Семинар 1

Вывод уравнений математической физики. Постановка краевых задач

Основные уравнения математической физики:

$$\boxed{u_t(M,t) = a^2 \vartriangle u(M,t) + f(M,t)}$$

— уравнение *теплопроводности* (описывает распространение тепла, диффузию, движение вязкой жидкости);

$$\boxed{u_{tt}(M,t) = a^2 \vartriangle u(M,t) + f(M,t)}$$

— уравнение *колебаний* (описывает малые механические колебания струны, газа, твёрдого тела);

$$\boxed{\vartriangle u(M) = 0}$$

— уравнение *Лапласа* (описывает стационарную теплопроводность, стационарную диффузию, стационарное течение идеальной жидкости, электростатику);

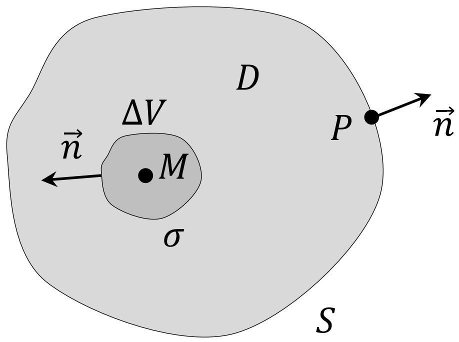
$$\boxed{\vartriangle u(M) + cu(M) = 0}$$

— уравнение *Гельмгольца* (описывает гармонические волны).

Здесь u — неизвестная функция; постоянные коэффициенты a^2, c и функция $f(M,t)$ — даны; M — точка в пространстве, на плоскости или на прямой, t — время.

Рассмотрим вывод уравнения математической физики на примере уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности



Пусть трёхмерная область D, ограниченная стью S, заполнена веществом с удельной теплоёмкостью $c(M)$, плотностью $\rho(M)$ и коэффициентом теплопроводности $k(M)$. Пусть $u(M,t)$ — температура в точке M в момент времени t. Будем считать, что все функции достаточно гладкие.

Рассмотрим подобласть ΔV, ограниченную стью σ. Изменение внутренней энергии в области ΔV за время Δt:

$$\Delta Q = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)[u(M,t+\Delta t) - u(M,t)]\,dV = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)\,d\tau\right] dV =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)u_t(M,\tau)\,dV.$$

Закон Фурье:

$\vec{\Phi}(M,t) = -k(M)\nabla u(M,t)$ — поток тепла (он направлен от более нагретого участка к менее нагретому и пропорционален градиенту температуры). Величина потока Φ — это количество тепла, протекающего через единичную площадку в единичный момент времени в направлении вектора $\vec{\Phi}$.

Согласно закону Фурье, за время Δt через поверхность σ наружу вышло количество тепла

$$\Delta Q_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_\sigma \left(\vec{\Phi}(M,\tau),\vec{n}\right) dS = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\left(\vec{\Phi}(M,\tau)\right) dV =$$
$$= -\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV,$$
где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности σ и использована теорема Остроградского–Гаусса.

Если в области ΔV есть внешние источники (или поглотители) тепла, то за время Δt они выделили количество тепла
$$\Delta Q_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau)\, dV,$$
где $F(M,\tau)$ — удельная мощность источников тепла (количество тепла, выделяемое внешними источниками в единичном объёме в единицу времени).

Закон сохранения энергии:
$\Delta Q = \Delta Q_2 - \Delta Q_1$.
$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)u_t(M,\tau)\, dV =$$
$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau)\, dV + \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$
Отсюда:
$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \left[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\right] dV = 0.$$
По формуле среднего значения:
$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \left[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\right] dV =$$
$$= \left[c(M^*)\rho(M^*)u_t(M^*,t^*) - F(M^*,t^*) - \operatorname{div}\big(k(M^*)\nabla u(M^*,t^*)\big)\right]\Delta t \Delta V = 0,$$
где $M^* \in \Delta V$, $t^* \in (t, t+\Delta t)$.

Будем стягивать область ΔV к некоторой фиксированной точке M (при этом $\Delta V \to 0$) и устремим Δt к нулю, тогда
$$c(M)\rho(M)u_t(M,t) - F(M,t) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,t)\big) = 0.$$
Пусть теперь $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$. Тогда $\operatorname{div}(k\nabla u) = k\operatorname{div}(\nabla u) = k \vartriangle u$, и
$$u_t = \frac{k}{c\rho} \vartriangle u + \frac{F(M,t)}{c\rho}.$$
Обозначим $\frac{k}{c\rho} = a^2$ (коэффициент *температуропроводности*), $\frac{F(M,t)}{c\rho} = f(M,t)$. Получим
$$\boxed{u_t = a^2 \vartriangle u + f(M,t).}$$
Это и есть уравнение теплопроводности. Оно выполняется во всех внутренних точках M области D в любой момент времени t.

Если распределение температуры стационарно, т.е. температура в каждой точке не изменяется со временем, $u = u(M)$ и $f = f(M)$, то получим уравнение *Пуассона:*

$\Delta u = -\dfrac{f(M)}{a^2}.$

В частном случае, когда $f \equiv 0$, имеем уравнение *Лапласа:*

$\boxed{\Delta u = 0.}$

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности ставятся дополнительные условия: начальное и граничное.

НУ: $\boxed{u|_{t=0} = \varphi(M)}$ — задана температура в каждой точке области D в начальный момент времени $t = 0$.

ГУ: ставится на границе S области D. Рассмотрим ГУ трёх типов.

1) $\boxed{u|_S = \mu(P,t)}$ — ГУ *первого* рода или условие *Дирихле:* на границе поддерживается заданная температура (здесь P — точка поверхности S, $\mu(P,t)$ — заданная функция).
2) $\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P,t)}$ — ГУ *второго рода* или условие *Неймана.* Выясним его физический смысл. Если мы умножим левую и правую части этого равенства на коэффициент $-k$, то получим
   $\left.\left(-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = -k\nu(P,t),$
   т.е. $\Phi_n|_S = -k\nu(P,t)$, где $\Phi_n = (\vec{\Phi}, \vec{n}) = (-k\nabla u, \vec{n}) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$ — проекция вектора $\vec{\Phi}$ на единичную внешнюю нормаль $\vec{n}$ к поверхности S. Таким образом, условие Неймана означает, что задан поток тепла через границу S. В частности, *однородное* условие Неймана
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$
   означает, что граница теплоизолирована.
3) $\boxed{\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u\right)\right|_S = \eta(P,t)}$ — ГУ *третьего рода.* Оно описывает теплообмен с окружающей средой. В самом деле, если температура окружающей среды равна u_0, то поток тепла с поверхности S (имеющей температуру u) в окружающую среду (в направлении внешней нормали) описывается законом Ньютона:
   $\Phi_0 = \alpha(u - u_0)$, где α — коэффициент теплообмена.
   Поскольку Φ_0 должен быть равен $\Phi_n|_S$ (мы будем считать, что на границе нет дополнительных источников тепла), то
   $\left.-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \alpha(u - u_0),$
   откуда получаем
   $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{k}u\right)\right|_S = \frac{\alpha}{k}u_0$, а это и есть ГУ третьего рода, где
   $h(P) = \dfrac{\alpha(P)}{k}, \qquad \eta(P,t) = \dfrac{\alpha(P)}{k}u_0(P,t).$
   Если мы устремим здесь α к нулю, то получим однородное условие Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$: теплообмен отсутствует. Если же устремим α к бесконечности, то получим условие Дирихле $u|_S = u_0$: идеальный тепловой контакт.
   Заметим, что коэффициент $h(P) = \frac{\alpha}{k}$ в ГУ третьего рода *неотрицателен.*

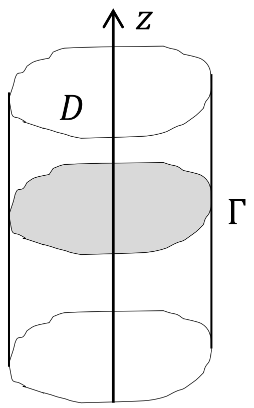
Таким образом, для уравнения теплопроводности в ограниченной области D ставится *начально-краевая* задача:

$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0;$
$u|_{t=0} = \varphi(M), \qquad M \in \overline{D};$
$+$ граничное условие на S.

Требуется найти функцию $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$ (в области D вместе с её границей S), $t > 0$. (В стационарном случае — для уравнения Пуассона или Лапласа — начальное условие не ставится.)

Теперь запишем уравнение теплопроводности в декартовых координатах:

$u_t(x,y,z,t) = a^2\big(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\big) + f(x,y,z,t), \qquad (x,y,z) \in D.$

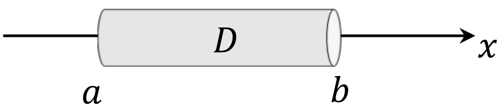


Если область D имеет форму бесконечного цилиндра с осью Oz, т.е. геометрия области не зависит от координаты z, и функция f, а также граничные и начальные условия не зависят от z, то в силу симметрии и температура u не будет зависеть от z. Тогда получим двумерное уравнение теплопроводности:

$u_t(x,y,t) = a^2\big(u_{xx} + u_{yy}\big) + f(x,y,t),$ $(x,y) \in \Gamma$ — в поперечном сечении цилиндра.

Если же область D имеет форму тонкого стержня, параллельного оси Ox, с теплоизолированной боковой поверхностью, т.е. изменением температуры в поперечном сечении можно пренебречь, то уравнение теплопроводности будет одномерным:

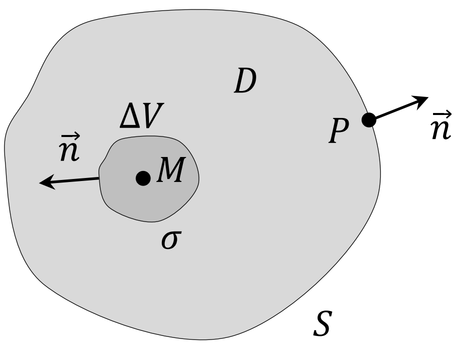
$u_t(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (a,b).$



ДЗ 1. БСТ гл. II № 1, 4, 11; гл. III № 6, 9; гл. IV № 3.

Дополнительный материал

Диффузия



Пусть теперь $u(M,t)$ — концентрация вещества в точке M в момент времени t.

Закон диффузии:

$\overrightarrow{\Phi}(M,t) = -d(M)\nabla u(M,t),$

где $\overrightarrow{\Phi}$ — поток вещества, $d(M)$ — коэффициент диффузии.

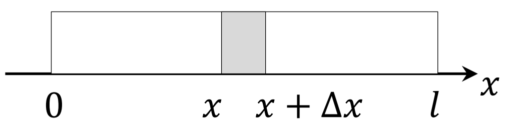
Изменение количества вещества в области ΔV за время Δt:

$$\Delta m = \int\limits_{\Delta V} [u(M,t+\Delta t) - u(M,t)]\, dV = \int\limits_{\Delta V} \left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)\, d\tau\right] dV = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} u_t(M,\tau)\, dV.$$

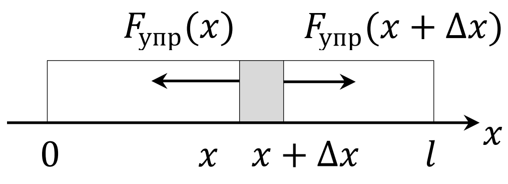
Количество вещества, которое вышло через поверхность σ за время Δt за счёт диффузии:

$$\Delta m_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_\sigma \left(\vec{\Phi}(M,\tau), \vec{n}\right) dS = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\left(\vec{\Phi}(M,\tau)\right) dV =$$
$$= -\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$
Если в области ΔV есть внешние источники (или поглотители) вещества, то за время Δt они выделили количество вещества
$$\Delta m_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\, dV,$$
где $f(M,\tau)$ — удельная мощность источников вещества (количество вещества, выделяемое внешними источниками в единичном объёме в единицу времени).
Закон сохранения вещества:
$\Delta m = \Delta m_2 - \Delta m_1$.
$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} u_t(M,\tau)\, dV = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\, dV + \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$
Применив формулу среднего значения и устремив $\Delta V \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим
$u_t(M,t) = \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,t)\big) + f(M,t)$.
Если $d = \text{const}$, то
$\boxed{u_t = d \,\Delta\, u + f(M,t).}$
Значит, диффузия описывается тем же уравнением, что и теплопроводность.
Стационарная диффузия $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ описывается уравнением Пуассона:
$$\Delta\, u = -\frac{f(M)}{d}.$$
При $f \equiv 0$ — уравнением Лапласа: $\boxed{\Delta\, u = 0.}$
Начальное условие: $u|_{t=0} = \varphi(M)$ — задана начальная концентрация.
Граничное условие.
1) $u|_S = \mu(P,t)$ — на границе поддерживается заданная концентрация.
2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P,t)$ — на границе задан поток вещества.

Уравнение малых продольных колебаний стержня



стержень в равновесии



стержень не в равновесии

Пусть тонкий упругий стержень в положении равновесия (когда он не деформирован) имеет длину l. Направим ось Ox вдоль стержня и поместим начало координат на левом конце стержня.
Рассмотрим малый участок стержня, заключённый между сечениями x и $x + \Delta x$.

Пусть точки стержня могут колебаться вдоль оси Ox (но каждое поперечное сечение стержня колеблется как единое целое). Обозначим через $u(x,t)$ отклонение сечения стержня, находившегося в положении равновесия в точке x, от этого положения равновесия в момент времени t.
При отклонении стержня от положения равновесия удлинение выделенного участка стержня равно $\Delta u = u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$. По закону Гука сила упругости, действующая в сечении x, пропорциональна относительному удлинению $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и равна (по абсолютной величине)
$$F_{\text{упр}}(x,t) = k(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = k(x)u_x(x,t),$$
где $k(x) = E(x)S$, S — площадь сечения, $E(x)$ — модуль Юнга.
Пусть $\tilde{f}(x,t)$ — линейная плотность внешних сил, приложенных к стержню, $\rho(x)$ — линейная плотность стержня (в положении равновесия). Запишем второй закон Ньютона:
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$
где $\vec{p}$ — импульс, $\vec{F}$ — приложенная сила.
Применительно к выделенному участку стержня это будет выглядеть так:
$$\frac{d}{dt}\int\limits_x^{x+\Delta x}\rho(\xi)u_t(\xi,t)\,d\xi = F_{\text{упр}}(x+\Delta x,t) - F_{\text{упр}}(x,t) + \int\limits_x^{x+\Delta x}\tilde{f}(\xi,t)\,d\xi.$$
Отсюда
$$\int\limits_x^{x+\Delta x}\rho(\xi)u_{tt}(\xi,t)\,d\xi = k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t) - k(x)u_x(x,t) + \int\limits_x^{x+\Delta x}\tilde{f}(\xi,t)\,d\xi,$$
т.е.
$$\int\limits_x^{x+\Delta x}\rho(\xi)u_{tt}(\xi,t)\,d\xi = \int\limits_x^{x+\Delta x}\frac{d}{d\xi}\big(k(\xi)u_x(\xi,t)\big)\,d\xi + \int\limits_x^{x+\Delta x}\tilde{f}(\xi,t)\,d\xi.$$
Применив формулу среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим:
$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \big(k(x)u_x(x,t)\big)_x + \tilde{f}(x,t).$$
Если $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то
$$u_{tt} = \frac{k}{\rho}u_{xx} + \frac{\tilde{f}(x,t)}{\rho}.$$
Обозначив $\frac{k}{\rho} = a^2$, $\frac{\tilde{f}(x,t)}{\rho} = f(x,t)$, получим:
$$\boxed{u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \qquad x\in(0,l).}$$
Это уравнение *колебаний* на отрезке.
Поскольку по t это уравнение второго порядка, то ставятся два *начальных* условия:
$$\boxed{\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x),\\ u_t|_{t=0} &= \psi(x).\end{aligned}}$$
Т.е. заданы начальные отклонения и скорости точек стержня.
Граничные условия:

1) $\boxed{u|_{x=0} = \mu(t)}$ — левый конец движется по заданному закону. Это условие Дирихле. В частности, при $\mu(t)\equiv 0$, имеем неподвижно закреплённый конец.

2) Левый конец свободен: $F_{\text{упр}}(0) = 0$. Тогда $ku_x|_{x=0} = 0$, откуда

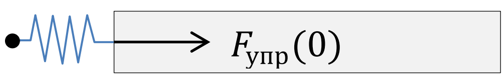
$$\boxed{u_x|_{x=0} = 0.}$$

Если же на левый конец действует заданная внешняя сила $F_0(t)$, то $F_{\text{упр}}(0) = -F_0(t)$, и $ku_x|_{x=0} = -F_0(t)$, откуда

$$\boxed{u_x|_{x=0} = -\frac{F_0(t)}{k}.}$$

Это условие Неймана.

3) Левый конец закреплён на пружине с коэффициентом упругости k_0. Тогда



$F_{\text{упр}}(0) = k_0 u|_{x=0}$, откуда $ku_x|_{x=0} = k_0 u|_{x=0}$, и

$$\boxed{\left.\left(u_x - \frac{k_0}{k}u\right)\right|_{x=0} = 0.}$$

Если другой конец пружины двигают по закону $x = \mu(t)$, то $F_{\text{упр}}(0) = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big)$, откуда $ku_x|_{x=0} = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big)$, и

$$\boxed{\left.\left(u_x - \frac{k_0}{k}u\right)\right|_{x=0} = -\frac{k_0}{k}\mu(t).}$$

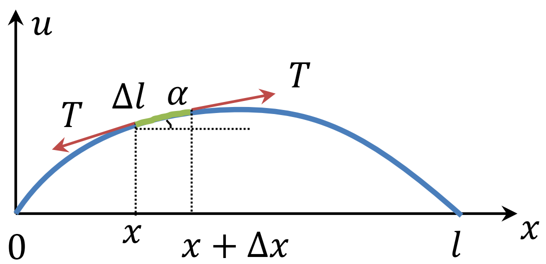
Это граничное условие третьего рода.

Аналогичные граничные условия ставятся на правом конце.

Таким образом, для уравнения колебаний на отрезке ставится следующая начально-краевая задача:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (0,l), \qquad t > 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in (0,l); \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in (0,l); \\ +\ \text{граничные условия при } x = 0 \text{ и } x = l. \end{array}}$$

Уравнение малых поперечных колебаний струны



Рассмотрим натянутую (сила натяжения T) струну длины l, которая может совершать колебания в поперечном направлении (в плоскости). Направим ось Ox вдоль струны. Пусть $u(x,t)$ — отклонение ки x струны от положения равновесия. Рассмотрим участок струны, расположенный между точками x и $x + \Delta x$. Вычислим его длину:

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2}\, d\xi.$$

С другой стороны:

$$u_x = \operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^4), \qquad \alpha \to 0,$$

$$u_x^2 = \alpha^2 + o(\alpha^2), \qquad \sqrt{1 + u_x^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2).$$

Если колебания струны малы, то угол α близок к нулю. Будем считать малыми колебаниями такие, при которых можно пренебречь членами порядка α^2 по сравнению с 1 и считать, что

$$\Delta l \approx \int\limits_x^{x+\Delta x} d\xi = \Delta x,$$

т.е. длина струны при малых колебаниях не изменяется. Но тогда и сила натяжения не изменяется и равна T для любой точки струны. Запишем второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

для выделенного участка струны в проекции на ось Ou. При этом будем считать, что проекция силы натяжения $T_u = T\sin\alpha = T\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^3)\right) \approx T\alpha \approx Tu_x$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)u_t(\xi,t)\,d\xi = T\big(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\big) + \int\limits_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,d\xi,$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность струны, $F(x,t)$ — линейная плотность внешних сил, приложенных к струне (по оси Ou). Отсюда

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)u_{tt}(\xi,t)\,d\xi = T\int\limits_x^{x+\Delta x} u_{xx}(\xi,t)\,d\xi + \int\limits_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,d\xi.$$

Применив формулу среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = Tu_{xx}(x,t) + F(x,t).$$

Если $\rho = \text{const}$, то

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{F(x,t)}{\rho}.$$

Положим $\frac{T}{\rho} = a^2$, $\frac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t)$. Тогда

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (0,l).$$

Получили опять уравнение колебаний на отрезке.

Начальные условия:

$u|_{t=0} = \varphi(x)$,

$u_t|_{t=0} = \psi(x)$ — заданы начальные отклонения и скорости точек струны.

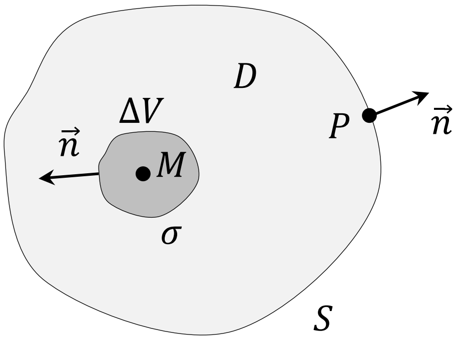
В частности, если $\psi \equiv 0$, $\varphi \not\equiv 0$, то в начальный момент покоящаяся струна отклонена от положения равновесия (гитара). Если $\varphi \equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, то начального отклонения нет, но струне придали начальный импульс (скорость), например, при ударе молоточком (пианино).

Граничные условия:

1) Левый конец закреплён: $u|_{x=0} = 0$.
   Левый конец движется по заданному закону: $u|_{x=0} = \mu(t)$.
2) Левый конец свободен: $T_u|_{x=0} = 0 \Rightarrow u_x|_{x=0} = 0$.
   К левому концу приложена сила $F_0(t)$ по оси Ou: $F_0(t) = -Tu_x|_{x=0} \Rightarrow$
   $$u_x|_{x=0} = -\frac{F_0(t)}{T}.$$
3) Левый конец закреплён на пружине: $Tu_x|_{x=0} = k_0u|_{x=0} \Rightarrow \left(u_x - \frac{k_0}{T}u\right)\Big|_{x=0} = 0$.
   Левый конец закреплён на пружине, которую двигают по закону $u = \mu(t)$:
   $$Tu_x|_{x=0} = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big) \Rightarrow \left(u_x - \frac{k_0}{T}u\right)\Big|_{x=0} = -\frac{k_0}{T}\mu(t).$$

Аналогичные граничные условия ставятся на правом конце струны.

Уравнение малых колебаний газа в сосуде



Пусть $p(M,t)$ — давление, $\vec{v}(M,t)$ — скорость, $\rho(M,t)$ — плотность газа, $\vec{F}(M,t)$ — плотность внешних сил. Рассмотрим подобласть ΔV. Запишем второй закон Ньютона для газа, находящегося в ней в момент времени t:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\,dV =$$

$$= -\int\limits_{\sigma}p(M,t)\vec{n}\,dS + \int\limits_{\Delta V}\vec{F}(M,t)\,dV.$$

Рассмотрим интеграл $\vec{I} = \int_\sigma p(M,t)\vec{n}\,dS$. Это вектор. Его первую компоненту можно записать в виде:

$I_1 = \int_\sigma (\vec{A},\vec{n})\,dS$, где $\vec{A} = \{p,0,0\}$. Тогда по формуле Остроградского–Гаусса:

$$I_1 = \int\limits_{\Delta V}\operatorname{div}\vec{A}\,dV = \int\limits_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial x}dV.$$

Аналогично, $I_2 = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial y}dV$, $I_3 = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial z}dV$, и $\vec{I} = \int_{\Delta V}\nabla p\,dV$.

Далее:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(M,t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{\Delta V}\rho(\vec{v}_t + (\vec{v},\nabla)\vec{v})\,dV = -\int\limits_{\Delta V}\nabla p\,dV + \int\limits_{\Delta V}\vec{F}\,dV.$$

Воспользовавшись формулой среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta V \to 0$, получим:

$$\boxed{\rho(\vec{v}_t + (\vec{v},\nabla)\vec{v}) = -\nabla p + \vec{F}.}$$

Закон сохранения вещества:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V}\rho(M,t)\,dV = -\int\limits_{\sigma}(\rho\vec{v},\vec{n})\,dS = -\int\limits_{\Delta V}\operatorname{div}(\rho\vec{v})\,dV.$$

Воспользовавшись формулой среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta V \to 0$, получим:

$$\boxed{\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.}$$

К двум полученным уравнениям газодинамики надо добавить ещё уравнение состояния газа:

$$\boxed{p = c(\rho).}$$

Пусть $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(M)$, $p = p_0 + \tilde{p}(M) = c(\rho_0) + c'(\rho_0)\tilde{\rho} + o(\tilde{\rho})$, где ρ_0 и p_0 — плотность и давление в положении равновесия, а $\tilde{\rho}$ и $\tilde{p}$ — малые отклонения от положения равновесия. Будем считать малыми колебаниями такие, при которых можно пренебречь квадратами и произведениями малых величин по сравнению с первыми степенями. Кроме того, будем считать малыми величинами скорость $\vec{v}$ и её частные производные. Тогда система уравнений газодинамики принимает вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \vec{v}_t = -c'(\rho_0)\nabla\tilde{\rho} + \vec{F}, \\ \tilde{\rho}_t + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \end{cases}$$

Теперь возьмём дивергенцию от первого уравнения и производную по t от второго:

$$\begin{cases} \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_t = -c'(\rho_0) \vartriangle \tilde{\rho} + \operatorname{div} \vec{F}, \\ \tilde{\rho}_{tt} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_t) = 0. \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим:

$$\tilde{\rho}_{tt} = c'(\rho_0) \vartriangle \tilde{\rho} - \operatorname{div} \vec{F}.$$

Введя обозначения $c'(\rho_0) = a^2 > 0$, $-\operatorname{div} \vec{F} = f(M,t)$, получим трёхмерное уравнение колебаний:

$$\boxed{\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \vartriangle \tilde{\rho} + f(M,t).}$$

Оно описывает распространение звука в газе.

Начальные условия. Поскольку уравнение второго порядка по t, то начальных условий должно быть два:

1) Задана начальная плотность: $\boxed{\tilde{\rho}|_{t=0} = \varphi(M).}$
2) Задана начальная скорость: $\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0$.
   Из уравнения $\tilde{\rho}_t + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ получим:
   $\boxed{\tilde{\rho}_t|_{t=0} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_0\,.}$

Граничные условия:

1) Абсолютно мягкий сосуд. Тогда $p|_S = p_{\text{вн}} = p_0$, где $p_{\text{вн}}$ — давление внешней среды. Отсюда $\tilde{p}|_S = 0$ и $\boxed{\tilde{\rho}|_S = 0.}$
2) Абсолютно жёсткий сосуд: $v_n|_S = 0$. Рассмотрим уравнение $\rho_0 \vec{v}_t = -c'(\rho_0)\nabla\tilde{\rho} + \vec{F}$ на границе S, считая, что $\vec{F} = 0$ вблизи границы. Умножив уравнение на $\vec{n}$, получим:
   $\rho_0 (v_n|_S)_t = -c'(\rho_0) \left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial n}\right|_S = 0$, откуда
   $$\boxed{\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial n}\right|_S = 0.}$$

В промежуточном случае надо ставить ГУ третьего рода.

В случае установившихся колебаний с частотой ω: $\tilde{\rho}(M,t) = u(M)\sin(\omega t + \varphi)$, под действием силы $f(M,t) = \tilde{f}(M)\sin(\omega t + \varphi)$, уравнение колебаний принимает вид:

$$-\omega^2 u = a^2 \vartriangle u + \tilde{f}(M),$$

или $\vartriangle u + k^2 u = \bar{\tilde{f}}$ — уравнение *Гельмгольца*, где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. Если внешней силы нет, то уравнение Гельмгольца однородно:

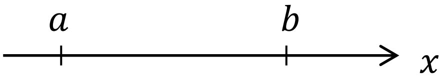
$$\boxed{\vartriangle u + k^2 u = 0.}$$

Семинар 2

Задачи Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольных областях

(Начально)-краевые задачи для уравнений математической физики во многих случаях сводятся к задачам Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа, поэтому сначала нужно научиться решать эти задачи в различных областях.

Отрезок



$$\boxed{\begin{array}{l} y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ a < x < b, \\ + \text{однородные ГУ при } x = a, x = b. \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

Требуется найти все значения λ, при которых существуют нетривиальные решения $y(x) \not\equiv 0$ данной краевой задачи. Такие λ называются собственными значениями (СЗ), а нетривиальные решения $y(x)$ — собственными функциями (СФ) задачи Штурма–Лиувилля. Задачи Штурма–Лиувилля на отрезке рассматривались в прошлом семестре.

Т. (свойства СЗ и СФ задачи Штурма–Лиувилля).

1. В случае однородных ГУ
   Дирихле: $y(a) = 0,\ y(b) = 0,$
   Неймана: $y'(a) = 0,\ y'(b) = 0,$
   третьего рода: $y'(a) - h_1 y(a) = 0,\ y'(b) + h_2 y(b) = 0$ (при $h_1 > 0, h_2 > 0$),
   а также смешанных ГУ (любая комбинация перечисленных) СЗ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2) *неотрицательны:* $\boxed{\lambda \geq 0.}$
   При этом *нулевое* СЗ $\lambda = 0$ есть *тогда и только тогда*, когда *на всей границе* ставится условие Неймана:
   $y'(a) = 0, \qquad y'(b) = 0.$
2. СФ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2), отвечающие различным СЗ, *ортогональны* (с весом 1) на отрезке $[a, b]$.

Т. (Стеклова). Если $f(x) \in C^2[a, b]$ и удовлетворяет однородным ГУ (2), то ция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по ортогональной системе СФ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \qquad x \in [a, b],$$

причём коэффициенты ряда вычисляются по формуле:

$$f_n = \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2} = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_a^b f(x) y_n(x)\, dx, \qquad \|y_n\|^2 = (y_n, y_n) = \int_a^b y_n^2(x)\, dx.$$

Замечание: если функция $f(x)$ не удовлетворяет ГУ, то указанный ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$ во всех внутренних точках (a, b).

Замечание: аналогичные теоремы справедливы в двумерных и трёхмерных ограниченных областях.

Пример 1 (смешанные ГУ). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$

В силу приведённой выше теоремы все СЗ *положительны:* $\lambda > 0$.

Тогда ОР ДУ:

$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$.

Из ГУ:

$\begin{cases} y(0) = A = 0, \\ y(l) + y'(l) = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l - A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$

В силу $A = 0$ имеем:

$B\left(\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l\right) = 0$.

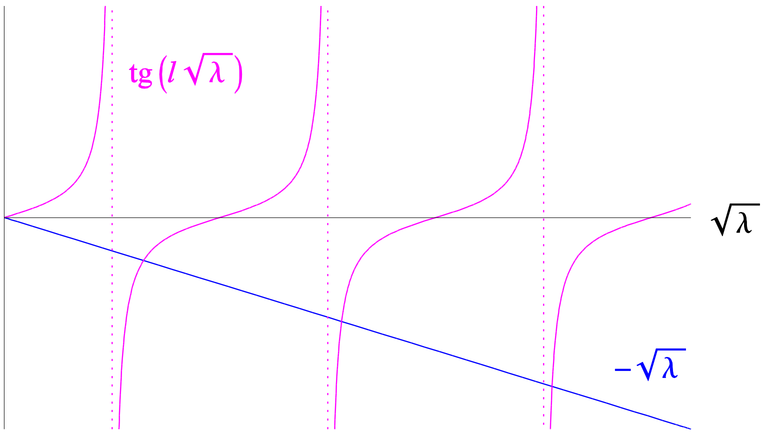
Нетривиальные решения будут, только если

$\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$,

т.е.

