на пов-ти S минимального значения.

Покажем, наконец, что только ф-ция, тождественно равная постоянной может достигать своего максимального значения во внутр. точках области.

Из проведённых выше рассуждений следует, что ф-ция $u(M) = u_0$ не только на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$, но и, в силу произвольности ρ, всюду внутри шара $K_\rho^{M_0}$, ограниченного этой сферой.

Возьмём произв. точку M области D. Соединим точки M_0 и M кривой C, целиком лежащей в обл. D. Обозначим наименьшее расстояние точек C от пов-ти S ч/з d, а длину кривой C – ч/з l. Пусть т. M_1 явл. последней точкой пересечения кривой C и сферы $\Sigma_d^{M_0}$. Поскольку $u(M_1) = u(M_0)$, то, повторяя проведённые рассуждения, получим, что всюду внутри шара $K_d^{M_1}$ ф-ция u постоянна и равна $u(M_0)$. Взяв на кривой C точку M_2, являющуюся последней точкой пересечения кривой C и сферы $\Sigma_d^{M_1}$, и продолжая данный процесс, в рез-те конечного числа шагов, которое не более l/d, получим, что внутри шара, которому принадлежит т. M, ф-ция u постоянна и равна $u(M_0) = u_0$. В силу произвольности т. M и непрерывности ф-ции u в замкн. обл. $\overline{D}$. Таким образом, из всех гармонических ф-ций, непр-ных в $\overline{D}$, только постоянная может достигать своего максимального значения во внутр. точках области.

Аналогично для минимального значения.

2. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для ур-ния Гельмгольца в случае граничных условий общего вида.

„При $h(P) \geq 0$ на S краевая задача: $\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f \end{cases}$

не может иметь более одного классического решения."

Д-во: Покажем, что однородная задача $\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = 0, \ h \geq 0; \end{cases}$ (3)

имеет только тривиальное решение.

Применим к решению однородной задачи 1-ю ф-лу Грина:

$$\int_D u \Delta u \, dV = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D (\mathrm{grad}\, u)^2 dV.$$

Учитывая, что $\Delta u = \varkappa^2 u$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -hu\Big|_S$, получаем:

$$\varkappa^2 \int_D u^2 dV + \int_S hu^2 dS + \int_D (\mathrm{grad}\, u)^2 dV \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0 \text{ в } \overline{D}.$$

■

Билет 2.

1. Теорема о нулях КОП.

„КОП $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a,b]$."

Д-во: пусть n – произв. фикс. целое положительное число.

В силу ортогональности полиномов $p_n(x)$ и $p_0(x) \equiv 1$ имеем:

$$\int_a^b p_n(x) \cdot 1 \cdot \rho(x) \cdot dx = 0, \quad n > 0.$$

След-но, полином $p_n(x)$ меняет знак на интервале (a,b) в некотором числе $k \geq 1$ различных точек $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($x_i \in (a,b)$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$).

Тогда полином $p_n(x)$ имеет вид: $p_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)\varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ не меняет знака на (a,b).

Для док-ва теоремы достаточно показать, что $k = n$.

ПП: $k < n$.

т.к. система КОП $\{p_n(x)\}$ содержит полиномы всех степеней, то для полинома $r_k(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)$ справедливо разложение:

$$r_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x), \text{ где } a_k \neq 0.$$

т.к. $k < n$, имеем: $\int_a^b p_n(x) r_k(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^{k} a_i \int_a^b p_n(x) p_i(x) \rho(x) dx = 0.$

С другой стороны: $\int_a^b p_n(x) r_k(x) \rho(x) dx = \int_a^b r_k^2(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx \neq 0.$

} получили противоречие.

След-но, $k \geq n$. А поскольку полином n-й степени не может иметь более n нулей, то $k = n$. Отсюда вытекает, что все корни простые.

■

2. Определение потенциала двойного слоя. Доказательство его основных свойств. (4)

Опр.: Потенциалом двойного слоя в трёхмерном случае наз. интеграл вида $W(M) = -\int\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$, где S – двусторонняя пов-ть, $\vec{n}_P$ – внешняя нормаль к пов-ти S в т. P, $\nu(P)$ – ф-ция, заданная на пов-ти S (она наз. плотностью потенциала двойного слоя).

$W(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}} dS_P$, где φ – угол м/у внутр. нормалью к пов-ти S в т. P и вектором $\vec{PM}$.

Св-ва: 1) из опр. следует, что в том случае, когда т. $M \notin S$, потенциал имеет производные всех порядков, которые можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, и явл. гармонической ф-цией: $\Delta W = 0$;

2) при $M \to \infty$ в случае ограниченной пов-ти: $W = \underline{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), r \to \infty$.

Билет 3.

1. Теорема единственности решения ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

„Задача $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^1; \end{cases}$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{\Omega}$."

$\Omega = \mathbb{R}^1 \times (0, T]$ и $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0, T]$.

Д-во:

$\boxed{\text{П}}$: пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – 2 классических ограниченных решения данной задачи. Ф-ции u_1 и u_2 непр. и огр. в области $\overline{\Omega}$: $|u_k| \le M$; $k = 1,2$. ✗ $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Ф-ция $v(x,t)$ непр. в обл. $\overline{\Omega}$, ограничена $|v(x,t)| \le 2M$, удовл. в обл. Ω однородному ур-нию теплопроводности: $v_t = a^2 v_{xx}$, и однородному начальному условию: $v(x,0) = 0$.

Однако применить к ф-ции $v(x,t)$ принцип максимума нельзя, поскольку в неогр. по x области ф-ция $v(x,t)$ может нигде не принимать максимального значения.

Чтобы воспользоваться принципом максимума, ∡ огр. по x (5)
область: $|x| \le L$, где $L>0$ — вспомогательное число, которое будем затем неограниченно увеличивать. Обозначим:

$$\overline{\Omega}_L = [-L, L] \times [0, T] \quad \text{и} \quad \Omega_L = [-L, L] \times (0, T].$$

Введём вспомогательную ф-цию (её обычно наз. барьером):

$$\omega(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Ф-ция $\omega(x,t)$ непр. в обл. $\overline{\Omega}_L$ и удовл. в области Ω_L однор. ур-нию теплопроводности (что проверяется непосредственно). Кроме того, ф-ции $v(x,t)$ и $\omega(x,t)$ связаны следующими нер-вами:

$$\omega(x,0) \ge |v(x,0)| = 0,$$

$$\omega(\pm L, t) \ge 2M \ge |v(\pm L, t)|.$$

В огр. обл. $\overline{\Omega}_L$ уже справедлив принцип максимума. Применяя принцип сравнения (1 формулировка) к ф-циям $-\omega(x,t)$, $v(x,t)$ и к ф-циям $v(x,t)$, $\omega(x,t)$, с учётом последних нер-в, получим:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le v(x,t) \le \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Зафиксируем точку $(x,t) \in \overline{\Omega}_L$ и перейдём в последнем соотношении к пределу при $L \to \infty$. Тогда по известной теореме анализа получим:

$$\lim_{L\to\infty} v(x,t) = 0.$$

Отсюда в силу независимости ф-ции $v(x,t)$ от L и в силу произвольности точки (x,t) получаем, что всюду в области $\overline{\Omega}$ ф-ция $v(x,t) \equiv 0$. Поэтому всюду в области $\overline{\Omega}$: $u_1 \equiv u_2$, т.е. решение единственно.

2. Построение ф-ции Грина задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в верхнем полупространстве.

Для построения ф-ции Грина в верхнем полупр-ве ($-\infty < x < +\infty$, $y < \infty$, $z \ge 0$) удобнее всего применить метод электростатических изображений.

Чтобы построить ф-цию Грина, достаточно определить ф-цию v, которая в данном случае явл. решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ при } z>0, \\ v|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Big|_{z=0}, \; M=(x,y,z); \\ v \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности;} \end{cases}$$

Пусть M_1 - точка, симметричная точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $z=0$. Тогда очевидно, что решением задачи явл. ф-ция:

$v = -\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$. След-но, ф-ция Грина имеет вид:

$$G(M, M_0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}}_{\text{потенциал точечного заряда, расположенного в т. } M_0} - \underbrace{\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}}_{\text{потенциал точечного заряда противоположного знака, расположенного в симметричной т. } M_1}.$$

P.S. Учитывая физическую интерпретацию ф-ции Грина, выражение для неё можно было записать сразу.

Билет 4.

1. Теорема существования классического решения уравнения теплопроводности на отрезке.

„Пусть ф-ция $\varphi(x)$ непр. на отрезке $[0, l]$, имеет на нём кусочно-непрерывную производную и удовл. условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \; 0<x<l, \; 0<t<\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), \; 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0, \; 0 \le t < \infty; \end{cases}$$
представимое в виде ряда:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где } C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \; n = 1, 2, \ldots \text{"}.$$

Д-во: предварительно д-жем обобщённый принцип суперпозиции:

„Пусть $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, - частные решения линейного однородного дифференциального ур-ния обыкновенного или в частных производных $L[u_n(x,t)] = 0$ и пусть все дифференциальные операции над ф-цией $u(x,t)$, представимой сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$, входящие в это ур-ние, можно проводить путём почленного дифференцирования ряда. Тогда ф-ция $u(x,t)$ также удовлетворяет ур-нию $L[u] = 0$."

При выполнении сформулированных в принципе условий получаем: $L[u] = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n] = 0$, что и требовалось док-ть. 7

Перейдём к д-ву теоремы:

Нужно д-ть, что ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$ (*) сходится в области $\overline{\Omega} = [0,l]\times[0,\infty)$ и ф-ция $u(x,t)$, представимая этим рядом, непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет заданному начальному и граничным условиям, обладает непр. производными, входящими в ур-ние $u_t = a^2 u_{xx}$, и удовлетворяет этому ур-нию в области $\Omega = (0,l)\times(0,\infty)$.

Д сх-ть ряда. Мажорантным рядом для него будет ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|,$$

который сх-ся в силу условий, наложенных на ф-цию $\varphi(x)$ и св-в рядов Фурье (см. стр. 245). Поэтому ряд для $u(x,t)$ сх-ся равномерно в $\overline{\Omega}$ и его сумма $u(x,t)$ есть ф-ция, непр. в $\overline{\Omega}$.

Отсюда следует, что ф-ция $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$ удовл. однородным ГУ $u(0,t)=0$ и $u(l,t)=0$, поскольку им удовл. все СФ $\sin\frac{\pi n x}{l}$, и при $t=0$ переходит в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0,l]$ для ф-ции $\varphi(x)$.

Т.к. каждый член ряда (*) явл. решением однородного ур-ния $u_t = a^2 u_{xx}$, то в силу обобщённого принципа суперпозиции достаточно показать, что в области Ω существуют u_t и u_{xx}, и их можно вычислить путём почленного диф-ния ряда (*).

Покажем, что при $t \geq \bar{t}$, где $\bar{t}>0$ - любое число, сходятся равномерно ряды из производных: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$, где

$u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$ - общий член ряда (*).

Поскольку ф-ция $\varphi(x)$ непр. на отрезке $[0,l]$, то она огр. на нём: $|\varphi(x)| \leq M$, $x\in[0,l]$, где $M>0$ - некоторая постоянная и:

$$|C_n| = \frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\right| \leq 2M.$$

Поэтому при $t \geq \bar{t}$ получаем:

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{\ell}x\right| \leq 2M\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 \bar{t}} \quad (1)$$

и

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{\ell}x\right| \leq 2M\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 \bar{t}} \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) вытекает, что для док-ва равномерной сх-ти рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ нужно д-ть сх-ть мажорантных рядов вида $\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 \bar{t}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}_{(3)}$, где $N = 2M\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2$ – для первого мажорантного ряда, $N = 2M\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2$ – для второго.

Сх-ть ряда вида (3) следует из признака сх-ти Даламбера, т.к.:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2(2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Поскольку при $t \geq \bar{t} > 0$ мажорантные ряды сходятся, то сами ряды сходятся равномерно и ряд (☆) можно диф-ть почленно дважды по x и один раз по t при $t \geq \bar{t}$ или, ввиду произвольности $\bar{t} > 0$, в области $\Omega = (0,\ell)\times(0,\infty)$.

В силу обобщённого принципа суперпозиции ф-ция $u(x,t)$, представимая рядом (☆), удовл. ур-нию $u_t = a^2 u_{xx}$.

Итак, мы доказали, что при условиях теоремы ф-ция $u(x,t)$, представимая ф-лой (☆) с коэф-тами $C_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx$, $n = 1, 2, \ldots$, явл. классическим решением НКЗ.

2. Д-ть, что система полиномов Лежандра исчерпывает все СФ соответствующей ЗШЛ.

