Уравнение Гельмгольца в сферических координатах

Неволновое уравнение Гельмгольца

I. Краевые задачи в шаре

Рассмотрим (для примера) задачу Дирихле для неоднородного неволнового уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = f(r,\theta,\varphi), & r < a, \\ u|_{r=a} = g(\theta,\varphi). \end{cases} \tag{0}$$

Внутренняя краевая задача для неволнового уравнения Гельмгольца имеет единственное решение.

Будем искать решение в виде:

$u = v + w,$

где функции v и w удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{cases} \Delta v - \varkappa^2 v = 0, & r < a, \\ v|_{r=a} = g(\theta,\varphi), \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} \Delta w - \varkappa^2 w = f(r,\theta,\varphi), & r < a, \\ w|_{r=a} = 0. \end{cases} \tag{II}$$

При этом функция u будет удовлетворять исходной краевой задаче (0).

1. Решение краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца с неоднородным ГУ.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta v - \varkappa^2 v = 0, & r < a, \\ v|_{r=a} = g(\theta,\varphi). \end{cases} \tag{I}$$

Рассмотрим однородное уравнение Гельмгольца:

$\Delta v - \varkappa^2 v = 0.$

Оно имеет следующие ЧР, которые могут быть получены методом разделения переменных в сферических координатах:

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = -n,\dots,n,$$

где $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции, $I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)$ — функции Инфельда, $K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)$ — функции Макдональда.

Функции Макдональда неограничены при $r \to 0$, поэтому в шаре их использовать нельзя.

Решение краевой задачи ищем в виде ряда по найденным ЧР однородного уравнения Гельмгольца, причём используем только решения, содержащие функцию Инфельда:

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \tag{1}$$

Тогда функция v автоматически удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, поскольку каждый член ряда ему удовлетворяет (мы предполагаем, что ряд можно дифференцировать почленно). Подставим функцию v в ГУ:

$$v|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi).$$

Разложим функцию $g(\theta,\varphi)$ в ряд по сферическим функциям:

$$g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} g_{nm}\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Подставим её в ГУ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}}\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} g_{nm}\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых сферических функциях:

$$A_{nm}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}}=g_{nm},\qquad n=0,1,2,\dots,\qquad m=-n,\dots,n.$$

Поскольку $I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)\neq 0$, эта система имеет единственное решение:

$$A_{nm}=\frac{\sqrt{a}g_{nm}}{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)},\qquad n=0,1,2,\dots,\qquad m=-n,\dots,n.$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (1), получим решение задачи (I):

$$v(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\sqrt{a}g_{nm}}{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Пример:

$$\begin{cases}\Delta v-\varkappa^2 v=0, & r<a,\\ v|_{r=a}=1.\end{cases}$$

Ищем решение в виде ряда (1), подставляем в ГУ:

$$v|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}}\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=1=Y_0^{(0)}(\theta,\varphi).$$

Тогда

$$A_{00}\frac{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}}=1,$$

$$A_{nm}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)}{\sqrt{a}}=0\ \text{ для остальных } n,m.$$

Отсюда

$$A_{00}=\frac{\sqrt{a}}{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa a)},$$

$$A_{nm}=0\ \text{ для остальных } n,m.$$

Ответ:

$$v(r,\theta,\varphi)=A_{00}\frac{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}\,Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{a}}{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa a)}\frac{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}=\frac{a}{r}\frac{\operatorname{sh}\varkappa r}{\operatorname{sh}\varkappa a},$$

поскольку $I_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sh}t$.

Замечание: исходя из вида функции, стоящей в ГУ $\left(g(\theta,\varphi)=1=Y_0^{(0)}\right)$ можно было сразу искать решение краевой задачи в виде

$$v(r,\theta,\varphi) = A_{00}\frac{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi).$$

2. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения Гельмгольца с однородным ГУ.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases}\Delta\, w - \varkappa^2 w = f(r,\theta,\varphi), \qquad r < a,\\ w|_{r=a} = 0.\end{cases} \tag{II}$$

Сначала решим вспомогательную задачу Ш.—Л. в шаре с тем же ГУ:

$$\begin{cases}\Delta\, \psi + \lambda\psi = 0, \qquad r < a,\\ \psi|_{r=a} = 0.\end{cases} \tag{2}$$

Мы знаем, что все СЗ задачи Ш.—Л. с условием Дирихле положительны, т. е. $\lambda > 0$. При $\lambda > 0$ уравнение $\Delta\,\psi + \lambda\psi = 0$ имеет следующие ЧР, которые могут быть получены методом разделения переменных в сферических координатах:

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = -n,\dots,n,$$

где $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ — функции Бесселя, $N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ — функции Неймана.