$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l = -\sqrt{\lambda}$.

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечно много положительных корней λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см. рис.). Им соответствуют СФ



$y_n(x) = B\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad B \neq 0$.

Поскольку СФ *всегда* определены с точностью до ненулевого множителя, мы в дальнейшем будем этот множитель опускать, т.е. выписывать только систему ЛНЗ СФ.

Ответ: $\lambda_n > 0$ — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$.

ДЗ. Разложить функцию $f(x) = -\frac{x}{l}$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ на отрезке $[0, l]$.

Пример 2 (периодические ГУ). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ y(x + 2l) \equiv y(x). \end{cases}$

Требуется найти все $2l$-периодические нетривиальные решения ДУ.

1) $\lambda < 0$.

   $y(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

   При $|A| + |B| \neq 0$ функция $y(x)$ не может быть периодической, т.к. она неограничена. (В самом деле, непрерывная периодическая функция ограничена на отрезке $[0, 2l]$, а следовательно, и на всей вещественной оси.) Поэтому СФ и СЗ нет.

2) $\lambda = 0$.

   $y(x) = Ax + B$.

   При $A \neq 0$ функция $y(x)$ неограничена. При $A = 0$: $y(x) = B$ — $2l$-периодическая функция.

3) $\lambda > 0$.

   $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x = C\sin\left(\sqrt{\lambda}x + \varphi\right)$.

При $C \neq 0$ у этой функции наименьший период $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Чтобы она имела период $2l$, нужно, чтобы в $2l$ укладывалось целое число периодов T:

$$2l = n\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Соответствующие СФ:

$$y_n(x) = A_n \cos\frac{\pi n x}{l} + B_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad |A_n| + |B_n| \neq 0.$$

Поскольку каждому СЗ $\lambda_n > 0$ отвечают две ЛНЗ СФ, мы будем обозначать их следующим образом:

$$y_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad y_{-n}(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Ответ: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $y_0(x) = 1$, $y_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}$, $y_{-n}(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

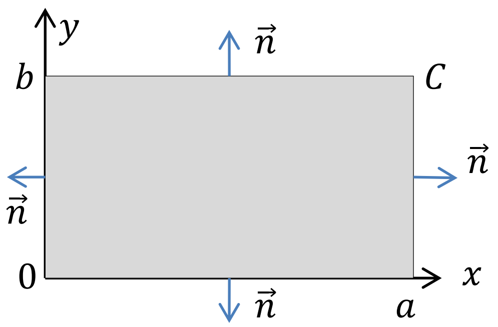
ДЗ: убедиться, что эти СФ ортогональны на $[0, 2l]$, и вычислить квадраты их норм.

В частности, при $l = \pi$ имеем:

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$y_0(x) = 1, \qquad y_n(x) = \cos nx\,, \qquad y_{-n} = \sin nx\,, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Пример 3 (прямоугольник). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta\, u + \lambda u = 0, & 0 < x < a, \qquad 0 < y < b; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0. \end{cases}$$

Здесь $u = u(x, y)$.

ГУ Неймана можно записать в виде:

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \qquad -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$

Задача решается **методом разделения переменных.** Будем искать $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0.$$

Подставим это выражение в ДУ, учтя, что $\Delta\, u = u_{xx} + u_{yy}$:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0.$$

Поделим на $X(x)Y(y) \not\equiv 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0.$$

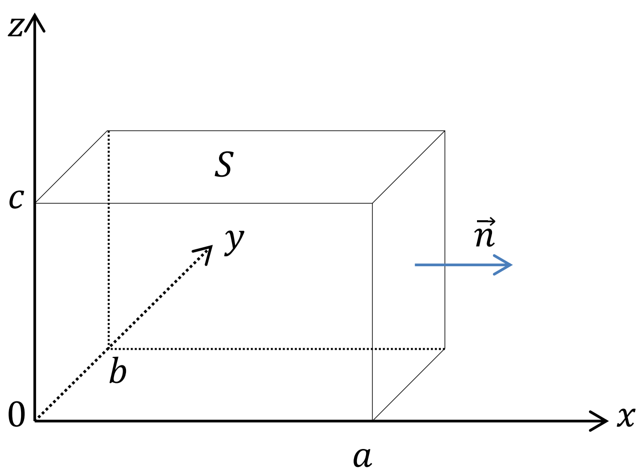
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda.$$

Это должно выполняться везде внутри прямоугольника: $0 < x < a$, $0 < y < b$. Но левая часть — это функция только переменной x, а правая часть — только переменной y. Эти функции могут быть тождественно равны только тогда, когда они равны константе. Тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu.$$

Для функции $X(x)$ получаем уравнение
$X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad x \in (0, a).$
Теперь подставим $u(x,y) = X(x)Y(y)$ в ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$ и получим ГУ для $X(x)$:
$X'(0)\cancel{Y(y)} = 0, \qquad X'(a)\cancel{Y(y)} = 0.$
Таким образом, имеем задачу Штурма–Лиувилля:
$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, & 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0. \end{cases}$$
Дома вы убедитесь в том, что её СЗ $\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$, а СФ — $X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
Для функции $Y(y)$ имеем уравнение:
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda + \mu = -\nu, \qquad \lambda = \mu + \nu.$$
С учётом ГУ получим задачу Штурма–Лиувилля:
$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, & 0 < y < b, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(b) = 0. \end{cases}$$
Она аналогична задаче для $X(x)$ и имеет СЗ $\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ и СФ $Y_m(y) = \cos\frac{\pi m y}{b}$, $m = 0, 1, 2, \dots$
Тогда СЗ задачи Штурма–Лиувилля для прямоугольника:
$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$, а СФ:
$$u_{nm}(x,y) = X_n(x)Y_m(y) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b}.$$
Все ли ЛНЗ СФ мы нашли? Можно показать, что найденные СФ образуют замкнутую ортогональную систему функций в прямоугольнике (это следует из замкнутости систем СФ $\{X_n(x)\}$ и $\{Y_m(y)\}$ на отрезках $[0, a]$ и $[0, b]$, соответственно). Из замкнутости следует полнота. Если бы существовали другие ЛНЗ СФ, то они были бы ортогональны найденным (или их можно было бы сделать ортогональными по алгоритму Грама–Шмидта), но тогда в силу полноты нашей системы эти СФ были бы тривиальными, что невозможно. Поэтому других ЛНЗ СФ нет.
Ответ: $\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$, $u_{nm}(x,y) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$
ДЗ: вычислить квадраты норм СФ по формуле
$$\|u_{nm}\|^2 = \int_0^a dx \int_0^b u_{nm}^2(x,y)\,dy = \int_0^a X_n^2(x)\,dx \int_0^b Y_m^2(y)\,dy = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2.$$

Пример 4 (прямоугольный параллелепипед). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \ 0 < z < c; \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0. \end{cases}$$
Здесь $u = u(x, y, z)$. ГУ Неймана можно записать в виде:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0,$$
$$-\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{x=c} = 0.$$
Будем искать $u(x,y,z)$ в виде
$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0.$
Подставив это в ДУ и поделив на $X(x)Y(y)Z(z)$, получим
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0.$$
Отсюда
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\mu.$$
С учётом ГУ, получим задачу Ш.–Л. для функции $X(x)$:
$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ и СФ $X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
В уравнении
$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\mu$$
разделим переменные ещё раз:
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda + \mu = -\nu.$$
Тогда имеем задачу Ш.–Л. для функции $Y(y)$:
$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \qquad 0 < y < b, \\ Y'(0) = 0, \qquad Y'(b) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ и СФ $Y_m(y) = \cos\frac{\pi m y}{b}$, $m = 0, 1, 2, \dots$
Для функции $Z(z)$:
$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda + \mu + \nu = -\kappa, \qquad \lambda = \mu + \mu + \kappa,$$
и получаем задачу Ш.–Л.:
$$\begin{cases} Z''(z) + \kappa Z(z) = 0, \qquad 0 < z < c, \\ Z'(0) = 0, \qquad Z'(c) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\kappa_k = \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$ и СФ $Z_k(z) = \cos\frac{\pi k z}{c}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
Тогда СЗ задачи Ш.–Л. в прямоугольнике:
$$\lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \kappa_k = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \qquad n, m, k = 0, 1, 2, \dots,$$
а её СФ —
$$u_{nmk}(x,y,z) = X_n(x)Y_m(y)Z_k(z) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b} \cdot \cos\frac{\pi k z}{c}.$$
Ответ: $\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$, $u_{nmk}(x,y,z) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b} \cdot \cos\frac{\pi k z}{c}$,
$n, m, k = 0, 1, 2, \dots$
ДЗ: вычислить $\|u_{nmk}\|^2$.

ДЗ 2. Доделать примеры 1–4.
Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л. для уравнения
$y''(x) + \lambda y(x) = 0$
на отрезке $[0, l]$ с ГУ:

а) $y(0) = 0, y(l) = 0$;
б) $y'(0) = 0, y'(l) = 0$;
в) $y(0) = 0, y'(l) = 0$;
г) $y'(0) = 0, y(l) = 0$;
д) $y'(0) - y(0) = 0, y'(l) = 0$.

БК с. 62 № 2 (в,г,д), с. 63 № 6(а).
Во всех этих задачах вычислить также квадраты норм СФ.

Семинар 3

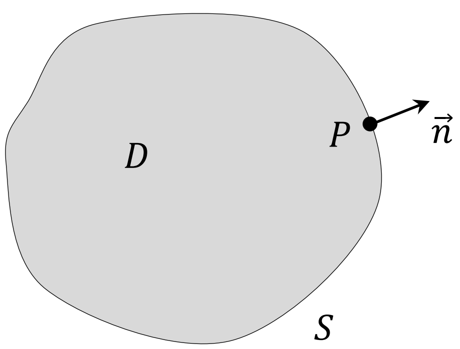
Выпишем СЗ и СФ основных одномерных задач Ш.–Л. для оператора Лапласа.

ДУ: $y''(x)+\lambda y(x)=0$

ГУ	СЗ λ_n	СФ $y_n(x)$	$\|y_n\|^2$	n	
$y(0)=y(l)=0$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\sin\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1,2,\ldots$	СФ образуют полную ортогональную систему на $[0,l]$
$y'(0)=y'(l)=0$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}(1+\delta_{n0})$	$0,1,2,\ldots$	
$y(0)=y'(l)=0$	$\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2$	$\sin\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1,2,\ldots$	
$y'(0)=y(l)=0$	$\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1,2,\ldots$	
$y(x+2l)\equiv y(x)$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi n x}{l},\ n\geq 0,$ $\sin\frac{\pi n x}{l},\ n<0$	$l(1+\delta_{n0})$	$0,\pm 1,\pm 2,\ldots$	СФ образуют полную ортогональную систему на $[0,2l]$

Этими результатами можно пользоваться в дальнейшем при решении задач.

Краевые задачи для уравнения Лапласа



Пусть D — ограниченная область на плоскости или в пространстве, S — её граница. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases}\Delta\, u = 0 \text{ в } D,\\ +\text{ ГУ на } S.\end{cases}$$

Требуется найти неизвестную функцию u.

Мы будем рассматривать ГУ следующего вида:

$u|_S = f(P)$ — Дирихле,

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$ — Неймана,

$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_S = f(P)$ — третьего рода ($h(P)\not\equiv 0$),

а также смешанные ГУ, когда на одной части границы S ставится условие одного рода, на другой — другого, и т.п.

Предположим, что все функции достаточно гладкие. Тогда справедлива следующая теорема.

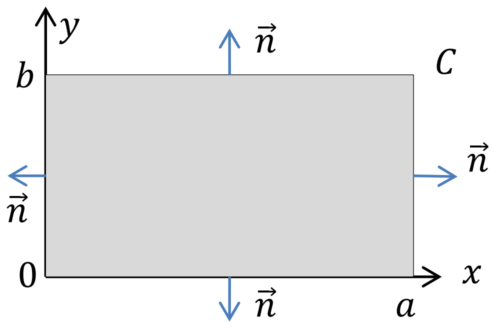
Т. (существования и единственности). а) задачи Дирихле и третьего рода при $h(P)\geq 0$ (а также смешанные задачи) однозначно разрешимы;

б) задача Неймана разрешима $\Leftrightarrow$

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_S f(P)\,dS = 0.$$

При этом её решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Пример 1 (прямоугольник).



$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases} \qquad (0)$$

Это задача Неймана.

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции.

Условие разрешимости задачи Неймана запишется в виде:

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int\limits_0^a \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}\right) dx + \int\limits_0^b \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}\right) dy + \int\limits_0^a \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}\right) dx + \int\limits_0^b \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^b [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy + \int\limits_0^a [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\, dx = 0.$$

Будем считать, что оно выполнено (иначе задача не имеет решения).

Будем искать неизвестную функцию $u(x, y)$ в виде:

$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$,

где функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x), \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

В самом деле, тогда функция $u(x, y)$ будет удовлетворять исходной краевой задаче (0).

Проблема в том, что исходная задача (0) может быть разрешима, а задачи (I), (II) могут не иметь решения, т.к. для них условия разрешимости:

$$\int\limits_0^a [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\, dx = 0, \qquad \int\limits_0^b [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy = 0.$$

В этом случае данный подход неприменим. В дальнейшем будем считать, что условия разрешимости задач (I), (II) выполнены.

Рассмотрим задачу (I).

Сначала найдём *частные* решения уравнения Лапласа $\Delta u_1 = 0$, удовлетворяющие однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, и представимые в виде

$u_1(x, y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0$.

В этом случае уравнение Лапласа принимает вид:

$\Delta u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$.

Поделим его на $X(x)Y(y)$ и разделим переменные (о методе разделения переменных см. семинар 2):
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$
С учётом ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, для функции $X(x)$ получим задачу Ш.–Л.:
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0. \end{cases}$$
Как мы уже знаем (см. таблицу), её СЗ и СФ:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Теперь для функции $Y(y)$ имеем ДУ:
$$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0,$$
т.е.
$$Y_n''(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_n(y) = 0.$$
Оно имеет ОР:
$Y_0(y) = A_0 y + B_0$, если $n = 0$;
$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}$, если $n = 1, 2, \ldots$
Таким образом, мы получили функции
$$u_1^{(0)}(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = A_0 y + B_0,$$
$$u_1^{(n)}(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \cos\frac{\pi n x}{a}\cdot\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u_1 = 0$ и ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0.$

Будем искать решение задачи (I) в виде их суммы:
$$u_1(x,y) = u_1^{(n)}(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{a}\cdot\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right). \qquad (*)$$
При условии, что ряд можно дифференцировать почленно два раза, функция $u_1(x,y)$ тоже будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u_1 = 0$ и однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0.$

Подставим её в неоднородные ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x),\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x).$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\cdot\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right).$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\cdot(A_n - B_n) = \psi_1(x). \qquad (1)$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\cdot\left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right) = \psi_2(x). \qquad (2)$$
Из уравнений (1), (2) надо найти коэффициенты A_n, B_n. Для этого разложим известные функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в ряд Фурье по $\cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2\ldots$ (по ортогональной системе СФ задачи Ш.–Л. на отрезке $[0, a]$):

$$\psi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi nx}{a},\qquad \psi_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cos\frac{\pi nx}{a},$$
где
$$C_n=\frac{1}{\left\|\cos\frac{\pi nx}{a}\right\|^2}\int_0^a\psi_1(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx,\qquad D_n=\frac{1}{\left\|\cos\frac{\pi nx}{a}\right\|^2}\int_0^a\psi_2(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx,$$
$$\left\|\cos\frac{\pi nx}{a}\right\|^2=\frac{a}{2}(1+\delta_{n0}).$$
Подставим эти ряды Фурье в правые части уравнений (1), (2):
$$\begin{cases}A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot(A_n-B_n)=C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi nx}{a},\\ A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot\left(A_ne^{\frac{\pi nb}{a}}-B_ne^{-\frac{\pi nb}{a}}\right)=D_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_n\cos\frac{\pi nx}{a}.\end{cases}$$
В силу единственности разложения функции в ряд Фурье, приравняем соответствующие коэффициенты при $\cos\frac{\pi nx}{a}$, $n=0,1,2,\dots$:
$$\begin{cases}A_0=C_0,\\ \frac{\pi n}{a}(A_n-B_n)=C_n,\qquad n=1,2,\dots,\\ A_0=D_0,\\ \frac{\pi n}{a}\left(A_ne^{\frac{\pi nb}{a}}-B_ne^{-\frac{\pi nb}{a}}\right)=D_n,\qquad n=1,2,\dots\end{cases}$$
Из этой системы однозначно определяются все коэффициенты A_0, A_n, B_n, $n=1,2,\dots$ (проверьте это). Заметим, что система имеет решение только при $C_0=D_0$, что следует из условия разрешимости задачи Неймана (I). Полученные коэффициенты подставляются в выражение (*), и получается решение задачи (I) (при условии, что ряд сходится; мы не будем доказывать его сходимость.). В силу теоремы существования и единственности, других решений у задачи (I) нет. Заметим, что коэффициент B_0 остаётся произвольным, что соответствует тому, что решение задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Замечание: система для определения коэффициентов A_n, B_n упростится, если ОР ДУ
$$Y_n''(y)-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2Y_n(y)=0\tag{3}$$
записать в виде
$$Y_n(y)=A_nY_n^{(1)}(y)+B_nY_n^{(2)}(y),$$
где функции $Y_n^{(1)}(y)$ и $Y_n^{(2)}(y)$ образуют ФСР ДУ (3), причём функция $Y_n^{(1)}(y)$ удовлетворяет *однородному* ГУ при $y=0$, а функция $Y_n^{(2)}(y)$ удовлетворяет *однородному* ГУ при $y=b$, т.е. в нашей задаче — условиям Неймана:
$$\left.\frac{d}{dy}Y_n^{(1)}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{d}{dy}Y_n^{(2)}\right|_{y=b}=0.\tag{4}$$
При $n\neq0$ такая ФСР существует:
$$Y_n^{(1)}(y)=\operatorname{ch}\frac{\pi ny}{a},\qquad Y_n^{(2)}(y)=\operatorname{ch}\frac{\pi n(y-b)}{a},\qquad n=1,2,\dots$$

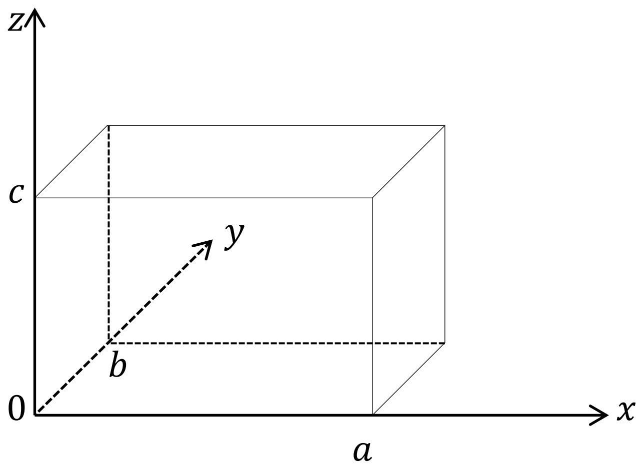
В самом деле, можно проверить, что данные функции удовлетворяют ДУ (3), ГУ (4) и являются ЛНЗ.
При $n=0$ ФСР, удовлетворяющая однородным ГУ Неймана (4), к сожалению, не существует, поэтому ОР ДУ оставим в старом виде:
$Y_0(y)=A_0y+B_0$.
Теперь решение задачи (I) ищется в виде:
$$u_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)=A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot\left(A_n\operatorname{ch}\frac{\pi ny}{a}+B_n\operatorname{ch}\frac{\pi n(y-b)}{a}\right).\ (**)$$
Поскольку
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot\left(A_n\operatorname{sh}\frac{\pi ny}{a}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n(y-b)}{a}\right),$$
при подстановке в неоднородные ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=\psi_1(x)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b}=\psi_2(x)$, получим:
$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=A_0-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot B_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}=\psi_1(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi nx}{a},\\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b}=A_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}\cdot A_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}=\psi_2(x)=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\frac{\pi nx}{a},\end{cases}$$
откуда сразу имеем:
$$A_0=C_0=D_0,\qquad A_n=\frac{aD_n}{\pi n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}},\qquad B_n=-\frac{aC_n}{\pi n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}},\qquad n=1,2,\dots$$
Например, пусть $\psi_1(x)=1$, $\psi_2(x)=1+\cos\frac{\pi x}{a}$. Тогда имеем систему уравнений:
$$\begin{cases}A_0-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}B_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}=1,\\ A_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}A_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}\cos\frac{\pi nx}{a}=1+\cos\frac{\pi x}{a}.\end{cases}$$
Заметим, что правые части этих уравнений уже разложены в ряды Фурье по $\cos\frac{\pi nx}{a}$, состоящие в данном случае из конечного числа слагаемых. Приравнивая соответствующие коэффициенты рядов Фурье, находим:
$$A_0=1,\qquad A_1=\frac{a}{\pi\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}},\qquad A_n=0,\qquad n=2,3,\dots;$$
$$B_n=0,\qquad n=1,2,\dots$$
И тогда решением задачи (I) будет функция (**):
$$u_1(x,y)=y+B_0+\frac{a}{\pi\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a},$$
где B_0 — произвольная постоянная.
Задача (II) решается аналогично задаче (I), и в итоге получается решение исходной задачи (0) в виде
$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$.

Краевые задачи с другими ГУ решаются аналогично, причём для них решение всегда существует и единственно, т.е. нет необходимости проверять условие разрешимости.

ДЗ 3. БК с. 117 № 6.

Семинар 4

Пример 1 (прямоугольный параллелепипед).



$$
\begin{cases}
\Delta\, u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c,\\
u|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u|_{x=a} = \varphi_2(y,z),\\
u|_{y=0} = \psi_1(x,z), \qquad u|_{y=b} = \psi_2(x,z),\\
u|_{z=0} = \chi_1(x,y), \qquad u|_{z=c} = \chi_2(x,y).
\end{cases} \qquad (0)
$$

Будем искать решение задачи (0) в виде:
$u = u_1 + u_2 + u_3$,
где функции u_1, u_2 и u_3 являются решениями следующих краевых задач:

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_1 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c,\\
u_1|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u_1|_{x=a} = \varphi_2(y,z),\\
u_1|_{y=0} = 0, \qquad u_1|_{y=b} = 0,\\
u_1|_{z=0} = 0, \qquad u_1|_{z=c} = 0.
\end{cases} \qquad (\mathrm{I})
$$

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_2 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c,\\
u_2|_{x=0} = 0, \qquad u_2|_{x=a} = 0,\\
u_2|_{y=0} = \psi_1(x,z), \qquad u_2|_{y=b} = \psi_2(x,z),\\
u_2|_{z=0} = 0, \qquad u_2|_{z=c} = 0.
\end{cases} \qquad (\mathrm{II})
$$

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_3 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c,\\
u_3|_{x=0} = 0, \qquad u_3|_{x=a} = 0,\\
u_3|_{y=0} = 0, \qquad u_3|_{y=b} = 0,\\
u_3|_{z=0} = \chi_1(x,y), \qquad u_3|_{z=c} = \chi_2(x,y).
\end{cases} \qquad (\mathrm{III})
$$

В самом деле, если функции u_1, u_2, u_3 являются решениями задач (I), (II), (III), соответственно, то функция $u = u_1 + u_2 + u_3$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (0).
Рассмотрим задачу (I). Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа $\Delta\, u_1 = 0$ в прямоугольном параллелепипеде, удовлетворяющие однородным ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, и представимые в виде:
$u_1(x,y,z) = X(x) \cdot v(y,z) \not\equiv 0$.
Тогда уравнение Лапласа $\Delta\, u_1 = 0$ принимает вид:
$\Delta\, u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} + (u_1)_{zz} = X''(x)v(y,z) + X(x)\, \Delta_{yz}\, v(y,z) = 0$,
где $\Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Разделим переменные:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\Delta_{yz}\, v(y,z)}{v(y,z)} = \lambda.$$

С учётом однородных ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, для функции $v(y,z)$ получим задачу Ш.–Л. в прямоугольнике:

$$
\begin{cases}
\Delta_{yz}\, v(y,z) + \lambda v(y,z) = 0, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c,\\
v|_{y=0} = 0, \qquad v|_{y=b} = 0,\\
v|_{z=0} = 0, \qquad v|_{z=c} = 0.
\end{cases}
$$

Путём разделения переменных эта задача сводится к двум задачам Ш.–Л. на отрезках (по y и по z) с условиями Дирихле. Её СЗ и СФ:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \qquad v_{nm}(y,z) = \sin\frac{\pi n y}{b}\cdot\sin\frac{\pi m z}{c},$$

$$\|v_{nm}\|^2 = \int_0^b dy\int_0^c v_{nm}^2(y,z)\,dz = \int_0^b dy\int_0^c \sin^2\frac{\pi n y}{b}\sin^2\frac{\pi m z}{c}\,dz =$$

$$= \int_0^b \sin^2\frac{\pi n y}{b}\,dy\int_0^c \sin^2\frac{\pi m z}{c}\,dz = \left\|\sin\frac{\pi n y}{b}\right\|^2\cdot\left\|\sin\frac{\pi m z}{c}\right\|^2 = \frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} = \frac{bc}{4}, \qquad n,m = 1,2,\ldots$$

Для функции $X(x)$ имеем ДУ:

$$X''_{nm}(x) - \lambda_{nm}X_{nm}(x) = 0, \qquad 0 < x < a. \tag{1}$$

Заметим, что в данном случае все $\lambda_{nm} > 0$.

С учётом замечания, сделанного в конце семинара 3, удобно записать ОР ДУ (1) в виде:

$$X_{nm}(x) = A_{nm}X_{nm}^{(1)}(x) + B_{nm}X_{nm}^{(2)}(x),$$

где функции $X_{nm}^{(1)}(x)$, $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяют ДУ (1), являются ЛНЗ, функция $X_{nm}^{(1)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = 0$, а функция $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = a$, т.е. в нашем случае — условиям Дирихле:

$$X_{nm}^{(1)}(0) = 0, \qquad X_{nm}^{(2)}(a) = 0.$$

Легко проверить, что функции

$$X_{nm}^{(1)}(x) = \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x, \qquad X_{nm}^{(2)}(x) = \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)$$

удовлетворяют всем перечисленным выше условиям.

Таким образом, имеем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ $u_1|_{y=0} = 0,\ u_1|_{y=b} = 0, u_1|_{z=0} = 0,\ u_1|_{z=c} = 0$:

$$u_1^{(n,m)}(x,y,z) = X_{nm}(x)v_{nm}(y,z) = \left[A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x + B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)\right]v_{nm}(y,z).$$

Ищем решение задачи (I) в виде их суммы:

$$u_1(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_1^{(n,m)}(x,y,z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x + B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)\right]v_{nm}(y,z). \tag{*}$$

Функция (*) (при условии, что ряд можно дифференцировать почленно два раза) удовлетворяет всем условиям задачи (I), кроме неоднородных ГУ:

$$u_1|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u_1|_{x=a} = \varphi_2(y,z).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются подстановкой ряда (*) в неоднородные ГУ:

$$\begin{cases} u_1|_{x=0} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a\,v_{nm}(y,z) = \varphi_1(y,z), \\ u_1|_{x=a} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a\,v_{nm}(y,z) = \varphi_2(y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Разложим функции $\varphi_1(y,z)$, $\varphi_2(y,z)$ в ряд Фурье по СФ $v_{nm}(y,z)$ задачи Ш.–Л. в прямоугольнике:

$$\varphi_1(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}v_{nm}(y,z)\,,\qquad \varphi_2(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}D_{nm}v_{nm}(y,z)\,,$$

$$C_{nm}=\frac{1}{\|v_{nm}\|^2}\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c \varphi_1(y,z)v_{nm}(y,z)\,dz\,,$$

$$D_{nm}=\frac{1}{\|v_{nm}\|^2}\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c \varphi_2(y,z)v_{nm}(y,z)\,dz.$$

Тогда, приравнивая соответствующие коэффициенты рядов Фурье в уравнениях (2), получим:

$$A_{nm}=\frac{D_{nm}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a},\qquad B_{nm}=-\frac{C_{nm}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a},\qquad n,m=1,2,\ldots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (*), получим решение задачи (I). В силу теоремы существования и единственности, других решений нет.

Задачи (II) и (III) решаются аналогично. Решение исходной задачи (I) есть сумма решений задач (I), (II), (III):

$u=u_1+u_2+u_3.$

Замечание: в случае задачи Неймана исходная задача (0) может быть разрешима, а задачи (I), (II), (III) могут быть неразрешимы. Тогда описанный алгоритм для решения задачи (0) не подходит.

Уравнение Лапласа в полярных координатах

От декартовых координат (x,y) на плоскости перейдём к полярным координатам (r,φ): $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. При этом оператор Лапласа преобразуется следующим образом (дома проверить):

$$\Delta\,u=u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Найдём ЧР уравнения Лапласа на плоскости, представимые в полярных координатах в виде:

$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$

Подставим это выражение в уравнение Лапласа $\Delta\,u=0$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi)+\frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi)=0.$$

Умножим уравнение на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$ и разделим переменные:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. с периодическими ГУ:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, & \varphi\in\mathbb{R},\\ \Phi(\varphi+2\pi)\equiv\Phi(\varphi).\end{cases}$$

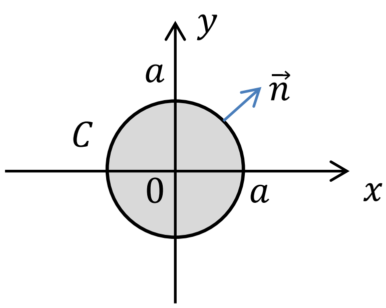
Её СЗ и СФ (см. семинар 2 и таблицу из семинара 3):

$$\lambda_n=n^2,\qquad \Phi_n(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi\,, & n\ge 0,\\ \sin n\varphi\,, & n<0,\end{cases}\ \|\Phi_n\|^2=\pi(1+\delta_{n0}),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$$r\frac{d}{dr}\left(rR_n'(r)\right) - \lambda_n R_n(r) = 0.$$
$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0.$$
Это уравнение Эйлера. Его ОР имеет вид (дома проверить):
$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0\ln r\,, & n = 0, \\ A_nr^n + B_nr^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$
Таким образом, мы получили ЧР уравнения Лапласа на плоскости:
$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0\ln r\,, & n = 0, \\ (A_nr^n + B_nr^{-n})\cos n\varphi\,, & n = 1,2,\dots, \\ (A_nr^n + B_nr^{-n})\sin n\varphi\,, & n = -1,-2,\dots \end{cases}$$
Заметим, что функции $\ln r$ и r^{-n} при $n > 0$ неограничены при $r = 0$.

