(1.1) Неравная тожд. постоянной ф-ия $u(M)$ непрерывная в замкнутой связной области $\bar{D}$ и гармон. в области D достигает своего макс. значения только на гр. области D

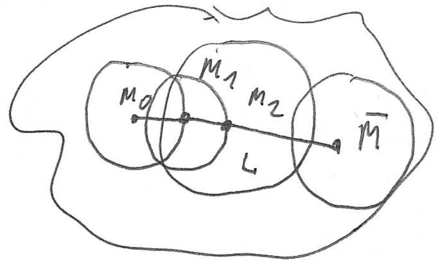
Предположим, что в т. $M_0 \in D$ ф-ия достигает макс. значения $u(M_0) \ge u(M)$ $M \in \bar{D}$ (1). Рассмотрим сферу $\Sigma_{M_0}^{R_0} \in D$: $u|_{\Sigma_{M_0}^{R_0}} \le u(M_0)$ (2)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2}\int_{\Sigma_{M_0}^{R_0}} u(P)\,d\sigma_P \le \frac{1}{4\pi R_0^2}\int_{\Sigma_{M_0}^{R_0}} u(M_0)\,d\sigma_P = \frac{u(M_0)}{4\pi R_0^2}4\pi R_0^2 = u(M_0) \quad (3)$$

Из ф-лы (3) вытекает, что $u|_{\Sigma_{M_0}^{R_0}} = u(M_0)$ (4). Получаем утверждение: $u|_{K_{M_0}^{R_0}} = u(M_0)$ ($K_{M_0}^{R_0}$ - шар)

обозначим через $R_{M_0}^{S_0}$ - минимальное расстояние между M_0 и пов-тью S; сфера $\Sigma_{M_0}^{R_{M_0}^{S}}$ хотя бы в одной точке M^* касается гр S; имеем $u(M^*) = u(M)$; мы доказали достиж. макс. зн на границе.

об. R_i^M - минимальное расстояние от точки M_i до S, а через R^M - минимум по всем R_i^M. За конечное число шагов $\left[\frac{l}{R^m}\right]+1$ мы построим шар включ. в себя $\bar{M}$, т.е. $u(M_0)=u(\bar{M})$, где $\bar{M}$ - произв. точки $\Rightarrow u(M) \equiv const$ в D, полученное противоречие и доказывает теорему.



(1.2) 1) $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ в D; $u|_S = f$ (I) правильно, но не имеет отношения

Задача I не может иметь более одного класс. решения.
В силу линейности достаточно показать, что однородная задача $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$; $u|_S = 0$ имеет только трив. решение. Воспользуемся принципом максимума. Ф-ия u внутри D не может достигать положит. максимума и отриц. минимума. Следовательно $u \le 0$ в D и $u \ge 0$ в D. т.е $u \equiv 0$ в D, т.е. однор. задача имеет только тр. решение.

2) $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ в D; $\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = f$ (II)

При $h(P) \ge 0$ на S кр. задача (II) не может иметь более одного кл. реш.

Покажем, что однор. задача $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ в D; $\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = 0$, $h \ge 0$ имеет только тр. решение. Применим к решению однор. задачи I ф-лу Грина

$$\int_D u\Delta u\,dV = \oint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int_D (\mathrm{grad}\,u)^2 dV.$$

Учитывая, что $\Delta u \equiv \varkappa^2 u$; $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -hu|_S$, получ.

$$\varkappa^2\int_D u^2 dV + \int_S hu^2 dS + \int_D (\mathrm{grad}^2 u)\,dV \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0 \text{ в } \bar{D}$$

~~3) $\Delta u + cu = -f(M)$ $M \in D$; $N_p[u] = \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P)$ $P \in S$ $(|\alpha|+|\beta| \ne 0)$ (III)~~

~~Рассмотрим задачу~~ на собств. зн.

~~$\begin{cases} \Delta v_n + \lambda v_n = 0 & M \in D \\ N_p[v_n] = 0 & P \in S \end{cases}$ (IV)~~

~~(1.2) прод~~

~~Если $C \neq \lambda_n$ $(n=1,2,\dots)$ (где λ_n - с.зн задачи (IV)), то кл. реш задачи (III) ед.~~

~~Предп., что $u_1(M) \not\equiv u_2(M)$ - различные решения~~

(1.2) Рассмотрим задачу для ур-ия Г.

$$\begin{cases} \Delta u + Cu = -f(M) & \text{, где } M \in D \quad (1) \\ N_p[u] \equiv \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P) & P \in S \quad (2) \end{cases}$$

Запишем задачу на собств. значения

$$\begin{cases} \Delta V_n + \lambda V_n = 0 & M \in D \\ N_p[V_n] = 0 & P \in S \end{cases}$$

Если $C \neq \lambda_n$ $(n=1,\dots)$ (где λ_n - с.зн задачи (3)-(4)), то классическ. решение задачи (1)-(2) ед.