Функции Неймана неограничены при $r \to 0$, поэтому в шаре их использовать нельзя.

Подставив $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ в ГУ $\psi|_{r=a} = 0$, получим уравнение для определения λ:

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0.$$

Это уравнение имеет некоторые положительные корни $\lambda_l^{(n)}$, $l = 1,2,\dots$ Они и будут являться СЗ задачи Ш.—Л.

Найденным СЗ соответствует следующая ортогональная в шаре система СФ:

$$\psi_{nml}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0,1,2,\dots,\ \ m = -n,\dots,n,\ \ l = 1,2,\dots$$

Теперь решение краевой задачи (II) будем искать в виде ряда по СФ задачи Ш.—Л. (2):

$$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}A_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi). \tag{3}$$

Такая функция автоматически удовлетворяет однородному ГУ $w|_{r=a} = 0$, поскольку все функции ψ_{nml} ему удовлетворяют. Подставим функцию w в неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}A_{nml}\,\Delta\,\psi_{nml} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}A_{nml}\varkappa^2\psi_{nml} = f(r,\theta,\varphi), \qquad r < a.$$

Поскольку функция ψ_{nml} удовлетворяет уравнению $\Delta\,\psi_{nml} + \lambda_l^{(n)}\psi_{nml} = 0$, то

$$\Delta\,\psi_{nml} = -\lambda_l^{(n)}\psi_{nml}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}-A_{nml}\left(\lambda_l^{(n)}+\varkappa^2\right)\psi_{nml}=f,\qquad r<a.$$

Для того чтобы определить неизвестные коэффициенты A_{nml}, надо разложить функцию f в ряд по ψ_{nml} — полной ортогональной системе СФ задачи Ш.—Л. в шаре:

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}f_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi).$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}-A_{nml}\left(\lambda_l^{(n)}+\varkappa^2\right)\psi_{nml}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}f_{nml}\psi_{nml}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях ψ_{nml}, получим систему уравнений:

$$-A_{nml}\left(\lambda_l^{(n)}+\varkappa^2\right)=f_{nml},\qquad n=0,1,2,\dots,\qquad m=-n,\dots,n,\qquad l=1,2,\dots$$

Она имеет единственное решение:

$$A_{nml}=-\frac{f_{nml}}{\lambda_l^{(n)}+\varkappa^2},\qquad n=0,1,2,\dots,\qquad m=-n,\dots,n,\qquad l=1,2,\dots \tag{4}$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (3), получим решение краевой задачи (II):

$$w(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}-\frac{f_{nml}}{\lambda_l^{(n)}+\varkappa^2}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Пример:

$$\begin{cases}\Delta w-\varkappa^2 w=\chi(r)\cos\theta, & r<a,\\ w|_{r=a}=0.\end{cases}$$

Здесь $f(r,\theta,\varphi)=\chi(r)\cos\theta=\chi(r)Y_1^{(0)}(\theta,\varphi)$. Разложим эту функцию в ряд по функциям

$$\psi_{nml}(r,\theta,\varphi)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),\qquad n=0,1,2,\dots,\ \ m=-n,\dots,n,\ \ l=1,2,\dots$$

Очевидно, разложение будет содержать только функции с $n=1$, $m=0$:

$$f(r,\theta,\varphi)=\chi(r)Y_1^{(0)}(\theta,\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}f_l\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(1)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_1^{(0)}(\theta,\varphi).$$

Отсюда

$$\chi(r)=\sum_{l=1}^{\infty}f_l\underbrace{\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(1)}}r\right)}{\sqrt{r}}}_{\sigma_l(r)}.$$