Пример 2 (в круге).



$$\begin{cases} \Delta\, u = 0,\ r < a, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$
Здесь $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к кругу.
Имеем задачу Неймана, она разрешима $\Leftrightarrow$
$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}dl = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,a\,d\varphi = 0$, т.е. $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$.
При этом решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Заметим, что с учётом направления внешней нормали ГУ Неймана можно переписать в виде:
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi).$$
Ищем решение в виде суммы найденных выше частных решений уравнения Лапласа на плоскости:
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r,\varphi) =$$
$$= A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_nr^n + C_nr^{-n})\cos n\varphi + (B_nr^n + D_nr^{-n})\sin n\varphi\right].$$
Функция $u(r,\varphi)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа *внутри* круга, значит, она непрерывна и, следовательно, ограничена в круге; тогда $B_0 = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 0$, $n = 1,2,\dots$
Значит,
$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi). \qquad (**)$$
Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в круге (при условии, что ряд можно дважды дифференцировать почленно).
Подставляем в ГУ:
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = f(\varphi). \qquad (3)$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\Phi_n(\varphi)$:

$$f(\varphi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi),$$

где $E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$ (в силу условия разрешимости),

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi\,, \qquad F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Подставляем этот ряд в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi).$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих членах ряда Фурье, получим:

$$A_n = \frac{E_n}{na^{n-1}}, \qquad B_n = \frac{F_n}{na^{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (**), получим решение задачи Неймана в круге. Коэффициент A_0 остаётся произвольным.

Например, пусть $f(\varphi) = 3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2$. Это выражение преобразуется к виду $f(\varphi) = \cos 2\varphi$. Проверим условие разрешимости:

$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\,d\varphi = 0$ — выполнено.

Функция уже разложена в ряд Фурье по тригонометрической системе, который состоит из одного слагаемого. Подставим её в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \cos 2\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты, находим:

$$A_2 = \frac{1}{2a};\; A_n = 0, n = 1, 3, 4, \ldots;\; B_n = 0, n = 1, 2, \ldots$$

Решение краевой задачи имеет вид (**):

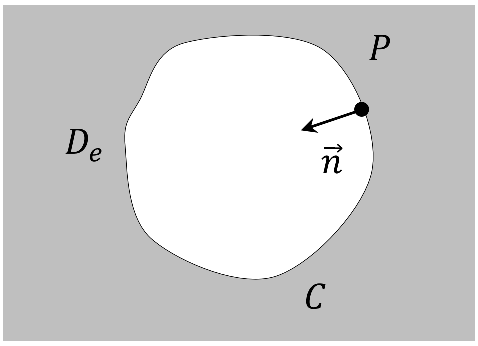
$$u(r,\varphi) = A_0 + \frac{r^2}{2a}\cos 2\varphi,$$

где A_0 — произвольная константа.

ДЗ 4. БК с. 117 № 7, с. 116 № 1(б,в,г).

Семинар 5

Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости



Рассмотрим краевую задачу во внешней области $D_e \subset \mathbb{R}^2$, которая является дополнением до $\mathbb{R}^2$ некоторой ограниченной области. В неограниченной области для выделения единственного решения не достаточно поставить ГУ, необходимо также задать поведение неизвестной функции $u(x,y)$ на бесконечности. В качестве условия на бесконечности во внешних краевых задачах для уравнения Лапласа на плоскости рассмотрим условие ограниченности решения (обычно именно ограниченные решения имеют физический смысл). Тогда краевая задача во внешней области имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\, u = 0 \text{ в } D_e, \\ \text{ГУ на } C, \\ \text{функция } u \text{ ограничена в } D_e. \end{cases}$$

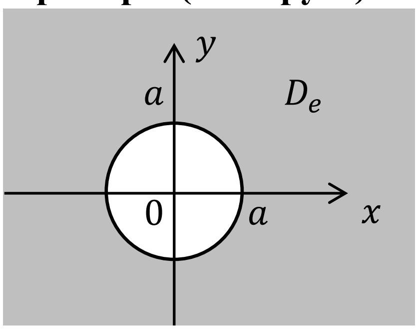
Требуется найти функцию $u(x,y)$ в $\overline{D}_e$.

Т. (существования и единственности). а) задачи Дирихле, третьего рода (с ГУ $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_C = f(P)$, где $h(P) \geq 0$, $h(P) \not\equiv 0$, $\vec{n}$ — единичная *внешняя по отношению к области* D_e нормаль), а также смешанные краевые задачи во внешней области однозначно разрешимы;

б) внешняя задача Неймана разрешима $\Leftrightarrow \int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$. При этом её решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Замечание. Вместо условия ограниченности для решений уравнения Лапласа на плоскости можно ставить условие *регулярности на бесконечности:* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} u(x,y) < \infty$.

Пример 1 (вне круга).



$$\begin{cases} \Delta\, u = 0,\ r > a, \\ u|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \text{const},\ r > a. \end{cases}$$

Ищем решение в виде суммы ЧР уравнения Лапласа на плоскости:

$$u(r,\varphi) =$$
$$= C_0 + D_0 \ln r +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi].$$

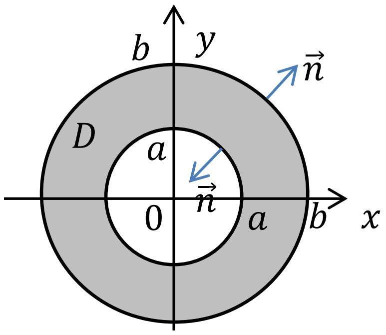
Эта функция будет удовлетворять уравнению Лапласа при $r > a$.

Поскольку функция $u(r,\varphi)$ ограничена при $r > a$, то $A_n = 0$, $B_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда:

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты C_0, C_n, D_n находятся из ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Пример 2 (в кольце).



$$\begin{cases}\Delta u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f_1(\varphi), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi).\end{cases}$$

Это внутренняя задача Неймана. Условие разрешимости:

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}\right) a\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}\right) b\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [bf_2(\varphi) - af_1(\varphi)]\, d\varphi = 0. \qquad (*)$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кольце можно искать в виде:

$$u(r,\varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi].$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ.

Но система для определения коэффициентов упростится, если мы перегруппируем слагаемые (ср. краевые задачи в прямоугольнике и прямоугольном параллелепипеде). Когда мы на прошлом семинаре искали ЧР уравнения Лапласа в полярных координатах, мы записывали ОР ДУ

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0 \qquad (1)$$

в виде

$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

В кольце нам удобно выбрать другую ФСР. Запишем ОР ДУ (1) в виде:

$$R_n(r) = A_n R_n^{(a)}(r) + B_n R_n^{(b)}(r),$$

где функции $R_n^{(a)}(r)$, $R_n^{(b)}(r)$ удовлетворяют ДУ (1) и являются ЛНЗ, функция $R_n^{(a)}(r)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $r = a$, а функция $R_n^{(b)}(r)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $r = b$, т.е. в нашем случае — условиям Неймана:

$$\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0, \qquad \left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0.$$

Найдём функцию $R_n^{(a)}(r)$ при $n \neq 0$. Поскольку она удовлетворяет ДУ (1), она имеет вид:

$$R_n^{(a)}(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}.$$

Подставив это выражение в ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0$, получим:

$$\alpha n a^{n-1} - \beta n a^{-n-1} = 0.$$

Отсюда $\alpha a^{2n} = \beta$. Например, возьмём $\alpha = 1$ и $\beta = a^{2n}$. Тогда

$$R_n^{(a)}(r) = r^n + a^{2n} r^{-n}, \qquad n \neq 0.$$

Аналогично найдём функцию $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющую ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$, при $n \neq 0$:

$$R_n^{(b)}(r) = r^n + b^{2n} r^{-n}, \qquad n \neq 0.$$

Очевидно, найденные функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ — ЛНЗ.

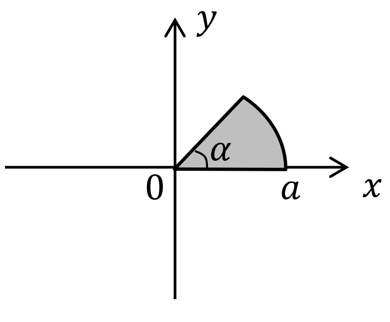
Пусть теперь $n = 0$. Тогда $R_0^{(a)}(r) = \alpha + \beta \ln r$. Из ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_0^{(a)}\right|_{r=a} = 0$ имеем: $\frac{\beta}{a} = 0$. Значит, $R_0^{(a)}(r) = \alpha = \text{const}$. Аналогично из ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$ получим, что $R_0^{(b)}(r) = \text{const}$.

Но две константы всегда ЛЗ, поэтому не образуют ФСР. Таким образом, при $n = 0$ ОР ДУ (1) придётся оставить в прежнем виде:
$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$.

Для примера рассмотрим также условие Дирихле. Пусть требуется найти решение ДУ (1) $R_n^{(a)}(r)$, удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_n^{(a)}(a) = 0$. При $n \neq 0$ мы должны искать его в виде:
$R_n^{(a)}(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$.
Подставив это выражение в ГУ $R_n^{(a)}(a) = 0$, получим:
$\alpha a^n + \beta a^{-n} = 0$,
откуда $\alpha a^{2n} = -\beta$. Например, $\alpha = 1$, $\beta = -a^{2n}$. Тогда
$R_n^{(a)}(r) = r^n - a^{2n} r^{-n}$
есть решение ДУ (1) при $n \neq 0$, удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_n^{(a)}(a) = 0$.
При $n = 0$ решение ДУ (1), удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_0^{(a)}(a) = 0$, должно иметь вид: $R_0^{(a)}(r) = \alpha + \beta \ln r$. Подставив эту функцию в ГУ, получим $\alpha = -\beta \ln a$. Например, пусть $\beta = 1$, $\alpha = -\ln a$, и
$R_0^{(a)}(r) = -\ln a + \ln r = \ln \frac{r}{a}$.

Итак, будем искать решение нашей краевой задачи Неймана в кольце в виде:
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) =$$
$$= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n R_n^{(a)}(r) + C_n R_n^{(b)}(r) \right] \cos n\varphi + \left[B_n R_n^{(a)}(r) + D_n R_n^{(b)}(r) \right] \sin n\varphi \right\}.$$
Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ
$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f_1(\varphi)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi)$. При этом надо учесть, что
$\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$. Тогда имеем:
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \dfrac{B_0}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left.\dfrac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=a} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right] = f_1(\varphi), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \dfrac{B_0}{b} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left.\dfrac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=b} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right] = f_2(\varphi). \end{cases}$$
Разложив правые части в ряды Фурье по тригонометрической системе, найдём коэффициенты B_0, A_n, B_n, C_n, D_n (с учётом условия разрешимости (*) они определяются однозначно). Коэффициент A_0 остаётся произвольным.

Пример 3 (в круговом секторе).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 < r < a, \ 0 < \varphi < \alpha, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$
Внимание! ГУ по φ обязательно должны быть *однородными*, иначе данный алгоритм неприменим!

Здесь по переменной φ уже будут не периодические ГУ, а условия Неймана, поэтому надо искать решение краевой задачи в виде ряда по другим ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющим однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$. Найдём такие ЧР, имеющие вид:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(rR'(r)\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$, с учётом ГУ: $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$, имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi'(0) = 0, \qquad \Phi'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos\frac{\pi n \varphi}{\alpha}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - \lambda_n R_n(r) = 0.$

Его ОР имеет вид:

$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, \qquad n = 0, \\ A_n r^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Таким образом, получаем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$:

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, \qquad n = 0, \\ \left(A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\cos\frac{\pi n \varphi}{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Решение краевой задачи в секторе ищем в виде их суммы:

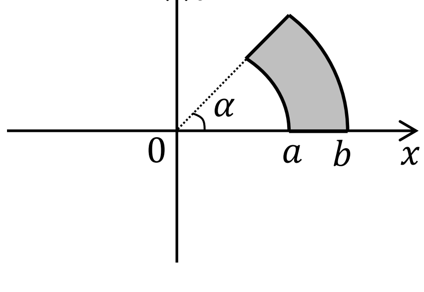
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\cos\frac{\pi n \varphi}{\alpha}.$$

Классическое решение краевой задачи $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ должно быть непрерывно, и, следовательно, ограничено в секторе, включая его границу (в т.ч. при $r = 0$), поэтому $B_0 = 0$, $B_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n \varphi}{\alpha}.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям краевой задачи, кроме неоднородного ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$. Неизвестные коэффициенты находятся подстановкой ряда в неоднородное ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Пример 4 (в кольцевом секторе).



$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ a < r < b,\ 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi),\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases}$$

Внимание! ГУ по φ обязательно должны быть *однородными*, иначе данный алгоритм неприменим!

Ищем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ: $u|_{\varphi=0}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha}=0$, и представимые в виде $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0$. Разделив переменные, получим задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, & 0<\varphi<\alpha,\\ \Phi(0)=0, \quad \Phi'(\alpha)=0.\end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\alpha}\right)^2, \qquad \Phi_n(\varphi)=\sin\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}, \qquad n=1,2,\ldots$$

Для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-\lambda_nR_n(r)=0. \tag{2}$$

Его ОР имеет вид:

$$R_n(r)=A_nr^{\sqrt{\lambda_n}}+B_nr^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n=1,2,\ldots$$

(Заметим, что теперь все $\lambda_n\neq 0$.)

Для удобства решения краевой задачи в кольце, выберем другую ФСР, состоящую из функций $R_n^{(a)}(r)$, $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющих соответствующим *однородным* ГУ при $r=a$ и $r=b$:

$$R_n^{(a)}(a)=0, \qquad \left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b}=0.$$

Аналогично примеру 2, имеем:

$$R_n^{(a)}(r)=r^{\sqrt{\lambda_n}}-a^{2\sqrt{\lambda_n}}\cdot r^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad R_n^{(b)}(r)=r^{\sqrt{\lambda_n}}+b^{2\sqrt{\lambda_n}}\cdot r^{-\sqrt{\lambda_n}}.$$

Теперь ОР ДУ (2):

$$R_n(r)=A_nR_n^{(a)}(r)+B_nR_n^{(b)}(r).$$

Таким образом, получены ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ $u|_{\varphi=0}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha}=0$:

$$u_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)=\left[A_nR_n^{(a)}(r)+B_nR_n^{(b)}(r)\right]\sin\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}, \qquad n=1,2,\ldots$$

Решение исходной краевой задачи ищется в виде их суммы:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nR_n^{(a)}(r)+B_nR_n^{(b)}(r)\right]\sin\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}.$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в неоднородные ГУ:

$$u|_{r=a}=f_1(\varphi), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}=f_2(\varphi),$$

с учётом того, что $R_n^{(a)}(a)=0$, $\left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b}=0$.

ДЗ 5. БК с. 116 № 2(б,в), 3(а,г); с. 117 № 4(в), 5(в).

Дополнительный материал
Задачи с неоднородными ГУ по φ

Пример 5 (в секторе). Рассмотрим задачу, аналогичную разобранной в примере 3, но с неоднородными ГУ на всей границе:

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = f_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = f_2(r),\\ u|_{r=a} = f(\varphi).\end{cases} \tag{0}$$

Будем искать решение задачи (0) в виде

$u(r,\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi)$,

где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ — решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases}\Delta u_1 = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha,\\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = f_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = f_2(r),\\ u_1|_{r=a} = 0.\end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases}\Delta u_2 = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha,\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0,\\ u_2|_{r=a} = f(\varphi).\end{cases} \tag{II}$$

В самом деле, сумма решений задач (I) и (II) удовлетворяет всем условиям задачи (0).

Задача (II) решена в примере 3. Рассмотрим задачу (I). Найдём ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородному ГУ $u_1|_{r=a} = 0$ и представимые в виде

$u_1(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda.$$

Для функции $R(r)$, с учётом ГУ $u_1|_{r=a} = 0$, получим задачу:

$$\begin{cases}r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \qquad r < a,\\ R(a) = 0.\end{cases} \tag{3}$$

При $\lambda < 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = Ar^{\sqrt{-\lambda}} + Br^{-\sqrt{-\lambda}}$.

В силу ограниченности при $r = 0$ имеем $B = 0$. Тогда из условия $R(a) = 0$ получаем $A = 0$. Тогда $R(r) \equiv 0$ — тривиальное решение.

При $\lambda = 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = A + B\ln r$.

В силу ограниченности при $r = 0$ имеем $B = 0$. Тогда из условия $R(a) = 0$ получаем $A = 0$. Тогда $R(r) \equiv 0$ — тривиальное решение.

При $\lambda > 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big)$.

Если $|A| + |B| \neq 0$, эта функция не будет иметь предела при $r = 0$, поэтому для построения классического решения краевой задачи не подходит.

Краевую задачу (0) в данном случае нужно решать с помощью функции Грина, либо сделав замену неизвестной функции, которая приводит к однородным ГУ по φ.

Пример 6 (в кольцевом секторе). Рассмотрим задачу, аналогичную разобранной в примере 4, но с неоднородными ГУ на всей границе:

$$\begin{cases} \Delta\, u = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = g_1(r), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r), \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases} \tag{0'}$$

Будем искать решение задачи (0’) в виде

$u(r,\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi),$

где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ — решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta\, u_1 = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u_1|_{\varphi=0} = g_1(r), \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r), \\ u_1|_{r=a} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0. \end{cases} \tag{I'}$$

$$\begin{cases} \Delta\, u_2 = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u_2|_{\varphi=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u_2|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases} \tag{II'}$$

В самом деле, сумма решений задач (I’) и (II’) удовлетворяет всем условиям задачи (0’). Задача (II’) решена в примере 4. Рассмотрим задачу (I’). Найдём ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ: $u_1|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, и представимые в виде

$u_1(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda.$$

Для функции $R(r)$, с учётом ГУ $u_1|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, получим задачу:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad a < r < b, \\ R(a) = 0, \quad R'(b) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Это задача Ш.–Л. на отрезке со смешанными ГУ, все её СЗ $\lambda > 0$. Тогда ОР ДУ (4) имеет вид:

$R(r) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big).$

Подставляем в ГУ:

$$\begin{cases} R(a) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln a\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln a\big) = 0, \\ R'(b) = -\dfrac{A\sqrt{\lambda}}{b}\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln b\big) + \dfrac{B\sqrt{\lambda}}{b}\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln b\big) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта однородная СЛАУ имеет нетривиальные решения при условии:

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right) \\ -\dfrac{\sqrt{\lambda}}{b}\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right) & \dfrac{\sqrt{\lambda}}{b}\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{b}\left[\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right)\right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{b}\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{b}{a} = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Определим коэффициенты A и B. Поскольку определитель однородной СЛАУ (5) равен нулю, второе уравнение является следствием первого, а одним из решений первого уравнения будет

$$A_n = -\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right), \qquad B = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right).$$

Тогда

$$R_n(r) = -\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln r\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln r\right) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right).$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем ДУ:

$$\Phi_n''(\varphi) - \lambda_n\Phi(\varphi) = 0,$$

общее решение которого, с учётом ГУ по φ, удобно записать в виде

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - \alpha), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$u_1^{(n)}(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right)\left[A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - \alpha)\right].$$

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа в кольцевом секторе и однородным ГУ:

$$u_1|_{r=a} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0.$$

Тогда решение краевой задачи (I’) будем искать в виде:

$$u_1(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1)}(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right)\left[A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - b)\right].$$

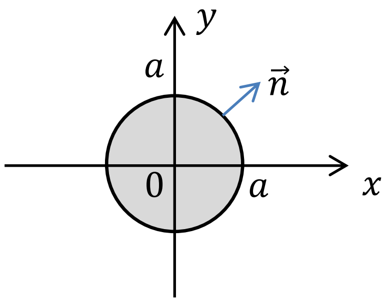
Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в неоднородные ГУ:

$$u_1|_{\varphi=0} = g_1(r), \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r).$$

Семинар 6

Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в полярных координатах

Пример 1 (в круге). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0,\ 0 \le r < a, \\ \text{однородное ГУ — одно из трёх:} \\ \ 1)\ u|_{r=a} = 0, \\ \ 2)\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ \ 3)\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0,\ h = \text{const} > 0. \end{cases}$$

Мы знаем, что для таких ГУ все СЗ $\lambda \ge 0$, причём СЗ $\lambda = 0$ есть только у задачи Неймана.

Будем искать СФ в виде

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Поскольку $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, то, подставив эту функцию в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n^2,$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi,\ n = 1, 2, \ldots, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi,\ n = 1, 2, \ldots$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0.$

В этом уравнении без ограничения общности можно считать $n \ge 0$.

а) если $\lambda = 0$, то это уравнение Эйлера:

$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0.$

Его ОР:

$$R(r) = \begin{cases} A + B\ln r, & n = 0, \\ Ar^n + Br^{-n}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

В силу ограниченности решения при $r = 0$, имеем $B = 0$. Тогда, опуская произвольный множитель A, получим:

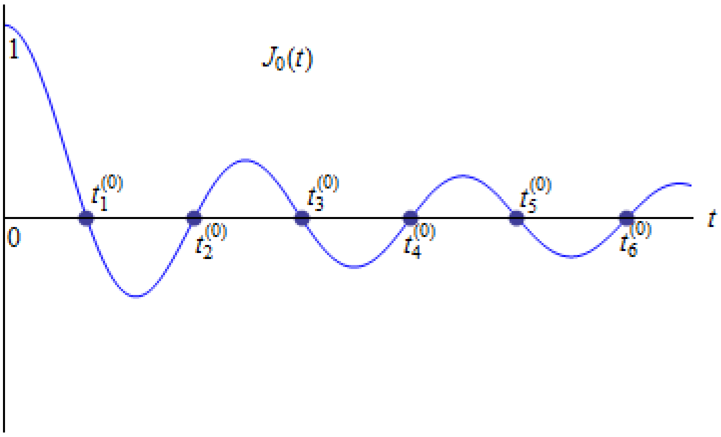
$$R(r) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ r^n, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

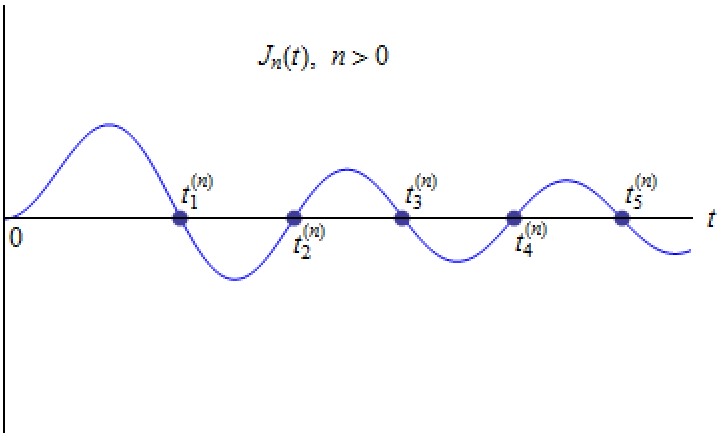
б) если $\lambda > 0$, то сделаем замену $\sqrt{\lambda}r = t \ge 0$, тогда

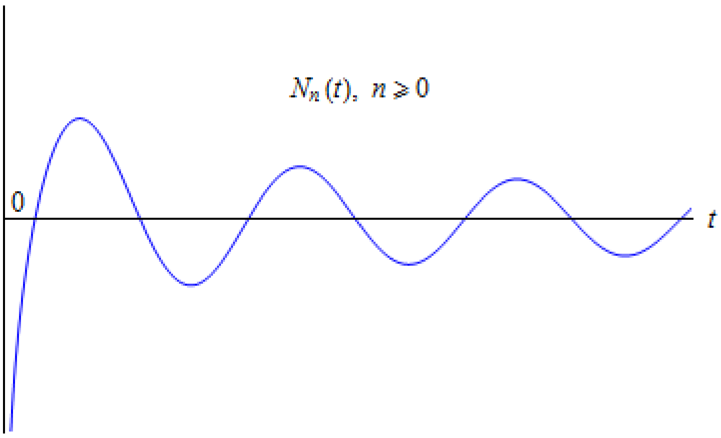
$$rR'(r) = r\frac{dR}{dr} = \sqrt{\lambda}r\frac{dR}{d\big(\sqrt{\lambda}r\big)} = t\frac{dR}{dt},$$

и, аналогично,

$$r^2R''(r) = t^2\frac{d^2R}{dt^2}.$$
Теперь ДУ принимает вид:
$$t^2\frac{d^2R}{dt^2} + t\frac{dR}{dt} + (t^2 - n^2)R = 0.$$
Это уравнение называется *уравнением Бесселя n-го порядка.* Любое его решение называется *цилиндрической функцией n-го порядка.* ОР можно записать в виде:
$$R = AJ_n(t) + BN_n(t),$$
где $J_n(t)$ — *функция Бесселя n-го порядка*, $N_n(t)$ — *функция Неймана n-го порядка.*







Все цилиндрические функции — квазипериодические.
При $t \to +\infty$ у всех цилиндрических функций амплитуда убывает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{t}}$, а период стремится к 2π.
При малых t:
$$J_n(t) \sim t^n, \qquad n \geq 0, \qquad t \to 0+0,$$
$$N_0(t) \sim \ln t, \qquad t \to 0+0,$$
$$N_n(t) \sim -\frac{1}{t^n}, \qquad n > 0, \quad t \to 0+0.$$
Из условия ограниченности решения при $r = 0$ имеем $B = 0$. Тогда, опуская произвольный множитель A, получим:
$$R = J_n(t),$$
т.е.
$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r).$$
Теперь подставим функцию $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ в ГУ.

1) $u|_{r=a} = 0.$

Отсюда получим:
$$R(a) = 0.$$
Поскольку для задачи Дирихле все СЗ $\lambda > 0$, то $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$, и должно выполняться равенство
$$J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Функция Бесселя $J_n(t)$ имеет счётное число положительных нулей $t_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$ (см. рисунок): $J_n\left(t_k^{(n)}\right) = 0$. Им будут соответствовать СЗ $\lambda_k^{(n)}$: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a = t_k^{(n)}$. Таким образом, функции $R(r)$, удовлетворяющие условию Дирихле $R(a) = 0$, имеют вид: $R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)$.

Тогда получаем систему СФ задачи Дирихле в круге:

$$\boxed{\begin{aligned} &u_{0k}(r,\varphi) = R_{0k}(r)\Phi_0(\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right), \qquad k = 1, 2, \dots; \\ &u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \dots;\ \ k = 1, 2, \dots; \\ &u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \dots;\ \ k = 1, 2, \dots \end{aligned}}$$

Они образуют ортогональную систему в круге:

$$\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} u_{n_1k_1}(r,\varphi)u_{n_2k_2}(r,\varphi)\,d\varphi = 0, \text{ если } (n_1, k_1) \neq (n_2, k_2).$$

Можно показать, что эта система полна. Поэтому других СФ у задачи Ш.–Л. нет. В силу теоремы Стеклова любую достаточно гладкую функцию $f(r,\varphi)$ можно разложить в ряд Фурье по СФ задачи Ш.–Л. в круге:

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}u_{nk}(r,\varphi),$$

где

$$C_{nk} = \frac{1}{\|u_{nk}\|^2}\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} f(r,\varphi)u_{nk}(r,\varphi)\,d\varphi.$$

Вычислим $\|u_{nk}\|^2$:

$$\|u_{nk}\|^2 = \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} u_{nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi = \underbrace{\int_0^a rR_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi)\,d\varphi}_{\|\Phi_n\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \cdot \|\Phi_n\|^2.$$

Мы знаем, что $\|\Phi_n\|^2 = \pi(1 + \delta_{n0})$. Вычислим $\|R_{nk}\|^2$:

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_0^a rJ_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)dr.$$

Сделаем замену: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r = t$. Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a} tJ_n^2(t)\,dt.$$

Если $Z_n(t)$ — произвольная цилиндрическая функция n-го порядка, то справедлива формула:

$$\boxed{\int tZ_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[Z_n'^{\,2}(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)Z_n^2(t)\right] + \text{const.}}$$

(Вывод формулы см. в БК или в конце семинара.) Используя эту формулу, получаем:

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right]. \qquad (1)$$

Для условия Дирихле $J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$, откуда

$$\boxed{\|R_{nk}\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \qquad (2)$$

(Индекс 1 здесь означает ГУ первого рода.)

Тогда

$$\|u_{nk}\|_1^2 = \|R_{nk}\|_1^2 \cdot \|\Phi_n\|^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}).$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

$$u_{0k}(r,\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$u_{-nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\|u_{nk}\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}).$$

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$

Отсюда получим:

$R'(a) = 0.$

а) $\lambda = 0.$

Тогда

$$R(r) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ r^n, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ГУ $R'(a) = 0$ удовлетворяет только функция $R(r) = 1$ при $n = 0$.

Обозначим: $\lambda_0^{(0)} = 0$ — СЗ, $u_{00}(r) = R_{00}(r)\Phi_0(\varphi) = 1$ — СФ. Очевидно, $\|u_{00}\|^2 = \pi a^2$.

б) $\lambda > 0.$

Тогда

$R(r) = J_n\big(\sqrt{\lambda}r\big).$

Подставив в ГУ $R'(a) = 0$, получим:

$\cancel{\sqrt{\lambda}}J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0.$

Это уравнение имеет счётное число положительных корней (они соответствуют точкам локального экстремума функции $J_n(t)$, см. рисунок): $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right).$

Из формулы (1) с учётом условия $J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$ получим:

$$\boxed{\|R_{nk}\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \tag{3}$$

Ответ: $\lambda_0^{(0)} = 0$; $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

$u_{00}(r,\varphi) = 1,$

$u_{0k}(r,\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$

$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$

$u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;$

$\|u_{nk}\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1 + \delta_{n0}), \qquad k = 1, 2, \ldots,$

$\|u_{00}\|^2 = \pi a^2.$

3) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0,\ h = \mathrm{const} > 0.$

В этом случае все СЗ $\lambda > 0$, поэтому

$R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right),$

где $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Из формулы (1) с учётом этого уравнения можно получить два различных выражения для квадрата нормы:

$$\boxed{\|R_{nk}\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2h^2 - n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k^{(n)}a^2 - n^2}{a^2h^2}\right)J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \tag{4}$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

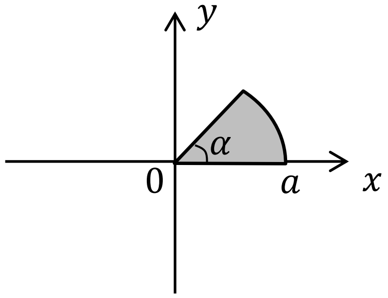
$u_{0k}(r,\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$

$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 0, 1, \ldots,$

$u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;$

$$\|u_{nk}\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2h^2 - n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}) =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k^{(n)}a^2 - n^2}{a^2h^2}\right){J'_n}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}).$$

Пример 2 (в круговом секторе). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases}\Delta u + \lambda u = 0, \ 0 < r < a, \ 0 < \varphi < \alpha, \\ \text{однородные ГУ при } r = a, \ \varphi = 0, \ \varphi = \alpha.\end{cases}$$

По-прежнему будем искать СФ в виде:
$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$
После разделения переменных
$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu$$
получим задачу Ш.–Л. для функции $\Phi(\varphi)$:
$$\begin{cases}\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \text{однородные ГУ при } \varphi = 0, \qquad \varphi = \alpha.\end{cases}$$
Пусть $\nu_n \geq 0$ и $\Phi_n(\varphi)$ — СЗ и СФ этой задачи. Тогда для функции $R(r)$ получим ДУ:
$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \nu_n)R(r) = 0.$
Решения этого уравнения, ограниченные при $r = 0$, имеют вид (опуская постоянный множитель)

а) при $\lambda = 0$: $R(r) = r^{\sqrt{\nu_n}}$,

б) при $\lambda > 0$: $R(r) = J_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big)$.