Полиномы Лежандра: $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

пусть $P_n(x) = y$, тогда ЗШЛ:

$\tau(x) = -2x;\ \sigma(x) = 1 - x^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + \lambda_n y = 0, \\ |y(\pm 1)| < \infty, \quad x \in (-1, 1). \end{cases}$$

$$\lambda_n = -n\left(\tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''\right) = n(n+1)$$

Поскольку система полиномов Лежандра задана на конечном интервале $[-1,1]$, то в силу т. Вейерштрасса она явл. замкнутой, а след-но, полной и исчерпывает все СФ ЗШЛ. (9)

Билет 5.

1. Принцип максимума для ур-ния параболического типа.

„Решение однородного ур-ния теплопр-ти $\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, непрерывное в замкн. цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$, во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений больших, чем максимальное из начального и граничного значений."

Д-во: Нам н.д., что если $\widetilde{M}^* = \max \begin{Bmatrix} u(M,0), u(P,t) \\ M\in\overline{D}, P\in S, t\in[0,T] \end{Bmatrix}$,

то $u(M,t) \leq \widetilde{M}^*$, $(M,t)\in Q_T$.

П: пусть в некоторой внутренней точке цилиндра $(M_0,t_0)\in Q_T$ ф-ция $u(M,t)$ достигает своего максимального значения, большего $\widetilde{M}^*$: $u(M_0,t_0) > \widetilde{M}^*$. Таким образом: $u(M_0,t_0) = \widetilde{M}^* + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Введём вспомогательную ф-цию $v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t)$, (1)

где $\alpha > 0$ — число, которое мы определим дальше. Очевидно, $v(M_0,t_0) = \widetilde{M}^* + \varepsilon$ и

$$\max \begin{Bmatrix} v(M,0), v(P,t) \\ M\in\overline{D}, P\in S, t\in[0,T] \end{Bmatrix} \leq \widetilde{M}^* + \alpha T < \widetilde{M}^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2)$$

если выбрать α так, чтобы $\alpha T < \frac{\varepsilon}{2}$.

Т.к. ф-ция $v(M,t)$ непр. в замкн. цилиндре $\overline{Q}_T$, то она должна в некоторой точке $(M_1,t_1)\in\overline{Q}_T$ достигать своего максимального значения. Очевидно, что: $v(M_1,t_1) \geq v(M_0,t_0) = \widetilde{M}^* + \varepsilon$,

откуда следует, что точка (M_1,t_1) — внутр. точка цилиндра Q_T, поскольку в силу (2) на границе цилиндра Q_T (т.е. на границе области D и в нач. момент) максимальное значение ф-ции $v(M,t)$ не превосходит величины $\widetilde{M}^* + \varepsilon/2$.

Итак, $(M_1,t_1)\in Q_T$, т.е. $M_1 = D$, $t_1\in(0,T]$.

Поскольку в т. (M_1, t_1) ф-ция $v(M,t)$ достигает своего максимального значения, то в этой точке выполняются условия максимума: (10)

$$\operatorname{grad} v(M_1,t_1) = 0;\ \frac{\partial v}{\partial t}(M_1,t_1) \geq 0;\ \Delta v(M_1,t_1) \leq 0. \qquad (3)$$

Заметим, что в ф-ле (3) при $t_1 < T$: $\frac{\partial v}{\partial t}(M_1,t_1) = 0$, а при $t_1 = T$: $\frac{\partial v}{\partial t}(M_1,t_1) \geq 0$. Из ф-л (1) и (3) следует, что:

$$\operatorname{grad} u(M_1,t_1) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_1) \geq \alpha > 0,$$

$$\Delta u(M_1,t_1) \leq 0 \qquad (4)$$

Ф-ция $u(M,t)$ явл. решением ур-ния $\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, которое можно записать в следующей виде: $\rho u_t = k\Delta u + \operatorname{grad} k \operatorname{grad} u$. (5)

Сравнивая (4) и (5) и учитывая, что по условию $\rho(M) > 0$, $k(M) > 0$, приходим к выводу, что в точке (M_1, t_1) ур-ние (5) не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

2. Вывод ф-лы для разрыва нормальной производной потенциала простого слоя.

Исследуем поведение нормальной производной потенциала простого слоя при переходе ч/з пов-ть S. Плотность $\mu(P)$ потенциала будем считать непрерывной на пов-ти ф-цией.

Пусть P_0 – произвольная точка пов-ти S, $\vec{n}_e(P_0)$ – внешняя единичная нормаль в точке P_0. Рассм. производную потенциала простого слоя $V(M)$ по направлению $\vec{n}_e(P_0)$:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n_e} = \vec{n}_e(P_0) \operatorname{grad}_M V(M) = \int_S \mu(P) \vec{n}_e(P_0) \operatorname{grad}_M \frac{1}{R_{MP}} dS_P \qquad (1)$$

и исследуем её поведение при $M \to P_0$ по направлению $\vec{n}_e(P_0)$.

Учитывая, что ф-ция R_{MP} зависит лишь от разности координат точек M и P, ф-лу (1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = -\int_S \mu(P) \vec{n}_e(P_0) \operatorname{grad}_P \frac{1}{R_{MP}} d_P S = \int_S \mu(P) [\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \operatorname{grad}_P \frac{1}{R} dS -$$

$$- \int_S \mu(P) \vec{n}_e(P) \operatorname{grad}_P \frac{1}{R} d_P S \qquad (2)$$

(т.к. $\operatorname{grad}_M \frac{1}{R_{MP}} = -\operatorname{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}$), где $\vec{n}_e(P)$ – внеш. единичная нормаль к пов-ти в точке P.

Второе слагаемое в (2) есть потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(P)$: $W(M) = -\int\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$. Поэтому:

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \int\limits_S \mu(P)[\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \operatorname{grad}_P \frac{1}{R_{MP}} dS + W(M) = J(M) + W(M) \qquad (3)$$

Покажем, что ф-ция $J(M)$ непр. в т. P_0. Для этого оценим подынтегральную ф-цию в окр-ти P_0:

$f = \left|\mu(P)[\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \operatorname{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}\right| \leq C_1 |\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)| \frac{1}{R^2_{MP}}$, т.к. $|\mu| \leq C_1$.

Поскольку $|\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)| = \sqrt{(\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0))(\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0))} = \sqrt{2 - 2\cos\gamma} = 2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|$, где γ – угол м/у нормалями в т. P и P_0, то:

$$f \leq \frac{2|\sin\frac{\gamma}{2}|C_1}{R^2_{PM}} \leq \frac{\gamma C_1}{R^2_{PM}} \leq \frac{AC_1 R^{\delta}_{PP_0}}{R^2_{PM}},$$ т.к. для пов-ти Ляпунова $\gamma < AR^{\delta}_{PP_0}$.

Полученная оценка обеспечивает непр-ть интеграла $J(M)$ в т. P_0, когда $M \to P_0$ по нормали $\vec{n}_e(P_0)$. Следно, $J(M)$ непр. в т. P_0.

Таким образом, разрывные св-ва $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ согласно (3) определяются вторым слагаемым $W(M)$. Из св-ва потенциала двойного слоя известно, что:

$$\left.\begin{aligned} W_i(P) &= \overset{\circ}{W}(P) + 2\pi\nu(P), \\ W_e(P) &= \overset{\circ}{W}(P) - 2\pi\nu(P), \end{aligned}\right\} \quad (\star)$$

$\cancel{W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\nu(P)}$

Используя $(\star)$, из (3) получаем:

$$\lim_{M \to P_0, M \in D} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = J(P_0) + W_i(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{W}(P_0) + 2\pi\mu(P_0) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^{\circ} + 2\pi\mu(P_0),$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^{\circ}$ – прямое значение нормальной производной в т. P_0.

Аналогично: $\lim\limits_{M \to P_0, M \in D_e} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^{\circ} - 2\pi\mu(P_0)$.

Введём обозначения: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)_i$ – внутр. предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя;

$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)_e$ – внеш. предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя.

Если пов-ть незамкнутая, то внутр. и внеш. стороны пов-ти определяются выбором внешней нормали.

Тогда разрывные св-ва нормальной производной потенциала простого слоя можно описать следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P)\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 4\pi\mu(P).$$

Билет 6.

1. Доказать замкнутость системы присоединённых ф-ций Лежандра.

Для д-ва нам понадобится лемма:

„Для всякой непр. на отрезке $[-1,1]$ ф-ции $f(x)$ можно построить такую непрерывную на $[-1,1]$ ф-цию $\overline{\varphi}(x)$, что ф-ция $\varphi(x) = (1-x^2)^{m/2}\overline{\varphi}(x)$ приближает в среднем ф-цию $f(x)$ на $[-1,1]$".

её д-во можно найти на стр. 134-135 (СБК).

Перейдём к док-ву замкнутости системы ПФЛ.

Утв.: „Система ПФЛ замкнута в пр-ве $L_2[-1,1]$ с нормой $\|f(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)dx}$".

Итак, пусть задана некоторая ф-ция $f(x) \in L_2[-1,1]$. Известно, что $\forall\varepsilon' > 0\ \exists g(x) \in C[-1,1]: \|f(x)-g(x)\|_{L_2} < \varepsilon'$. (1)

Согласно лемме: $\forall\varepsilon'' > 0\ \exists \varphi(x) = (1-x^2)^{m/2}\overline{\varphi}(x)$, причём $\varphi(x) \in C[-1,1]$:
$\|g-\varphi\|^2_{L_2} = \int_{-1}^{1}|g(x)-\varphi(x)|^2dx < \varepsilon''^2$. (2)

Согласно т. Вейерштрасса ф-цию $\overline{\varphi}(x)$ можно равномерно приблизить на отрезке $[-1,1]$ системой полиномов, т.е. $\forall\varepsilon''' > 0$
$\exists\{C_n\}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1,1]: \left|\overline{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right| < \varepsilon'''$. (3)

Умножая левую часть нер-ва (3) на $0 \le (1-x^2)^{m/2} \le 1$ (и тем самым усиливая его) и учитывая, что $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$, получим:

$\max_{x\in[-1,1]}\left|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n P_n^{(m)}(x)\right| < \varepsilon'''$, след-но:

$$\left\|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n P_n^{(m)}(x)\right\|_{L_2} < \sqrt{2}\,\varepsilon''' \quad (4)$$

Наконец, из нер-ва (1), (2) и (4), применяя нер-во Δ-ка для нормы, получим: (13)

$$\left\|f-\sum_{n=0}^{N}C_n P_n^{(m)}\right\|_{L_2} \leq \|f-g\|_{L_2}+\|g-\varphi\|_{L_2}+\left\|\varphi-\sum_{n=0}^{N}C_n P_n^{(m)}\right\|_{L_2} < \varepsilon'+\varepsilon''+\sqrt{2}\varepsilon''' < \varepsilon$$ при

соответствующем выборе $\varepsilon', \varepsilon''$ и ε'''.

Последнее нер-во док-ет замкнутость системы ПФЛ в пр-ве $L_2[-1,1]$.

2. Построить ф-цию Грина задачи Неймана для ур-ния теплопроводности на полупрямой.

Нам понадобится лемма:

„Пусть ф-ция $\Phi(x)$ определена на бесконечной прямой $(-\infty,+\infty)$, имеет на ней ограниченные производные до N-го порядка включительно, и лин. комбинация $\sum_{k=0}^{N} a_k \Phi^{(k)}(x)$, где $a_k = const$, $k=\overline{0,N}$, нечётна отн-но точки $x=0$. Тогда ф-ция:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Phi(\xi)d\xi \qquad (1)$$

удовл. условию $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=0}=0$." Д-во её можно найти на стр. 275-276 (СБК).

Р задачу: $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, (x,t)\in\Omega_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), x\in\overline{\mathbb{R}}^+, \\ u_x(0,t)=0, t\in[0,\infty) \end{cases}$ $\Omega_+=\{0<x<\infty, 0<t<\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}^+=\{0\leq x<\infty\}$. $(\tilde{1})$

Поскольку мы будем Р классическое решение, предположим, что ф-ция $\varphi(x)$ удовл. условию согласования НУ и ГУ: $\varphi(0)=0$. Введём ф-цию $\Phi(x)$, являющуюся чётным продолжением ф-ции $\varphi(x)$ на всю бесконечную прямую: $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\in\overline{\mathbb{R}}^+, \\ \varphi(-x), x\in\overline{\mathbb{R}}^-.\end{cases}$ (2)

Р задачу Коши: $\begin{cases} U_t=a^2U_{xx}, -\infty<x<+\infty, \\ U\big|_{t=0}=\Phi(x).\end{cases}$

Записывая решение в виде интеграла Пуассона (1) и Р-вая ф-цию $U(x,t)$ на положительной полуоси, получим решение задачи $(\tilde{1})$. При этом ГУ Неймана выполняется в силу леммы. С помощью ф-лы (2) получим:

$$u(x,t) = \underset{x\in\overline{\mathbb{R}}^+}{U(x,t)} = \int\limits_0^{\infty} \{G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)\}\varphi(\xi)d\xi.$$

Таким образом, решение 4-ой задачи можно записать в виде $u(x,t) = \int\limits_0^{\infty} G_2(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$, где:

$$G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}.$$

$G_2(x,\xi,t)$ наз. ф-цией Грина задачи Неймана для ур-ния теплопроводности на полупрямой.