Функции $\sigma_l(r)$ попарно ортогональны в шаре, поэтому умножим разложение

$$\chi(r)=\sum_{l=1}^{\infty}f_l\sigma_l(r)$$

на $\sigma_j(r)$ и проинтегрируем по шару:

$$\left(\chi,\sigma_j\right)=\sum_{l=1}^{\infty} f_l \underbrace{\left(\sigma_l,\sigma_j\right)}_{=0 \text{ при } l\neq j}=f_j\left(\sigma_j,\sigma_j\right).$$

Отсюда

$$f_j=\frac{\left(\chi,\sigma_j\right)}{\left(\sigma_j,\sigma_j\right)}=\frac{\int_0^a r^2\chi(r)\dfrac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)}{\sqrt{r}}dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^a r^2\dfrac{J_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)}{r}dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi}=\frac{\int_0^a r^{3/2}\chi(r)J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)dr}{\int_0^a rJ_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)dr}.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в знаменателе, воспользуемся формулой:

$$\int tZ_\nu^2(t)\,dt=\frac{t^2}{2}\left[{Z'_\nu}^2(t)+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)Z_\nu^2(t)\right]+\mathrm{const}$$

для произвольной цилиндрической функции ν-го порядка.

Тогда

$$\int\limits_0^a rJ_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)dr=\frac{1}{\lambda_j^{(1)}}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a} tJ_{\frac{3}{2}}^2(t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left[{J'_{\frac{3}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a\right)+\left(1-\frac{9}{4\lambda_j^{(1)}a^2}\right)J_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a\right)\right]=$$

$$=\frac{a^2}{2}{J'_{\frac{3}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a\right),$$

в силу того что $J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a\right)=0$ из ГУ.

Таким образом,

$$f_j=\frac{2}{a^2{J'_{\frac{3}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}a\right)}\int\limits_0^a r^{3/2}\chi(r)J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_j^{(1)}}r\right)dr,\qquad j=1,2,\ldots$$

Поскольку $f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=1}^\infty f_l\psi_{10l}(r,\theta,\varphi)$, то и решение краевой задачи будем искать в виде разложения по СФ ψ_{nml} с $n=1$, $m=0$:

$$w(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty} A_l\psi_{10l}(r,\theta,\varphi).$$

При этом согласно формулам (4) получим:

$$A_l=-\frac{f_l}{\left(\lambda_l^{(1)}+\varkappa^2\right)},\qquad l=1,2,\ldots$$

Значит,

$$w(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}-\frac{f_l}{\left(\lambda_l^{(1)}+\varkappa^2\right)}\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(1)}}r\right)}{\sqrt{r}}\cos\theta,$$

где

$$f_l = \frac{2}{a^2 {J'_{\frac{3}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_l^{(1)}}a\right)} \int_0^a r^{3/2}\chi(r) J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(1)}}r\right) dr, \qquad l = 1, 2, \ldots$$

Пример:

$$\begin{cases} \Delta\, w - \varkappa^2 w = \dfrac{J_{\frac{1}{2}}(\eta r)}{\sqrt{r}}, \qquad r < a, \\ w|_{r=a} = 0, \end{cases}$$

где $J_{\frac{1}{2}}(\eta a) = 0.$

Здесь $f(r,\theta,\varphi)$ совпадает с СФ задачи Ш.—Л. $\psi_{00l}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(0)}}r\right)}{\sqrt{r}}$ для некоторого l, причём $\eta = \sqrt{\lambda_l^{(0)}}$. Поэтому будем искать решение краевой задачи в виде разложения только по этой СФ:

$w(r,\theta,\varphi) = A\psi_{00l}(r,\theta,\varphi).$

Подставив это в уравнение Гельмгольца, получим:

$$A \underbrace{\Delta\, \psi_{00l}}_{-\lambda_l^{(0)}\psi_{00l}} - \varkappa^2 A\psi_{00l} = \psi_{00l},$$

откуда

$$A = -\frac{1}{\lambda_l^{(0)} + \varkappa^2} = -\frac{1}{\eta^2 + \varkappa^2}.$$