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ находятся из однородного ГУ при $r = a$. Тогда СФ имеют вид:
$$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_{\sqrt{\nu_n}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\Phi_n(\varphi), \qquad k = 1, 2, \ldots$$
Кроме этих СФ, в задаче Неймана имеется ещё СФ $u_{00}(r,\varphi) = 1$, соответствующая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0$.
Для вычисления $\|u_{nk}\|^2 = \|R_{nk}\|^2 \cdot \|\Phi_n\|^2$ следует использовать формулы (2), (3), (4), в которых n надо заменить на $\sqrt{\nu_n}$.

ДЗ 6. БК с. 62 № 3 (найти СЗ, СФ и $\|u_{nk}\|^2$).

Дополнительный материал

Вывод формулы
$$\int tZ_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z'_n}^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)Z_n^2(t)\right] + \text{const}$$
для произвольной цилиндрической функции n-го порядка $Z_n(t)$.
Запишем уравнение Бесселя n-го порядка, которому удовлетворяет функция $Z_n(t)$:
$t^2Z''_n(t) + tZ'_n(t) + (t^2 - n^2)Z_n(t) = 0.$
Умножим его на $Z'_n(t)$ и проинтегрируем:
$$\int t^2Z''_n(t)Z'_n(t)\,dt + \int t{Z'_n}^2(t)\,dt + \int (t^2 - n^2)Z_n(t)Z'_n(t)\,dt = \text{const}.$$

Применим формулу интегрирования по частям к первому и последнему интегралу:

$$\int t^2 \underbrace{Z_n''(t) Z_n'(t)\,dt}_{d\left(\frac{Z_n'^2(t)}{2}\right)} + \int t Z_n'^2(t)\,dt + \int (t^2 - n^2) \underbrace{Z_n(t) Z_n'(t)\,dt}_{d\left(\frac{Z_n^2(t)}{2}\right)} =$$

$$= \frac{t^2}{2} Z_n'^2(t) - \int t Z_n'^2(t)\,dt + \int t Z_n'^2(t)\,dt + \frac{(t^2 - n^2)}{2} Z_n^2(t) - \int t Z_n^2(t)\,dt = \text{const}.$$

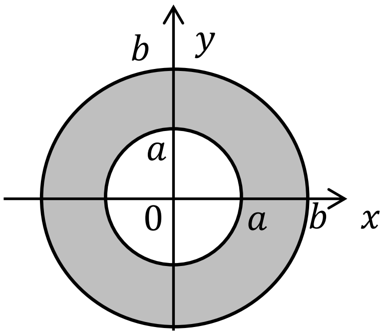
Отсюда

$$\int t Z_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[Z_n'^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) Z_n^2(t)\right] + \text{const},$$

ч.т.д.

Семинар 7

Пример 1 (в кольце). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Поскольку это задача Неймана, все её СЗ $\lambda \geq 0$.

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Подставив в ДУ и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n^2$,

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, n = 1, 2, \ldots, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, n = 1, 2, \ldots$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0.$

Его ОР имеет вид:

$$R(r) = \begin{cases} A + B\ln r, & \lambda = n = 0, \\ Ar^n + Br^{-n}, & \lambda = 0, \quad n > 0, \\ AJ_n\big(\sqrt{\lambda}r\big) + BN_n\big(\sqrt{\lambda}r\big), & \lambda > 0, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Из ГУ получаем:

$R'(a) = 0, \qquad R'(b) = 0.$

а) При $\lambda = n = 0$ из ГУ имеем $B = 0$. Тогда с точностью до произвольного множителя получим

$R_{00}(r) = 1$,

$u_{00}(r,\varphi) = R_{00}(r)\Phi_0(\varphi) = 1$ — СФ, отвечающая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0$;

$\|u_{00}\|^2 = \pi(b^2 - a^2)$.

б) При $\lambda = 0$, $n > 0$ с учётом ГУ получим только тривиальное решение (дома проверить).

в) При $\lambda > 0$ ГУ принимают вид:

$$\begin{cases} R'(a) = A\sqrt{\lambda}J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) + B\sqrt{\lambda}N_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0, \\ R'(b) = A\sqrt{\lambda}J_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) + B\sqrt{\lambda}N_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) = 0. \end{cases}$$

После сокращения на $\sqrt{\lambda}$ получим систему:

$$\begin{cases} AJ_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) + BN_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0, \\ AJ_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) + BN_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эта ОСЛАУ (относительно неизвестных констант A и B) будет иметь нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) & N_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) \\ J_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) & N_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\boxed{J_n'(\sqrt{\lambda}a)N_n'(\sqrt{\lambda}b)-J_n'(\sqrt{\lambda}b)N_n'(\sqrt{\lambda}a)=0.} \qquad (2)$$

Можно показать, что это уравнение имеет счётное число положительных корней:

$$\lambda_k^{(n)}, \qquad k=1,2,\ldots$$

Все они будут являться СЗ задачи Ш.–Л.

При $\lambda=\lambda_k^{(n)}$ система (1) вырождена, и константы A, B определяются из любого из двух уравнений. Например, из первого:

$$AJ_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)+BN_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)=0.$$

Тогда $B=-\dfrac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}A$, где $A\neq 0$ — произвольное. Получим

$$R_{nk}(r)=A\left[J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-\frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right].$$

Помня, что СФ всегда определяются с точностью до произвольного множителя, положим $A=N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)$. Тогда

$$\boxed{R_{nk}(r)=N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right).}$$

Соответствующие СФ имеют вид:

$$\boxed{\begin{aligned}
&u_{0k}(r,\varphi)=R_{0k}(r)\Phi_0(\varphi)=N_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right)-J_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)N_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),\\
&u_{nk}(r,\varphi)=R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi)=\\
&=\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\cos n\varphi, \qquad n=1,2,\ldots,\\
&u_{-nk}(r,\varphi)=R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi)=\\
&=\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\sin n\varphi, \qquad n=1,2,\ldots
\end{aligned}}$$

Вычислим квадрат нормы СФ:

$$\|u_{nk}\|^2=\int\limits_a^b r\,dr\int\limits_0^{2\pi}u_{nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi=\underbrace{\int\limits_a^b rR_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\Phi_n^2(\varphi)\,d\varphi}_{\|\Phi_n\|^2}=\|R_{nk}\|^2\cdot\|\Phi_n\|^2=$$

$$=\|R_{nk}\|^2\cdot\pi(1+\delta_{n0}).$$

Найдём

$$\|R_{nk}\|^2=\int\limits_a^b rR_{nk}^2(r)\,dr.$$

Сделаем замену: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r=t$. Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} t R_{nk}^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) dt.$$

Обозначим $R_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = Z_n(t)$. Заметим, что функция

$$Z_n(t) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) J_n(t) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) N_n(t)$$

является цилиндрической функцией n-го порядка (как линейная комбинация функций $J_n(t)$ и $N_n(t)$) по переменной t, поэтому для неё справедлива формула (см. пред. семинар):

$$\int t Z_n^2(t)\, dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z_n'}^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) Z_n^2(t)\right] + \mathrm{const}.$$

Отсюда получаем:

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} t Z_n^2(t)\, dt =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[{Z_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} b^2}\right) Z_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right] -$$

$$- \frac{a^2}{2}\left[{Z_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) Z_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{{R_{nk}'}^2(b)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} b^2}\right) R_{nk}^2(b)\right] - \frac{a^2}{2}\left[\frac{{R_{nk}'}^2(a)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) R_{nk}^2(a)\right].$$

(Поскольку $Z_n'(t) = \frac{dZ_n}{dt} = \frac{d}{dt} R_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} R_{nk}'\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.)

С учётом условий Неймана $R_{nk}'(a) = 0$, $R_{nk}'(b) = 0$ получим

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} b^2}\right) R_{nk}^2(b) - \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) R_{nk}^2(a).$$

Вычислим $R_{nk}(a)$:

$$R_{nk}(a) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) & N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \\ J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) & N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \end{vmatrix} = W[J_n(t), N_n(t)]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

На лекциях был получен вронскиан

$$\boxed{W[J_n(t), N_n(t)] = \frac{2}{\pi t}.}$$

Поэтому

$$R_{nk}(a) = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

Теперь вычислим $R_{nk}(b)$:

$$R_{nk}(b) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Из уравнения (2)

$$J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$$

выразим

$$N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Тогда

$$R_{nk}(b) = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) =$$

$$= \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right] =$$

$$= \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}W[J_n(t), N_n(t)]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b}$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\|R_{nk}\|^2 = \frac{2}{\pi^2\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right) - \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)\right].}$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения

$J_n'(\sqrt{\lambda}a)N_n'(\sqrt{\lambda}b) - J_n'(\sqrt{\lambda}b)N_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$

$\lambda_0^{(0)} = 0;$

$$u_{0k}(r,\varphi) = N_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right) - J_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)N_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r,\varphi)=\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\cos n\varphi, \qquad n=1,2,\ldots,$$

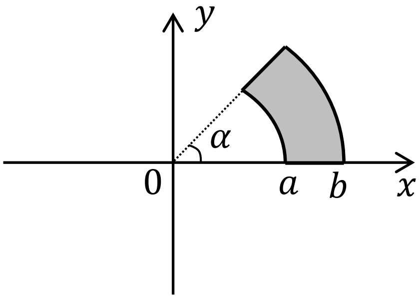
$$u_{-nk}(r,\varphi)=\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\sin n\varphi, \qquad n=1,2,\ldots,$$

$u_{00}(r,\varphi)=1;$

$$\|u_{nk}\|^2=\frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left(1-\frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right)-\left(1-\frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)\right], \qquad k=1,2,\ldots,$$

$\|u_{00}\|^2=\pi(b^2-a^2).$

Пример 2 (в кольцевом секторе). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0, \qquad a<r<b, \qquad 0<\varphi<\alpha,\\ \text{однородные ГУ при } r=a, r=b, \varphi=0, \varphi=\alpha.\end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$

Подставив в ДУ и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)}+\lambda r^2=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\nu\Phi(\varphi)=0, \qquad 0<\varphi<\alpha,\\ \text{однородные ГУ при } \varphi=0, \varphi=\alpha.\end{cases}$$

Она имеет СЗ ν_n и СФ $\Phi_n(\varphi)$.

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu_n)R(r)=0.$

Его ОР имеет вид:

$$R(r)=\begin{cases}A+B\ln r, \qquad \lambda=\nu_n=0,\\ Ar^{\sqrt{\nu_n}}+Br^{-\sqrt{\nu_n}}, \qquad \lambda=0, \qquad \nu_n>0,\\ AJ_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big)+BN_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big), \qquad \lambda>0, \qquad \nu_n\ge 0.\end{cases}$$

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ и неизвестные коэффициенты A, B находятся из однородных ГУ при $r=a$, $r=b$.
Квадраты норм СФ находятся аналогично случаю кольца.

ДЗ 7. БК с. 63 № 4, 5(а,в,д) (найти СЗ, СФ и $\|u_{nk}\|^2$).
В след. раз — к/р.

Семинар 8

Уравнение Лапласа в сферических координатах

В сферических координатах (r, θ, φ):
$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$
уравнение Лапласа $\Delta\, u = 0$ запишется в виде:

$$\Delta\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}\, u = 0,$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi}\, u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

(Дома получить!)
Найдём ЧР уравнения Лапласа в пространстве, представимые в виде:
$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) \not\equiv 0.$
Подставив это выражение в уравнение Лапласа, получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\big(r^2 R'(r)\big)Y(\theta, \varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}\, Y(\theta, \varphi) = 0.$$

Разделим переменные: умножим уравнение на r^2 и поделим на $R(r)Y(\theta, \varphi) \not\equiv 0$. Получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\big(r^2 R'(r)\big)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta\varphi}\, Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda.$$

Для функции $Y(\theta, \varphi)$ имеем ДУ:
$\Delta_{\theta\varphi}\, Y(\theta, \varphi) + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0.$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial\varphi^2} + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0.$$

Найдём ЧР этого уравнения, представимые в виде:
$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$
Подставив это выражение в уравнение, получим:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\big(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\big)\Phi(\varphi) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi) + \lambda\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные: умножим уравнение на $\sin^2\theta$ и поделим на $\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$. Получим:

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\big(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\big)}{\Theta(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Теперь для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0,\\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi).\end{cases}$$

Её СЗ и СФ:
$\nu_m = m^2,$
$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \qquad \Phi_{-m}(\varphi) = \sin m\varphi, \qquad m = 1, 2, \ldots$
Тогда для функции $\Theta(\theta)$ имеем ДУ:

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + (\lambda\sin^2\theta - m^2)\Theta(\theta) = 0.$$

(Здесь без ограничения общности можно считать, что $m \geq 0$.)
Поделим уравнение на $\sin^2\theta$:
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0.$$
Сделаем замену: $t=\cos\theta$. Тогда $-1\leq t\leq 1$. Также имеем
$$\frac{d}{d\theta}=\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}=-\sin\theta\frac{d}{dt},$$
откуда
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{dt}.$$
ДУ принимает вид:
$$-\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$
Окончательно:
$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta=0.$$
Это уравнение должно выполняться при $-1\leq t\leq 1$. Но $t=\pm1$ — особые точки для данного уравнения, в них решение может быть неограниченным. Тогда мы должны дополнительно потребовать ограниченности решения в этих точках. Получится задача Ш.–Л. с условиями ограниченности решения в особых точках:
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left((1-t^2)\dfrac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta=0, \qquad -1<t<1,\\ |\Theta|\big|_{t=\pm1}<\infty.\end{cases}$$
На лекциях показано, что нетривиальные ограниченные при $t=\pm1$ решения существуют $\Leftrightarrow\ \lambda=\lambda_n=n(n+1),\ n=m,m+1,\ldots$
При этом (с точностью до произвольного множителя) эти ограниченные решения имеют вид: $\Theta_n^{(m)}=P_n^{(m)}(t)$ — *присоединённые функции Лежандра.*

Основные свойства присоединённых функций Лежандра $\boldsymbol{P_n^{(m)}(t)}$:

1) функции $P_n^{(m)}(t)$ ортогональны на отрезке $[-1;\ 1]$ при одинаковых m и разных n:
$$\int_{-1}^{1}P_{n_1}^{(m)}(t)P_{n_2}^{(m)}(t)\,dt=0, \qquad \text{если } n_1\neq n_2;$$
2) при каждом фиксированном m функции $P_n^{(m)}(t)$, $n=m,m+1,\ldots$, образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1;\ 1]$;
3) $P_n^{(m)}(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t),\ \ n=m,m+1,\ldots,$ (1)
   где $P_n(t)$ — *полиномы Лежандра,*
   $P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$ *(формула Родрига),* (2)
   в частности, $P_n^{(0)}(t)=P_n(t)$;
4) $\left\|P_n^{(m)}\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left[P_n^{(m)}(t)\right]^2dt=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\ \ n=m,m+1,\ldots$

Вернувшись к переменной θ, получим:
$$\Theta_n^{(m)}(\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Эти функции представляют собой тригонометрические многочлены. В самом деле, из формул (1), (2) видно, что функция $P_n^{(m)}(t)$ является многочленом от переменных
$t = \cos\theta$ и $(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta$.
Итак, мы получили функции
$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi) = \Theta_n^{(m)}(\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots, \qquad m = 0, 1, \dots, n.$
Они называются *сферическими функциями* и являются СФ задачи Ш.–Л. на единичной сфере

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0, \\ Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi), \\ |Y(\theta,\varphi)|\big|_{\theta=0,\pi} < \infty, \end{cases}$$

отвечающими СЗ $\lambda_n = n(n+1)$ (таким образом, одному СЗ соответствует несколько ЛНЗ СФ; а именно, $2n+1$).

Основные свойства сферических функций $\boldsymbol{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}$:

1) Сферические функции образуют полную ортогональную систему на единичной сфере. Поэтому других ЛНЗ СФ у задачи Ш.–Л. нет.
2) $\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \left\|P_n^{(m)}\right\|^2 \cdot \left\|\Phi_{\pm m}\right\|^2$, где $\left\|\Phi_{\pm m}\right\|^2 = \pi(1+\delta_{m0})$, $\left\|P_n^{(m)}\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

Выпишем, для примера, несколько первых сферических функций.

Поскольку $P_n^{(0)}(t) = P_n(t)$, то $Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P_n^{(0)}(\cos\theta)\Phi_0(\varphi) = P_n(\cos\theta)$. Из формулы Родрига (2) получим:

$$P_0(t) = 1 \;\Rightarrow\; Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = P_0(\cos\theta) = 1,$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2-1) = t \;\Rightarrow\; Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dt^2}[(t^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}(t^4-2t^2+1) = \frac{12t^2-4}{8} = \frac{3t^2-1}{2} \;\Rightarrow$$

$$Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) = P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

Теперь вычислим $Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)$. Согласно формуле (1):

$$P_1^{(1)}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}P_1(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta \;\Rightarrow$$

$$Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_1(\varphi) = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_{-1}(\varphi) = \sin\theta\sin\varphi.$$

Заметим также, что из формул (1), (2) следует, что

$$P_n^{(n)}(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dt^n}P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}[(t^2-1)^n] = \frac{(2n)!}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}} \;\Rightarrow$$

$$P_n^{(n)}(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta \;\Rightarrow\; Y_n^{(n)}(\theta,\varphi) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\Phi_n(\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\cos n\varphi,$$

$$Y_n^{(-n)}(\theta,\varphi) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\Phi_{-n}(\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\sin n\varphi.$$

Запишем вычисленные нами сферические функции в виде таблицы:

$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$					
$m \backslash n$	0	1	2	3	n
$-n$				вычислить дома	$\frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\sin n\varphi$
-2			вычислить дома	вычислить дома	
-1		$\sin\theta\sin\varphi$	вычислить дома	вычислить дома	
0	1	$\cos\theta$	$\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$	вычислить дома	$P_n(\cos\theta)$
1		$\sin\theta\cos\varphi$	вычислить дома	вычислить дома	
2			вычислить дома	вычислить дома	
n				вычислить дома	$\frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\cos n\varphi$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2R_n'(r)\right)-n(n+1)R_n(r)=0.$$

$$r^2R_n''(r)+2rR_n'(r)-n(n+1)R_n(r)=0.$$

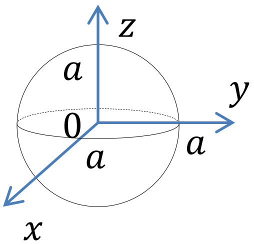
Это уравнение Эйлера. Его ОР имеет вид (дома получить):

$$R_n(r)=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}.$$

Итак, мы построили ЧР уравнения Лапласа вида:

$$u_n^{(m)}(r,\theta,\varphi)=\left(A_n^{(m)}r^n+\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),\qquad n=0,1,\dots,\qquad m=0,\pm1,\dots,\pm n.$$

Пример 1 (в шаре).



$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0\le r<a,\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}u_n^{(m)}(r,\theta,\varphi)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)}r^n+\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

В силу ограниченности решения при $r=0$ нужно положить все $B_n^{(m)}=0$. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в шаре. Подставим её в ГУ:

$$u|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi).$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложим известную функцию $f(\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — СФ задачи Ш.–Л. на единичной сфере:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_n^{(m)}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

$$C_n^{(m)}=\frac{1}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)\,d\varphi,$$

и приравняем коэффициенты при соответствующих членах.

Например, пусть $f(\theta,\varphi)=\cos^2\theta$. Разложим эту функцию в ряд Фурье по сферическим функциям. Функция $\cos^2\theta$ не зависит от φ, поэтому ряд Фурье будет содержать только сферические функции, не зависящие от φ, т.е. $Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)=P_n(\theta)$. Из таблицы видно, что функция $\cos^2\theta$ является ЛК функций $Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)=\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$ и $Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)=1$:

$$f(\theta,\varphi)=\cos^2\theta=\frac{2}{3}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)+\frac{1}{3}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi).$$

Таким образом, ГУ запишется в виде:

$$u|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\frac{2}{3}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)+\frac{1}{3}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi),$$

откуда

$$A_2^{(0)}=\frac{2}{3a^2},\qquad A_0^{(0)}=\frac{1}{3},$$

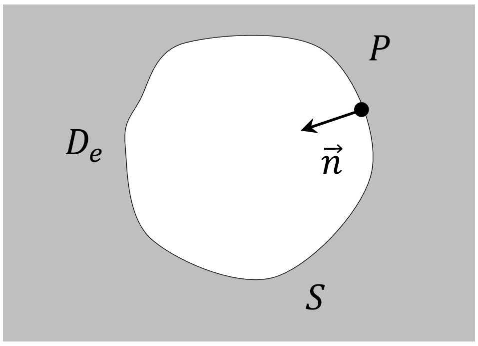
а все остальные коэффициенты $A_n^{(m)}$ равны нулю. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=A_0^{(0)}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)+A_2^{(0)}r^2Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}\frac{3\cos^2\theta-1}{2}.$$

Ответ: $u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$.

Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа в пространстве



В трёхмерном случае на бесконечности ставится условие равномерного (по направлению) стремления решения к нулю:

$$\begin{cases}\Delta\,u=0 \text{ в } D_e\subset\mathbb{R}^3,\\ \text{ГУ на } S,\\ u\rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty.\end{cases}$$

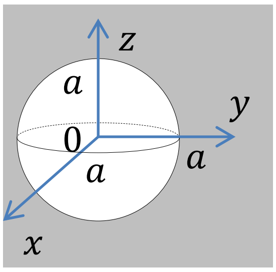
$u\rightrightarrows 0$ при $r\to\infty$ означает, что

$$M(r)=\sup_{\theta,\varphi}|u(r,\theta,\varphi)|\to 0 \text{ при } r\to\infty.$$

Т. (существования и единственности). Задачи Дирихле, Неймана, третьего рода (с ГУ $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_S=f(P)$, где $h(P)\geq 0$, $\vec{n}$ — единичная *внешняя по отношению к области* D_e

нормаль), а также смешанные краевые задачи во внешней трёхмерной области однозначно разрешимы.

Пример 2 (вне шара).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > a, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi), \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty. \end{cases}$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа, но в трёхмерном случае она однозначно разрешима. Будем искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(A_n^{(m)} r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} \right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Из условия равномерного стремления решения к нулю при $r \to \infty$ следует, что все коэффициенты $A_n^{(m)} = 0$. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа вне шара и условию на бесконечности. Подставим её в ГУ:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{r^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi).$$

Остаётся разложить известную функцию $f(\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты.

Например, пусть $f(\theta,\varphi) = \sin\theta \sin\varphi$. Тогда

$$f(\theta,\varphi) = \sin\theta \sin\varphi = \sin\theta \, \Phi_{-1}(\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_{-1}(\varphi) = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi).$$

(При разложении подобных функций в ряд Фурье по сферическим функциям удобно сначала разложить множители, зависящие от φ, по $\Phi_m(\varphi)$ и тем самым определить m, а затем часть, зависящую от θ, разложить по $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ при данном m.)

ГУ запишется в виде:

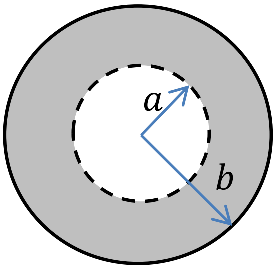
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi).$$

Отсюда $B_1^{(-1)} = -\frac{a^3}{2}$, а все остальные коэффициенты $B_n^{(m)}$ равны нулю. Тогда решение краевой задачи имеет вид:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \frac{B_1^{(-1)}}{r^2} Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = -\frac{a^3}{2r^2} \sin\theta \sin\varphi.$$

Ответ: $u(r,\theta,\varphi) = -\frac{a^3}{2r^2} \sin\theta \sin\varphi$.

Пример 3 (в шаровом слое).



$$\begin{cases} \triangle u = 0, \ a < r < b, \\ u|_{r=a} = f_1(\theta,\varphi), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\theta,\varphi). \end{cases}$$

Можно искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)} r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ.
Но удобнее искать решение в другой форме. Запишем ОР ДУ для функции $R(r)$

$$r^2 R_n''(r) + 2rR_n'(r) - n(n+1)R_n(r) = 0 \qquad (3)$$

не в виде

$$R_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}, \qquad (4)$$

а в виде

$$R_n(r) = AR_n^{(a)}(r) + BR_n^{(b)}(r),$$

где функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ — два ЛНЗ решения уравнения (3), удовлетворяющие соответствующим *однородным* ГУ при $r = a, r = b$:

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \qquad \left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0.$$

Исходя из общего вида (4) решений ДУ (3), легко получить, что (с точностью до постоянного множителя)

$$R_n^{(a)}(r) = r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}, \qquad R_n^{(b)}(r) = (n+1)r^n + \frac{nb^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

(Дома получить!)
Таким образом, будем искать решение краевой задачи в шаровом слое в виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[A_n^{(m)} R_n^{(a)}(r) + B_n^{(m)} R_n^{(b)}(r)\right] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в шаровом слое. Подставив её в ГУ, с учётом равенств $R_n^{(a)}(a) = 0$, $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$, получим:

$$u|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_n^{(m)} R_n^{(b)}(a) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_1(\theta,\varphi).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_n^{(m)} \left(\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=b}\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_2(\theta,\varphi).$$

Остаётся разложить известные функции $f_1(\theta,\varphi)$, $f_2(\theta,\varphi)$ в ряды Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты.

ДЗ 8. БК с. 119 № 15(в), 16(а); с. 120 № 17(в), 18(б), 19(а,г).

Семинар 9

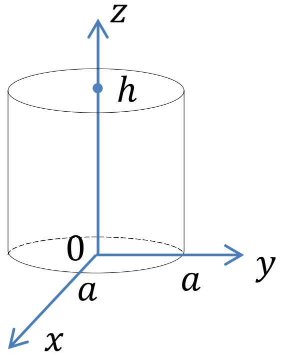
Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах (r, φ, z) оператор Лапласа имеет вид (дома получить!):

$$\Delta u = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{\Delta_{r\varphi} u} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_{r\varphi} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где $\Delta_{r\varphi} u$ — оператор Лапласа в полярных координатах.

Пример 1 (в цилиндре). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ 0 \le r < a, \ 0 < z < h, \\ u|_{r=a} = 0, \ u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$, получим:

$\Delta_{r\varphi} v(r, \varphi) \cdot Z(z) + v(r, \varphi) Z''(z) + \lambda v(r, \varphi) Z(z) = 0.$

Разделим переменные, поделив уравнение на $v(r, \varphi) Z(z)$:

$$\frac{\Delta_{r\varphi} v(r, \varphi)}{v(r, \varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\nu.$$

С учётом ГУ $u|_{r=a} = 0$ для функции $v(r, \varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Delta_{r\varphi} v(r, \varphi) + \nu v(r, \varphi) = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Это задача Ш.–Л. в круге с условием Дирихле (см. семинар 6). Она имеет следующие СФ и СЗ:

$$v_{\pm nk}(r, \varphi) = J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} r\right) \Phi_{\pm n}(\varphi),$$

где $\nu_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} a\right) = 0$, $k = 1, 2, \ldots,$

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\|v_{\pm nk}\|^2 = \frac{a^2}{2} J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} a\right) \pi (1 + \delta_{n0}).$$

Теперь для функции $Z''(z)$ получим:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \nu_k^{(n)} - \lambda = -\mu, \qquad \lambda = \nu_k^{(n)} + \mu.$$

С учётом ГУ $u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=h} = 0$, имеем задачу Ш.–Л. на отрезке:

$$\begin{cases} Z''(z) + \mu Z(z) = 0, \qquad 0 < z < h, \\ Z(0) = 0, \qquad Z(h) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \qquad Z_m(z) = \sin\frac{\pi m z}{h}, \qquad \|Z_m\|^2 = \frac{h}{2}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Теперь СЗ исходной задачи Ш.–Л. в цилиндре имеют вид

$$\lambda_{nkm} = \nu_k^{(n)} + \mu_m,$$

а СФ —

$$u_{\pm nkm}(r, \varphi, z) = v_{\pm nk}(r, \varphi) Z_m(z),$$

$$\|u_{\pm nkm}\|^2 = \int_0^h dz \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} u_{\pm nkm}^2(r,\varphi,z)\,d\varphi = \underbrace{\int_0^h Z_m^2(z)dz}_{\|Z_m\|^2} \underbrace{\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} v_{\pm nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi}_{\|v_{\pm nk}\|^2} =$$

$$= \|v_{\pm nk}\|^2 \cdot \|Z_m\|^2.$$

Можно показать, что найденные СФ образуют полную ортогональную систему в цилиндре, поэтому других ЛНЗ СФ нет.

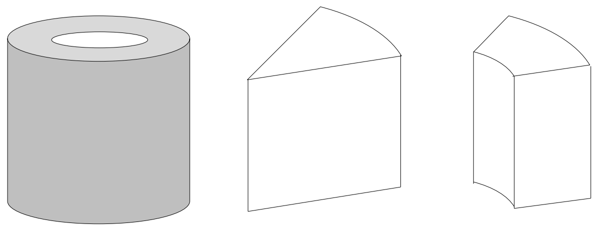
Ответ: $\lambda_{nkm} = \nu_k^{(n)} + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$, где $\nu_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}a\right) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$u_{\pm nkm}(r,\varphi,z) = J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi)\sin\frac{\pi m z}{h},$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\|u_{\pm nkm}\|^2 = \frac{\pi a^2 h}{4}(1+\delta_{n0}){J_n'}^2\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}a\right), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Аналогично решаются задачи Ш.–Л. в частях цилиндра: цилиндрическом слое (тороиде прямоугольного сечения), секторе цилиндра, секторе тороида прямоугольного сечения.