Билет 7.

1. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.

„Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью, заданной на гладкой пов-ти, явл. непр. ф-цией во всём пр-ве".

Д-во: Мы установили (св-ва потенциала), что потенциал простого слоя явл. непр. ф-цией вне пов-ти S ($V = \underline{O}(1/r)$, $r\to\infty$). Остаётся показать, что при выполнении условий теоремы потенциал простого слоя непрерывен на пов-ти S и его значения вне пов-ти S непр-но примыкают к значениям на S. Для этого в силу указанных ранее св-в равномерно сходящихся н/с интегралов достаточно показать, что интеграл:

$V(M) = \int\limits_S \mu(P)\frac{dS}{R_{MP}}$, $|\mu| \le A$ равномерно сх-ся в точках пов-ти S.

Пусть M_0 – произв. точка пов-ти S. Построим шар $K_\delta^{M_0}$ радиуса δ с центром в т. M_0. Обозначим ч/з S_1 ту часть пов-ти S, которая расположена внутри $K_\delta^{M_0}$, $S_2 = S\setminus S_1$. Тогда:

$$V(M) = \int\limits_{S_1}\mu\frac{dS}{R_{MP}} + \int\limits_{S_2}\mu\frac{dS}{R_{MP}} = V_1(M) + V_2(M).$$

Пусть M – произв. точка, отстоящая от т. M_0 не более чем на δ: $R_{MM_0} \le \delta$.

Нужно показать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \left|\int\limits_{S_1}\mu\frac{dS}{R_{MP}}\right| \le \varepsilon$ при всех M, для которых $R_{MM_0} \le \delta$.

Введём локальную систему координат (x,y,z) с началом в т. M_0, направив ось z вдоль внешней нормали к пов-ти S в т. M_0. Пусть в этой системе координат $M=(x,y,z)$, $P=(\xi,\eta,\zeta)$, S_1' – проекция S_1 на пл-ть (x,y), $dS=\frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma}$, где γ – угол м/у нормалью в точке P и осью z. Оценим V_1:

$$|V_1(M)|\leq A\int_{S_1}\frac{dS}{R_{MP}}=A\int_{S_1'}\frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\leq A\int_{S_1'}\frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Пусть $K_{2\delta}$ – круг радиуса 2δ с центром в т. $M'=(x,y,0)$, лежащий в пл-ти (x,y) и содержащий S_1' внутри себя. Величину δ выберем настолько малой, что $\cos\gamma>\frac{1}{2}$, что возможно, поскольку пов-ть гладкая. Тогда: $|V_1(M)|\leq 2A\int_{K_{2\delta}}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

Введя полярную систему координат (ρ,φ) с центром M', получим:

$$|V_1(M)|\leq 2A\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho}=8\pi A\delta\leq\varepsilon.$$

След-но, интеграл по S_1 сх-ся равномерно отн-но M в т. M_0 и представляет собой непрерывную в т. M_0 ф-цию. Поэтому потенциал простого слоя $V(M)$ непрерывен в точках пов-ти S.

Из приведённых рассуждений следует, что потенциал простого слоя с огр. плотностью непрерывен во всём пр-ве. ■

2. Получить асимптотику ф-ции Бесселя при больших значениях аргумента.

$\measuredangle$ ф-цию Ханкеля: $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{-ix\sin\zeta+i\nu\zeta}d\zeta$ (1)

Интеграл (1) – это интеграл по комплексной переменной ζ, зависящий от параметра x, для оценки которого при $x\to\infty$ можно использовать метод перевала. Осн. положения метода перевала:

Если $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ явл. аналитическими ф-циями аргумента ζ в области G, содержащей контур интегрирования C, то при больших значениях аргумента x имеет место асимптотическая формула:

$$F(x)=\int_C e^{xf(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta=e^{xf(\zeta_0)}\left\{\sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(\zeta_0)|}}\varphi(\zeta_0)e^{i\psi}+\underline{O}(x^{-3/2})\right\}\quad(2),\text{ где}$$

ζ_0 – точка перевала ф-ции $f(\zeta)$, определяемая условием $f'(\zeta_0)=0$, 16
а угол ψ указывает направление наискорейшего спуска и определяется следующим образом: $\psi = \frac{1}{2}\left(\pi - \arg f''(\zeta_0)\right)$.

Применяя ф-лу (2) к интегралу (1), получим:

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} e^{ix}\left\{\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{-i\nu\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right\} \quad (3).$$

Ф-ла (3) выполняется при условии $x \gg 1$.

Поскольку $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(z)$ явл. аналитической ф-цией комплексной переменной z на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, то в силу общих св-в аналитического продолжения ф-ла (3) остаётся справедливой при $|z| \gg |\nu|$ в области $|\arg z| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

При $x \in \mathbb{R}$ имеем: $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{O}(x^{-3/2})$. Отсюда напрямую получаем асимптотику для ф-ции Бесселя при $x \to \infty$:

$$J_\nu(x) = \operatorname{Re}\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2}).$$

Билет 8.

1. Теорема о существовании потенциала двойного слоя.

Получим предварительно некоторые оценки.

Пусть M_0 – некоторая точка пов-ти S. Введём локальную систему координат (x, y, z) с началом в т. M_0, направив ось z вдоль внешней нормали в т. M_0. Плоскость (x, y) при этом совпадает с касательной плоскостью. Т.к. S – пов-ть Ляпунова, то (в силу усл. 2 из опр. пов-ти Ляпунова) $\exists \rho_0$, что ур-ние пов-ти S при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} < \rho_0$ может быть записано в виде: $z = z(x,y)$, причём $z(x,y)$ – однозначная непрерывно диф-мая ф-ция. Получим оценки для ф-ции $z(x,y)$ и её первых производных в указанной окр-ти. Направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}_P$ в точке P пов-ти S при $\rho < \rho_0$ выражаются ф-лами:

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

Обозначим ч/з $\vec{n}_{p'}$ проекцию вектора $\vec{n}_p$ на плоскость (x,y), а ч/з α' и β' - углы, образованные вектором $\vec{n}_{p'}$ с осями X и Y:

$\cos\alpha = \cos\alpha' \sin\gamma$, $\cos\beta = \cos\beta' \sin\gamma$.

Т.к. в силу выбора системы координат $z(M_0)=0$, $z_x(M_0)=0$, $z_y(M_0)=0$, то ρ_0 можно выбрать достаточно малым так, что:

$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \dfrac{1}{2}$ при $\rho<\rho_0$. Тогда: $\left.\begin{array}{l} |\cos\alpha| \le \sin\gamma \le A R_{M_0P}^{\delta} \\ |\cos\beta| \le A R_{M_0P}^{\delta} \end{array}\right\}$ (1)

$|z_x| = \left|\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right| \le 2|\cos\alpha| \le 2A R_{M_0P}^{\delta}$ (2) (в силу усл. 3 опр. пов-ти Ляпунова)

Аналогично: $|z_y| \le 2A R_{M_0P}^{\delta}$ (3)

Используя ф-лу Тейлора для ф-ции $z(x,y)$ в указанной окр-ти M_0, получим: $z(x,y) = z(0,0) + x z_x(\bar{x},\bar{y}) + y z_y(\bar{x},\bar{y})$, где $0\le\bar{x}\le x$, $0\le\bar{y}\le y$. Отсюда находим: $|z(x,y)| \le \rho|z_x| + \rho|z_y| \le 4A R_{M_0P}^{1+\delta}$ (4).

Переходим к д-ву теоремы:

„Потенциал двойного слоя $W(M) = \int\limits_S \nu(P)\dfrac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS_p$ (5)

с непр. и огр. плотностью $|\nu| \le C$ на пов-ти S существует, т.е. явл. сходящимся н/с интегралом при $M\in S$".

Д-во: пусть M - произв. точка пов-ти S. Оценим подынтегральную ф-цию в окр-ти т. M. Введём локальную систему координат, как это было сделано выше. Пусть т. P имеет координаты (ξ,η,ζ). Тогда

$\cos\varphi = \dfrac{\xi}{R_{MP}}\cos\alpha + \dfrac{\eta}{R_{MP}}\cos\beta + \dfrac{\zeta}{R_{MP}}\cos\gamma$.

Отсюда, учитывая оценки (1)-(4), получаем:

$|\cos\varphi| \le |\cos\alpha| + |\cos\beta| + \dfrac{|\zeta|}{R_{MP}} \le A R_{MP}^{\delta} + A R_{MP}^{\delta} + 4A R_{MP}^{\delta} = 6A R_{MP}^{\delta}$ (6)

След-но, для точек P пов-ти S в окр-ти т. M подынтегральная ф-ция в (5) имеет оценку: $\left|\nu\dfrac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\right| \le \dfrac{6AC}{R_{MP}^{2-\delta}}$, (7)

которая обеспечивает сх-ть н/с интеграла (5) в точках M пов-ти S.

Оценка (7) справедлива для любой точки M, расположенной на пов-ти S. Поэтому эта оценка обеспечивает равномерную по $M \in S$ сх-ть интеграла (5) в любой точке $M_0 \in S$ и его непр-ть на пов-ти S.

Итак, $\exists$ прямое значение потенциала двойного слоя, и это прямое значение непрерывно как ф-ция точек пов-ти S. ■

2. Получить производящую ф-цию для полиномов Лагерра.

Для полиномов Лагерра: $\sigma(x) = x$; $\rho(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\{x^n e^{-x}\}$$

$t - x - z\sigma(t) = 0$

$t - x - zt = 0 \rightarrow t_0 = \dfrac{x}{1-z}$

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)} = \frac{e^{-\frac{x}{1-z}}}{e^{-x}} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}$$

Итак: $\dfrac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\tilde{L}_n(x)}{n!} z^n$, где $\tilde{L}_n(x) = \dfrac{L_n(x)}{C_n}$, и поскольку для полиномов Лагерра $C_n = \dfrac{1}{n!}$, то окончательно получим:

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n.$$

Билет 9.

1. Теорема о разрыве нормальной производной потенциала простого слоя.

см. Билет 5 (п.2).

2. Получить производящую ф-цию для полиномов Эрмита.

Для полиномов Эрмита: $\sigma(x) \equiv 1$; $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

$t - x - z\sigma(t) = 0$

$t - x - z = 0 \rightarrow t_0 = x + z$

$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\cdot\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)}=\frac{e^{-(x+z)^2}}{e^{-x^2}}\cdot\frac{1}{1-0}=e^{-(2xz+z^2)}$$

Значит: $e^{-(2xz+z^2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{H}_n(x)}{n!}z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}(-z)^n$, т.к. $C_n=(-1)^n$.

Делая в последней ф-ле замену z на $-z$, получим окончательно выражение для производящей ф-ции:

$$\Psi(x,z)=e^{2xz-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n.$$

Билет 10.

1. Теорема о разрыве потенциала двойного слоя.

„Потенциал двойного слоя претерпевает разрыв при переходе ч/з пов-ть."

Д-во:

Х сначала потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\nu_0=\text{const}$:
$$W(M)=-\nu_0\int\limits_S\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P \qquad (1)$$

Будем считать, что пов-ть S замкнутая. Тогда интеграл (1) легко вычисляется. Для вычисления его применим 3ю ф-лу Грина, положив в ней $u\equiv\nu_0$. Тогда получим:

$$-\oint\limits_S\nu_0\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P=\begin{cases}4\pi\nu_0, & M\in D,\\ 2\pi\nu_0, & M\in S,\\ 0, & M\in D_e\ (M\notin D+S).\end{cases} \qquad (2)$$

Введём обозначения: $\mathring{W}(P_0)$ – значение потенциала двойного слоя, когда точка P_0 лежит на пов-ти S $(P_0\in S)$, т.е. прямое значение потенциала в точке P_0; $W_i(P_0)$ – предельное значение потенциала $W(M)$ в т. P_0 на пов-ти изнутри, т.е. $W_i(P_0)=\lim\limits_{M\to P_0\in S}W(M)$, $M\in D$,

$W_e(P_0)$ – предельное значение потенциала W в т. P_0 на пов-ти снаружи, т.е. $W_e(P_0)=\lim\limits_{M\to P_0\in S}W(M)$, $M\in D_e$.

Потенциал двойного слоя с постоянной плотностью ν_0 согласно (2) явл. кусочно-постоянной ф-цией. Ф-лу (2) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} W_i(M) &= \overset{\circ}{W}(M) + 2\pi\nu_0, \\ W_e(M) &= \overset{\circ}{W}(M) - 2\pi\nu_0. \end{aligned}\right\} (3)$$

Рассм. теперь потенциал двойного слоя с непр. плотностью $\nu(P)$ и покажем, что для него справедливы ф-лы, аналогичные (3).