Таким образом, решение краевой задачи

$$w(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{\eta^2+\varkappa^2}\frac{J_{\frac{1}{2}}(\eta r)}{\sqrt{r}} = -\frac{1}{\eta^2+\varkappa^2}\frac{J_{\frac{1}{2}}(\eta r)}{\sqrt{r}} = -\frac{1}{\eta^2+\varkappa^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\eta r}{r}.$$

II. Краевые задачи в шаровом слое

Решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta\, u - \varkappa^2 u = f(r,\theta,\varphi), \qquad a < r < b, \\ u|_{r=a} = g_1(\theta,\varphi), \\ u|_{r=b} = g_2(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{III}$$

ищется в виде $u = v + w$, где

$$\begin{cases} \Delta\, v - \varkappa^2 v = 0, \qquad a < r < b, \\ v|_{r=a} = g_1(\theta,\varphi), \\ v|_{r=b} = g_2(\theta,\varphi), \end{cases} \tag{IV}$$

$$\begin{cases} \Delta\, w - \varkappa^2 w = f(r,\theta,\varphi), \qquad a < r < b, \\ w|_{r=a} = 0, \\ w|_{r=b} = 0. \end{cases} \tag{V}$$

Решение задачи (IV) ищется в виде разложения по ЧР однородного уравнения Гельмгольца в шаровом слое:

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{A_{nm} I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r) + B_{nm} K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются подстановкой разложения в ГУ.
Решение задачи (V) ищется в виде разложения по СФ задачи Ш.—Л. в шаровом слое:

$$\begin{cases} \Delta\,\psi + \lambda\psi = 0, \qquad a < r < b, \\ \psi|_{r=a} = 0, \\ \psi|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

СФ имеют вид $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)+BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где коэффициенты A, B и СЗ λ определяются подстановкой в ГУ и из условия существования нетривиального решения.

III. Краевые задачи вне шара

Вне шара рассмотрим только краевую задачу для однородного уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta\,u - \varkappa^2 u = 0, \qquad r > a, \\ u|_{r=a} = g(\theta,\varphi), \\ u \to 0 \text{ при } r \to \infty. \end{cases}$$

Данная краевая задача имеет единственное решение. Решение краевой задачи ищется в виде разложения по ЧР однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условию на бесконечности:

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Коэффициенты A_{nm} определяются подстановкой этого ряда в ГУ.

Волновое уравнение Гельмгольца

I. Краевые задачи вне шара

$$\begin{cases} \Delta\,u + k^2 u = 0, \qquad r > a, \\ u|_{r=a} = g(\theta,\varphi), \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty. \end{cases}$$

Данная краевая задача имеет единственное решение. Решение краевой задачи ищется в виде разложения по ЧР однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условию излучения на бесконечности:

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Коэффициенты A_{nm} определяются подстановкой этого ряда в ГУ.

II. Краевые задачи в шаре

Решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta\,u + k^2 u = f(r,\theta,\varphi), \qquad r < a, \\ u|_{r=a} = g(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{VI}$$

ищется в виде $u = v + w$, где

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, & r < a, \\ v|_{r=a} = g(\theta,\varphi), \end{cases} \qquad \text{(VII)}$$

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = f(r,\theta,\varphi), & r < a, \\ w|_{r=a} = 0. \end{cases} \qquad \text{(VIII)}$$

1. Решение краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца с неоднородным ГУ.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, & r < a, \\ v|_{r=a} = g(\theta,\varphi). \end{cases} \qquad \text{(VII)}$$

Однородное уравнение Гельмгольца $\Delta v + k^2 v = 0$ имеет следующие ЧР (вещественные):

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = -n,\dots,n.$$

Функция Неймана неограничена при $r \to 0$. Поэтому решение краевой задачи (VII) в шаре будем искать в виде:

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \qquad (5)$$

Подставим в ГУ:

$$v|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{\sqrt{a}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} g_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых сферических функциях:

$$A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{\sqrt{a}} = g_{nm}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = -n,\dots,n.$$

Далее возможны следующие варианты.