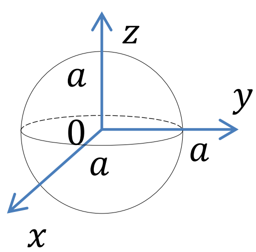


Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в сферических координатах

Напомним, что в сферических координатах оператор Лапласа имеет вид (см. семинар 8):

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} u.$$

Пример 2 (в шаре). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ 0 \le r < a, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0.$$

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$, получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2R'(r)\right)Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda R(r)Y(\theta,\varphi) = 0.$$

Разделим переменные, умножив уравнение на $\frac{r^2}{R(r)Y(\theta,\varphi)}$:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2R'(r)\right)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \nu.$$

Для функции $Y(\theta,\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. на единичной сфере:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi)+\nu Y(\theta,\varphi)=0, \\ Y(\theta,\varphi+2\pi)\equiv Y(\theta,\varphi), \\ |Y|\big|_{\theta=0,\pi}<\infty. \end{cases}$$

В семинаре 8 получены её СЗ и СФ (сферические функции):

$$\nu_n=n(n+1), \qquad n=0,1,\ldots,$$

$$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi),$$

$$\Phi_0(\varphi)=1, \qquad \Phi_m(\varphi)=\cos m\varphi\,, \qquad \Phi_{-m}(\varphi)=\sin m\varphi\,, \qquad m=1,2,\ldots,n,$$

$$\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi(1+\delta_{m0}).$$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\big(\lambda r^2-n(n+1)\big)R(r)=0.$$

В этом уравнении сделаем замену неизвестной функции:

$$R(r)=\frac{v(r)}{\sqrt{r}}.$$

Тогда

$$\frac{dR}{dr}=\frac{d}{dr}\left(v(r)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\right)=\frac{v'(r)}{\sqrt{r}}-\frac{v(r)}{2r^{\frac{3}{2}}},$$

$$r^2\frac{dR}{dr}=r^{\frac{3}{2}}v'(r)-\frac{\sqrt{r}v(r)}{2},$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=r^{\frac{3}{2}}v''(r)+\frac{3}{2}\sqrt{r}v'(r)-\frac{\sqrt{r}v'(r)}{2}-\frac{v(r)}{4\sqrt{r}}=r^{\frac{3}{2}}v''(r)+\sqrt{r}v'(r)-\frac{v(r)}{4\sqrt{r}}.$$

Теперь ДУ принимает вид:

$$r^{\frac{3}{2}}v''(r)+\sqrt{r}v'(r)-\frac{v(r)}{4\sqrt{r}}+\big(\lambda r^2-n(n+1)\big)\frac{v(r)}{\sqrt{r}}=0.$$

Умножим его на $\sqrt{r}$:

$$r^2v''(r)+rv'(r)+\left(\lambda r^2-n^2-n-\frac{1}{4}\right)v(r)=0.$$

$$r^2v''(r)+rv'(r)+\left(\lambda r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)v(r)=0.$$

При $\lambda=0$ это уравнение Эйлера, которое впервые нам встретилось в семинаре 4. При $\lambda>0$ это уравнение приводится к уравнению Бесселя порядка $n+\frac{1}{2}$ (см. семинар 6). Выпишем ОР этого ДУ:

$$v(r)=\begin{cases} Ar^{n+\frac{1}{2}}+Br^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}, & \lambda=0, \\ AJ_{n+\frac{1}{2}}\big(\sqrt{\lambda}r\big)+BN_{n+\frac{1}{2}}\big(\sqrt{\lambda}r\big), & \lambda>0. \end{cases}$$

Оказывается, цилиндрические функции *полуцелого* порядка выражаются через синус и косинус:

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t, \qquad N_{\frac{1}{2}}(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t,$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,t^n\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n \cos t, \quad N_{n-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,t^n\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n \sin t, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}} = \begin{cases} Ar^n + Br^{-(n+1)}, & \lambda = 0, \\ A\dfrac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} + B\dfrac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Из условия ограниченности решения при $r = 0$ получим, что $B = 0$ в обоих случаях. (Заметим, что функция $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$ ограничена при $r \to 0 + 0$, т.к. $J_\nu(t) \sim t^\nu$ при $t \to 0 + 0$, и следовательно, $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}} \sim r^n$.) Тогда с точностью до постоянного множителя имеем:

$$R(r) = \begin{cases} r^n, & \lambda = 0, \\ \dfrac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ порождает ГУ $R'(a) = 0$.

а) При $\lambda = 0$:
   $R'(a) = na^{n-1} = 0$, откуда $n = 0$.
   Тогда
   $R_{00}(r) = 1$,
   $u_{000}(r, \theta, \varphi) = R_{00}(r)Y_0^{(0)}(\theta, \varphi) = 1$ — СФ, отвечающая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0$,
   $\|u_{000}\|^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

б) При $\lambda > 0$:

$$R'(a) = \frac{d}{dr}\left(\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}\right)\Bigg|_{r=a} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{2r^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=a} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)}{\sqrt{a}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

$$\boxed{2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0.} \qquad (1)$$

Положительные корни этого уравнения являются СЗ $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Им соответствуют функции

$$R_{nk}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}$$

и СФ исходной задачи Ш.–Л. в шаре

$u_{nk\pm m}(r, \theta, \varphi) = R_{nk}(r)Y_n^{(\pm m)}(\theta, \varphi)$.

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \int_0^a r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} u_{nk\pm m}^2(r,\theta,\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_0^a r^2 R_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \left[Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)\right]^2 d\varphi}_{\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2,$$

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_0^a r^2 R_{nk}^2(r)\,dr = \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)dr \overset{\left(t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{=} \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int_0^{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} t J_{n+\frac{1}{2}}^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[J'^{\,2}_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right].$$

Здесь была использована формула для цилиндрической функции ν-го порядка:

$$\int t Z_\nu^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[Z'^{\,2}_\nu(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) Z_\nu^2(t)\right] + \mathrm{const}.$$

Из уравнения (1) можно выразить:

$$J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{4\lambda_k^{(n)}a^2} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Другой вид для квадрата нормы можно получить, если выразить из уравнения (1):

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 2\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = 2a^2\left[\lambda_k^{(n)}a^2 - n(n+1)\right] J'^{\,2}_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Ответ: $\lambda_0^{(0)} = 0$, $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения
$2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$;

$u_{000}(r,\theta,\varphi) = 1$, $u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$;

$\|u_{000}\|^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$,

$$\|u_{nk\pm m}\|^2 = \left(1 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \frac{a^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \pi(1+\delta_{m0}) = 2a^2 \left[\lambda_k^{(n)} a^2 - n(n+1)\right] {J'_{n+\frac{1}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \frac{a^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \pi(1+\delta_{m0}).$$

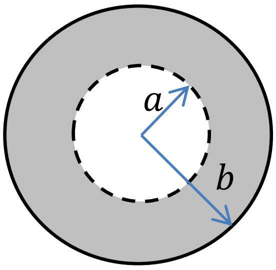
ДЗ 9. Найти СЗ, СФ и квадрат нормы СФ: БК с. 63 № 7(г), с. 64 № 8(б,в), 9(г), а также в шаре с ГУ:

а) $u|_{r=a} = 0$,

б) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0,\ h = \mathrm{const} > 0.$

Семинар 10

Пример 1 (в шаровом слое). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л. в шаровом слое:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ u|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что для смешанной задачи все СЗ $\lambda > 0$.

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0$.

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$ и разделив переменные, получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 R'(r)\right)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \nu.$$

Для функции $Y(\theta,\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. на единичной сфере:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \nu Y(\theta,\varphi) = 0, \\ Y(\theta,\varphi + 2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi), \\ \left.|Y|\right|_{\theta=0,\pi} < \infty. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n(n+1), \qquad n = 0, 1, \ldots,$

$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi),$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \qquad \Phi_{-m}(\varphi) = \sin m\varphi, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$

$$\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi(1+\delta_{m0}).$$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda r^2 - n(n+1)\right)R(r) = 0.$$

В семинаре 9 построено его ОР:

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}},$$

где

$$v(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)$$

(поскольку $\lambda > 0$).

Из ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ u|_{r=b} = 0$ получим $R'(a) = 0, \ R(b) = 0$. Подставим сюда найденное $R(r)$:

$$R'(a) = \left.\left(\frac{v'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{v(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}\right)\right|_{r=a} = \frac{2av'(a) - v(a)}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$R(b) = \frac{v(b)}{\sqrt{b}} = 0.$$

Отсюда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2av'(a) - v(a) = 0, \\ v(b) = 0. \end{cases}$$

Подставим в неё функцию $v(r)$:

$$\begin{cases}2a\sqrt{\lambda}AJ'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)+2a\sqrt{\lambda}BN'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)=0,\\ AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)+BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]A+\left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]B=0,\\ AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)+BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0.\end{cases}\tag{1}$$

Эта однородная СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов A, B имеет нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix}2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) & 2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\\ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right) & N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда

$$\boxed{\left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right)=\left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right).}\tag{2}$$

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ являются пожительными корнями этого уравнения, $k=1,2,\ldots$

При $\lambda=\lambda_k^{(n)}$ система (1) является вырожденной, первое уравнение является следствием второго. Второе же уравнение нам даёт:

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)+BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)=0.$$

Тогда один из коэффициентов A, B — произволен, а другой выражается через него с помощью данного уравнения. Поскольку мы ищем СФ с точностью до постоянного множителя, положим

$$A=N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Тогда

$$B=-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Теперь имеем

$$v_{nk}(r)=N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right),$$

и

$$R_{nk}(r)=\frac{v_{nk}(r)}{\sqrt{r}}.$$

А соответствующие СФ задачи Ш.–Л. в шаровом слое имеют вид:

$$u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi)=R_{nk}(r)Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi).$$

Можно показать, что они образуют полную ортонормированную систему в шаровом слое, поэтому других СФ нет.

Теперь вычислим квадрат их нормы.

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \int_a^b r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} u_{nk\pm m}^2(r,\theta,\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_a^b r^2 R_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \left[Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)\right]^2 d\varphi}_{\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2,$$

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_a^b r^2 R_{nk}^2(r)\,dr = \int_a^b r v_{nk}(r)\,dr \overset{\left(t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{=} \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int_{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}^{b\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} t v_{nk}^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) dt.$$

Заметим, что

$$v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) J_{n+\frac{1}{2}}(t) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) N_{n+\frac{1}{2}}(t)$$

является цилиндрической функцией порядка $n+\frac{1}{2}$, поэтому для неё справедлива формула

$$\int t Z_\nu^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z_\nu'}^2(t) + \left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right) Z_\nu^2(t)\right] + \text{const},$$

где $\nu = n+\frac{1}{2}$, $Z_\nu(t) = v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.

Воспользовавшись этой формулой, получим:

$$\|R_{nk}\|^2 =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{{v_{nk}'}^2(b)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)} b^2}\right) v_{nk}^2(b)\right] - \frac{a^2}{2}\left[\frac{{v_{nk}'}^2(a)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) v_{nk}^2(a)\right].$$

(Здесь учтено, что $Z_\nu'(t) = \frac{d}{dt} v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} v_{nk}'\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.)

Из ГУ имеем:

$v_{nk}(b) = 0, \qquad v_{nk}(a) = 2a v_{nk}'(a).$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{b^2 {v_{nk}'}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) 4a^2\right] {v_{nk}'}^2(a) =$$

$$= \frac{b^2 {v_{nk}'}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} + 4a^2 - \frac{4n^2}{\lambda_k^{(n)}} - \frac{4n}{\lambda_k^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\right) {v_{nk}'}^2(a) =$$

$$= \frac{b^2 {v_{nk}'}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - 2a^2\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right) {v_{nk}'}^2(a).$$

Вычислим $v'_{nk}(b)$, $v'_{nk}(a)$.

$$v'_{nk}(b)=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right]=$$

$$=-\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\begin{vmatrix}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) & N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\\ J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) & N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\end{vmatrix}=-\sqrt{\lambda_k^{(n)}}W\left[J_{n+\frac{1}{2}}(t),N_{n+\frac{1}{2}}(t)\right]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b}=$$

$$=-\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left(\frac{2}{\pi t}\right)\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b}=-\frac{2}{\pi b}.$$

$$v'_{nk}(a)=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right].$$

Из уравнения (2) выразим:

$$N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)=\frac{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Подставив это в выражение для $v'_{nk}(a)$, получим:

$$v'_{nk}(a)=$$

$$=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-\right.$$

$$\left.-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\underbrace{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}}_{\sigma}\left[2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-\right.$$

$$-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)+$$

$$\left.+J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma W\left[J_{n+\frac{1}{2}}(t),N_{n+\frac{1}{2}}(t)\right]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma\left(\frac{2}{\pi t}\right)\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}=\frac{2\sigma}{\pi a}.$$

Подставим найденные $v'_{nk}(b)$, $v'_{nk}(a)$ в выражение для $\|R_{nk}\|^2$:

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{b^2 {v'_{nk}}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - 2a^2\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right){v'_{nk}}^2(a) = \frac{2}{\pi^2\lambda_k^{(n)}} - \frac{8\sigma^2}{\pi^2}\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right).$$

Окончательно получим:

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \|R_{nk}\|^2 \left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \frac{4(1+\delta_{m0})}{(2n+1)\pi}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} - 4\sigma^2\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right)\right].$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения

$$\left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) = \left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b),$$

$k = 1, 2, \ldots,$

$u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi) =$

$$= \frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi),$$

$n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, n,$

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \frac{4(1+\delta_{m0})}{(2n+1)\pi}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} - 4\sigma^2\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right)\right],$$

$$\sigma = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}.$$

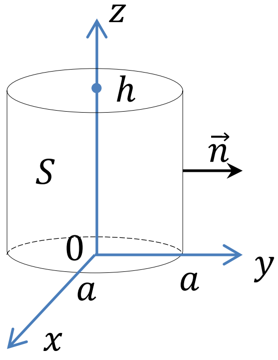
ДЗ 10. Найти СЗ, СФ и квадрат нормы СФ: БК с. 64 № 10(а,б,в).

Семинар 11

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{\Delta_{r\varphi} u} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Пример 1 (в цилиндре).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le r < a, \ 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi), \ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi). \end{cases} \quad (0)$$

Это внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа. Будем считать, что условие её разрешимости

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

(интеграл берётся по *полной* поверхности цилиндра) выполнено.

Ищем решение задачи (0) в виде:

$u(r,\varphi,z) = u_1(r,\varphi,z) + u_2(r,\varphi,z),$

где

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi), \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi). \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Пусть каждая из этих двух задач также разрешима (иначе данный способ решения неприменим):

$$\iint\limits_S \frac{\partial u_1}{\partial n} dS = 0, \qquad \iint\limits_S \frac{\partial u_2}{\partial n} dS = 0.$$

Рассмотрим задачу (I).

Запишем уравнение Лапласа для функции $u_1(r,\varphi,z)$ в виде:

$$\Delta u_1 = \Delta_{r\varphi} u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0.$$

Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа в цилиндре вида

$u_1(r,\varphi,z) = v(r,\varphi)Z(z) \not\equiv 0,$

удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$

Подставим $u_1(r,\varphi,z)$ в уравнение Лапласа:

$\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)\cdot Z(z) + v(r,\varphi)Z''(z) = 0.$

Разделим переменные, поделив уравнение на $v(r,\varphi)Z(z)$:

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

С учётом ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ для функции $v(r,\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases} \Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi) + \lambda v(r,\varphi) = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ (см. семинар 6):

$\lambda_0^{(0)} = 0;$

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

$v_{00}(r,\varphi) = 1,$

$$v_{\pm nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{\pm n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi),$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\|v_{\pm nk}\|^2 = \|R_{nk}\|^2\|\Phi_{\pm n}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$\|v_{00}\|^2 = \pi a^2.$

Теперь для функции $Z(z)$ имеем ДУ:

$Z_{nk}''(z) - \lambda_k^{(n)} Z_{nk}(z) = 0.$

Учитывая вид ГУ по z (условия Неймана при $z = 0$ и $z = h$), удобно взять ОР ДУ в следующем виде:

$$Z_{nk}(z) = \begin{cases} A_{00} + B_{00}z \ \text{ при } \ \lambda_0^{(0)} = 0, \qquad \text{т. е. } \ n = k = 0, \\ A_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z + B_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(z-h) \ \text{ при } \ \lambda_k^{(n)} > 0, \qquad \text{т. е. } \ k > 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили ЧР уравнения Лапласа в цилиндре

$u_1^{(\pm nk)}(r,\varphi,z) = v_{\pm nk}(r,\varphi)Z_{nk}(z),$

удовлетворяющие ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$

Теперь будем искать решение краевой задачи (I) в виде суммы всех найденных ЧР:

$$u_1(r,\varphi,z) = \sum_{n,k} v_{\pm nk}(r,\varphi)Z_{nk}(z) =$$

$$= A_{00} + B_{00}z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}z + B_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}(z-h)\right]v_{nk}(r,\varphi).$$

Подставим в неоднородные ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = B_{00} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}\left[A_{nk}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}z + B_{nk}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}(z-h)\right]v_{nk}(r,\varphi),$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = B_{00} - \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = f_1(r,\varphi), & (1)\\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = B_{00} + \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}A_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = f_2(r,\varphi). & (2)\end{cases}$$

Теперь надо разложить функции $f_1(r,\varphi)$, $f_2(r,\varphi)$ в ряды Фурье по СФ задачи Ш.–Л. в круге $v_{nk}(r,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты. Коэффициент A_{00} остаётся произвольным.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть $f_2(r,\varphi) = 0$. Тогда из уравнения (2) получим

$B_{00} = 0, \qquad A_{nk} = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \dots, \qquad k = 1, 2, \dots$

Для функции $f_1(r,\varphi)$ рассмотрим два случая.

а) $f_1(r,\varphi) = J_2(\chi r)\cos 2\varphi$,

где $\chi = \sqrt{\lambda_1^{(2)}}$, а $\lambda_1^{(2)}$ — первый положительный корень уравнения $J_2'\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0$.

Разложим функцию $f_1(r,\varphi)$ в ряд Фурье по $v_{nk}(r,\varphi)$:

$$f_1(r,\varphi) = J_2(\chi r)\cos 2\varphi = J_2\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}r\right)\cos 2\varphi = J_2\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}r\right)\Phi_2(\varphi) = v_{21}(r,\varphi).$$

Т.е. разложение содержит только один член: с $n = 2$, $k = 1$.

Тогда из уравнения (1)

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \underbrace{B_{00}}_{=0} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = v_{21}(r,\varphi)$$

получим, что

$$-\sqrt{\lambda_1^{(2)}}B_{21}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}h\right) = 1,$$

т.е.

$$B_{21} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(2)}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}h\right)} = -\frac{1}{\chi\,\mathrm{sh}(\chi h)},$$

а все остальные коэффициенты $B_{nk} = 0$.

В этом случае решение краевой задачи (I) имеет вид:

$$u_1(r,\varphi,z) = A_{00} + B_{21}v_{21}(r,\varphi)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{\lambda_1^{(2)}}(z-h)\right] =$$

$$= -\frac{J_2(\chi r)cos\,2\varphi\,\mathrm{ch}[\chi(z-h)]}{\chi\,\mathrm{sh}(\chi h)} + \mathrm{const}.$$

б) $f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi$.

Надо разложить функцию в ряд Фурье по $v_{nk}(r,\varphi)$:

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = C_{00}v_{00}(r,\varphi) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{nk}\,v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= C_{00} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{nk}\,J_{|n|}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}r\right)\Phi_n(\varphi).$$

Поскольку $r\sin\varphi = r\Phi_{-1}(\varphi)$, разложение будет содержать только члены с $n = -1$:

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi,$$

т.е.

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right).$$

Таким образом, осталось разложить функцию r в ряд Фурье по функциям $J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right) = R_{1k}(r)$, образующим ортогональную (с весом r) систему на отрезке $[0,a]$:

$$C_{-1k} = \frac{1}{\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2}\int_0^a r J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\cdot r\,dr,$$

где

$$\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2 = \int_0^a r J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \|R_{1k}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_k^{(1)}a^2}\right)J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right).$$

Для вычисления оставшегося интеграла удобно использовать формулу:

$$\boxed{\frac{d}{dt}[t^\nu Z_\nu(t)] = t^\nu Z_{\nu-1}(t),}$$

где в качестве $Z_\nu(t)$ может стоять функция Бесселя $J_\nu(t)$ или функция на $N_\nu(t)$.

(В частности, если положить $\nu = 0$, получим: $J_0'(t) = J_{-1}(t) = -J_1(t)$, поскольку $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ для целых n.)

Тогда, сделав замену $t = \sqrt{\lambda_k^{(1)}}r$, получим:

$$\int_0^a r^2 J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} t^2 J_1(t)\,dt = \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} \frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)]\,dt =$$

$$= \frac{t^2 J_2(t)}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} = \frac{a^2}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}} J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right).$$

Таким образом,

$$C_{-1k} = \frac{1}{\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2}\int_0^a r^2 J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\left(1 - \frac{1}{\lambda_k^{(1)}a^2}\right)J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)},$$

и

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi).$$

Подставим данное разложение в уравнение (1):

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \underbrace{B_{00}}_{=0} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}} B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right) v_{nk}(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi).$$

Отсюда все $B_{nk} = 0$, кроме B_{-1k}, и

$$-\sqrt{\lambda_k^{(1)}} B_{-1k}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) = C_{-1k},$$

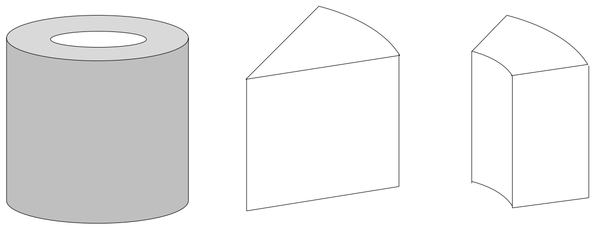
$$B_{-1k} = -\frac{C_{-1k}}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right)} = -\frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\left(\lambda_k^{(1)} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}.$$

Тогда решение краевой задачи (I) в этом случае имеет вид:

$$u_1(r,\varphi,z) = A_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-1k}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(1)}}(z-h)\,v_{-1k}(r,\varphi) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\left(\lambda_k^{(1)} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(1)}}(z-h)\,J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi +$$

$$+\ \mathrm{const}.$$



Аналогично решаются краевые задачи, подобные задаче (I), в частях цилиндра: цилиндрическом слое (тороиде прямоугольного сечения), секторе цилиндра, секторе тороида прямоугольного сечения.

Задачу (II) мы рассмотрим на следующем семинаре.

ДЗ 11.

Решить краевую задачу в цилиндрическом секторе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < z < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ u|_{z=0} = J_{\frac{1}{2}}(\chi r)\cos\dfrac{\varphi}{2}, \quad u|_{z=\pi} = 0, \end{cases}$$

где χ — первый положительный корень уравнения $J'_{\frac{1}{2}}(\chi) = 0$.

БК с. 118 № 9(б), 10 (г), 11 (а), с. 119 № 12(а,в).

Семинар 12

Теперь решим задачу (II) в цилиндре (см. пред. семинар).

$$\begin{cases}\Delta\, u_2 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h,\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z),\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0.\end{cases} \tag{II}$$

Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа $\Delta\, u_2 = 0$ в цилиндре вида

$u_2(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \not\equiv 0,$

удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$. Подставим $u_2(r, \varphi, z)$ в уравнение Лапласа и разделим переменные:

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r, \varphi)}{v(r, \varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda.$$

С учётом ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$, для функции $Z(z)$ получим задачу Ш.–Л. на отрезке:

$$\begin{cases}Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \qquad 0 < z < h,\\ Z'(0) = 0, \qquad Z'(h) = 0.\end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \qquad Z_k(z) = \cos\frac{\pi k z}{h}, \qquad \|Z_k\|^2 = \frac{h}{2}(1 + \delta_{k0}), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Далее, для функции $v(r, \varphi)$ имеем ДУ:

$\Delta_{r\varphi}\, v(r, \varphi) - \lambda_k v(r, \varphi) = 0.$

Будем искать $v(r, \varphi)$ в виде

$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Тогда, поскольку $\Delta_{r\varphi}\, v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi) - \lambda_k R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные, умножив уравнение на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} - \lambda_k r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu.$$

Теперь для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0,\\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi).\end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\mu_n = n^2, \qquad \Phi_0 = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,,$$

$$\left\|\Phi_{\pm n}\right\|^2 = \pi(1 + \delta_{n0}).$$

Теперь для функции $R(r)$ имеем ДУ:

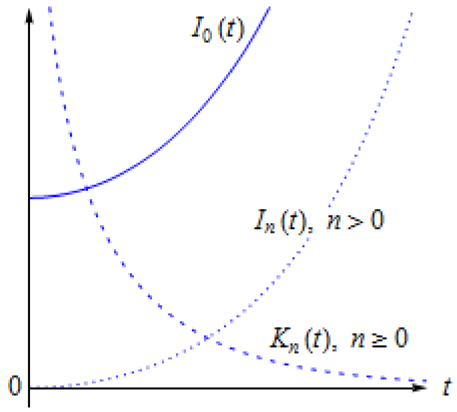
$$r^2 R''_{nk}(r) + rR'_{nk}(r) - (\lambda_k r^2 + n^2)R_{nk}(r) = 0, \qquad 0 \le r < a.$$

(Здесь без ограничения общности можно считать, что $n \ge 0$.)

ОР данного ДУ имеет вид:

$$R_{nk}(r)=\begin{cases}A+B\ln r \ \text{ при } \lambda_0=0, & \text{т.е. } k=0, \quad \text{и } n=0,\\ Ar^n+Br^{-n} \ \text{ при } \lambda_0=0, & \text{т.е. } k=0, \quad \text{и } n>0,\\ AI_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right)+BK_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right) \ \text{ при } \lambda_k>0, & n\ge 0,\end{cases}$$

где I_n — функция Инфельда n-го порядка, K_n — функция Макдональда n-го порядка (цилиндрические функции *чисто мнимого аргумента*).



Функции Инфельда $I_n(t)$ ограничены при $t\to 0+0$, а при $t\to+\infty$ они $\sim\frac{e^t}{\sqrt{t}}$.

Функции Макдональда $K_n(t)$ неограничены при $t\to 0+0$, а при $t\to+\infty$ они $\sim\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

Тогда из условия ограниченности решения при $r=0$ получим, что (с точностью до постоянного множителя):

$$R_{nk}(r)=\begin{cases}1 \ \text{ при } \lambda_0=0, & \text{т.е. } k=0, \quad \text{и } n=0,\\ r^n \ \text{ при } \lambda_0=0, & \text{т.е. } k=0, \quad \text{и } n>0,\\ I_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right) \ \text{ при } \lambda_k>0, & n\ge 0.\end{cases}$$

Таким образом, нами получены ЧР уравнения Лапласа в цилиндре

$u_2^{(\pm nk)}(r,\varphi,z)=R_{nk}(r)\Phi_{\pm n}(\varphi)Z_k(z)$,

удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0}=0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h}=0$.

Решение краевой задачи (II) ищем в виде ряда по *всем* найденным ЧР:

$$u_2(r,\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{nk}R_{|n|k}(r)\Phi_n(\varphi)Z_k(z).$$

Подставим в неоднородное ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\varphi,z)$:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{nk}R'_{|n|k}(a)\Phi_n(\varphi)Z_k(z)=f(\varphi,z).$$

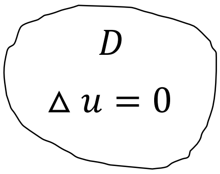
Остаётся разложить функцию $f(\varphi,z)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\Phi_n(\varphi)Z_k(z)$ и приравнять соответствующие коэффициенты:

$$f(\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\Phi_n(\varphi)Z_k(z),$$

$$C_{nk}=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2\|Z_k\|^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h dz\, f(\varphi,z)\Phi_n(\varphi)Z_k(z).$$

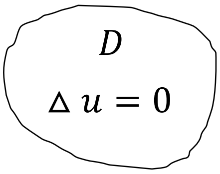
Коэффициенты A_{nk} выражаются через C_{nk}.

Примеры краевых задач, которые можно решить точно в произвольных областях



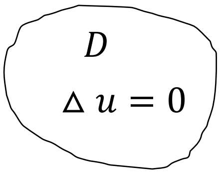
$$u|_S = 0$$

$$\boxed{u \equiv 0}$$



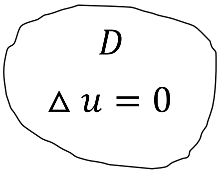
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$$

$$\boxed{u \equiv \mathrm{const}}$$



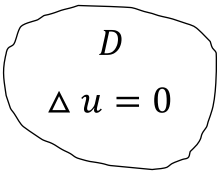
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = 0,$$
$$h(P) \geq 0, \qquad h \not\equiv 0$$

$$\boxed{u \equiv 0}$$



$$u|_S = 1$$

$$\boxed{u \equiv 1}$$



$$u|_S = xy$$

$$\boxed{u \equiv xy}$$

Фундаментальное решение уравнения Лапласа

О. Регулярная обобщённая функция $G(M, M_0)$ называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа в области D, если

$$\Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D. \tag{1}$$

Индекс M в операторе Лапласа Δ_M означает, что все производные в операторе Лапласа берутся по координатам точки M, при фиксированной точке M_0.

Здесь $\delta(M, M_0)$ — *дельта-функция:* обобщённая функция, действующая на основные функции $\varphi(M)$ по правилу:

$$\big(\delta(M, M_0), \varphi(M)\big) = \int\limits_D \delta(M, M_0)\varphi(M)\, dV_M = \varphi(M_0), \qquad M_0 \in D.$$

В трёхмерном случае дельта-функцию можно представить в виде произведения трёх одномерных дельта-функций: если точки M, M_0 имеют координаты $M(x, y, z)$, $M(x_0, y_0, z_0)$, то

$$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0).$$

В двумерном случае: $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$, и

$$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0).$$

Таким образом, фундаментальное решение $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_M\, G(M, M_0) = 0$ при $M \neq M_0$, а при $M = M_0$ имеет особенность.

Явный вид фундаментального решения уравнения Лапласа:

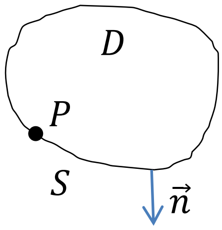
$$\boxed{G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в двумерном случае,} \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в трёхмерном случае,} \end{cases}}$$

где $\Delta\, v(M) = 0,\ M \in D$,

R_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0.

Мы видим, что фундаментальное решение $G(M, M_0)$ определено с точностью до произвольного решения $v(M)$ однородного уравнения Лапласа в области D.

Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа



Рассмотрим ограниченную область D с границей S. Запишем *вторую формулу Грина* в области D для двух функций — $u(M)$ и $v(M)$:

$$\boxed{\int\limits_D (v \vartriangle u - u \vartriangle v)\, dV = \int\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS.}$$

Положим теперь в этой формуле $v(M) = G(M, M_0)$, где $G(M, M_0)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, $M_0 \in D$ — фиксированная точка. Учитывая, что

$\vartriangle v(M) = \vartriangle_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$,

$-\int\limits_D u \vartriangle v\, dV = \int\limits_D u(M)\delta(M, M_0)\, dV_M = u(M_0)$,

получим *третью формулу Грина:*

$$\boxed{u(M_0) = -\int\limits_D G(M, M_0) \vartriangle u(M)\, dV_M + \int\limits_S \left(G(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P, M_0 \in D.}$$

(Здесь все интегралы берутся при фиксированной точке M_0.)

Пусть $u(M)$ — решение задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \vartriangle u(M) = F(M), \qquad M \in D, \\ u|_S = f(P). \end{cases}$$

(Неоднородное уравнение Лапласа также называют *уравнением Пуассона*; в частности, может быть $F(M) \equiv 0$.)

Потребуем, чтобы $G|_{M \in S} = 0$ (заметим, что фундаментальное решение $G(M, M_0)$ определено с точностью до произвольного решения $v(M)$ уравнения Лапласа, что позволяет наложить на него дополнительное условие). Тогда по третьей формуле Грина:

$$\boxed{u(M_0) = -\int\limits_D G(M, M_0) F(M)\, dV_M - \int\limits_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dS_P, \qquad M_0 \in D.}$$

Таким образом, если известна функция $G(M, M_0)$ в области $\overline{D}$, то можно получить решение задачи Дирихле $u(M_0)$ в любой точке M_0 области D для любых входных данных $F(M)$, $f(P)$.