Пусть P_0 – произв. точка пов-ти S. Потенциал двойного слоя с плотностью $\nu(P)$ представим в виде:

$$W(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}dS = J(M) + \tilde{W}(M) = \oint\limits_S [\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}dS + \oint\limits_S \nu(P_0)\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}dS \quad (4)$$

Второе слагаемое $\tilde{W}(M)$ представляет собой потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\nu(P_0)$, св-ва которого нам уже известны. Д-жем, что первое слагаемое $J(M)$ есть ф-ция, непр. в т. P_0. Для этого достаточно д-ть равномерную сх-ть по параметру M интеграла $J(M)$ в точке P_0. Возьмём произв. $\varepsilon > 0$. Из непр-ти ф-ции $\nu(P)$ в т. P_0 следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ такая окр-ть K_1 точки $P_0 \in S$, что:

$|\nu(P) - \nu(P_0)| \le \varepsilon$ при $P \in K_1$. Оценим интеграл по K_1:

$$\left|\int\limits_{K_1}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}dS\right| \le \varepsilon\int\limits_{K_1}\frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2}dS_P.$$

Используя ф-лу (2), можно показать, что при достаточно малом K_1:

$\int\limits_{K_1}\frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2}dS \le B$ при всех M. Поэтому получаем:

$\left|\int\limits_{K_1}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}dS\right| \le \varepsilon B$, что означает равномерную сх-ть интеграла $J(M)$ в т. P_0. Значит, ф-ция $J(M)$ непр. в т. P_0.

Таким образом, разрывные св-ва потенциала двойного слоя $W(M)$ в т. P_0 согласно (4) определяются вторым слагаемым $\tilde{W}(M)$. Перейдём к пределу в (4) при $M \to P_0$. Сохраняя прежние обозначения и используя св-ва потенциала с постоянной плотностью, получим:

$$W_i(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_i(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{\tilde{W}}(P_0) + 2\pi\nu(P_0) = \overset{\circ}{W}(P_0) + 2\pi\nu(P_0),$$

$$W_e(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_e(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{\tilde{W}}(P_0) - 2\pi\nu(P_0) = \overset{\circ}{W}(P_0) - 2\pi\nu(P_0),$$ где

$\overset{\circ}{W}(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{\tilde{W}}(P_0)$ – прямое значение $W(M)$ в т. $P_0 \in S$.

Таким образом, потенциал двойного слоя при переходе ч/з пов-ть претерпевает разрыв, и величина этого разрыва определяется ф-лами:

$W_i(P) = \overset{\circ}{W}(P) + 2\pi\nu(P)$,

$W_e(P) = \overset{\circ}{W}(P) - 2\pi\nu(P)$,

$W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\nu(P)$.

2. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае с ГУ Дирихле.

„Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности".

Д-во: пусть существуют 2 решения u_1 и u_2. Разность $v = u_1 - u_2$ есть решение однородной задачи: $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } D_e, \\ v|_S = 0; \end{cases}$

равномерно стремящееся к нулю на ∞-ти. След-но, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_0 : |v| \leq \varepsilon$ при $r \geq R_0$.

Окружим пов-ть S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R $(R > R_0)$. Применяя принцип максимума для ур-ния Лапласа в области D_R м/у S и Σ_R, получим:

$$|v(M)| \leq \varepsilon \text{ всюду в } D_R.$$

В силу произвольность ε $(\varepsilon \to 0)$ и R $(R \to \infty)$ отсюда получаем, что $v(M) \equiv 0$ всюду в D_e. След-но, решение внешней задачи Дирихле единственно. ■

Билет 11.

1. Теорема о симметрии ф-ции Грина для ур-ния Лапласа с ГУ Дирихле.

„Ф-ция Грина задачи Дирихле симметрична".

Д-во:

Введём обозначения: $u(M) = G(M, M_1)$, $v(M) = G(M, M_2)$.

Окружим точки M_1 и M_2 сферами Σ_1 и Σ_2 соответственно достаточно малого радиуса. К ф-циям u и v в области м/у S, Σ_1 и Σ_2 применим 2-ю ф-лу Грина. Учитывая ГУ для ф-ции Грина, получим:

$$\oint\limits_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\oint\limits_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0 \qquad (1)$$

∡-вая v внутри Σ_1 согласно представлению для решения ур. Лапласа

$v(M)=\oint\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}G-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS-\int\limits_{D}G\Delta u\,dV$, получим:

$$v(M_1)=-\oint\limits_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS \qquad (2)$$

Аналогично: $u(M_2)=-\oint\limits_{\Sigma_1}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \qquad (3)$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем: $-v(M_1)+u(M_2)=0$, т.е.

$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$.

2*(из Билета 14). Вывод формулы Даламбера.

~~$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ - решение задачи Коши для однородного ур-ния колебаний с неодн. нач. условиями, $u_2(x,t)$ - решение задачи для неоднородного ур-ния колебаний с однородными нач. условиями.~~

∡ задачу Коши для однородного ур-ния колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ (x,t)\in\Omega, & (1)\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^1; & (2)\end{cases}$$

предположим, что $\exists$ классическое решение задачи (1), (2). Преобразуем ур-ние колебаний (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Ур-ние характеристик ур-ния (1) имеет вид: $(dx)^2-a^2(dt)^2=0$

$dx-adt=0 \qquad dx+adt=0$

Характеристиками явл. 2 семейства прямых:

$x-at=C_1$, $x+at=C_2$, где $C_1, C_2=const$.

Введём новые переменные: $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. Тогда ур-ние колебаний (1) преобразуется к виду: $U_{\xi\eta}=0$, (3)

где $U(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$.

Найдём общий интеграл ур-ния (3). Для всякого решения ур-ния (3) получаем: $U_\eta(\xi,\eta)=\bar{f}(\eta)$, где $\bar{f}(\eta)$ – ф-ция одного переменного η. Интегрируя последнее равенство по η при фиксированном ξ, получим: $U(\xi,\eta)=\int\bar{f}(\eta)d\eta+f_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, (4)

где $f_1(\xi)$ – ф-ция только переменного ξ; $f_2(\eta)$ — // — переменного η.

Верно и обратное: каковы бы ни были диф-мые ф-ции $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$, ф-ция $U(\xi,\eta)$, определяемая ф-лой (4), представляет собой решение ур-ния (3). Т.к. всякое решение ур-ния (3) может быть представлено в виде (4) при определённом выборе ф-ций f_1 и f_2, то ф-ла (4) явл. общим интегралом этого ур-ния. След-но, ф-ция:

$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at)$ $(\tilde{4})$

явл. общим интегралом ур-ния (1).

Определим ф-ции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись нач. условия (2):

$$\left.\begin{aligned} &u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\\ &u_t(x,0)=-af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^1 \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

где штрих означает производную по полному аргументу соответствующей ф-ции.

Обозначим аргументы ф-ций f_1 и f_2 ч/з ζ. Тогда, интегрируя второе из равенств (5), получим:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(\zeta)+f_2(\zeta)=\varphi(\zeta),\\ &-f_1(\zeta)+f_2(\zeta)=\frac{1}{a}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)dz+C, \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

где $\zeta_0, C=const$.

Вычитая и складывая равенства (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)-\frac{1}{2a}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)dz-\frac{C}{2},\\ &f_2(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2a}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)dz+\frac{C}{2}, \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

причём последние два рав-ва должны выполняться при любом значении аргумента $\zeta\in\mathbb{R}^1$. Подставляя найденные выражения (7) для ф-ций f_1 и f_2 при значении их аргументов соответственно $\zeta=x-at$ для $f_1(\zeta)$ и $\zeta=x+at$ для $f_2(\zeta)$ в ф-лу $(\tilde{4})$, получим:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$ – ф-ла Даламбера.

2. Получить формулу для решения неоднородного ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

Справка о ф-лах Грина из курса мат. анализа:

пусть ф-ция $F(x,t)$ непрерывно диф-ма в обл. $\mathcal{D}$ и непрерывна в обл. $\overline{\mathcal{D}}$: $F(x,t) \in C^{(1)}(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$, где $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$ — двумерная обл. с границей Γ в плоскости (x,t). Тогда имеют место следующие ф-лы:

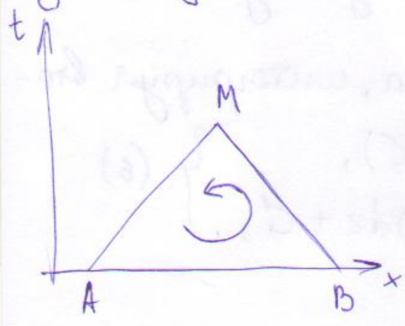
$$\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} dx dt = -\oint\limits_{\Gamma} F(x,t) dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx dt = \oint\limits_{\Gamma} F(x,t) dt, \qquad (\star)$$

где контур Γ проходится в положительном направлении (чтобы обл. $\mathcal{D}$ находилась слева от направления движения).

$\not{\text{x}}$ Ур-ние колебаний (неоднородное) на бесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ (x,t) \in \Omega, & (1) \quad \Omega = \mathbb{R}^1 \times (0,\infty), \ a^2 = const \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}^1; & (2) \end{cases}$$

Предположим, что классическое решение задачи (1), (2) для неоднородного ур-ния колебаний с неоднородными нач. условиями существует.



Возьмём на фазовой плоскости точку M и построим характеристический ΔAMB. Проинтегрируем ур-ние (1) колебаний по этому Δ-ку, предварительно умножив его на $1/2a$. В рез-те получим:

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \frac{1}{2a} \int\limits_{\Delta ABM} f(x,t) dx dt \qquad (3)$$

Применим к интегралам в левой части ф-лы Грина $(\star)$:

$$\left. \begin{aligned} \int\limits_{\Delta ABM} u_{tt} dx dt &= -\int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^M u_t dx - \int\limits_M^A u_t dx, \\ \int\limits_{\Delta ABM} u_{xx} dx dt &= \int\limits_A^B u_x dt + \int\limits_B^M u_x dt + \int\limits_M^A u_x dt. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поскольку на отрезке AB $dt = 0$, а на отрезках характеристик BM и MA имеют место соотношения $dx = -a dt$ и $dx = a dt$ из ф-л (4) имеем:

$$\iint\limits_{\Delta ABM}(u_{tt}-a^2u_{xx})dx\,dt = -\int\limits_A^B u_t dx + a\int\limits_B^M(u_t dt + u_x dx) - a\int\limits_M^A(u_t dt + u_x dx) =$$

$$= -\int\limits_A^B u_t dx + a\left[u(M)-u(B)-u(A)+u(M)\right]. \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует ф-ла:

$$u(M) = \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_A^B u_t dx + \frac{1}{2a}\iint\limits_{\Delta ABM} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Учитывая, что точки M, A, B имеют соответственно координаты (x,t), $(x-at,0)$, $(x+at,0)$, и используя нач. условия (2), окончательно получаем ф-лу для решения задачи (1), (2):

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Билет 12.

1. Лемма о поведении решений в особой точке для ур-ния специальных ф-ций $(k(x)u'(x))'-q(x)u(x)=0$, $x\in(a,b)$, где $k(x)=(x-a)\varphi(x)$, $\varphi(x)\neq 0$.

„Пусть $L[u]\equiv \underbrace{(k(x)u'(x))'-q(x)u(x)}_{(1)}$, $\underbrace{L[u]=0}_{(2)}$ при $x\in(a,b)$ и пусть:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ k(x)\geq 0,\ x\in[a,b], \\ 2)\ k(x)=(x-a)\varphi(x) \\ \quad \varphi(x)\in C^1[a,b],\ \varphi(a)\neq 0 \end{array}\right\}(3)$$

Пусть также $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые решения ур-ния (2), удовлетворяющие условиям (3). Тогда если $u_1(x)=(x-a)^n v(x)$, где $v(x)\in C[a,b]$; $v(a)\neq 0$, $n\geq 0$, (4)
то решение $u_2(x)$ неограниченно возрастает при $x\to a$."