1) Функции Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(ka)$ не обращаются в нуль ни при каких n. Тогда коэффициенты A_{nm} определяются однозначно:

$$A_{nm} = \frac{\sqrt{a} g_{nm}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = -n,\dots,n.$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (5), получим решение задачи (VII):

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\sqrt{a} g_{nm}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

2) Для некоторого $n = n_0$ функция Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(ka)$ равна нулю: $J_{n_0+\frac{1}{2}}(ka) = 0$. Тогда функции $\frac{J_{n_0+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_{n_0}^{(m)}(\theta,\varphi)$ удовлетворяют задаче

$$\begin{cases} \Delta \psi + k^2 \psi = 0, & r < a, \\ \psi|_{r=a} = 0, \end{cases}$$

т. е. являются СФ задачи Ш.—Л., а k^2 совпадает с некоторым СЗ $\lambda_l^{(n_0)}$ (резонанс). Тогда если $g_{n_0 m} = 0$ при всех $m = -n,\dots,n$, то коэффициенты $A_{n_0 m}$ — произвольны. Остальные коэффициенты A_{nm} определяются однозначно:

$$A_{nm} = \frac{\sqrt{a} g_{nm}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}, \qquad n \neq n_0,$$

а решение краевой задачи имеет вид:

$$v(r,\theta,\varphi) =$$
$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\sqrt{a} g_{nm}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) + \sum_{m=-n_0}^{n_0} A_{n_0 m} \frac{J_{n_0+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_{n_0}^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Решение не единственно.

Если же $g_{n_0 m} \neq 0$ хотя бы для одного m, то краевая задача (VII) не имеет решений.

Пример:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda_1^{(0)} v = 0, \qquad r < a, \\ v|_{r=a} = \sin\theta \cos\varphi, \end{cases}$$

где $\lambda_1^{(0)}$ — первый положительный корень уравнения $J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda} a\right) = 0$.

В данном случае $g(\theta,\varphi) = Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)$, поэтому система для определения коэффициентов принимает вид:

$$A_{11} \frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} a\right)}{\sqrt{a}} = 1,$$

$$A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} a\right)}{\sqrt{a}} = g_{nm} \text{ для остальных } n, m.$$

Отсюда $A_{11} = \frac{\sqrt{a}}{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} a\right)}$, A_{00} — произвольный, остальные $A_{nm} = 0$. Решение краевой задачи имеет вид:

$$v(r,\theta,\varphi) = A_{00} \frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} r\right)}{\sqrt{r}} Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) + A_{11} \frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} r\right)}{\sqrt{r}} Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) =$$
$$= A_{00} \frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} r\right)}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{a}}{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} a\right)} \frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_1^{(0)}} r\right)}{\sqrt{r}} \sin\theta \cos\varphi.$$

2. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения Гельмгольца с однородным ГУ.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = f(r,\theta,\varphi), \qquad r < a, \\ w|_{r=a} = 0. \end{cases} \tag{VIII}$$

Будем искать её решение в виде разложения по СФ задачи Ш.—Л.:

$$\begin{cases} \Delta \psi + \lambda \psi = 0, \qquad r < a, \\ \psi|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Эти СФ имеют вид:

$$\psi_{nml}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0,1,2,\dots, \;\; m = -n,\dots,n, \;\; l = 1,2,\dots,$$

где СЗ $\lambda_l^{(n)}$ — l-й положительный корень уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}a\right) = 0.$

Функцию $f(r,\theta,\varphi)$ также разложим в ряд по этим СФ. Тогда

$$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} A_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi).$$

Подставим в уравнение Гельмгольца:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} A_{nml} \underbrace{\Delta\,\psi_{nml}}_{-\lambda_l^{(n)}\psi_{nml}} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} k^2 A_{nml}\psi_{nml} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} f_{nml}\psi_{nml}.$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}\left(k^2 - \lambda_l^{(n)}\right)A_{nml}\psi_{nml} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} f_{nml}\psi_{nml}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях ψ_{nml}, получим систему уравнений:

$$\left(k^2 - \lambda_l^{(n)}\right)A_{nml} = f_{nml}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \;\; m = -n,\dots,n, \;\; l = 1,2,\dots$$

Далее возможны следующие варианты.