О. Функция $G(M, M_0)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \vartriangle_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ G|_{M \in S} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

называется *функцией Грина* внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D.

Физический смысл: функция Грина задачи Дирихле в трёхмерном случае представляет собой потенциал точечного заряда, расположенного в точке M_0 внутри заземлённой поверхности S. В двумерном случае это потенциал тонкой заряженной нити, расположенной внутри заземлённой цилиндрической поверхности.

Поскольку

$$G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) \text{ в двумерном случае,} \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) \text{ в трёхмерном случае,} \end{cases}$$

то $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}}$ $\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\right)$ — потенциал точечного заряда (заряженной нити), а $v(M)$ — потенциал наведённых на поверхности S зарядов.

ДЗ 12. БК с. 118 № 8, 9(в), 10(а), 11(в), с. 119 № 12(б), 13.

Семинар 13

Рассмотрим различные способы нахождения функции Грина.

Разложение функции Грина в ряд Фурье по СФ задачи Ш.–Л.

Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области D должна удовлетворять задаче (2). Пусть функции $\{u_n(M)\}$ образуют полную ортогональную систему СФ задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в области D с условием Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \ \text{ в } D, \\ u|_S = 0, \end{cases}$$

причём λ_n — соответствующие СЗ. (Здесь индекс n будет двойным в двумерном случае и тройным — в трёхмерном.)

Будем искать функцию Грина в виде ряда Фурье по всем функциям $\{u_n(M)\}$:

$$G(M, M_0) = \sum_n A_n u_n(M), \qquad (3)$$

где коэффициенты разложения A_n зависят от M_0 (сумма будет двойной в двумерном случае и тройной — в трёхмерном).

Тогда ГУ $G|_{M\in S} = 0$ автоматически выполняется, т.к. $u(M)|_S = 0$.

Подставим ряд (3) в ДУ $\Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$:

$$\Delta_M\, G(M, M_0) = \sum_n A_n \,\Delta\, u_n(M) = -\sum_n A_n \lambda_n u_n(M) = -\delta(M, M_0),$$

т.е.

$$\sum_n A_n \lambda_n u_n(M) = \delta(M, M_0).$$

Умножим полученное равенство на $u_k(M)$ и проинтегрируем по области D:

$$\sum_n A_n \lambda_n \underbrace{\int_D u_k(M)\, u_n(M)\, dV}_{0,\ \text{если}\ n\neq k} = \underbrace{\int_D u_k(M)\, \delta(M, M_0)\, dV}_{u_k(M_0)}.$$

В силу ортогональности СФ, в сумме, стоящей в левой части, отлично от нуля только одно слагаемое, соответствующее $n = k$. Тогда

$$A_k \lambda_k \underbrace{\int_D u_k^2(M)\, dV}_{\|u_k\|^2} = u_k(M_0),$$

$$A_k \lambda_k \|u_k\|^2 = u_k(M_0),$$

откуда

$$A_k = \frac{u_k(M_0)}{\lambda_k \|u_k\|^2}.$$

(Заметим, что для задачи Дирихле все СЗ $\lambda_k > 0$, поэтому на них можно делить.)

В силу произвольности индекса k, таким образом определяются все коэффициенты A_k. Подставив их в ряд (3), получим функцию Грина внутренней задачи Дирихле в области D:

$$\boxed{G(M, M_0) = \sum_n \frac{u_n(M) u_n(M_0)}{\lambda_n \|u_n\|^2}.}$$

Нахождение функции Грина методом разделения переменных

Напомним, что функция Грина $G(M, M_0)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D определяется как решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M, M_0 \in D, \\ G|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

С другой стороны, любое фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е. решение уравнения $\Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$, представляется в виде:

$$G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в двумерном случае,} \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в трёхмерном случае,} \end{cases}$$

где $\Delta\, v(M) = 0,\ M \in D$.

Тогда, с учётом граничного условия $G|_{M\in S} = 0$, для функции $v(M)$ получается краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0, \qquad M \in D, \\ v(M)|_{M\in S} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{R_{MM_0}} & \text{в двумерном случае,} \\ -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R_{MM_0}} & \text{в трёхмерном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

(Точка M_0 должна лежать строго внутри области D, поэтому функции $\frac{1}{R_{MM_0}}$ и $\ln\frac{1}{R_{MM_0}}$ будут непрерывны при $M \in S$.)

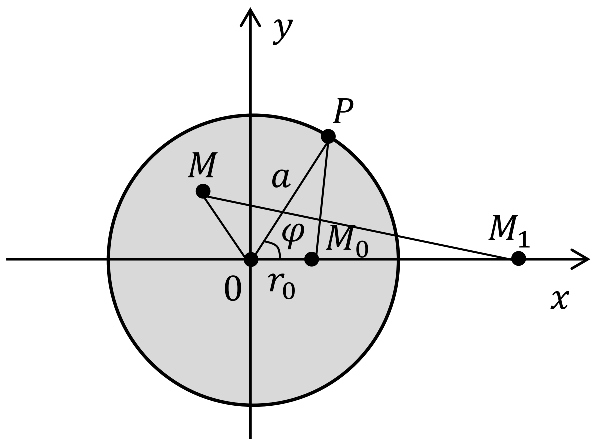
Пример 1 (задача Дирихле в круге). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Функция Грина в круге будет иметь вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где $G|_{M\in S} = 0$ на границе круга.

Итак, пусть M_0 — фиксированная точка внутри круга, M — произвольная точка внутри круга, P — произвольная точка на границе круга. Выберем систему координат с началом в центре круга, так чтобы точка M_0 лежала на оси Ox.



Тогда точка M_0 будет иметь полярные координаты $(r_0, 0)$, точка M будет иметь полярные координаты (r, φ). Функция $v(M)$ должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \Delta\, v = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{R_{PM_0}}. \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа в круге имеет вид (см. семинар 4):

$$v(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$v|_{r=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{PM_0}}.$$

Разложим функцию, стоящую в правой части, в ряд Фурье по тригонометрической системе функций. Если точка P имеет полярные координаты (a, φ), по теореме косинусов получим:

$$R_{PM_0} = \sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}.$$

С другой стороны, с помощью дифференцирования по параметру можно получить формулу:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n\varphi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos\varphi + q^2}}, \qquad |q| < 1.}$$

Тогда

$$\ln \frac{1}{R_{PM_0}} = \ln \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}} = \ln \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{r_0}{a}\right)\cos\varphi}} =$$

$$= \ln\frac{1}{a} + \ln \frac{1}{\sqrt{q^2 + 1 - 2q\cos\varphi}} = \ln\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \frac{\cos n\varphi}{n},$$

где $q = \frac{r_0}{a} < 1$. Таким образом,

$$\boxed{\ln \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}} = \ln\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}, \qquad r_0 < a.} \tag{1}$$

Это даёт нам искомое разложение функции $\ln\frac{1}{R_{PM_0}}$ в тригонометрический ряд Фурье. Теперь ГУ принимает вид:

$$v|_{r=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}.$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ и 1, получим:

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a}, \qquad A_n = -\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{r_0}{a^2}\right)^n, \qquad B_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд для $v(r, \varphi)$:

$$v(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}. \tag{2}$$

Замечание. Если считать, что точка M_0 имеет полярные координаты не $(r_0, 0)$, а (r_0, φ_0), то ответ запишется в виде

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n(\varphi - \varphi_0)}{n}.$$

Просуммируем ряд (2). Обозначим $\frac{a^2}{r_0} = r_1$. Тогда ряд (2) примет вид:

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}.$$

Поскольку $\frac{a}{r_0} > 1$, то $r_1 = \frac{a}{r_0} \cdot a > a > r$. В таком случае формулу (1) можно записать в следующем виде (заменив r_0 на r и a на r_1):

$$\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} = \ln\frac{1}{r_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}\,, \qquad r < r_1,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} - \ln\frac{1}{r_1}.$$

С учётом этого, функцию $v(r,\varphi)$ запишем в виде:

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{a} + \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} - \ln\frac{1}{r_1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} + \ln\frac{r_1}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} + \ln\frac{a}{r_0}\right).$$

Заметим, что $\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi} = R_{MM_1}$ — расстояние между точкой M с полярными координатами (r,φ) и точкой M_1 с полярными координатами $(r_1, 0)$, которая лежит на оси Ox вне круга. Таким образом,

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right),$$

и

$$\boxed{G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right]}$$

— функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Функция Грина для других ГУ

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу с ГУ третьего рода:

$$\begin{cases} \Delta\, u(M) = F(M), \qquad M \in D, \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f(P), \qquad h(P) \ge 0, \qquad h \not\equiv 0. \end{cases}$$

Функция Грина определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

Тогда третья формула Грина для решения краевой задачи $u(M)$

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M,M_0)\, \Delta\, u(M)\, dV_M + \int\limits_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\right) dS_P\,,$$

$M_0 \in D$, (3)

принимает вид

$$u(M_0) = \\ = -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)\,dV_M + \underbrace{\int\limits_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P}_{\int_S \left(G(P,M_0) \underbrace{\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + h(P)u(P) \right)}_{f(P)} - u(P) \underbrace{\left(\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} + h(P)G(P,M_0) \right)}_{0} \right) dS_P} = \\ = -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)\,dV_M + \int\limits_S G(P,M_0)f(P)\,dS_P.$$

Функцию Грина для ГУ третьего рода также можно искать в виде разложения по СФ задачи Ш.–Л. с ГУ третьего рода или с помощью нахождения функции $v(M)$ как решения соответствующей краевой задачи с неоднородным ГУ третьего рода.

Аналогично определяется функция Грина для внутренней смешанной краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), & M, M_0 \in D, \\ \text{однородное смешанное ГУ при } M \in S. \end{cases}$$

Для задачи Неймана всё сложнее, поскольку она не всегда разрешима. Для простоты рассмотрим внутреннюю задачу Неймана для однородного уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\, u(M) = 0, & M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P). \end{cases}$$

Пусть выполнено условие разрешимости: $\int_S f(P)\,dS = 0$. Тогда третья формула Грина (3) для решения краевой задачи $u(M)$ принимает вид:

$$u(M_0) = \int\limits_S G(P,M_0)f(P)\,dS_P + \text{const}, \qquad M_0 \in D,$$

где функция Грина $G(M,M_0)$ определяется так:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), & M, M_0 \in D, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = -\dfrac{1}{S_0}, \end{cases}$$

где S_0 — площадь поверхности S. Такое неоднородное ГУ для функции Грина возникает потому, что иначе для гладкой части функции Грина $v(M)$ не будет выполнено условие разрешимости задачи Неймана для однородного уравнения Лапласа в области D.

Во внешних задачах для функции Грина надо ставить дополнительные условия на бесконечности.

В трёхмерном случае:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), & M, M_0 \in D_e, \\ G|_{M\in S} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = 0, \quad \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0 \ \text{ или однородное смешанное ГУ}, \\ G \rightrightarrows 0 \ \text{ при } r \to \infty, \qquad \text{где } r - \text{расстояние от точки } M \text{ до начала координат.} \end{cases}$$

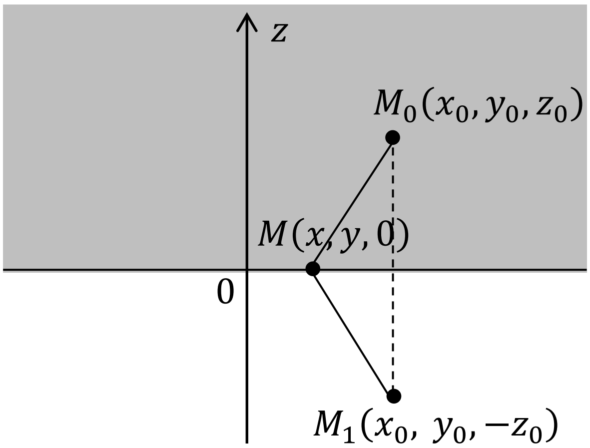
В двумерном случае:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D_e, \\ G|_{M\in S} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = -\dfrac{1}{S_0}, \qquad \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0 \text{ или однородное смешанное ГУ}, \\ G(M, M_0) \text{ ограничена при } M \to \infty. \end{cases}$$

Построение функции Грина методом зеркальных отображений

Иногда, исходя из симметрии области D и физического смысла функции Грина, удаётся угадать функцию $v(M)$.

Пример 3 (задача Дирихле в полупространстве). Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$.



Функция Грина в полупространстве должна иметь вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0, \qquad z > 0, \\ G|_{z=0} = 0, \\ G \rightrightarrows 0 \ \text{при} \ z \to +\infty. \end{cases}$$

Эта задача имеет следующую физическую интерпретацию: требуется найти потенциал точечного заряда, расположенного в точке M_0 над заземлённой проводящей плоскостью $z = 0$. Функция $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}}$ — это потенциал, создаваемый точечным зарядом, а $v(M)$ — потенциал, создаваемый наведёнными зарядами на плоскости.

Отобразим точку M_0 симметрично относительно плоскости $z = 0$, получим точку M_1. Поместим в эту точку фиктивный точечный заряд, такой же, как в точке M_0, но противоположного знака. Он создаёт потенциал:

$$v(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}.$$

Тогда в верхнем полупространстве функция $v(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}$$

удовлетворяет ГУ

$$G|_{z=0} = 0,$$

поскольку, когда точка M лежит в плоскости $z = 0$, выполняется равенство $R_{MM_0} = R_{MM_1}$.

Условие на бесконечности также выполнено.

Значит, функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$ имеет вид:

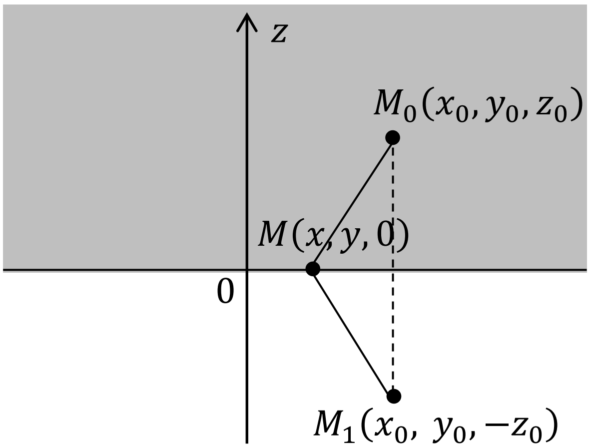
$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_1}}.}$$

Таким образом, наведённые на заземлённой проводящей плоскости $z = 0$ заряды создают такой же потенциал, какой бы создавал (при отсутствии заземлённой плоскости) точечный отрицательный заряд, помещённый в точку M_1.

ДЗ 13. БК с. 137 № 2, 3, 4, 6, 8, 10.

Семинар 14

Пример 1 (задача Неймана в полупространстве). Построить функцию Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$.



Функция Грина должна иметь вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0, & z > 0, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, & \\ G \rightrightarrows 0 \ \text{ при } \ z \to +\infty. & \end{cases}$$

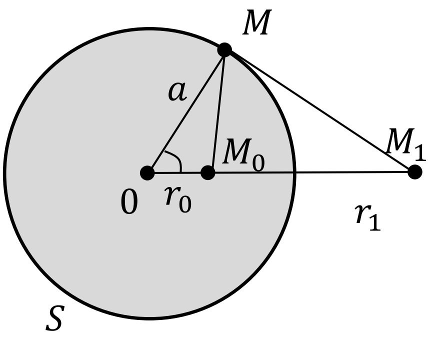
Физическая интерпретация: в случае задачи Неймана функция Грина описывает стационарное распределение температуры в однородной среде над теплоизолированной поверхностью $z = 0$. В точке M_0 находится точечный источник тепла. Если в симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$ точку M_1 поместить второй такой же источник тепла, то потока тепла через поверхность $z = 0$ не будет (в силу симметрии: сверху приходит столько же тепла, сколько снизу).

В этом случае $v(M) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}$, и функция Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}.}$$

Дома проверить выполнение условия Неймана для найденной функции Грина, выразив её через координаты точек M и M_0!

Пример 2 (задача Дирихле в круге). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.



На прошлом семинаре была получена функция Грина для этой задачи методом разделения переменных. Теперь найдём её другим способом: методом зеркальных отображений.

Функция Грина должна иметь вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0 \text{ в круге}, \\ G(M, M_0)|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

Пусть M_0 — произвольная точка внутри круга.

О. Точка M_1 называется сопряжённой (симметричной) к точке M_0 относительно окружности S, если точка M_1 лежит на прямой, соединяющей центр O окружности S и точку M_0, по ту же сторону от центра O, что и точка M_0, и при этом

$r_0 \cdot r_1 = a^2$,

где $r_0 = R_{OM_0}$, $r_1 = R_{OM_1}$.

Поскольку $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$, то если точка M_0 лежит внутри круга, сопряжённая точка M_1 будет лежать вне круга, и наоборот. Точка, сопряжённая к центру круга — бесконечно удалённая.

Лемма. Если $M \in S$, то $R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$.

Доказательство. Из равенства $r_0 \cdot r_1 = a^2$ следует, что $\frac{a}{r_1} = \frac{r_0}{a}$. Тогда

$\triangle\, OMM_0 \sim \triangle\, OM_1M,$

т.к. $\frac{OM}{OM_1} = \frac{OM_0}{OM}$, и $\angle MOM_0 = \angle M_1OM.$

Из подобия треугольников вытекает, что

$$\frac{MM_0}{OM_0} = \frac{M_1M}{OM},$$

т.е. $\frac{R_{MM_0}}{r_0} = \frac{R_{MM_1}}{a}$, ч.т.д.

Теперь, если мы возьмём $v(M) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)$, то

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right],$$

и, в силу доказанной леммы, $G(M, M_0)|_{M\in S} = 0$. При этом функция $v(M)$ будет гармонической в круге (т.к. она является фундаментальным решением уравнения Лапласа с особенностью при $M = M_1$).

Таким образом, функция Грина внутренней задачи Дирихле в круге:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right].}$$

Пример 3 (задача Дирихле в шаре). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Отличие от предыдущей задачи в том, что

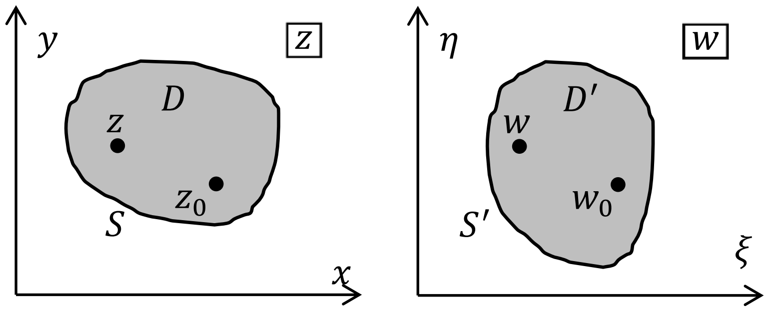
$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M).$$

Тогда надо взять $v(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}$, где M_1 — точка, сопряжённая точке M_0 относительно сферы, являющейся границей шара (точки, сопряжённые относительно сферы, определяются так же, как и точки, сопряжённые относительно окружности). Таким образом, функция Грина внутренней задачи Дирихле в шаре:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right).}$$

Построение функции Грина методом конформных отображений (для двумерных задач)

Пусть D — некоторая двумерная область. Смысл метода конформных отображений состоит в том, чтобы исходную область D конформно отобразить на более простую область D', в которой функцию Грина найти легче.



Будем рассматривать точки области D как точки на комплексной плоскости. Тогда каждой точке соответствует комплексное число $z = x + iy$. Поэтому будем обозначать точки области соответствующими комплексными числами z.

Для простоты построим функцию Грина задачи Дирихле. Функция Грина задачи Дирихле в области D удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Delta_z \, G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \qquad z, z_0 \in D, \\ G(z, z_0)|_{z \in S} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что конформное отображение сохраняет функцию Грина.

Всякое конформное отображение области D на область D' можно записать в виде:

$w = f(z), \qquad z \in D,$

где $f(z)$ — однозначная и однолистная аналитическая функция, $f'(z) \neq 0$ в области D, $w = \xi + i\eta$ — точка области D', в которую переходит точка z области D.

Можно показать (сделав замену переменных), что при конформном отображении оператор Лапласа преобразуется следующим образом:

$\Delta_z = |f'(z)|^2 \, \Delta_w,$

где $\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в старых переменных, $\Delta_w = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ — оператор Лапласа в новых переменных. (Дома проверить!)

Посмотрим, как при этом преобразуется дельта-функция. Сделаем замену переменных в интеграле, определяющем действие дельта-функции на произвольную функцию $\varphi(z)$. Мы хотим, чтобы в новых переменных он имел такой же вид, как и в старых, поэтому

$$\varphi(z_0) = \iint\limits_D \varphi(z)\delta(z, z_0)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \underbrace{\varphi\big(f^{-1}(w)\big)}_{\tilde{\varphi}(w)} \underbrace{\delta\big(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)\big) \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|}_{\delta(w, w_0)} d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D'} \tilde{\varphi}(w)\delta(w, w_0)\, d\xi\, d\eta,$$

где $f^{-1}(w)$ — функция, обратная к $f(z)$, $w_0 = f(z_0)$.

Геометрический смысл модуля якобиана перехода $\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|$ — во сколько раз увеличиваются элементарные площади при данном отображении. С другой стороны, при конформном отображении сохраняются углы, а элементы длины увеличиваются в $|f'(z)|$ раз. Поэтому элементы площади увеличиваются в $|f'(z)|^2$ раз, т.е. $\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| = |f'(z)|^2$.

Таким образом,

$\delta(w, w_0) = |f'(z)|^2 \delta(z, z_0).$

Значит, при конформном отображении уравнение $\Delta_z \, G(z, z_0) = -\delta(z, z_0)$ переходит в уравнение

$$|f'(z)|^2 \, \Delta_w \underbrace{G\big(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)\big)}_{\tilde{G}(w, w_0)} = -|f'(z)|^2 \delta(w, w_0),$$

т.е.

$\Delta_w \, \tilde{G}(w, w_0) = -\delta(w, w_0).$

Тогда функция $\tilde{G}(w, w_0)$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \Delta_w \, \tilde{G}(w, w_0) = -\delta(w, w_0), \qquad w, w_0 \in D', \\ \tilde{G}\big|_{w \in S'} = G|_{M \in S} = 0. \end{cases}$$

А это задача, решением которой является функция Грина задачи Дирихле в области D'. Таким образом, после замены переменных функция Грина задачи Дирихле в области D перешла в функцию Грина задачи Дирихле в области D'. А это и означает, что конформное отображение сохраняет функцию Грина. Ч.т.д.

Если $\tilde{G}(w, w_0)$ — функция Грина в новой области D', то $G(z, z_0) = \tilde{G}\big(f(z), f(z_0)\big)$ — функция Грина в старой области D.

Итак, чтобы найти функцию Грина в некоторой области D, надо эту область конформно отобразить на область D', где функция Грина известна или может быть легко получена. Например, любую односвязную область, граница которой состоит хотя бы из одной точки, можно конформно отобразить на единичный круг, причём так, чтобы заданная точка $z_0 \in D$ перешла в центр круга (**теорема Римана**). Правда, построить такое конформное отображение в явном виде удаётся далеко не для всякой области (но известно, что оно существует).

Замечание 1. Метод конформных отображений позволяет находить функцию Грина не только в ограниченных, но и в неограниченных областях.

Замечание 2. Почему этот метод не применяется для трёхмерных областей? В трёхмерном случае (и в случае большей размерности) класс отображений, сохраняющих функцию Грина, слишком узок и потому не позволяет существенно упростить область. В трёхмерном случае нет аналога теоремы Римана.

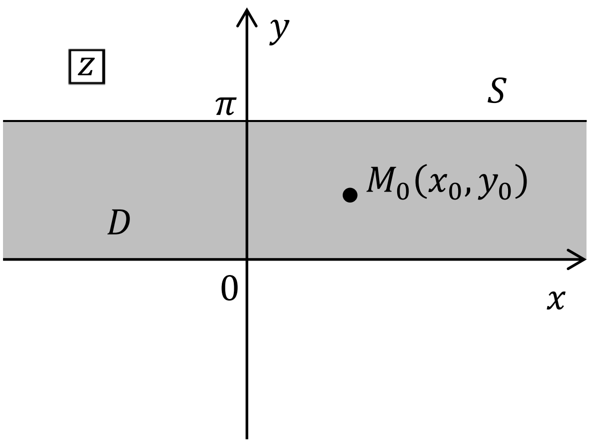
Замечание 3. Использование метода конформных отображений для построения функции Грина в случае ГУ других типов связано с дополнительными трудностями.

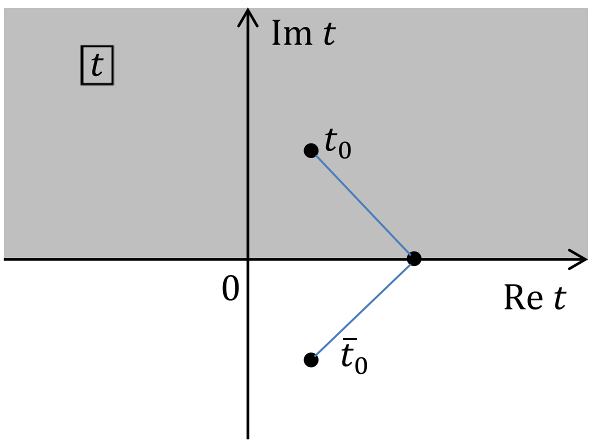
Пример 4 (задача Дирихле в полосе). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полосе $0 < y < \pi$.

Функция Грина должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \Delta_z \, G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \qquad z, z_0 \in D, \\ G(z, z_0)|_{z \in S} = 0, \\ G(z, z_0) \text{ ограничена при } x \to \infty. \end{cases}$$

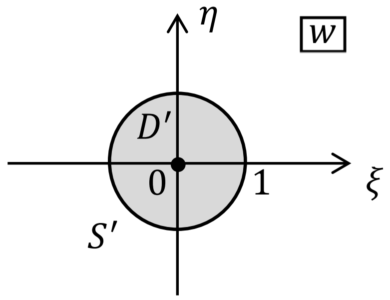
Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная точка внутри полосы D. В соответствии с теоремой Римана, отобразим полосу D конформно на единичный круг так, чтобы точка M_0 перешла в центр круга.





1. Сначала сделаем экспоненциальное отображение:

$t = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$



При этом $|t| = e^x$ изменяется от 0 до ∞, $\arg t = y$ изменяется от 0 до π. Значит, полоса D отобразится на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$. При этом точка $M_0(x_0, y_0)$ перейдёт в точку $t_0 = e^{x_0} e^{iy_0}$.

2. Теперь верхнюю полуплоскость отобразим на единичный круг D' так, чтобы точка t_0 перешла в центр круга. Для этого сделаем дробно-линейное отображение:
$$w = \lambda \frac{t - \alpha}{t - \beta},$$
которое переведёт границу полуплоскости, прямую $\operatorname{Im} t = 0$, в границу круга — окружность $|w| = 1$, а точку t_0 — в центр круга $w = 0$. Здесь α, β, λ — неизвестные параметры.

Поскольку точка t_0 переходит в точку $w = 0$, то $\alpha = t_0$.

Далее, при дробно-линейном отображении сохряняется симметрия относительно окружностей и прямых. Поэтому точка $\bar{t}_0$, симметричная точке t_0 относительно прямой $\operatorname{Im} t = 0$, перейдёт в точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$. Отсюда $\beta = \bar{t}_0$.

И из условия, что прямая $\operatorname{Im} t = 0$ переходит в окружность $|w| = 1$, получим:
$$|w| = \left|\lambda \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0}\right| = |\lambda| \frac{|t - t_0|}{|t - \bar{t}_0|} = |\lambda| = 1,$$
поскольку расстояние между точками t и t_0 равно расстоянию между точками t и $\bar{t}_0$, когда точка t лежит на прямой $\operatorname{Im} t = 0$.

Отсюда $\lambda = e^{i\varphi}$, где φ — произвольное вещественное число (это угол поворота круга относительно его центра, он может быть любой). Для простоты возьмём $\varphi = 0$. Тогда $\lambda = 1$.

Значит, отображение
$$w = \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0}$$
переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ в единичный круг $|w| < 1$, при этом точка t_0 переходит в центр круга.

3. Композиция отображений $z \to t \to w$ даёт нам отображение
$$w = f(z) = \frac{e^z - t_0}{e^z - \bar{t}_0} = \frac{e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{iy_0}}{e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{-iy_0}},$$
переводящее полосу $0 < y < \pi$ в единичный круг $|w| < 1$ так, что точка $M_0(x_0, y_0)$ переходит в центр круга.

Теперь в единичном круге D' нам надо найти функцию Грина $\tilde{G}(w, 0)$:
$$\begin{cases} \Delta_w \tilde{G}(w, 0) = -\delta(w, 0), & w \in D', \\ \tilde{G}(w, 0)\big|_{|w|=1} = 0. \end{cases}$$
(Это проще, чем находить $\tilde{G}(w, w_0)$ для произвольной $w_0 \in D'$, поэтому мы и потребовали, чтобы точка M_0 перешла в центр круга $w_0 = 0$.)

Функция Грина в области D' имеет вид:
$$\tilde{G}(w, 0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w|} + v(w),$$
где $\Delta\, v(w) = 0$ в D'.

Подставив функцию $\tilde{G}(w, 0)$ в ГУ $\tilde{G}(w, 0)\big|_{|w|=1} = 0$, получим

$v|_{|w|=1} = 0.$

Тогда $v \equiv 0$, и

$$\boxed{\tilde{G}(w,0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|}}$$

— функция Грина задачи Дирихле в единичном круге (с особенностью в точке $w = 0$).

Функция Грина в исходной области D имеет вид:

$$G(z,z_0) = \tilde{G}(f(z),0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|\dfrac{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}}{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}}\right|}.$$

Вычислим:

$$\left|e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}\right|^2 = \left(e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}\right)\left(e^x e^{-iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}\right) =$$
$$= e^{2x} - e^{x+x_0}e^{i(y_0-y)} - e^{x+x_0}e^{i(y-y_0)} + e^{2x_0} = e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0}\cos(y-y_0).$$

Аналогично,

$$\left|e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}\right|^2 = e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0}\cos(y+y_0).$$

Тогда

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left|e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}\right|^2}{\left|e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}\right|^2} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0}\cos(y+y_0)}{e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0}\cos(y-y_0)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e^{x-x_0} + e^{x_0-x} - 2\cos(y+y_0)}{e^{x-x_0} + e^{x_0-x} - 2\cos(y-y_0)} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{2\operatorname{ch}(x-x_0) - 2\cos(y+y_0)}{2\operatorname{ch}(x-x_0) - 2\cos(y-y_0)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}.$$

Итак, функция Грина задачи Дирихле в полосе $0 < y < \pi$:

$$\boxed{G(z,z_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}.}$$

ДЗ 14.