Д-во:
$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = 0$$

$$(k(x)(u_1u_2' - u_1'u_2))' = 0$$

$$k(x)(u_1u_2'-u_1'u_2) = C_1\ ;\ W[u_1,u_2] = u_1u_2' - u_1'u_2 \neq 0$$

$$\frac{u_1u_2'-u_1'u_2}{u_1^2(x)} = \frac{C_1}{k(x)u_1^2(x)} \iff \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{C_1}{k(x)u_1^2(x)}$$

$u_2 = u_1(x)\left\{C_1\int\limits_{x_0}\frac{dz}{k(z)u_1^2(z)} + C_2\right\}$. Нас интересует поведение решения, линейно независимого от $u_1(x)$. Поэтому постоянную C_2 можно положить равной нулю. Кроме того, поскольку ур-ние (2) явл. однородным, то ф-ции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются с точностью до произвольного постоянного множителя и можно положить $C_1 = 1$. Выберем, наконец, x_0 так, чтобы ф-ция $v(x)$ не обращалась в нуль на отрезке $[a, x_0]$. Это, очевидно, возможно, поскольку $v(x) \in C[a,b]$ и $v(a) \neq 0$.

$$u_2(x) = (x-a)^n v(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dz}{(z-a)^{2n+1}\underbrace{\varphi(z)v^2(z)}_{:=\psi(z)}}$$

При нашем выборе x_0 ф-ция $\psi(x) \neq 0$, $x \in [a, x_0]$. По теореме о среднем, получим для $x \in (a, x_0)$:

$$u_2(x) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dz}{(z-a)^{2n+1}} = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\cdot\begin{cases}\ln(z-a)\Big|_{x_0}^{x}, & n=0,\\ -\dfrac{1}{2n(z-a)^{2n}}\Big|_{x_0}^{x}, & n>0.\end{cases} \quad \text{при } x^* \in (a, x_0).$$

Таким образом:

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x_0, x), \text{ где } f_1(x) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\cdot\begin{cases}\ln(x-a), & n=0,\\ -\dfrac{1}{2n(x-a)^{2n}}, & n>0\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\dfrac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\ln(x-a), & n=0,\\ -\dfrac{v(x)}{2n\psi(x^*)(x-a)^n}, & n>0.\end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x_0, x_0) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\cdot\begin{cases}-\ln(x_0-a), & n=0,\\ \dfrac{1}{2n(x_0-a)^{2n}}, & n>0.\end{cases}$$

Из последних ф-л следует, что ф-ция $f_2(x, x_0)$ остаётся ограниченной при $x \to a$, а ф-ция $f_1(x)$ при $x \to a$, а ф-ция $f_1(x)$ при $x \to a$ неограниченно возрастает либо как $|\ln(x-a)|$, либо как $(x-a)^{-n}$. Т.е., если $u_1(a) \neq 0$, то $u_2(x)$ имеет в точке $x=a$ логарифмическую особенность, а если $u_1(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль n-го порядка, то ф-ция $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс n-го порядка. ■

2. Получите общую формулу Родрига для классических ортогональных полиномов.

Производные m-го порядка $p_n^{(m)}(x)$ КОП снова явл. КОП. Для них ур-ние выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}(x)\frac{dp_n^{(m)}}{dx}\right\} + \lambda_{nm}\rho_m p_n^{(m)} = 0, \quad (1)$$

где $\lambda_{nm} = -(n-m)\left\{(n-m-1)\frac{\sigma''}{2}+\tau'\right\}$, $m=0,1,\dots$, $\rho_0 \equiv \rho$, $\lambda_{n0} \equiv \lambda_n$.

В силу ур-ния (1): $\rho_m p_n^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_{nm}}\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}p_n^{(m+1)}\right\}$,

и, в частности, рекуррентно применяя последнюю ф-лу, находим:

$$\rho p_n(x) = \rho_0 p_n^{(0)} = -\frac{1}{\lambda_{n0}}\frac{d}{dx}\left(\rho_1 p_n^{(1)}\right) = \frac{1}{\lambda_{n0}\lambda_{n1}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\rho_2 p_n^{(2)}\right) = \dots = \frac{1}{A_{nm}}\frac{d^m}{dx^m}\left(\rho_m p_n^{(m)}\right), \quad (2)$$

где $A_{nm} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}$. Т. к. $p_n^{(n)} = n!\,a_n$, то, полагая в ф-ле (2) $m=n$, получим: $p_n(x) = \frac{n!\,a_n}{A_{nn}}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}(\rho_n(x))$, или, обозначая $C_n = \frac{n!\,a_n}{A_{nn}}$:

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\rho(x)\right\}$$ — обобщённая ф-ла Родрига.

Билет 13.

1. Теорема существования решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае.

а) „Внутренняя задача Дирихле $\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ в } D,\\ u|_S = f;\end{cases}$ S-пов-ть Ляпунова. имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции f.

Д-во: ∡ внутр. задачу Дирихле: $\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ в } D,\\ u|_S = f.\end{cases}$ (1)

Будем искать решение в виде потенциала двойного слоя:

$$u(M) = -\int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P, \quad (2)$$

где по-прежнему ядро интегрального представления (2) явл. производной фунд. решения по внешней нормали $\vec{n}_P$ к пов-ти S. $\nu(P)$ определим так, чтобы на пов-ти S ф-ция (2) непрерывно примыкала к Γ: $\lim\limits_{M\to P_0\in S} u(M) = f(P_0),\ P_0\in S$, (3)

причём точка $M\in D$ стремится к граничной точке P пов-ти S изнутри области D. При этом, чтобы получить решение, непр. в замкн. обл. $\bar{D}$, необходимо в кач-ве граничных значений искомого решения на пов-ти S принять предельные значения $u_i(P_0)$ потенциала двойного слоя (2) изнутри области. Из усл. (3), учитывая св-во потенциала двойного слоя $W_i(P) = \overset{\circ}{W}(P) + 2\pi\nu(P)$, получаем: $-\oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P + 2\pi\nu(P_0) = f(P_0),\ P_0\in S$ (4)

Перепишем (4) в виде: $\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0)$ (5)

(5) есть инт. ур. Фредгольма $2^{го}$ рода с полярным ядром отн-но неизв. плотности $\nu(P)$, причём в силу оценки $|\cos\varphi| \le 6A R^{\delta}_{PP_0}$, для ядра ур-ния (5) имеет место оценка:

$$|K(P_0,P)| \le \frac{6A}{R^{2-\delta}_{PP_0}},\ \delta>0,$$ обеспечивающая сх-ть интеграла.

Если $\exists$ решение $\nu(P)$ ур-ния (5), то, подставляя его в (2), получим классическое решение внутр. задачи Дирихле. Таким образом, вопрос о разрешимости внутр. задачи Дирихле (1) сводится к вопросу о разрешимости инт. ур-ния (5). Покажем, что оно имеет и при этом !-ное решение при любой непр. фции f.

Для ур-ний Фредгольма с полярным ядром справедлива теория Фредгольма. Поэтому, согласно $1^{ой}$ т. Фредгольма (стр. 222), для док-ва однозначной разрешимости ур-ния (5) достаточно показать, что однородное ур-ние:

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0 \qquad (6)$$

имеет только трив. реш. Согласно $2^{й}$ т. Фредгольма (стр. 222) исходное и союзное инт. ур-ние:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0 \qquad (7)$$

имеют одни и те же СЗ, и ранги их одинаковы. В данном случае легче исследовать ур-ние (7).

Покажем, что (7) имеет только трив. реш.

ДП: пусть $\mu_0(P) \not\equiv 0$ — решение ур-ния (7), непрерывное. Построим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M) = \oint_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} \qquad (8)$$

Ф-ция $V(M)$ явл. гармонической ф-цией как в D_i, так и в D_e и равномерно стремится к нулю в ∞-ти. Вычислим предельное значение нормальной производной ф-ции $V(M)$ на S. Согласно $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)$ имеем: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \oint_S \mu_0(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P - 2\pi\mu_0(P_0)$, $P_0 \in S$.

Поскольку $\mu_0(P)$ есть реш. ур-ния (7), то: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 0$ на S.

Таким образом, ф-ция $V(M)$ явл. решением внешней однородной задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D_e, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial n_e}\right|_S = 0, \\ V \rightrightarrows 0,\ r \to \infty; \end{cases} \qquad (9)$$

В силу !-ти решения внешней задачи Неймана в трёхмерном случае задача (9) имеет только трив. реш.:

$$V(M) \equiv 0 \text{ в } D_e \cup S.$$

Ф-ция $V(M)$, как потенциал простого слоя (8), непрерывна при переходе ч/з пов-ть S. Поэтому в обл. D ф-ция $V(M)$ есть решение однородной задачи Дирихле: $\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D, \\ V|_S = 0. \end{cases}$

В силу !-ти решения внутр. задачи Дирихле: $V(M) \equiv 0$ в $D \cup S$.

Итак, $V(M) \equiv 0$ во всём пр-ве. Воспользовавшись ф-лой $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 4\pi\mu(P)$, находим: $\mu_0(P) \equiv 0$ на S, что противоречит исходному предположению. След-но, ур-ние (7) имеет только трив. реш.

Согласно 1-ой т. Фредгольма неодн. ур. Фредгольма (5) имеет и при этом !-ное решение при любой непр. ф-ции f. Отсюда вытекает, что при любой непр. ф-ции f внутренняя краевая задача Дирихле (1) имеет классическое решение, и это решение !-но.

б) „Внешняя задача Неймана имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции f."
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f, \\ u \rightrightarrows 0 \text{ в } \infty\text{-ти}; \end{cases} \quad (\tilde{1})$$

Д-во:

⚹ внеш. задачу Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f, \\ u \rightrightarrows 0 \text{ в } \infty\text{-ти}; \end{cases}$

Решение этой задачи будем искать в виде потенциала простого слоя: $u(M) = \oint\limits_S \mu(P) \dfrac{dS_P}{R_{MP}}$ $(\tilde{2})$

При любой непр. плотности $\mu(P)$ ф-ция $(\tilde{2})$ гармоническая в D_e и удовл. условию регулярности на ∞-ти. Плотность $\mu(P)$ определим так, чтобы выполнялось ГУ: $\lim\limits_{M \to P_0 \in S} \dfrac{\partial u}{\partial n_e}(M) = f(P_0), P_0 \in S$ $(\tilde{3})$

Воспользовавшись ф-лой $\left(\dfrac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\dfrac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)$, из $(\tilde{3})$ получим:

$$\oint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P - 2\pi\mu_0(P_0) = f(P_0), \text{ или}$$

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -\frac{1}{2\pi} f(P_0), \; P_0 \in S \quad (\tilde{4})$$

Найдя решения ур-ния $(\tilde{4})$ и подставив его в $(\tilde{2})$, получим классическое решение задачи $(\tilde{1})$. Таким образом, вопрос о разрешимости краевой задачи $(\tilde{1})$ сведён к вопросу о разрешимости инт. ур-ния. Инт. ур-ние $(\tilde{4})$ согласно 1-й т. Фредгольма имеет и притом !-ное решение при любой непр. ф-ции f, поскольку соотв. однородное ур-ние (ур. (7)), как было доказано, имеет только трив. решение. Таким образом, внешняя задача Неймана разрешима при любой непрерывности ф-ции f. ∎

2. Построить ф-цию Грина задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в шаре методом электростатических изображений.

Чтобы построить ф-цию Грина, достаточно определить ф-цию v ($G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$, где v - гарм. ф-ция в D_e), которая в данном случае явл. решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } K_a, \\ G(M,M_0)\big|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

пусть M_0 - произв. точка внутри шара.

> Опр.: Точка M_1 наз. сопряжённой (симм.) к т. M_0 относительно сферы S, если т. M_1 лежит на прямой, соединяющей центр O сферы S и т. M_0, по ту же сторону от центра O, что и т. M_0, и при этом:
> $r_0 \cdot r_1 = a^2$, где $r_0 = R_{OM_0}$, $r_1 = R_{OM_1}$.

Лемма: Если $M \in S$, то $R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$. (д-во ч/з подобие Δ-ков, easy).

Возьмём $v(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}$, где M_1 - точка, сопряжённая точке M_0 отн-но сферы S.

Таким образом: $G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)$.

Билет 14.

1. Теоремы существования решений внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа.

„Внешняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u\big|_S = f; \end{cases}$ имеет !-ное классическое решение при любой непр. ф-ции f."

„Внутренняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n_e}\Big|_S = f(P),\ P\in S; \end{cases}$ имеет классическое решение при любой непр. ф-ции f, удовлетворяющей условию $\oint\limits_S f(P)\,dS = 0$."

Д-во: ∡ внутр. задачу Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f(P),\ P \in S; \end{cases}$ (1)

Решение задачи (1) будем искать в виде потенциала простого слоя: $u(M) = \oint_S \mu(P) \dfrac{dS_P}{R_{MP}}$ (2)

Плотность $\mu(P)$ определяется из ГУ: $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n_e}\right)_i = \left(\dfrac{\partial u}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P_0) = f(P_0),\ P_0 \in S.$

След-но, для ф-ции $\mu(P)$ получаем инт. ур-ние:

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0),\ P_0 \in S; \quad (3)$$

Подставляя решение ур-ния (3) в (2), получим классическое решение задачи (1). Задача (1) имеет решение не всегда. Необходимым условием существования решения явл. соотношение: $\oint_S f(P)\,d_P S = 0$ (подробнее см. стр. 170-172). (4)

Одновременно будем ∡ и внешнюю задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u|_S = f, \\ u \text{ регулярна на } \infty\text{-ти}; \end{cases} \quad (5)$$

Решение задачи (5) будем искать в виде:

$$u(M) = -\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}, \quad (6)$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, R_{MO} – расст. от т. M до некоторой фикс. т. $O \in D$. Решение представлено в виде потенциала двойного слоя и потенциала точечного заряда, находящегося внутри области D. (о необх-ти такого представления см. стр. 229).