1) Коэффициент k^2 не совпадает ни с одним СЗ $\lambda_l^{(n)}$. Тогда все A_{nml} определяются однозначно:

   $$A_{nml} = \frac{f_{nml}}{k^2 - \lambda_l^{(n)}}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \;\; m = -n,\dots,n, \;\; l = 1,2,\dots,$$

   и краевая задача (VIII) имеет единственное решение:

   $$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{f_{nml}}{k^2 - \lambda_l^{(n)}}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

2) Коэффициент k^2 совпадает с некоторым СЗ $\lambda_{l_0}^{(n_0)}$ (резонанс). Если при этом все $f_{n_0 m l_0} = 0$, то коэффициенты $A_{n_0 m l_0}$ произвольны. Остальные коэффициенты определяются однозначно:

   $$A_{nml} = \frac{f_{nml}}{k^2 - \lambda_l^{(n)}},$$

   и решение краевой задачи (VIII) имеет вид:

   $$w(r,\theta,\varphi) =$$

   $$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{\substack{l=1 \\ (n,l)\neq(n_0,l_0)}}^{\infty}\frac{f_{nml}}{k^2 - \lambda_l^{(n)}}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) +$$

   $$+ \sum_{m=-n_0}^{n_0} A_{n_0 m l_0}\frac{J_{n_0+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_{n_0}^{(m)}(\theta,\varphi).$$

   Оно не единственно.

Если же $f_{n_0 m l_0} \neq 0$ хотя бы для одного m, то краевая задача (VIII) не имеет решений.
Пример:
$$\begin{cases} \Delta\, w + k^2 w = \dfrac{J_{\frac{3}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \sin\theta \sin\varphi\,, \qquad r < a, \\ w|_{r=a} = 0, \end{cases}$$
где $J_{\frac{3}{2}}(ka) = 0$.

Здесь $f(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{\frac{3}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi)$ совпадает с одной из СФ задачи Ш.—Л.
$$\begin{cases} \Delta\, \psi + \lambda\psi = 0, \qquad r < a, \\ \psi|_{r=a} = 0, \end{cases}$$
а k^2 является соответствующим СЗ.
Поэтому мы можем искать решение краевой задачи в виде разложения только по этой СФ:
$w(r,\theta,\varphi) = A f(r,\theta,\varphi)$.
Подставив это в уравнение Гельмгольца, получим
$A\,\underbrace{(\Delta\, f + k^2 f)}_{0} = f$.
Следовательно, краевая задача не имеет решений.

II. Краевые задачи в шаровом слое

Решение краевой задачи
$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = f(r,\theta,\varphi), \qquad a < r < b, \\ u|_{r=a} = g_1(\theta,\varphi), \\ u|_{r=b} = g_2(\theta,\varphi) \end{cases} \qquad \text{(IX)}$$
ищется в виде $u = v + w$, где
$$\begin{cases} \Delta\, v + k^2 v = 0, \qquad a < r < b, \\ v|_{r=a} = g_1(\theta,\varphi), \\ v|_{r=b} = g_2(\theta,\varphi), \end{cases} \qquad \text{(X)}$$
$$\begin{cases} \Delta\, w + k^2 w = f(r,\theta,\varphi), \qquad a < r < b, \\ w|_{r=a} = 0, \\ w|_{r=b} = 0. \end{cases} \qquad \text{(XI)}$$
Решение задачи (X) ищется в виде разложения по ЧР однородного уравнения Гельмгольца в шаровом слое:
$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + B_{nm} N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$
Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются подстановкой разложения в ГУ. При этом решение может не существовать или не быть единственным.
Решение задачи (XI) ищется в виде разложения по СФ задачи Ш.—Л. в шаровом слое:
$$\begin{cases} \Delta\, \psi + \lambda\psi = 0, \qquad a < r < b, \\ \psi|_{r=a} = 0, \\ \psi|_{r=b} = 0. \end{cases}$$
СФ имеют вид $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{A J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r) + B N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где коэффициенты A, B и СЗ λ определяются подстановкой в ГУ и из условия существования нетривиального решения.

Краевые задачи с ГУ Неймана, 3-го рода или смешанными ГУ решаются аналогично.