Построить функцию Грина задачи Дирихле:

а) в полушаре;

б) в полуплоскости $y > 0$;

в) в полосе $0 < y < \pi$, сделав конформное отображение на полуплоскость и воспользовавшись результатом предыдущего пункта;

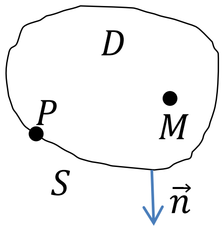
г) в круге радиуса a, сделав конформное отображение на единичный круг, при котором точка z_0 переходит в центр круга;

д) в квадранте $x > 0$, $y > 0$ (на плоскости) двумя способами: методом зеркальных отображений и методом конформных отображений.

В след. раз — к/р.

Семинар 15

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области с однородными ГУ



$$\begin{cases} u_t = a^2 \,\Delta\, u + f(M,t),\ M \in D,\ t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = 0,\ P \in S,\ t \geq 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\ M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Здесь $a = \text{const} > 0$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $\alpha \cdot \beta \geq 0$.

Требуется найти $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$, $t \geq 0$.

Если все функции — достаточно гладкие, то классическое решение существует и единственно.

Рассмотрим вспомогательную задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) + \lambda v(M) = 0, \qquad M \in D, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0. \end{cases}$$

Пусть $\{v_n(M)\}$ — полная ортогональная система СФ этой задачи Ш.–Л., а $\{\lambda_n\}$ — соответствующие СЗ. Разложим функции $\varphi(M)$ и $f(M,t)$ в ряд Фурье по $\{v_n(M)\}$:

$$\varphi(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M)\,, \qquad \varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \varphi(M) v_n(M)\, dV,$$

$$f(M,t) = \sum_n f_n(t) v_n(M)\,, \qquad f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D f(M,t) v_n(M)\, dV.$$

Решение начально–краевой задачи для уравнения теплопроводности также будем искать в виде ряда Фурье по $\{v_n(M)\}$:

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) v_n(M) \tag{1}$$

с неизвестными коэффициентами $T_n(t)$.

Тогда однородное ГУ автоматически выполняется.

Подставим ряды Фурье в ДУ и НУ:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_n T_n'(t) v_n(M) = a^2 \sum_n T_n(t) \underbrace{\Delta\, v_n(M)}_{-\lambda_n v_n(M)} + \sum_n f_n(t) v_n(M)\,, \\ \displaystyle\sum_n T_n(0) v_n(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M)\,. \end{cases}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $v_n(M)$, получим:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \tag{2}$$

Это задача Коши для ОДУ первого порядка. Её решение можно записать в виде (дома проверить):

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}}_{\text{функция Коши}} f_n(\tau)\, d\tau.$$

Замечание 1: данное представление решения задачи Коши (2) справедливо и в случае $\lambda_n = 0$.

Замечание 2: на практике иногда удобнее решать задачу Коши (2) непосредственно, не используя представление решения через функцию Коши.
Найденные $T_n(t)$ подставим в ряд (1) и получим решение исходной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t\cos\dfrac{3\pi x}{2l}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$

Сначала найдём СЗ и СФ соответствующей задачи Ш.–Л.:

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \\ v'(0) = 0, \qquad v(l) = 0. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\lambda_n = \left[\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}\right]^2, \qquad v_n(x) = \cos\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Разложим функции $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l}$ и $f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l}$ в ряд Фурье по $\{v_n(x)\}$:

$$\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l} = v_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n(x) \ \Rightarrow \ \varphi_n = \delta_{n1};$$

$$f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l} = t v_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(x) \ \Rightarrow \ f_n(t) = t\delta_{n2}.$$

Теперь будем искать решение исходной начально-краевой задачи в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(x).$$

ГУ выполнены автоматически. После подстановки рядов в ДУ и НУ и приравнивания коэффициентов при соответствующих СФ, получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = t\delta_{n2}, \\ T_n(0) = \delta_{n1}. \end{cases}$$

Мы не будем использовать представление решения через функцию Коши, а решим задачу непосредственно.
При $n \neq 1, 2$ эта задача Коши однородна:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения задачи Коши для ОДУ она имеет только тривиальное решение: $T_n(t) = 0$.
Теперь рассмотрим задачу для $n = 1$:

$$\begin{cases} T_1'(t) + a^2\lambda_1 T_1(t) = 0, \\ T_1(0) = 1. \end{cases}$$

ОР ДУ имеет вид $T_1(t) = Ae^{-a^2\lambda_1 t}$, причём из НУ $A = 1$. Таким образом,
$T_1(t) = e^{-a^2\lambda_1 t}$.
Рассмотрим задачу для $n = 2$:

$$\begin{cases} T_2'(t) + a^2\lambda_2 T_2(t) = t, \\ T_1(0) = 0. \end{cases}$$

ОР ДУ ищем в виде:

$$T_2(t) = \underbrace{Be^{-a^2\lambda_2 t}}_{\substack{\text{общее решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\tilde{T}_2(t)}_{\substack{\text{частное решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}},$$

где $\tilde{T}_2(t)$ надо искать в виде

$$\tilde{T}_2(t) = Ct + D,$$

поскольку в правой части ДУ стоит многочлен первой степени по t.

Подставив $\tilde{T}_2(t)$ в ДУ, получим:

$$C + a^2\lambda_2 Ct + a^2\lambda_2 D = t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$a^2\lambda_2 C = 1, \qquad C + a^2\lambda_2 D = 0.$$

Отсюда:

$$C = \frac{1}{a^2\lambda_2}, \qquad D = -\frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Тогда

$$\tilde{T}_2(t) = \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2},$$

и

$$T_2(t) = Be^{-a^2\lambda_2 t} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Коэффициент B определяем из НУ:

$$T_2(0) = B - \frac{1}{a^4\lambda_2^2} = 0 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Таким образом,

$$T_2(t) = \frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

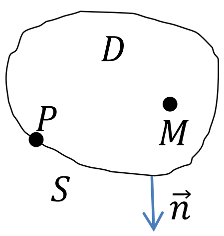
Теперь подставим найденные $T_n(t)$ в ряд для решения начально-краевой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)v_n(x) = T_1(t)v_1(x) + T_2(t)v_2(x) =$$

$$= e^{-a^2\lambda_1 t}\cos\frac{\pi x}{2l} + \left(\frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}\right)\cos\frac{3\pi x}{2l},$$

где $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$, $\lambda_2 = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2$.

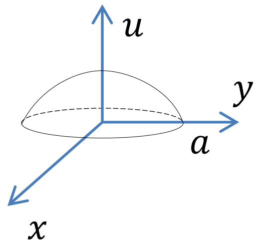
Начально-краевые задачи для уравнения колебаний в ограниченной области с однородными ГУ



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \,\Delta\, u + f(M,t),\; M \in D,\; t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0,\; P \in S,\; t \geq 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\; M \in D, & \text{(НУ)} \\ u_t|_{t=0} = \psi(M),\; M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Задача решается аналогично, но для $T_n(t)$ получается задача Коши:
$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases}$$
где φ_n, ψ_n, $f_n(t)$, $T_n(t)$ — коэффициенты разложения функций $\varphi(M)$, $\psi(M)$, $f(M,t)$, $u(M,t)$ в ряд Фурье по СФ соответствующей задачи Ш.–Л.
Решение этой задачи Коши имеет вид (дома проверить):
$$T_n(t) = \begin{cases} \varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \dfrac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)\,d\tau\,, & \lambda_n > 0, \\ \varphi_n + \psi_n t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau\,, & \lambda_n = 0. \end{cases}$$
Замечание: на практике иногда удобнее решать задачу Коши непосредственно, не используя представление решения через функцию Коши.

Пример 2 (задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны). Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в единичном круге:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \,\Delta\, u + J_0(\chi r)\sin\sigma t\,, & 0 \le r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$
где $\sigma > 0$, χ — первый положительный корень уравнения $J_0(\chi) = 0$.
Эта задача описывает малые поперечные колебания упругой мембраны с краями, закреплёнными на единичной окружности, под действием периодической внешней силы.
Сначала найдём СЗ и СФ соответствующей задачи Ш.–Л. в круге:
$$\begin{cases} \Delta\, v + \lambda v = 0, & 0 \le r < 1, \\ v|_{r=1} = 0. \end{cases}$$
Как мы знаем (см. семинар 6), СФ имеют вид:
$$v_{\pm nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi),$$
где
$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Заметим, что по условию задачи $\sqrt{\lambda_1^{(0)}} = \chi$.
Разложим функцию $J_0(\chi r)\sin\sigma t$ в ряд Фурье по СФ $v_{\pm nk}(r,\varphi)$:
$$J_0(\chi r)\sin\sigma t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t) v_{nk}(r,\varphi).$$
Заметим, что $J_0(\chi r) = v_{01}(r,\varphi)$, поэтому
$f_{nk}(t) = \delta_{n0}\delta_{k1}\sin\sigma t.$
Теперь будем искать решение исходной начально-краевой задачи в виде ряда:
$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r,\varphi).$$

ГУ выполнены автоматически. Подставив ряд в ДУ и НУ и приравняв соответствующие коэффициенты при v_{nk} получим задачу Коши:

$$\begin{cases} T''_{nk}(t) + a^2\lambda_k^{(n)} T_{nk}(t) = f_{nk}(t) = \delta_{n0}\delta_{k1}\sin\sigma t\,, \\ T_{nk}(0) = \varphi_{nk} = 0, \\ T'_{nk}(0) = \psi_{nk} = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения задачи Коши $T_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (0,1)$. Для $T_{01}(t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} T''_{01}(t) + a^2\lambda_1^{(0)} T_{01}(t) = f_{01}(t) = \sin\sigma t\,, \\ T_{01}(0) = 0, \\ T'_{01}(0) = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся представлением решения через функцию Коши:

$$T_{01}(t) = \int_0^t K_{01}(t-\tau) f_{01}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}}\sin\sigma\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{a\chi}\int_0^t \sin a\chi(t-\tau)\sin\sigma\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\int_0^t \{\cos[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau] - \cos[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\left\{-\frac{\sin[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau]}{a\chi+\sigma} - \frac{\sin[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]}{\sigma - a\chi}\right\}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\left(\frac{\sin\sigma t + \sin a\chi t}{a\chi+\sigma} - \frac{\sin\sigma t - \sin a\chi t}{\sigma - a\chi}\right) = \frac{\sigma\sin a\chi t - a\chi\sin\sigma t}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)}.$$

Тогда решение начально-краевой задачи имеет вид:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi) = T_{01}(t)v_{01}(r,\varphi) =$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)}J_0(\chi r)\sin a\chi t}_{\text{колебания с собственной частотой } a\chi} - \underbrace{\frac{a\chi}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)}J_0(\chi r)\sin\sigma t}_{\text{колебания с вынужденной частотой } \sigma}.$$

Отсюда видно, что решение — стоячая волна.

Данный ответ не подходит для случая, когда вынужденная частота совпадает с собственной: $\sigma = a\chi$. В этом случае посчитаем интеграл отдельно:

$$T_{01}(t) = \frac{1}{2a\chi}\int_0^t \{\cos[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau] - \cos[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\int_0^t (\cos\sigma(t-2\tau) - \cos\sigma t)\,d\tau = \frac{1}{2\sigma}\left(-\frac{\sin\sigma(t-2\tau)}{2\sigma} - \tau\cos\sigma t\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma} - t\cos\sigma t\right).$$

Тогда

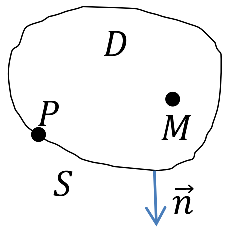
$$u(r,\varphi,t)=T_{01}(t)v_{01}(r,\varphi)=\frac{J_0(\chi r)}{2\sigma}\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma}-t\cos\sigma t\right).$$

Видно, что в этом случае амплитуда колебаний неограниченно возрастает — резонанс.

ДЗ 15. БК с. 212 № 4, 7; с. 283–285 № 4, 8, 9, 11.

Семинар 16

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний в ограниченной области с неоднородными ГУ



Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородным ГУ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = \mu(P,t), & P \in S, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде

$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t)$,

где $w(M,t)$ — некоторая достаточно гладкая (дифференцируемая нужное число раз, чтобы её можно было подставить в уравнение теплопроводности, ГУ и НУ) функция, удовлетворяющая неоднородному ГУ:

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t).$$

Т.е. мы должны каким-то образом подобрать эту функцию $w(M,t)$. Будем считать, что она нам известна. Тогда подставим функцию $u = v + w$ в исходную начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} v_t + w_t = a^2 \Delta v + a^2 \Delta w + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S + \left.\left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t), & P \in S, \quad t \geq 0, \\ v|_{t=0} + w|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

Теперь для функции $v(M,t)$ получается начально-краевая задача с однородным ГУ, рассмотренная на прошлом семинаре:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v + \tilde{f}(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0, & P \in S, \quad t \geq 0, \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(M), & M \in D, \end{cases}$$

где $\tilde{f}(M,t) = f(M,t) - w_t + a^2 \Delta w$, $\tilde{\varphi}(M) = \varphi(M) - w|_{t=0}$ — известные функции.

Чаще всего удобно брать в качестве функции $w(M,t)$ решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & M \in D, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t). \end{cases}$$

Внимание! У задачи Неймана может не быть решения! В этом случае нужно искать функцию $w(M,t)$ другим способом.

Аналогично можно решать начально-краевые задачи для уравнения колебаний с неоднородными ГУ.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в единичном круге:
$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ u|_{r=1} = t \sin 4\varphi, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$
Будем искать решение в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + w(r,\varphi,t),$
где $w(r,\varphi,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию:
$w|_{r=1} = t \sin 4\varphi.$
Как говорилось выше, удобно брать в качестве функции w решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:
$$\begin{cases} \Delta w = 0, \qquad 0 \le r < 1, \\ w|_{r=1} = t \sin 4\varphi\,. \end{cases}$$
Решение уравнения Лапласа в круге имеет вид (см. семинар 4):
$$w(r,\varphi,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$
Подстановка в ГУ даёт:
$$w|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = t \sin 4\varphi,$$
откуда $B_4 = t$, а все остальные коэффициенты A_n и B_n равны нулю.
Таким образом,
$w(r,\varphi,t) = tr^4 \sin 4\varphi.$
Значит, функцию $u(r,\varphi,t)$ мы будем искать в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + tr^4 \sin 4\varphi.$
Подставив это выражение в исходную начально-краевую задачу, получим:
$$\begin{cases} v_t + r^4 \sin 4\varphi = \Delta v, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} + t \sin 4\varphi = t \sin 4\varphi, \\ v|_{t=0} = 0, \end{cases}$$
т.е.
$$\begin{cases} v_t = \Delta v - r^4 \sin 4\varphi\,, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$
Получилась задача с однородным ГУ, решение которой надо искать в виде разложения по СФ соответствующей задачи Ш.–Л. Дома доделать!

Пример 2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = l, \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$
Будем искать решение в виде:
$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$
где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям:
$w_x|_{x=0} = 1, \quad w|_{x=l} = l.$
Проще всего найти w в виде линейной по x функции (для которой $w_{xx} = 0$):

$w = Ax + B,$
а коэффициенты A, B определить из ГУ:
$w_x|_{x=0} = A = 1, \quad w|_{x=l} = Al + B = l,$
откуда $A = 1$, $B = 0$, и
$w(x,t) = x.$
Итак, функцию $u(x,t)$ мы ищем в виде:
$u(x,t) = v(x,t) + x.$
После подстановки в исходную задачу получим:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

А эта задача однородна и имеет тривиальное решение: $v \equiv 0$. Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи:
$u(x,t) = x.$

Пример 3. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в единичном круге:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \vartriangle u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 1, \\ u|_{t=0} = \dfrac{r^2}{2}, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + w(r,\varphi,t),$
где $w(r,\varphi,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Как говорилось выше, удобно брать в качестве функции w решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \vartriangle w = 0, \qquad 0 \le r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

Это задача Неймана, причём условие её разрешимости не выполняется:

$$\int_S \frac{\partial w}{\partial n} dl = \int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} d\varphi = 2\pi \ne 0.$$

Значит, функцию w нельзя найти как решение краевой задачи для уравнения Лапласа. Попробуем её угадать. Итак, надо подобрать функцию $w(r,\varphi,t)$, удовлетворяющую условию

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Поскольку в правой части ГУ не фигурирует ни φ, ни t, то и функцию w можно искать не зависящую от φ и t. Например, функция $w = r$ будет удовлетворять ГУ. Тогда решение исходной начально-краевой задачи будем искать в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + r.$
Подставив её в условия задачи, получим:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + a^2 \vartriangle r, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} + r = \dfrac{r^2}{2}, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вычислим $\vartriangle r$:

$$\vartriangle r = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr}{dr}\right) = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, для функции v имеем задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + \dfrac{a^2}{r}, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \dfrac{r^2}{2} - r, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Из попытки найти классическое решение такой краевой задачи ничего хорошего не выйдет, поскольку функция $\frac{a^2}{r}$, стоящая в правой части, разрывна, неограничена в круге. Так получилось потому, что мы выбрали функцию $w = r$, которая не является достаточно гладкой (дважды непрерывно дифферецируемой в круге), поскольку её лапласиан $\vartriangle w = \frac{1}{r}$ неограничен при $r \to 0$!

Т.е. $w = r$ *не подходит.*

Попробуем подобрать более гладкую функцию, удовлетворяющую условию

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Возьмём $w = \frac{r^2}{2}$ (тем более, что и в начальном условии есть такая функция). Тогда

$$\vartriangle w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{2}\right)\right) = 2$$

— непрерывен в круге. Теперь ищем функцию $u(r, \varphi, t)$ в виде:

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi, t) + \frac{r^2}{2}.$$

Тогда для функции $v(r, \varphi, t)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + 2a^2, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

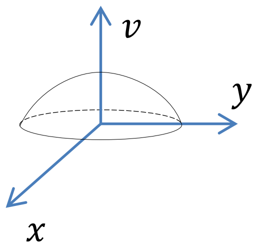
Классическое решение такой задачи существует и может быть найдено в виде разложения по СФ задачи Ш.–Л. в круге с условием Неймана (дома найти).

Но можно и угадать решение сразу. Заметим, что в правой части НУ и в неоднородности $2a^2$ в ДУ не фигурируют переменные r, φ, а ГУ имеет вид $\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$, а всё это наводит на мысль, что и решение можно искать не зависящим от r, φ. Если предположить, что $v = v(t)$, то ГУ выполнено автоматически, и остаются условия:

$$\begin{cases} v''(t) = 2a^2, \\ v(0) = 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав ДУ с учётом НУ, получим:

$$v = a^2 t^2.$$



Также мы могли бы угадать решение исходя из его физического смысла. Уравнение колебаний в круге описывает поперечные колебания круглой упругой мембраны. Однородное условие Неймана означает, что края не закреплены. Однородные НУ означают, что в начальный момент мембрана покоится в положении равновесия. Функция $2a^2$ в правой части означает, что к мембране приложена постоянная внешняя сила, направленная перпендикулярно плоскости мембраны и распределённая равномерно по ней с плотностью $2a^2$ на единицу массы. Тогда очевидно, что мембрана будет двигаться равноускоренно, не деформируясь, т.е. закон движения $v = a^2 t^2$.

Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи имеет вид:

$$u(r, \varphi, t) = a^2 t^2 + \frac{r^2}{2}.$$

ДЗ 16. БК с. 212–213 № 3, 6, 8, 11; с. 284 № 7, 10.

Семинар 17

Уравнение теплопроводности на прямой

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{x} \qquad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ |u| < \text{const}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Найти $u(x,t)$ при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Если функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и ограничены, то классическое решение $u(x,t)$ существует и единственно.

Получим решение с помощью преобразования Фурье по x, предположив, что функции f, φ, u, u_t, u_x, u_{xx} абсолютно интегрируемы по x на $\mathbb{R}$ и $u \to 0$, $u_x \to 0$ при $x \to \infty$.

Введём обозначения для Фурье-образов:

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi, \qquad F(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Возьмём преобразование Фурье от левой и правой части уравнения теплопроводности:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{U_t(\lambda,t)} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi\xi}(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{F(\lambda,t)}.$$

Преобразуем оставшийся интеграл, проинтегрировав по частям два раза:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi\xi}(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = \underbrace{\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} u_\xi(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} \Big|_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty}}_{0} + \frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi =$$

$$= \underbrace{\frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} \Big|_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty}}_{0} + \frac{(i\lambda)^2 a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = -a^2\lambda^2 U(\lambda,t).$$

Тогда

$$U_t(\lambda,t) = -a^2\lambda^2 U(\lambda,t) + F(\lambda,t), \qquad t > 0.$$

Возьмём преобразование Фурье от НУ:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{U(\lambda,0)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{\Phi(\lambda)}.$$

Таким образом, получилась задача Коши

$$\begin{cases} U_t(\lambda,t) + a^2\lambda^2 U(\lambda,t) = F(\lambda,t), & t > 0, \\ U(\lambda,0) = \Phi(\lambda), \end{cases}$$

для ОДУ первого порядка по t, где неизвестная функция U зависит также от параметра λ.

Решение этой задачи, как мы знаем (см. семинар 15), можно записать в виде:

$$U(\lambda,t)=\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}+\int\limits_0^t F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Чтобы получить функцию $u(x,t)$, сделаем обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(\lambda,t)e^{i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^t F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda.$$

(В предположении, что можно менять порядок интегрирования.)

Вычислим внутренние интегралы по λ. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda,\qquad p\in\mathbb{R}.$$

Вычислим этот интеграл с помощью дифференцирования по параметру.

Обоснование возможности дифференцирования $I(p)$ по параметру p под знаком интеграла:

1) $I(p)$ сходится при $p=0$:

   $$I(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\,d\lambda=\sqrt{\pi}\ \text{— интеграл Пуассона.}$$

2) Подынтегральная функция $e^{-\lambda^2+i\lambda p}$ и её производная по p непрерывны.
3) Интеграл

   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda$$

   сходится равномерно при $p\in\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса: $\left|i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\right|=|\lambda|e^{-\lambda^2}$, мажорантный интеграл сходится:

   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|e^{-\lambda^2}\,d\lambda=2\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2}\,d\lambda=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda^2}\,d(\lambda^2)=-e^{-\lambda^2}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

Из условий 1)–3) следует возможность дифференцирования $I(p)$ по параметру p под знаком интеграла. Тогда

$$I'(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\, d\lambda = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\lambda + ip - ip)e^{-\lambda^2+i\lambda p}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\lambda + ip)e^{-\lambda^2+i\lambda p}\, d\lambda - \frac{p}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2+i\lambda p}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2+i\lambda p}\, d(-\lambda^2 + i\lambda p) - \frac{p}{2}I(p) = \underbrace{-\frac{i}{2}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \frac{p}{2}I(p) = -\frac{p}{2}I(p).$$

Таким образом, функция $I(p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dI}{dp} = -\frac{p}{2}I,$$

откуда

$$\frac{dI}{I} = -\frac{p}{2}dp,$$

$$\ln|I| = -\frac{p^2}{4} + \tilde{C},$$

$$I(p) = \underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{C} e^{-\frac{p^2}{4}} = Ce^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Поскольку $I(0) = \sqrt{\pi}$, то $C = \sqrt{\pi}$, и

$$I(p) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Далее, вычислим интеграл

$$J(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2+i\beta\lambda}\, d\lambda, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

$$J(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha\lambda)^2+i\frac{\beta}{\alpha}(\alpha\lambda)}\, d(\alpha\lambda) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2+i\frac{\beta}{\alpha}q}\, dq = \frac{1}{\alpha}I\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = J\big(a\sqrt{t}, x-\xi\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Теперь получим:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi.$$

Обозначим

$$\boxed{G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.}$$

Тогда

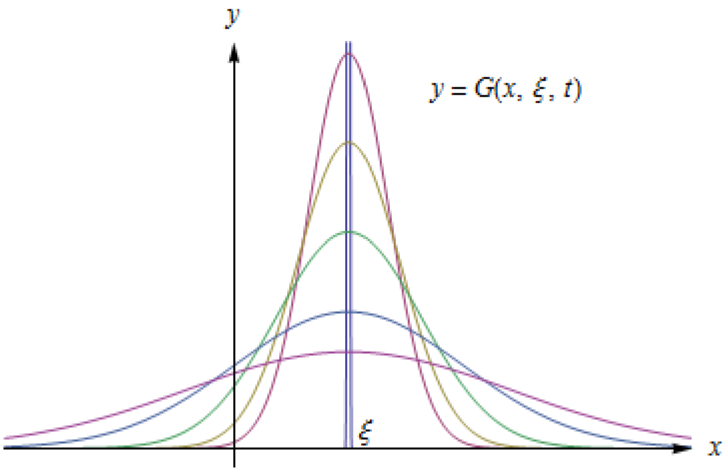
$$\boxed{u(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi}_{\text{интеграл Пуассона}} + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\,.}$$

Эта формула даёт решение уравнения теплопроводности на прямой. Она справедлива и для кусочно-непрерывных функций φ, f. Выписанную формулу можно использовать в дальнейшем при решении задач.

Функция $G(x,\xi,t)$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности на прямой. Она удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, & t > 0, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \\ G|_{t=0} = \delta(x-\xi), & x,\xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Физический смысл: функция $G(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если в точке ξ в начальный момент времени мгновенно выделилось определённое количество тепла ($Q = c\rho$, начальная температура нулевая).



Из графиков функции $G(x,\xi,t)$ при разных t мы видим, что с течением времени тепло, первоначально сосредоточенное в одной точке ξ, «расплывается» по всей прямой.

Парадокс бесконечной теплопроводности. В начальный момент времени $t = 0$ температура во всех точках x, кроме $x = \xi$, равна нулю. Но в любой последующий момент времени температура во всех точках прямой больше нуля, что означает бесконечную скорость распространения тепла. Такого не может быть. Это погрешность нашей модели, не учитывающей корпускулярную структуру вещества.

Аналогично решается уравнение теплопроводности на плоскости:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), & x,y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), & x,y \in \mathbb{R}, \\ |u| < \text{const}, & x,y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае надо взять преобразование Фурье по двум переменным:

$$U(\lambda,\mu,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,\eta,t) e^{-i\lambda\xi - i\mu\eta}\, d\xi\, d\eta,$$

и т.д.

Окончательно получим, что решение уравнения теплопроводности на плоскости имеет вид:

$$u(x,y,t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta) G(x,\xi,y,\eta,t)\, d\xi\, d\eta + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\tau) G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta,$$

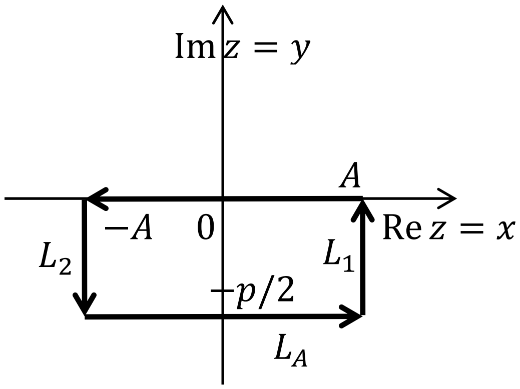
где

$$G(x,\xi,y,\eta,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}$$
— фундаментальное решение уравнения теплопроводности на плоскости.
Аналогично в трёхмерном пространстве:
$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,t), \qquad x,y,z\in\mathbb{R}, \qquad t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \qquad x,y,z\in\mathbb{R},\\ |u|<\text{const}, \qquad x,y,z\in\mathbb{R}, \qquad t\geq 0. \end{cases}$$
$$u(x,y,z,t)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$
где
$$G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$
— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в пространстве.

ДЗ 17. БК с. 213–214 № 12–16.

Другой способ вычисления интеграла $I(p)$

Вычислим интеграл
$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda, \qquad p\in\mathbb{R},$$
другим способом. Выделим полный квадрат:
$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[\lambda^2-i\lambda p+\left(\frac{ip}{2}\right)^2-\left(\frac{ip}{2}\right)^2\right]}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\lambda^2-i\lambda p-\frac{p^2}{4}\right)}e^{-\frac{p^2}{4}}\,d\lambda=$$
$$=e^{-\frac{p^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)^2}d\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)=e^{-\frac{p^2}{4}}\int\limits_L e^{-z^2}\,dz, \tag{1}$$
где L — прямая $\operatorname{Im} z=-\frac{p}{2}$ на комплексной плоскости.
Покажем, что
$$\int\limits_L e^{-z^2}\,dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$
Рассмотрим интеграл по конечному отрезку L_A прямой L



$I_A = \int_{L_A} e^{-z^2}\,dz = \int_{-A}^{A} e^{-\left(x-\frac{ip}{2}\right)^2}\,dx$

и замкнём контур интегрирования так, как показано на рисунке.

Поскольку подынтегральная функция e^{-z^2} аналитична на всей комплексной плоскости, интеграл от неё по замкнутому контуру равен нулю:

$$I_A + I_1 + I_2 + I_0 = 0, \qquad (2)$$

где

$$I_0 = \int_A^{-A} e^{-x^2}\,dx,$$

I_1 и I_2 — интегралы от функции e^{-z^2} по отрезкам прямых L_1: $\operatorname{Re} z = A$, $-\frac{p}{2} \le \operatorname{Im} z \le 0$ и L_2: $\operatorname{Re} z = -A$, $-\frac{p}{2} \le \operatorname{Im} z \le 0$, соответственно, в указанном на рисунке направлении.

Рассмотрим

$$I_1 = \int_{L_1} e^{-z^2}\,dz = \int_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-(A+iy)^2} i\,dy = i\int_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-A^2-2Aiy+y^2}\,dy = ie^{-A^2}\int_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-2Aiy}e^{y^2}\,dy,$$

откуда

$$|I_1| = \left| ie^{-A^2}\int_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-2Aiy}e^{y^2}\,dy \right| \le e^{-A^2}\underbrace{\int_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{y^2}\,dy}_{\text{не зависит от } A}.$$

Заметим, что $I_1 \to 0$ при $A \to +\infty$. Аналогично можно показать, что $I_2 \to 0$ при $A \to +\infty$.