Плотность потенциала $\nu(P)$ определяется ГУ:

$\lim\limits_{M \to P_0 \in S} u(M) = f(P_0),\ P_0 \in S.$

Используя ф-лу $W_e(P) = \overset{\circ}{W}(P) - 2\pi\nu(P)$, отсюда получим:

$$-\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R}d_P S - 2\pi\nu(P_0) + \frac{\alpha}{R_{P_0 O}} = f(P_0).$$

След-но, для ф-ции $\nu(P)$ получаем инт. ур-ние:

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\alpha}{R_{P_0 0}} - f(P_0)\right\}, \; P_0 \in S. \quad (7)$$

Инт. ур-ния (3) и (7) явл. союзными инт. ур-ниями. Поэтому их разрешимость нужно исследовать одновременно.

∦ однор. ур-ние: $\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0, \; P_0 \in S.$ (8)

Ранее было показано (см. Билет 10, п. 1, ф. (2)), что при $P_0 \in S$:

$\frac{1}{2\pi}\oint_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = -1, \; P_0 \in S.$ Поэтому очевидно, что ф-ция $\nu(P) = \nu_0 = const$ явл. решением ур-ния (8). Это означает, что $\lambda = 1$ явл. СЗ ядра $K(P_0, P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}$, которому соотв. СФ $\nu = \nu_0 = const$. Согласно $2^й$ т. Фредгольма $\lambda = 1$ явл. СЗ и союзного ядра $K^*(P_0, P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}$. Поэтому прежде всего вычислим ранг этого СЗ.

Покажем, что ранг СЗ $\lambda = 1$ равен единице. Для этого достаточно показать, что однор. ур-ние: $\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0$ (9)

имеет только одну СФ. Пусть $\mu_0(P)$ – СФ ур-ния (9). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M) = \oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}.$$

Поскольку $\mu_0(P)$ удовл. ур-нию (9), то:

$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i = \oint_S \mu_0(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P + 2\pi\mu_0(P_0) \equiv 0.$ След-но, ф-ция $V(M)$ есть решение внутр. однор. задачи Неймана: $\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial n_e}\right|_S = 0; \end{cases}$ поэтому $V(M) = C = const$ в $D+S$ $(C \neq 0)$

Пусть ∃ второе ненулевое решение $\tilde{\mu}_0(P_0)$ ур-ния (9), т.е. вторая ЛНЗ на S с $\mu_0(P)$ СФ, соотв. СЗ $\lambda = 1$. Тогда аналогично предыдущему: $\tilde{V}(M) = \oint_S \tilde{\mu}_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}} = \tilde{C} = const \neq 0$ всюду в $D \cup S$. Построим ф-цию:

$$V_1(M) = \frac{\tilde{C}}{C}V(M) - \tilde{V}(M) = \oint_S \left(\frac{\tilde{C}}{C}\mu_0 - \tilde{\mu}_0\right)\frac{dS}{R_{MP}} \quad (10)$$

По построению $V_1(M) \equiv 0$ в $D \cup S$. Поскольку согласно (10) $V_1(M)$ есть потенциал простого слоя, то его плотность равна нулю на S: $\frac{\tilde{C}}{C}\mu_0(P) - \tilde{\mu}_0(P) \equiv 0$, $P \in S$. $\Rightarrow$ $\mu_0(P)$ и $\tilde{\mu}_0(P)$ – ЛЗ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ранг СЗ $\lambda = 1$ равен единице. СФ $\mu_0(P)$ ур-ния (9) нормируем так, чтобы:

$$\underbrace{V(M) = \oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}}_{\text{потенциал Робэна}} \equiv 1 \text{ всюду в } D + S. \quad (11)$$

Итак, ур-ние (9) имеет !-ную СФ $\mu_0(P)$, а союзное однор. ур-ние: $\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0$, $P_0 \in S$, имеет !-ную СФ $\nu = \nu_0 = const$, причём можно считать, что $\nu_0 = 1$.

Отсюда получаем, используя 3^{ю} т. Фредгольма, что неодн. ур-ние (3) разрешимо, если: $\oint_S f(P)\cdot 1 \cdot dS = 0$, (12)

а ур-ние (7) разрешимо, если: $\oint_S \left(\frac{\alpha}{R_{P0}} - f(P)\right)\mu_0(P)dS_P = 0$. (13)

При выполнении усл. (12) решение ур-ния (3) имеет вид:

$\mu(P) = \bar{\mu}(P) + C\mu_0(P)$, где (14)

$\bar{\mu}$ – нек. реш. неодн. ур-ния (3), C – произв. постоянная. Подставляя (14) в (2), получаем решение внутр. задачи Неймана:

$u(M) = \oint_S \bar{\mu}(P)\frac{dS_P}{R_{MP}} + C\oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}$, или согласно (11):

$$u(M) = \oint_S \bar{\mu}(P)\frac{dS_P}{R_{MP}} + C. \quad (15)$$

Итак, усл. (4) явл. не только необх., но и дост. усл. разрешимости внутренней задачи Неймана. При его выполнении она имеет решение при любой непр. ф-ции f, представимое в виде (15).

∢ теперь усл. (13). Его можно записать в виде:

$$\alpha\oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{P0}} = \oint_S \mu_0(P)f(P)dS_P.$$

Поскольку $O \in D$, то в силу (11): $\oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{P0}} \equiv 1$.

Поэтому: $\alpha = \oint_S \mu_0(P)f(P)dS_P$. (16)

Теперь будем считать, что α определена соотношением (16). Тогда усл. разрешимости (4) выполняется автоматически. Ур-ние (7) разрешимо при любой непр. ф-ции $f(P)$, но решение его не !-но и имеет вид: $\nu(P) = \bar{\nu}(P) + C$, (17)

где $\bar{\nu}(P)$ - нек. решение ур-ния (7), C - произв. пост. Подставляя (17) в (6), получим решение внеш. задачи Дирихле:

$$u(M) = -\oint_S \bar{\nu}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} dS - C \oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}} \quad (18)$$

т.к. при $M \in D_e$: $\oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P \equiv 0$, то из (18) получаем:

$u(M) = -\oint_S \bar{\nu}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}$. Величина α опр. соотношением (16).

Таким образом, внешняя задача Дирихле при любой непр. ф-ции f имеет !-ное классическое решение. ■

2. Вывод формулы Даламбера.

см. Билет 11 (п. 2*)

Билет 15.

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для ур. Лапласа в трёхмерном случае с ГУ Неймана.

см. Билет 13 (п. 1б). (или см. стр. 174-175)

2. Получить определитель Вронского функций Бесселя и Ханкеля.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned}\right\} (1) \qquad \mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \quad (2)$$

пусть $\nu \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу (2):

$$W[J_\nu, \mathcal{H}_\nu^{(1)}] = -\frac{i}{\sin \pi\nu} W[J_\nu, J_{-\nu}] \quad (3)$$

определитель Вронского, построенный на решениях ур-ния Бесселя, должен иметь вид: $W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_\nu}{x}$ (4), где C_ν - зависящая от ν постоянная. Найдём её.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{x^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)}\right\}=$$

$$\overset{(5)}{=}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+x^2P(x)\right\},\text{ где ф-ция } P(x) \text{ ограничена в } x=0.$$

Аналогично: $J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}+x^2Q(x)\right\}$, (6)

где $Q(x)$ огр. в $x=0$. Дифференцируя (5) и (6), имеем:

$$\left.\begin{aligned}J'_\nu(x)&=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{2xP(x)+x^2P'(x)\right\},\\ J'_{-\nu}(x)&=-\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{2xQ(x)+x^2Q'(x)\right\}.\end{aligned}\right\}(7)$$

Используя (5)-(7):

$$W[J_\nu,J_{-\nu}]=J_\nu J'_{-\nu}-J_{-\nu}J'_\nu=-\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)J_\nu(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)J_{-\nu}(x)-$$

$$-J_{-\nu}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{2xP(x)+x^2P'(x)\right\}+J_\nu(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left(2xQ(x)+x^2Q'(x)\right),$$

а заменяя $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ по ф-лам (5) и (6), окончательно получим:

$$W[J_\nu,J_{-\nu}]=-\frac{2\nu}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}+xR(x),\quad(8)$$

где $R(x)$ огр. в $x=0$.

Сравнивая (4) и (8): $C_\nu=-\dfrac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}$, $R(x)\equiv 0$.

Используя св-ва гамма-ф-ции, получим: $C_\nu=-\dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi}$. (9)

(9) → (4): $\boxed{W[J_\nu,J_{-\nu}]=-\dfrac{2}{\pi x}\sin\pi\nu}$, (10)

отсюда с учётом (3): $\boxed{W[J_\nu,H_\nu^{(1)}]=\dfrac{2i}{\pi x}}$. (11)

из (1) вытекает, что $W[J_\nu,H_\nu^{(1)}]=iW[J_\nu,N_\nu]$

$\Rightarrow \boxed{W[J_\nu,N_\nu]=\dfrac{2}{\pi x}}$.

Наконец, используя св-ва ф-ций Ганкеля и ф-лы (1):

$$\boxed{W[J_\nu,H_\nu^{(2)}]=-\frac{2i}{\pi x}}.$$

Билет 16.

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для ур-ния Лапласа в двумерном случае с ГУ Дирихле.

„Внешняя задача Дирихле на плоскости не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности."

Д-во: $\measuredangle$ одноp. задачу: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u\big|_\Gamma = 0, \\ |u| \le N, \ N = const. \end{cases}$ Покажем, что эта задача имеет только нулевое решение.

Возьмём внутри контура Γ точку M_0. Построим окр-ть $C_a^{M_0}$ радиуса a с центром в т. M_0, целиком лежащую внутри Γ. Пусть R_{MM_0} – расстояние м/у точками M и M_0. Ф-ция $\ln\frac{R_{MM_0}}{a}$ гармонична всюду в D_e и положительна в D_e, т.к. $R_{MM_0} > a$ при $M \in D_e$.

Построим окр-ть $C_b^{M_0}$ радиуса b с центром в т. M_0, содержащую контур Γ внутри себя. $\measuredangle$ ф-цию, называемую „барьером":

$U_b(M) = N \dfrac{\ln\frac{R_{MM_0}}{a}}{\ln\frac{b}{a}}$. Она гармонична в D_e, $U_b(M)\big|_{C_b^{M_0}} = N$, $U_b(M) > 0$ при $M \in \Gamma$. В силу принципа максимума: $|u(M)| \le U_b(M)$ всюду м/у контуром Γ и окр-тью $C_b^{M_0}$. Фиксируем т. M. Пусть $b \to \infty$. Тогда $U_b(M) \to 0$. След-но, $u(M) \equiv 0$. В силу произвольности т. M: $u(M) \equiv 0$ всюду в D_e. След-но, однор. задача имеет только трив. реш., а реш. неодн. задачи !-но. ∎

2. Получить асимптотику ф-ции Инфельда для больших значений аргумента.

в Билете 7 (п.2) была получена асимптотика ф-ции Ханкеля:

(при $x \to \infty$)

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{O}\left(x^{-3/2}\right)$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + \underline{O}\left(x^{-3/2}\right)$$

$$I_\nu(x)\Big|_{x\to\infty} = i^{-\nu} J_\nu(ix)\Big|_{x\to\infty} = i^{-\nu}\frac{1}{2}\left\{\mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) + \mathcal{H}_\nu^{(2)}(ix)\right\} =$$

$$= i^{-\nu}\frac{1}{2}\left\{e^{i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right] + e^{-i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \underline{O}(x^{-3/2})\right]\right\} = e^{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right\}$$

Таким образом: $I_\nu(x)\Big|_{x\to\infty} = \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + \underline{O}(1/x)\right).$

Билет 17

1. Получить представление ф-ции Бесселя в виде обобщённого степенного ряда.

ур-ние Бесселя: $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ (0)

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

будем искать решение в виде: $y(x) = x^\sigma(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^{\sigma+m}$, где (1)

$a_0 \neq 0$, $\sigma = const$.

подставив (1) в (0), из требования обращения в нуль в полученном выражении коэф-тов при всех степенях x, получим:

$$\left.\begin{aligned} & a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0, \\ & a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0, \\ & a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_m[(\sigma+m)^2 - \nu^2] + a_{m-2} = 0,\ m = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} (2)$$

из первого ур-ния (2) вытекает, что $\sigma = \pm\nu$ (3)

Как легко установить, при $\sigma = -\nu$ и $\nu \neq \frac{m}{2}$, $m = 1, 2, \ldots$, выполнено условие: $(\sigma+m)^2 - \nu^2 \neq 0$, $m = 1, 2, \ldots$ (4)

при $\sigma = \nu$ усл. (4) выполняется всегда.

Из второго ур-ния (2) при $\sigma = \pm\nu$ следует, что

$$a_1 = 0. \qquad (5)$$

Условие (4) даёт согласно ур-нию (2) рекуррентную формулу:

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)}, \quad m = 2, 3, \ldots \qquad (6)$$

Из ф-л (5) и (6) следует, что все нечётные коэф-ты равны нулю.

$\measuredangle$ $\sigma = \nu$. Положим в (6) $m = 2k$. Тогда из (6) следует:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)} \qquad (7)$$

Последовательно применяя ф-лу (7), получим:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k)}. \qquad (8)$$

Решение однор. ур-ния Бесселя (0) определяется с точностью до произв. множителя a_0. Выберем его в виде: $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$. (9)

Тогда из ф-л (8), (9) получим: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

2. Получить производящую ф-цию для полиномов Лежандра.

для полиномов Лежандра: $\sigma(x) = 1 - x^2$; $\rho(x) \equiv 1$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &t - x - z\sigma(t) = 0 \\ &t - x - z(1-t^2) = 0 \\ &zt^2 + t - (z+x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_0^{(+)} = \frac{-1+\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z}$$

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)} = \frac{1}{\cancel{1} + \cancel{z}\,\frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}\left(\cancel{-1} + \sqrt{1+4xz+4z^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}},$$

и поскольку $\dfrac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n = \dfrac{P_n(x)}{C_n n!} z^n = P_n(x)(-2z)^n$, то:

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)(-2z)^n.$$

Сделав в последней ф-ле замену z на $-\frac{z}{2}$, получим:

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Билет 18.

1. Построить интегральное представление ф-ции Бесселя.

Воспользуемся ф-лой:

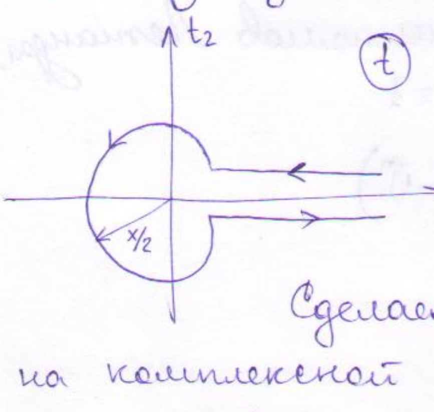
$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}=\frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\,t^{-k-\nu-1}\,dt \qquad (1)$$

Подставляя (1) в ряд для ф-ции Бесселя и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

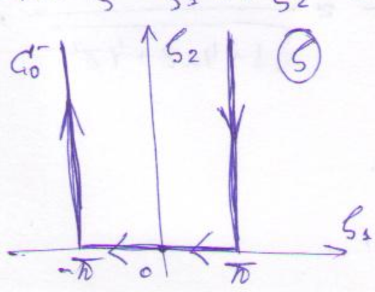
$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}=\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!}\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu}e^{\frac{x^2}{4t}-t}\frac{dt}{t} \qquad (2)$$

Пользуясь теоремой Коши, выберем в кач-ве γ контур, состоящий из луча $(-\infty,\frac{x}{2})$ на верхнем берегу разреза вдоль положительной вещественной оси, окружности с центром в $t=0$ и радиусом $x/2$, которая обходится против часовой стрелки, и луча $(\frac{x}{2},+\infty)$ на нижнем берегу разреза.



Сделаем замену $t=\frac{x}{2}e^{-i(\zeta-\pi)}$. При этом контур γ на комплексной пл-ти $t=t_1+it_2$ перейдёт в контур C_0^- на пл-ти $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2$ с соотв. направлением обхода.



Учитывая, что: $dt = -it\,d\varsigma$, $\frac{x}{2t} = e^{i(\varsigma-\pi)}$

$$\frac{x^2}{4t} - t = \left(e^{i2(\varsigma-\pi)} - 1\right)t = \frac{x}{2}\left\{e^{i(\varsigma-\pi)} - e^{-i(\varsigma-\pi)}\right\} =$$

$$= ix\sin(\varsigma-\pi) = -ix\sin\varsigma,$$

и используя ф-лу (2), получим: $J_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^-} e^{-ix\sin\varsigma + i\nu\varsigma}\,d\varsigma.$

Итак: $J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^+} e^{-ix\sin\varsigma + i\nu\varsigma}\,d\varsigma.$

2. Теорема существования классического решения однородного ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть ф-ция $\varphi(x)$ дважды непрерывно диф-ма, а ф-ция $\psi(x)$ непрерывно диф-ма на бесконечной прямой $\mathbb{R}^1$. Тогда классическое решение задачи Коши $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t)\in\Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x\in\mathbb{R}^1; \end{cases}$

существует и определяется ф-лой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz."$$

Д-во: непосредственной проверкой легко установить, что ф-ция $u(x,t)$, представимая ф-лой Даламбера, явл. классическим решением задачи Коши. ■

Билет 19.

1. Построить интегральное представление ф-ций Ханкеля 1-го и 2-го рода.

Будем искать решение ур-ния Бесселя в форме интегралов на комплексной плоскости вида $y(x) = \int\limits_C e^{-ix\sin\varsigma}\,\Phi(\varsigma)\,d\varsigma,$ (1)

где C – контур на комплексной плоскости $\varsigma = \varsigma_1 + i\varsigma_2$, концы которого уходят на ∞-ть, а ф-ция $\Phi(\varsigma) = e^{i\nu\varsigma}$.

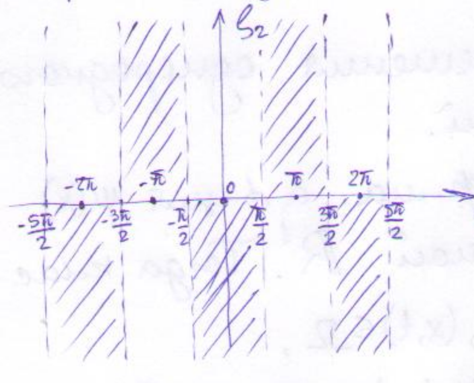
Контур C может уходить на ∞-ть лишь в тех областях, где обеспечена сходимость интеграла (1). При вещественном $x>0$ сх-ть интеграла обеспечивается, если мнимая часть $\sin\varsigma$ меньше нуля:

$$\operatorname{Im}\sin\varsigma = \cos\varsigma_1\,\operatorname{sh}\varsigma_2 < 0 \qquad (2)$$

При $\varsigma_2>0$ имеем $\operatorname{sh}\varsigma_2>0$, и усл. (2) выполняется, если $\cos\varsigma_1<0$, т.е. при: $\frac{\pi}{2}+2\pi k<\varsigma_1<\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

При $\varsigma_2<0$ усл. (2) выполняется, если: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<\varsigma_1<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Таким образом, получаем систему областей (заштрихованы), в которых контур может уходить на ∞-ть. Заметим, что контур C_0^+, введённый выше для ф-ции Бесселя лежит в этих областях.



Покажем теперь, что $y(x)$ удовл. ур-нию Бесселя. Обозначим ч/з L_ν оператор Бесселя:

$$L_\nu[y]=x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y,$$

а ч/з $K(x,\varsigma)$ – ядро интеграла (1):

$$K(x,\varsigma)=e^{-ix\sin\varsigma}.$$

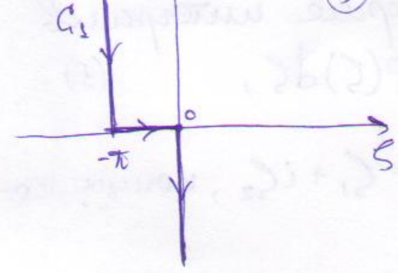
Легко убедиться в справедливости ф-лы:

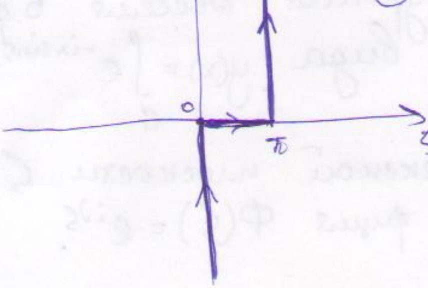
$$L_\nu[K(x,\varsigma)]=-K_{\varsigma\varsigma}(x,\varsigma)-\nu^2K(x,\varsigma).$$

Проинтегрируем интеграл $L_\nu[y]$ по частям, учитывая, что в силу выбора контура C подстановки на ∞-ти обращаются в нуль, получим:

$$L_\nu[y]=\int\limits_C L_\nu[K(x,\varsigma)]\Phi(\varsigma)d\varsigma=-\int\limits_C\{K_{\varsigma\varsigma}(x,\varsigma)+\nu^2K(x,\varsigma)\}\Phi(\varsigma)d\varsigma=$$
$$=-\int\limits_C K(x,\varsigma)\{\Phi''(\varsigma)+\nu^2\Phi(\varsigma)\}d\varsigma.$$

Из полученного выражения следует, что при $\Phi(\varsigma)=e^{i\nu\varsigma}$ ф-ция $y(x)$, определённая соотношением (1), будет удовлетворять ур-нию Бесселя $L_\nu[y]=0$. Выбирая различным образом контур интегрирования, можно получать различные цилиндрические ф-ции.





$$\left.\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma,\\ \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma,\end{aligned}\right\}-$$

ф-ции Ханкеля $1^{го}$ и $2^{го}$ рода.

2. Вывод ф-лы Даламбера.

см. Билет 11 (п. 2*)

Билет 20.

1. Получить асимптотику ф-ций Ханкеля при большом значении аргумента.

см. Билет 7 (п. 2)

2. Построить ф-цию Грина задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в шаре методом электростатических изображений.

см. Билет 13 (п. 2)

Билет 21.

1. Вывод общей ф-лы производящей ф-ции классических ортогональных полиномов.

Будем исходить из обобщённой ф-лы Родрига:

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \sigma^n(x) \rho(x) \right\} \qquad (1)$$

Из ур-ния Пирсона имеем: $\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-ция $\sigma^n(z)\rho(z)$ явл. аналитической ф-цией комплексной переменной z в окр-ти отрезка $[a,b]$ действительной оси комплексной пл-ти z. Воспользуемся для её n-й производной интегральным представлением Коши: $\frac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\rho(x)\right\} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$, (2)

где интеграл берётся по контуру, содержащему точку $t=x$ внутри себя. Из ф-лы Родрига и (2) вытекает, что:

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt . \qquad (3)$$

Подставляя (3) в $\Psi(x,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n(x)}{n!} z^n$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\rho(t)}{t-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right\}^n dt.$$

При достаточно малом $|z|$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right\}^n=\frac{1}{1-\frac{\sigma(t)z}{t-x}}=\frac{t-x}{t-x-\sigma(t)z}$

и окончательно: $\Psi(x,z)=\frac{1}{2\pi i\rho(x)}\int_C\frac{\rho(t)}{t-x-z\sigma(t)}dt$ (4)

При $z=0$ подынтегральная ф-ция (4) имеет внутри контура C единственный простой полюс $t=x$. След-но, по непрерывности, при достаточно малых $|z|$ контур C всегда можно выбрать так, что внутри него будет находиться единственный простой полюс t_0, являющийся корнем ур-ния: $t-x-z\sigma(t)=0$ (5)

Очевидно, $t_0=t_0(x,z)$, где $t_0(x,z)$ означает тот корень ур-ния (5), который при малых $|z|$ близок к $t=x$.

Вычисляя интеграл в (4) с помощью вычетов, получим общее выражение производящей ф-ции КОП:

$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)},$$

где $t_0=t_0(x,z)$ - корень ур-ния (5).

2. Свойства фундаментального решения ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

Ф-ция $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ (1) наз. фундаментальным решением ур-ния теплопроводности в одномерном случае:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ (x,t)\in\Omega,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^1;\end{cases}$$

Формальное решение ~~этой~~ задачи Коши: ~~предст~~ представляется ф-лой:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^1;\end{cases}\qquad u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \quad (2)$$

Перейдём к свойствам:

1) Из ф-лы (1) следует, что ф-ция $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и положительна: $G(x,\xi,t)>0$.

2) Непосредственной проверкой легко установить, что ф-ция $G(x,\xi,t)$ по переменным x и t удовл. однородному ур-нию теплопроводности при $t>0$: $G_t(x,\xi,t)=a^2G_{xx}(x,\xi,t)$, $(x,t)\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^1$.

3) Известно, что разложение дельта-ф-ции в интеграл Фурье имеет вид: $\delta(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-\xi)}dk$. Поэтому из ф-лы:

$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}dk$ (см. стр. 256-258) следует, что:

$$G(x,\xi,0)=\delta(x,\xi).$$

Это значит, что $G(x,\xi,t)$ явл. решением задачи Коши:

$\begin{cases} G_t=a^2G_{xx},\ (x,t)\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^1, \\ G(x,\xi,0)=\delta(x,\xi),\ x\in\mathbb{R}^1,\ \xi\in\mathbb{R}^1; \end{cases}$ непрерывным всюду (в $\overline{\Omega}$), кроме точки $(\xi,0)$, т.е. при $x=\xi$, $t=0$.