Тогда, перейдя в равенстве (2) к пределу при $A \to +\infty$, получим, что

$$\int_L e^{-z^2}\,dz = \lim_{A\to+\infty} I_A = -\lim_{A\to+\infty}(I_0 + I_1 + I_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

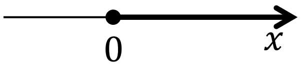
Теперь из (1) следует, что

$$I(p) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Семинар 18

Уравнение теплопроводности на полупрямой

I. Однородные ГУ.
1. Условие Дирихле.



$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u|_{x=0} = 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ x > 0, \\ |u| < \mathrm{const},\ x \geq 0,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если функции $\varphi(x)$, $f(x,t)$ непрерывны и ограничены и выполнено условие согласования $\varphi(0) = 0$, то классическое решение $u(x,t)$ существует и единственно при $x > 0$, $t > 0$.
Сведём задачу на полупрямой к задаче на прямой, доопределив функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ при $x < 0$ нечётным образом.
Лемма 1. Если функция $g(x)$ нечётна и определена при $x = 0$, то $g(0) = 0$.
Доказательство: $g(x) \equiv -g(-x) \Rightarrow g(0) = -g(0) \Rightarrow g(0) = 0$.
Поскольку $\varphi(0) = 0$, то функцию $\varphi(x)$ можно продолжить нечётным образом; предположим также, что $f|_{x=0} = 0$, тогда функцию $f(x,t)$ тоже можно продолжить нечётным образом с сохранением непрерывности. Итак, введём функции, определённые при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, \\ -f(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Эти функции являются нечётными по x и непрерывными при $x \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(x,t), & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ |\tilde{u}| < \mathrm{const}, & x \in \mathbb{R}, & t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (2) имеет вид (см. прошлый семинар):

$$\tilde{u}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi,$$

где $G(x,\xi,t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Выразим функцию $\tilde{u}(x,t)$ через функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

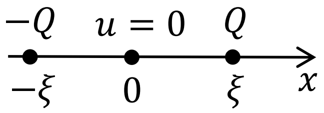
$$= \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} -\varphi(-\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi}_{\text{замена: } -\xi=p} + \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{+\infty}^{0} \varphi(p)G(x,-p,t)\,dp + \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

$$= -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(p)G(x,-p,t)\,dp + \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)\,\underbrace{[G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)]}_{G_1(x,\xi,t)}\,d\xi.$$

Функция $\boxed{G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)}$ называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$. Она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} (G_1)_t = a^2(G_1)_{xx}, \quad & x,\xi,t > 0, \\ G_1|_{x=0} = 0, \quad \xi,t > 0, \\ (G_1)_{t=0} = \delta(x-\xi), \quad & x,\xi > 0. \end{cases}$$



Физический смысл: функция $G_1(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если при $t = 0$ в точке ξ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$, а в точке $-\xi$ такое же количество тепла поглотилось (при нулевой начальной температуре). Тогда, в силу симметрии, в точке $x = 0$ в любой момент времени будет нулевая температура.

Аналогично преобразуется второй интеграл, и получается формула:

$$\tilde{u}(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G_1(x,\xi,t)\,d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi,\tau)G_1(x,\xi,t-\tau)\,d\xi. \qquad (3)$$

Поскольку функция $G_1(x,\xi,t)$ нечётна по x:

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}},$$

$$G_1(-x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(-x+\xi)^2}{4a^2t}} = -G_1(x,\xi,t),$$

то и функция $\tilde{u}(x,t)$, в силу формулы (3), нечётна по x. Тогда, в силу леммы 2, $\tilde{u}|_{x=0} = 0$. Условия задачи (2) при $x > 0$ совпадают с условиями задачи (1), поэтому функция $\tilde{u}(x,t)$ совпадает с решением задачи (1) при $x \geq 0$:

$$\boxed{u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geq 0} = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G_1(x,\xi,t)\,d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi,\tau)G_1(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,.} \qquad (4)$$

Замечание: можно показать, что эта формула остаётся в силе при $t > 0$, даже если условия $\varphi(0) = 0$ и $f|_{x=0} = 0$ не выполнены.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой:

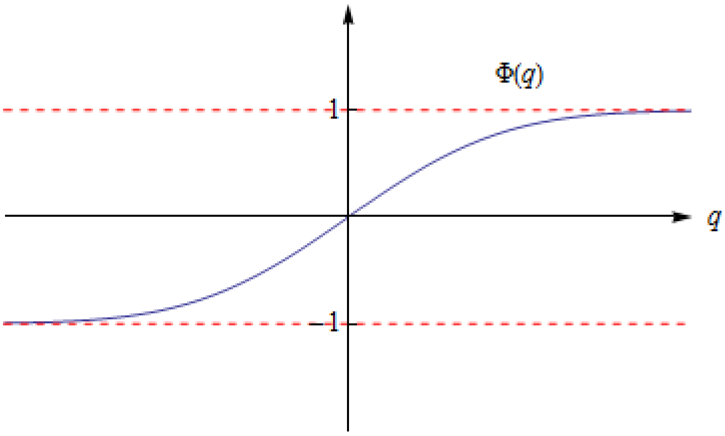
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = 1, & x > 0, \\ |u| < \text{const}, & x \geq 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что условие согласования начального и граничного условия не выполняется. Тем не менее, воспользовавшись формулой (4), получим:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} [G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)]\,d\xi = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\underbrace{\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)}_{p} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-p^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-p^2}\,dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}\,dp.$$



Обозначим:

$$\boxed{\Phi(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-p^2}\,dp}$$

— *функция ошибок.*

Свойства функции ошибок: нечётность $\Phi(-q) \equiv -\Phi(q)$, монотонность, $\lim\limits_{q\to+\infty} \Phi(q) = 1$.

Теперь

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

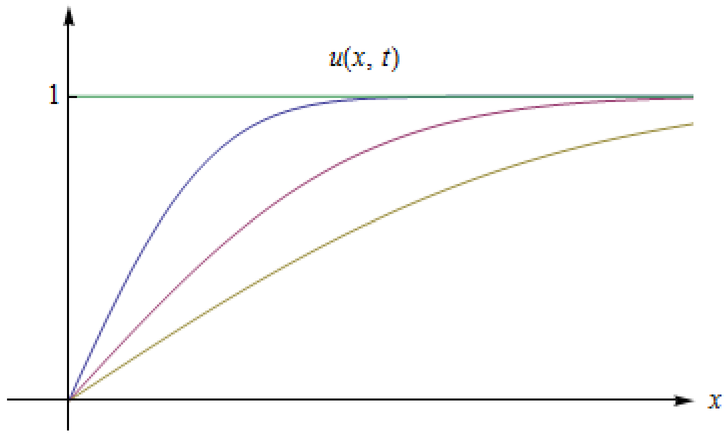
Аналогично:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} G(x,-\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty} G(-x,\xi,t)\,d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

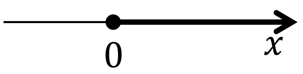
Тогда

$$u(x,t) = I_1 - I_2 = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$



Из графиков решения при разных t видно, что в начальный момент времени решение имеет разрыв первого рода на границе, а при всех $t > 0$ оно непрерывно. В этом состоит сглаживающее свойство уравнения теплопроводности.

2. Условие Неймана.



$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x > 0, \ t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ x > 0, \\ |u| < \text{const}, \ x \ge 0, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Задача решается аналогично, но нужно сделать чётное продолжение функций $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ на всю прямую. Тогда и решение соответствующей задачи на всей прямой $\tilde{u}(x,t)$ также будет чётной функцией.

Лемма 2. Если функция $g(x)$ — чётная и $\exists g'(0)$, то $g'(0) = 0$.

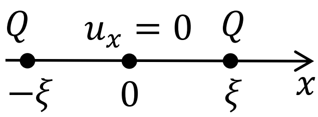
Доказательство: $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(-x)-g(0)}{-x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{-x} = -g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$.

В силу леммы 2 чётная функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет условию $\tilde{u}_x|_{x=0} = 0$ и при $x \ge 0$ является решением задачи на полупрямой. Окончательный ответ:

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\,,}$$

где $\boxed{G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)}$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$. Она удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} (G_2)_t = a^2 (G_2)_{xx}, \qquad x,\xi,t > 0, \\ (G_2)_x|_{x=0} = 0, \quad \xi,t > 0, \\ (G_1)_{t=0} = \delta(x-\xi), \qquad x,\xi > 0. \end{cases}$$



Физический смысл: функция $G_2(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если при $t = 0$ в точках ξ и $-\xi$ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$ (при нулевой начальной температуре). Тогда, в силу симметрии, в точке $x = 0$ в любой момент времени потока тепла не будет.

II. Неоднородные ГУ.

1. Условие Дирихле.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0, \\ |u| < \text{const}, \qquad x \ge 0, \qquad t \ge 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,
где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $w|_{x=0} = \mu(t)$. Пусть $w(x,t) = \mu(t)$. Предположим, что функция $\mu(t)$ ограничена и имеет непрерывную производную. Тогда для функции $v(x,t)$ получим задачу с однородным ГУ:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - \mu'(t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0), \qquad x > 0. \\ |v| < \text{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

2. Условие Неймана.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = \nu(t), \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0. \\ |u| < \text{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:
$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,
где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $w_x|_{x=0} = \nu(t)$. Пусть $w(x,t) = x\nu(t)$. Предположим, что функция $\nu(t)$ имеет непрерывную производную. Тогда для функции $v(x,t)$ получим задачу с однородным ГУ:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - x\nu'(t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - x\nu(0), \qquad x > 0. \\ |v + x\nu(t)| < \text{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

ДЗ18. БК с. 214 № 17–19.

Семинар 19

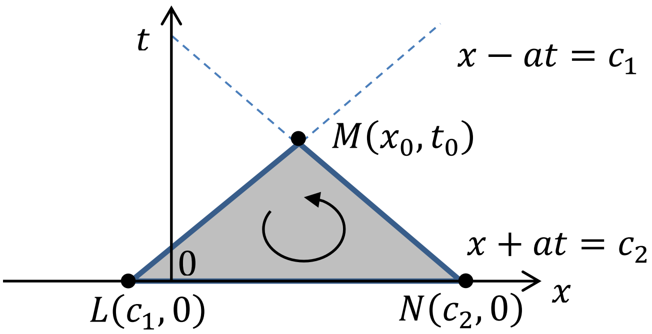
Уравнение колебаний на прямой

Рассмотрим начальную задачу для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Заметим, что условие на бесконечности для выделения единственного решения ставить не надо, т.к. решение и так будет единственным (это будет показано далее).

В предположении, что классическое решение существует, получим его методом *интегрирования по фазовой плоскости* (можно его получить и другим способом, например, через преобразование Фурье, как для уравнения теплопроводности, см. семинар 17).



На фазовой плоскости Oxt возьмём произвольную точку $M(x_0, t_0)$, где $t_0 > 0$. Проведём через неё две прямые (характеристики уравнения колебаний): $x - at = c_1$ и $x + at = c_2$. Очевидно, что $c_1 = x_0 - at_0$ и $c_2 = x_0 + at_0$. Эти прямые пересекают ось Ox в точках $L(c_1, 0)$ и $N(c_2, 0)$, соответственно. Проинтегрируем уравнение колебаний по *фазовому треугольнику* MLN:

$$\iint\limits_{\triangle MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \iint\limits_{\triangle MLN} f(x,t)\, dx\, dt.$$

Теперь преобразуем интегралы таким образом, чтобы выразить значение функции u в точке M через известные функции f, φ, ψ.

Для этого используем формулу Грина:

$$\oint\limits_C P\, dx + Q\, dt = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx\, dt,$$

где G — область на плоскости Oxt, ограниченная замкнутым контуром C, обходимом в положительном направлении.

Применим эту формулу к фазовому треугольнику MLN, положив $P = -u_t$ и $Q = -a^2 u_x$:

$$\iint\limits_{\triangle MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \oint\limits_{MLN} (-u_t\, dx - a^2 u_x\, dt) =$$

$$= \int\limits_{ML} \left(-u_t \underbrace{dx}_{a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{\frac{dx}{a}} \right) + \int\limits_{LN} \left(-\underbrace{u_t}_{\psi(x)} dx - a^2 u_x \underbrace{dt}_{0} \right) + \int\limits_{NM} \left(-u_t \underbrace{dx}_{-a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{-\frac{dx}{a}} \right) =$$

$$= -a \int\limits_{ML} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} + a \int\limits_{NM} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\, dx =$$

$$= -a[u(L) - u(M)] + a[u(M) - u(N)] - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx =$$

$$= 2au(M) - a\underbrace{u(L)}_{\varphi(c_1)} - a\underbrace{u(N)}_{\varphi(c_2)} - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx.$$

(Здесь мы учли, что на прямой ML выполняется равенство $dx = a\,dt$, а на прямой NM — равенство $dx = -a\,dt$.)

Теперь:

$$2au(M) - a\varphi(c_1) - a\varphi(c_2) - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx = \iint_{\triangle MLN} f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^{t_0} dt \int_{c_1+at}^{c_2-at} f(x,t)\,dx,$$

откуда

$$u(M) = u(x_0,t_0) =$$

$$= \frac{\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} \psi(x)\,dx + \frac{1}{2a}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-at_0+at}^{x_0+at_0-at} f(x,t)\,dx.$$

Если переобозначить x на ξ, t на τ и x_0 на x, y_0 на y, то

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,.} \qquad (1)$$

Эта формула даёт классическое решение начальной задачи для уравнения теплопроводности на прямой. В частном случае $f \equiv 0$ она называется *формулой Даламбера*. Поскольку любое классическое решение начальной задачи для уравнения теплопроводности на прямой представляется этой формулой, оно единственно.

Уравнение колебаний на полупрямой

1. Условие Дирихле.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой $x > 0$ с однородным условием Дирихле:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \ge 0, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \ge 0. \end{cases}$$

Так же, как и для уравнения теплопроводности на полупрямой (см. семинар 18), сделаем нечётное продолжение функций f, φ, ψ на всю прямую:

$$\tilde f(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \ge 0, \\ -f(-x,t), & x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \ge 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Решение соответствующей задачи на всей прямой даётся формулой (1):

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Отсюда видно, что функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет однородному условию Дирихле при $x = 0$. Стало быть, решение задачи на полупрямой $u(x,t)$ совпадает с решением задачи на прямой $\tilde{u}(x,t)$ при $x \geq 0$:

$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geq 0}$.

Выразим его через исходные функции f, φ, ψ.

Заметим, что $\tilde{\varphi}(x+at) = \varphi(x+at)$, поскольку $x + at \geq 0$. Далее,

$$\tilde{\varphi}(x-at) = \left\{\begin{matrix} \varphi(x-at), & x-at \geq 0, \\ -\varphi(at-x), & x-at < 0, \end{matrix}\right\} = \operatorname{sgn}(x-at)\,\varphi(|x-at|),$$

$$\int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\,d\xi = \left\{\begin{matrix} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi\,, & x-at \geq 0, \\ \underbrace{\displaystyle\int\limits_{x-at}^{at-x} \tilde{\psi}(\xi)\,d\xi}_{0} + \displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi\,, & x-at < 0, \end{matrix}\right\} = \int\limits_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi = \int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Окончательно получим:

$u(x,t) =$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \operatorname{sgn}(x-at)\,\varphi(|x-at|)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Эта формула даёт решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой $x > 0$ с однородным условием Дирихле.

Замечание. Задача с неоднородным условием Дирихле $u|_{x=0} = \mu(t)$ сводится к задаче с однородным условием Дирихле $v|_{x=0} = 0$ с помощью замены

$u(x,t) = v(x,t) + \mu(t)$.

2. Условие Неймана.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой $x > 0$ с однородным условием Неймана:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае с помощью чётного продолжения получим (дома получить):

$u(x,t) =$

$$= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi - \operatorname{sgn}(x-at)\int\limits_0^{|x-at|} \psi(\xi)\,d\xi\right] +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \left[\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi - \operatorname{sgn}\big(x-a(t-\tau)\big)\int\limits_0^{|x-a(t-\tau)|} f(\xi,\tau)\,d\xi\right].$$

Замечание. Задача с неоднородным условием Неймана $u_x|_{x=0} = \nu(t)$ сводится к задаче с однородным условием Неймана $v_x|_{x=0} = 0$ с помощью замены
$u(x,t) = v(x,t) + x\nu(t)$.

Метод распространяющихся волн (однородное уравнение колебаний)

Для однородного уравнения колебаний на прямой $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ можно получить его общее решение.
Сделав замену переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, мы приведём уравнение колебаний к каноническому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} = a\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right),$$

откуда

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2\right] u = 4a^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} u = 4a^2 u_{\xi\eta}.$$

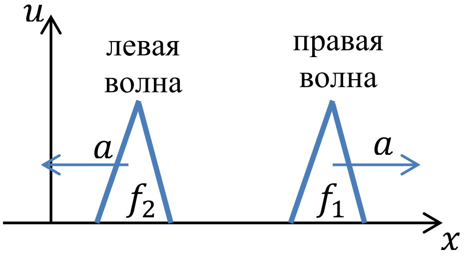
Из уравнения колебаний получим:
$u_{\xi\eta} = 0.$
Это и есть канонический вид уравнения колебаний.
Проинтегрируем полученное уравнение:
$u_\xi = \tilde{f}_1(\xi),$

$$u = \underbrace{\int \tilde{f}_1(\xi)\,d\xi}_{f_1(\xi)} + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к переменным x, t, получаем общее решение однородного уравнения колебаний на прямой в виде:

$$\boxed{u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at),} \qquad (2)$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Видно, что общее решение представляет собой суперпозицию правой и левой бегущих волн, распространяющихся со скоростью a по прямой Ox.

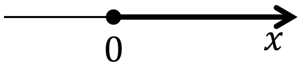


Таким образом, уравнение колебаний описывает распространение возмущений с конечной скоростью (со скоростью a), в отличие от уравнения теплопроводности, где скорость распространения бесконечна (см. парадокс бесконечной теплопроводности, семинар 17).
Значит, мы можем искать решение однородного уравнения колебаний на прямой в виде (2), а функции f_1 и f_2 определять из НУ. В результате придём к формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично можно поступать и при решении уравнения колебаний на полупрямой и на отрезке, но при этом необходимо учитывать отражение волн от границы области. Однако в задачах на полупрямой с однородными НУ отражения от границы не будет, потому что нет левой волны, поэтому решать их методом распространяющихся волн наиболее просто, что демонстрируют следующие примеры.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \ge 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

В данном случае единственный источник колебаний расположен на левой границе области, поэтому будет только правая волна:

$u(x,t) = f_1(x-at)$.

Функцию f_1 определим из ГУ и НУ:

$$\begin{cases} u|_{x=0} = f_1(-at) = \mu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = f_1(x) = 0, & x \ge 0, \\ u_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

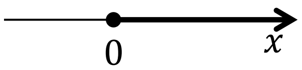
Отсюда имеем:

$$f_1(p) = \begin{cases} 0, & p \ge 0, \\ \mu\left(-\dfrac{p}{a}\right), & p < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x,t) = f_1(x-at) = \begin{cases} 0, & x \ge at, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

Пример 2. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = \nu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \ge 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

В этом случае решение также будет являться правой волной:

$u(x,t) = f_1(x-at)$.

Функцию f_1 определим из ГУ и НУ:

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = f_1'(-at) = \nu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = f_1(x) = 0, & x \ge 0, \\ u_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f_1(p) = 0$ при $p \ge 0$, а при $p < 0$:

$$f_1'(p) = \nu\left(-\frac{p}{a}\right).$$

Тогда, при $p < 0$:

$$f_1(p) = \int_0^p \nu\underbrace{\left(-\frac{q}{a}\right)}_{\tau} dq = -a\int_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau)\,d\tau.$$

Окончательно имеем:

$$f_1(p) = \begin{cases} 0, & p \geq 0, \\ -a\displaystyle\int_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau)\,d\tau\,, & p < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x,t) = f_1(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ -a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)\,d\tau\,, & x < at. \end{cases}$$

ДЗ19. БК с. 285–286 № 14–19.

Семинар 20

Уравнение Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца (однородным) называется следующее уравнение:
$\Delta u(M) + cu(M) = 0,$
где $c \neq 0$ — заданный коэффициент. Мы будем рассматривать только $c = \text{const}$.
Если $c > 0$, то уравнение Гельмгольца называется волновым и записывается в виде:
$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \qquad k > 0.$
Если $c < 0$, то уравнение Гельмгольца называется неволновым и записывается в виде:
$\Delta u(M) - \varkappa^2 u(M) = 0, \qquad \varkappa > 0.$

Вывод уравнения Гельмгольца

Посмотрим, в каких задачах возникает уравнение Гельмгольца.
Если искать решение однородного уравнения колебаний
$\tilde{u}_{tt} = a^2 \Delta \tilde{u}$
в виде установившихся колебаний частоты ω:
$\tilde{u}(M, t) = u(M) e^{i\omega t},$
то при подстановке в уравнение колебаний получим:
$-\omega^2 u(M) e^{i\omega t} = a^2 \Delta u(M) e^{i\omega t},$
и после сокращения на $e^{i\omega t}$ будет

$$\Delta u(M) + \underbrace{\frac{\omega^2}{a^2}}_{k^2 > 0} u(M) = 0$$

— волновое уравнение Гельмгольца. Ему удовлетворяет амплитуда установившихся колебаний.
Теперь рассмотрим процесс диффузии, который, как мы знаем, описывается уравнением теплопроводности:
$u_t = d \Delta u + f,$
где $d > 0$ — коэффициент диффузии, $f(M, t)$ — удельная мощность источников вещества, $u(M, t)$ — концентрация вещества.
В качестве диффундирующего вещества рассмотрим неустойчивый (радиоактивный) газ. Он распадается со скоростью, пропорциональной концентрации:
$f = -\gamma u, \qquad \gamma > 0.$
Тогда
$u_t = d \Delta u - \gamma u.$
Предположим, что концентрация стабилизировалась (стационарный процесс диффузии), т.е. $u_t = 0$. Тогда
$d \Delta u - \gamma u = 0,$
откуда

$$\Delta u - \underbrace{\frac{\gamma}{d}}_{\varkappa^2 > 0} u = 0$$

— неволновое уравнение Гельмогольца, описывающее стационарную диффузию неустойчивого газа.

Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца

Мы будем решать краевые задачи для уравнения Гельмгольца методом разделения переменных. Сначала находятся ЧР уравнения Гельмгольца в данной области (методом разделения переменных, подобно тому, как мы это делали для уравнения Лапласа), а затем решение краевой задачи ищется в виде суммы всех найденных ЧР с неизвестными коэффициентами, которые определяются из ГУ.

Для примера выпишем ЧР уравнения Гельмгольца в круге, кольце, шаре и шаровом слое.

I. ЧР уравнения Гельмгольца в круге и кольце (в полярных координатах).

1. Волновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u + k^2 u = 0$.
   Если обозначить $\lambda = k^2$, то мы получим
   $\Delta u + \lambda u = 0$
   — уравнение такого же вида, как и в задаче Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа (причем $\lambda > 0$). Отличие от задачи Штурма–Лиувилля в том, что коэффициент k^2 в уравнении Гельмгольца задан изначально, а в задаче Штурма–Лиувилля коэффициент λ требуется найти.
   Мы уже получили ЧР такого ДУ в полярных координатах на семинаре 6:
   $$\boxed{u_{\pm n}(r,\varphi) = \Bigg[A_{\pm n} \underbrace{J_n(kr)}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_{\pm n} \underbrace{N_n(kr)}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg]\Phi_{\pm n}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots,} \tag{1}$$
   где
   $\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \dots$
   В кольце ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (1), в круге ($0 \le r < a$) надо положить $B_{\pm n} = 0$.
2. Неволновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.
   Если обозначить $\lambda = \varkappa^2$, то мы получим
   $\Delta u - \lambda u = 0$
   — уравнение такого же вида, какой получается при решении уравнения Лапласа в цилиндре (см. семинар 12), причём $\lambda > 0$. Его ЧР:
   $$\boxed{u_{\pm n}(r,\varphi) = \Bigg[A_{\pm n} \underbrace{I_n(\varkappa r)}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_{\pm n} \underbrace{K_n(\varkappa r)}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg]\Phi_{\pm n}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots} \tag{2}$$
   В кольце ($a < r < b$) ЧР неволнового уравнения Гельмгольца имеют вид (2), в круге ($0 \le r < a$) надо положить $B_{\pm n} = 0$.

II. ЧР уравнения Гельмгольца в шаре и шаровом слое (в сферических координатах).

1. Волновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u + k^2 u = 0$
   — уравнение такого же вида, как в задаче Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа. Его ЧР в сферических координатах имеют вид (см. семинар 9):
   $$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \Bigg[A_n \underbrace{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_n \underbrace{\frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots,$$
   $$m = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \tag{3}$$
   где $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции.
   В шаровом слое ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (3), в шаре ($0 \le r < a$) надо положить $B_n = 0$.

2. Неволновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Аналогично:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \left[A_n \underbrace{\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_n \underbrace{\frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}}_{\text{неогр. при } r\to 0} \right] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

$m = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$ (4)

В шаровом слое ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (4), в шаре ($0 \le r < a$) надо положить $B_n = 0$.

Пример 1 (задача Дирихле в круге для волнового уравнения Гельмгольца). Решить краевую задачу для волнового уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$

Будем искать решение задачи в виде суммы выписанных выше ЧР волнового уравнения Гельмгольца в полярных координатах, ограниченных при $r \to 0$:

$$u(r,\varphi) = A_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$u|_{r=a} = A_0 J_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi),$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \qquad C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \qquad D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi,$$

$n = 1, 2, \dots$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, получим систему уравнений:

$A_0 J_0(ka) = C_0, \qquad A_n J_n(ka) = C_n, \qquad B_n J_n(ka) = D_n, \qquad n = 1, 2, \dots$ (5)

Рассмотрим два случая.

1) Пусть k^2 не является СЗ задачи Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Тогда $J_n(ka) \ne 0$ при всех n, и коэффициенты определяются однозначно:

$$A_0 = \frac{C_0}{J_0(ka)}, \qquad A_n = \frac{C_n}{J_n(ka)}, \qquad B_n = \frac{D_n}{J_n(ka)}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

В этом случае исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение:

$$u(r,\varphi) = C_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

2) Пусть k^2 совпадает с одним из СЗ задачи Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases}\Delta v + \lambda v = 0, \qquad 0 \le r < a,\\ v|_{r=a} = 0.\end{cases}$$

СФ, отвечающие этому СЗ, имеют вид: $J_{n_0}(kr)\cos n_0\varphi$, $J_{n_0}(kr)\sin n_0\varphi$ для некоторого номера n_0, причём $J_{n_0}(ka) = 0$.

Тогда из системы (5) однозначно определяются коэффициенты A_n, B_n для всех n, кроме n_0. При $n = n_0$ имеем:

$$A_{n_0}\underbrace{J_{n_0}(ka)}_{0} = C_{n_0}, \qquad B_{n_0}\underbrace{J_{n_0}(ka)}_{0} = D_{n_0}.$$

Здесь есть два варианта.

а) $C_{n_0} = D_{n_0} = 0$. Тогда коэффициенты A_{n_0} и B_{n_0} остаются произвольными, и исходная краевая задача имеет бесконечно много решений:

$$u(r,\varphi) = \\ = C_0\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{J_n(kr)}{J_n(ka)}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi) + \\ + J_{n_0}(kr)\big(A_{n_0}\cos n_0\varphi + B_{n_0}\sin n_0\varphi\big).$$

б) Если $C_{n_0} \ne 0$ или $D_{n_0} \ne 0$, то исходная краевая задача *не имеет решений*.

Пример 2 (задача Дирихле в круге для неволнового уравнения Гельмгольца). Решить краевую задачу для неволнового уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases}\Delta u - \varkappa^2 u = 0, \qquad 0 \le r < a,\\ u|_{r=a} = f(\varphi).\end{cases}$$

Будем искать решение задачи в виде суммы выписанных выше ЧР неволнового уравнения Гельмгольца в полярных координатах, ограниченных при $r \to 0$:

$$u(r,\varphi) = A_0 I_0(\varkappa r) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa r)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$u|_{r=a} = A_0 I_0(\varkappa a) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa a)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = f(\varphi) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi),$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \qquad C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,$$

$n = 1, 2, \ldots$

Приравняв коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, получим систему уравнений:

$$A_0 I_0(\varkappa a) = C_0, \qquad A_n I_n(\varkappa a) = C_n, \qquad B_n I_n(\varkappa a) = D_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Могут ли здесь числа $I_n(\varkappa a)$ оказаться равны нулю? Предположим, что для некоторого номера n_0 число $I_{n_0}(\varkappa a)$ оказалось равно нулю. Тогда функции $I_{n_0}(\varkappa a)\sin n_0\varphi$ и $I_{n_0}(\varkappa a)\cos n_0\varphi$ являются СФ задачи Ш.–Л. в круге

$$\begin{cases}\Delta v + \lambda v = 0, \qquad 0 \le r < a,\\ v|_{r=a} = 0,\end{cases}$$

отвечающими СЗ $\lambda = -\varkappa^2$. Но это невозможно, т.к. все СЗ задачи Дирихле положительны. Полученное противоречие доказывает, что $I_n(\varkappa a) \neq 0,\ n = 0, 1, \ldots$

Тогда из системы (6) неизвестные коэффициенты определяются однозначно:

$$A_0 = \frac{C_0}{I_0(\varkappa a)}, \qquad A_n = \frac{C_n}{I_n(\varkappa a)}, \qquad B_n = \frac{D_n}{I_n(\varkappa a)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и в этом случае исходная краевая задача имеет единственное решение:

$$u(r, \varphi) = C_0 \frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\varkappa r)}{I_n(\varkappa a)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Пример 3 (дополнительный, самостоятельно). Решить краевую задачу для волнового уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, & 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \sin^3 \varphi\,, \end{cases}$$

где $k^2 = \lambda_1^{(0)}$ — первый положительный корень уравнения $J_0\big(\sqrt{\lambda} a\big) = 0$.

Будем искать решение задачи в виде:

$$u(r, \varphi) = A_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$u|_{r=a} = A_0 \underbrace{J_0(ka)}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4},$$

откуда

$$B_1 = \frac{3}{4 J_1(ka)}, \qquad B_3 = -\frac{1}{4 J_3(ka)}, \qquad A_0 \text{ — произвольное},$$

а остальные коэффициенты равны нулю.

(Мы будем пользоваться без доказательства тем фактом, что функции Бесселя разного порядка не имеют совпадающих корней, поэтому $J_1(ka) \neq 0$ и $J_3(ka) \neq 0$, если $J_0(ka) = 0$.)

Таким образом, решение исходной краевой задачи:

$$\boxed{u(r, \varphi) = \frac{3 J_1(kr)}{4 J_1(ka)} \sin \varphi - \frac{J_3(kr)}{4 J_3(ka)} \sin 3\varphi + A_0 J_0(kr).}$$

ДЗ20. Решить краевые задачи для уравнения Гельмгольца:

1) в круге

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, & 0 \le r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin \varphi + \cos^2 \varphi\,, \end{cases}$$

где $k^2 = \lambda_1^{(3)}$ — первый положительный корень уравнения $J_3'\big(\sqrt{\lambda}\big) = 0$;

2) в круге

$$\begin{cases} \Delta\, u - \varkappa^2 u = 0, & 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \operatorname{sgn} \varphi\,, & -\pi < \varphi \le \pi; \end{cases}$$

3) в круговом секторе

$$\begin{cases} \Delta\, u - \varkappa^2 u = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 1, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\pi} = 0; \end{cases}$$

4) в кольце

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, \qquad a < r < b, \\ u|_{r=a} = \cos\varphi\,, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0; \end{cases}$$

5) в шаре

$$\begin{cases} \Delta\, u + u = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \cos 2\theta + \sin\theta \sin\varphi\,; \end{cases}$$

6) в шаровом слое

$$\begin{cases} \Delta\, u - \varkappa^2 u = 0, \qquad a < r < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 1. \end{cases}$$

В след. раз — к/р.