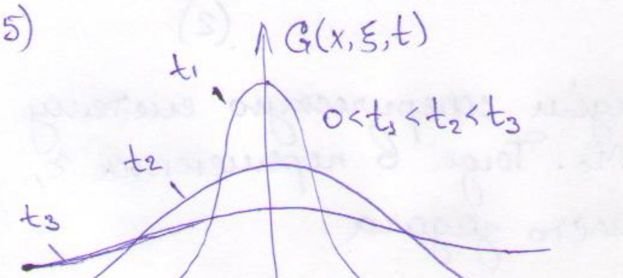
Отсюда следует, что $G(x,\xi,t)$ явл. обобщённой ф-цией.

4) Из ф-лы (2) следует, что ф-ция $G(x,\xi,t)$ с физич. точки зрения представляет собой температуру в точке x в момент времени t, если в нач. момент $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется нек. кол-во тепла $q>0$.

Проинтегрировав $G(x,\xi,t)$ по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)dx=1 \Rightarrow$ кол-во тепла, находящегося на бесконечной прямой $x\in\mathbb{R}^1$ в последующие моменты времени $t>0$, не изм. с течением времени.

5)



$$G(\xi,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

6) из ф-лы (1) следует, что ф-ция $G(x,\xi,t)$ явл. симметричной по x и ξ. Симметрия ф-ции $G(x,\xi,t)$ по переменным x и ξ представляет собой математическое отражение известного физического принципа взаимности.

Отметим, что отн-но переменной t такая симметрия не имеет места, что явл. выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Билет 22.

1. Вывод формулы Кирхгофа.

Получим интегральное состношение, связывающее значения решения ур-ния $u_{tt} = a^2\Delta u + f(M,t), (M,t) \in \Omega_3 = \mathbb{R}^3 \times (0,T]$ (1)

в произв. т. M_0 в момент времени t_0 со значениями этого решения и его производных на замкн. пов-ти S, охватывающей т. M_0, в предыдущие моменты времени.

Мн-во точек (M,t), определяемое условиями: $\frac{R_{M_0M}}{a} = t_0 - t$, $t < t_0$, назнижним характеристическим конусом точки (M_0,t_0) и определяет те точки M, из которых возмущение, вышедшее в момент времени t, предшествующий t_0, в момент t_0 доходит до т. M_0.

Мн-во точек (M,t), определяемое условиями: $\frac{R_{M_0M}}{a} = t - t_0$, $t > t_0$, составляет верхний характеристический конус точки (M_0,t_0). Возмущение (сигнал), вышедшее из т. M_0 в момент t_0, доходит до т. M верхнего хар. конуса в момент времени t.

Введём локальное время точки (M_0,t_0) по формуле:

$$t' = t - \left(t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right) = t - t_0 + \frac{R_{M_0M}}{a} \qquad (2)$$

Очевидно, для точки (M_0,t_0): $t' = 0$. Введём сферическую систему координат (r,θ,φ) с центром в т. M_0. Тогда в переменных r, θ,φ,t для ф-ции $u(r,\theta,\varphi,t)$ имеет место задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(M,t), (M,t) \in \Omega_3; \\ u(M,0) = \varphi(M), u_t(M,0) = \psi(M), M \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$ где Δ - оператор Лапласа в сферич. системе координат с началом в т. M_0.

Перейдём в ур-нии (1) к новым переменным $r'=r$, $\theta'=\theta$, $\varphi'=\varphi$ и t', определяемому по ф-ле (2), сохраняя для пространственных переменных прежние нештрихованные обозначения.
Обозначим: $u(r,\theta,\varphi,t)=u\left(r,\theta,\varphi,t'+\left(t_0-\frac{r}{a}\right)\right)=\mathcal{U}(r,\theta,\varphi,t')$

и пересчитаем производные:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t'},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial\theta};\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi};\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t'};\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Подставляя ф-лы (3) в (1), получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}+a^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+2a\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{2a^2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2a}{r}\frac{\partial U}{\partial t'}+\frac{a^2}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}U+F(M,t'),\quad(4)$$

где $F(M,t')=F(r,\theta,\varphi,t')=f(r,\theta,\varphi,t'+(t_0-r/a))=f(r,\theta,\varphi,t)$,

а $\Delta_{\theta\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

Ф-лу (4) запишем следующим образом:

$$\Delta U=-\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)-\frac{1}{a^2}F(M,t')\qquad(5)$$

Предполагая существование решения ур-ния (1), ф-лу (5) можно $\measuredangle$ как ур-ние Пуассона, правая часть которого явл. ф-цией параметра t'. Используя 3^{ю} ф-лу Грина (см. стр. 158), выразим решение ур-ния (5) в т. $(M_0,0)$:

$$U(M_0,0)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\}\Big|_{t'=0}dS+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)\Big|_{t'=0}dV+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_D\frac{F(M,0)}{r}dV,\quad(6)$$

где $\overline{D}=D\cup S$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали.
Объёмный интеграл, стоящий в правой части ф-лы (6), явл. н/с интегралом 2го рода: $\int\limits_D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{D/K_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV$, где

K_ε — шар радиуса ε с центром в т. M_0. Преобразуем этот интеграл.

Т.к.: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right) = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\operatorname{grad}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)$, то, используя 1° ф-лу Грина, получаем: (48)

$$\int\limits_{D/K_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV = \int\limits_{D/K_\varepsilon} r\frac{\partial U}{\partial t'}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dV - \oint\limits_S r\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}ds - \oint\limits_{S_\varepsilon} r\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}ds, \quad (7)$$

где S_ε - сфера радиуса ε с центром в т. M_0. В области D/K_ε: $\Delta(1/r)=0$. На пов-ти S_ε: $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$. След-но:

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_S r\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}ds = 0$. Поэтому, переходя в (7) к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем:

$$\int\limits_D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV = \oint\limits_S\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial n}ds. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим:

$$U(M_0,0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} + \frac{2}{ar}\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}\Bigg|_{t'=0} dS + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_D\frac{F(M,0)}{r}dV \quad (9)$$

Вернёмся в ф-ле (9) к первоначальным переменным, учитывая, что при $t'=0$: $t=t_0-r/a$. Поскольку:

$$U(P,0) = u\left(P, t_0-\frac{R_{M_0P}}{a}\right),\ P\in S \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}, \text{ откуда:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{t'=0} = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0-r/a},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t'}\bigg|_{t'=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0-r/a},$$

то, подставляя (10) в (9), окончательно получим:

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right) - u\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R} + \frac{1}{aR}\frac{\partial u}{\partial t}\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right)\frac{\partial R}{\partial n_P}\right\}dS_P +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_D\frac{f\left(M,t_0-\frac{R_{M_0M}}{a}\right)}{R_{M_0M}}dV_M,\quad R\equiv R_{M_0P}. \quad \text{— ф-ла Кирхгофа.}$$

2. Описать общую схему метода разделения переменных.

Пусть задана следующая задача:

Найти решение ур-ния $\rho P_t[u] = Lu$, удовл. ГУ и НУ:

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\bigg|_S = 0,\quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \varphi_k(M),\quad k=0,1,\dots,l-1$$

Тогда решение этого ур-ния можно получить в виде произведения $u(M,t) = \vartheta(M)T(t)$, причём ф-ции $\vartheta(M)$ и $T(t)$ определяются из вспомогательных задач:
$$\begin{cases} L\vartheta + \lambda\rho\vartheta = 0, \ \vartheta(M) \neq 0, M \in \mathcal{D}, \\ \left.\left(\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \beta\vartheta\right)\right|_S = 0; \end{cases}$$
и
$$\begin{cases} P_t(T) + \lambda T = 0, \\ \left.\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(M). \end{cases}$$

$Lu = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) - q(M)u,$

$P_t[u] = \sum\limits_{i=0}^{l} a_i(t)\frac{\partial^i u}{\partial t^i},$

$\rho, q \in C(\mathcal{D}), k \in C^{(1)}(\mathcal{D}), \rho, k > 0, q \geq 0,$

$a_i(t)$ – непр. ф-ции переменной $t \in [0,T]$,

Ур-ние $\measuredangle$-ся в обл. $Q = \mathcal{D} \times (0,T]$.

P.S. Это метод для однородных ур-ний. По-нормальному, см. стр. 64 – 66.

Билет 23.

1. Вывод ф-лы Пуассона, описывающей процесс распространения колебаний в трёхмерном пространстве.

см. стр. 341 – 345

2. Построить ф-цию Грина внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа.

$\measuredangle$ внутр. задачу Неймана:
$$\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } \mathcal{D}, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f. \end{cases} \quad (1)$$

$\measuredangle$ ф-лу: $u(M) = \oint\limits_S \left\{\frac{\partial u}{\partial n}G - u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}dS - \int\limits_{\mathcal{D}} G\Delta u dV$. (☆) Покажем, что в данном случае нельзя наложить на ф-цию G доп. условие $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$, (2) чтобы исключить слагаемое, содержащее $u|_S$.

Действительно, если потребовать удовлетворения ф-цией $G = \frac{1}{4\pi R} + v$ доп. условия (2), то для определения ф-ции v получим краевую задачу:
$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\Big|_{P\in S}; \end{cases} \quad (3)$$

Проверим разрешимость этой задачи. Необх. усл. разрешимости имеет вид: $\oint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0$.

Для вычисления интеграла $\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}} dS_P$, $M \in D$, воспользуемся 3^{ей} ф-лой Грина, положив в ней $u \equiv 1$. Тогда получим:

$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}} dS_P = -1 \neq 0$, $M \in D$ (4)

След-но, задача (3) решения не имеет. Это означает, что ф-ции $G = \frac{1}{4\pi R} + v$, удовл. условию (2), не существует. Снова обратимся к ф-ле (*): $u(M) = \oint\limits_S \left\{\frac{\partial u}{\partial n} G - u\frac{\partial G}{\partial n}\right\} dS - \int\limits_D G \Delta u dV$

$$G = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v, \ \Delta v = 0 \text{ в } D. \quad (5)$$

Решение внутр. задачи Неймана определено только с точностью до произв. постоянного слагаемого. Тогда подчиним ф-цию G гр. условию: $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = C_0 = const \neq 0$, поскольку в этом случае слагаемое в ф-ле (5), содержащее значение $u|_S$, даёт постоянную. C_0 выберем так, чтобы была разрешима внутр. вторая КЗ для v: $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } D, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = C_0 - \left.\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\right|_{P \in S}. \end{cases}$ Для этого должно выполняться соотношение:

$\oint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = \oint\limits_S \left\{C_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\right\} dS_P = 0$. В силу рав-ва (4) отсюда получаем, что $C_0 = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 – площадь пов-ти S.

Таким образом, ф-ция $G(M,Q)$ наз. ф-цией Грина внутр. задачи Неймана для оператора Лапласа, если:

а) $G(M,Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, где v – гармоническая в D ф-ция;

б) $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 – площадь пов-ти S.

Билет 24.

1. С помощью метода спуска Адамара получить ф-лу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в двумерном пр-ве.

см. стр. 346 – 349

2. Получить асимптотику ф-ции Макдональда при большом значении аргумента.

Пользуясь асимптотикой ф-ции Ханкеля 1го рода, полученной в Билет 7 (п.2), получим асимптотику ф-ции Макдональда при $x \to \infty$: $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} e^{i(ix)} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi i x}} e^{-i\nu\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + \underline{\underline{O}}(x^{-3/2}) \right\} =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \underline{\underline{O}}(1/x)\right).$$

Билет 25.

1. Вывод ур-ния для присоединённых ф-ций Лежандра.

Ф-ция $u(x) = P_n(x)$ удовл. ур-нию Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + \lambda_n P_n = 0 \to (1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0 \quad (1)$$

Продифференцируем (1) m раз, учитывая ф-лу Лейбница:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}.$$

Получим: $0 = \left[(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u\right]^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} -$

$$- \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2x)^{(k)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} (1-x^2)^{(l)} u^{(m-l+2)} + n(n+1)u^{(m)} = C_m^0 (1-x^2) u^{(m+2)} +$$

$$+ (C_m^1 + C_m^0)(1-x^2)' u^{(m+1)} + (C_m^2 + C_m^1)(1-x^2)'' u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)},$$

причём мы учли, что $k = 0, 1, 2$, а $l = 1, 2$, поскольку производные более высоких порядков от $(1-x^2)$ тождественно равны нулю.

Поскольку: $C_m^1 + C_m^0 = m+1$, $C_m^0 = 1$,

$$C_m^2 + C_m^1 = \frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2},$$

то: $$\left[(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u\right]^{(m)} = (1-x^2)u^{(m+2)} + (m+1)(-2x)u^{(m+1)} +$$

$$+ \frac{m(m+1)}{2}(-2)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0, \text{ т.е.}$$

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2x(m+1)u^{(m+1)} - m(m+1)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0. \qquad (2)$$

Полагая $y(x) = (1-x^2)^{m/2}u^{(m)}(x)$, получаем из (2) следующее ур-ние для ф-ции $y(x) \equiv P_n^{(m)}(x)$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0$$

Перепишем его в след. форме:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0.$$

2. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для ур-ния Гельмгольца.

см. Билет 1 (п.2).