Предположим, что $u_1(M) \not\equiv u_2(M)$ - различные решения; рассмотр. $\overline{u} = u_1 - u_2$. Имеем задачу

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} - C\overline{u} = 0 & M \in D \quad (5) \\ N_p[\overline{u}] = 0 & P \in S \quad (6) \end{cases}$$

Т.к. $C \neq \lambda_n$, то задача (5)-(6) имеет только трив. решение, следовательно $u_1 \equiv u_2$.

Сл. Если $C = -\varkappa^2 < 0$, то внутр задача D и ф. кр с $h \geq 0$ имеют всегда ед клас. решение (т.к. λ_n задач вещ и положительно)

(2.1) К.О.П $p_n(x)$ имеет ровно n простых вещ. нулей расположенных строго внутри отрезка $[a;b]$

Очевидно, $p_0(x) = const$, из ф-лы $\int_a^b p_n(x)p_k(x)\rho(x)\,dx = 0$ $n \neq k$ (ортогон.) вытекает, что $\int_a^b p_0(x)p_n(x)\rho(x)\,dx = 0$, если $n > 0$ $\Rightarrow \int_a^b p_n(x)\rho(x)\,dx = 0$

Откуда вытекает, что $p_n(x)$ меняет знак в k точках $(k \leq n)$

$p_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)\varphi_n(x)$ ← не меняет знак

Если мы докажем, что $k=n$, $x_i \in [a;b]$ $x_i \neq x_j$, мы докажем теорему.

Предположим $k < n$, тогда обозн. $(x-x_1)\dots(x-x_k) = r_k(x)$ полином.

Мы можем записать (разложение по с-ме КОП)

$r_k(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} C_l p_l(x)$ (8) ← можем в силу, что $p_l(x)$ имеет полиномы всех степеней.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b p_n(x) r_k(x)\rho(x)\,dx = \{(8)\} = \sum_{l=0}^{k} C_l \int_a^b p_n(x)p_l(x)\rho(x)\,dx = 0 \quad (9)$$

$$\int_a^b p_n(x)r_k(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b r_k(x)\varphi_n(x)r_k(x)\rho(x) = \int_a^b r_k^2(x)\underbrace{\varphi_n(x)}_{\text{не мен. знак}}\overset{>0}{\rho(x)} \neq 0 \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10) приходим к противор $\Rightarrow k = n$

Теорема док-на.

(2.2) Поверхностный потенциал дв. слоя $W(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right) d\sigma_p = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}^2} d\sigma_p$

Лог. потенциал дв. слоя $W(M) = \int\limits_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \ln\frac{1}{r_{PM}} dL_p = \int\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi_{MP}}{r_{PM}} dL_p$

$|\nu(P)| < N$; $\Delta W(M) = 0$ $M \notin S$; $|\nu(P)| < N$ $\Delta W(M) = 0$ $M \notin C$ см. 104-106.

$\Delta W = 0$ $M \notin S$ следует из определения, что потенциалы при $M \notin D$ имеют производные всех порядков, которые можно вычислять дифф под знаком интеграла, и являются гармоническими ф-циями.

при $M \to \infty$ $W = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (поверхн.) $W = O\left(\frac{1}{r}\right)$ (логар.)

Потенциал дв. слоя с непрерывной и ограниченной плотностью $|\nu| \le C$ на пов-ти S существует, т.е. является сход. несобств. интегралом при $M \in S$ (см. соотв. билеты)

(3.1) Задача $U_t = a^2 U_{xx} + f(x;t)$: $(x;t) \in \Omega$ $u(x;0) = \varphi(x)$ $x \in R^1$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{\Omega}$:

Пусть $U_1(x;t)$ и $u_2(x;t)$ – два классических разн. огр. решения в области $\overline{\Omega}$; $u_1(x;t) \equiv u_2(x;t)$; $|u_k| \le M$. Рассмотрим $V(x;t) = U_1(x;t) - U_2(x;t)$, $V(x;t)$ - непр в $\overline{\Omega}$, ограничена $|V(x;t)| \le 2M$, удовлетворяет в Ω однородному ур-ю теплопроводности $V_t = a^2 V_{xx}$ и однородному начальному условию $V(x;0) = 0$. Но применять принцип максимума к $V(x;t)$ нельзя, т.к в неогр по x области ф-ция $V(x;t)$ может нигде не принимать макс. значения. Рассмотрим ограниченную область $|x| \le L$. $L > 0$. Обозначим $\overline{\Omega_L} = [-L;L] \times [0;T]$ и $\Omega_L = [-L;L] \times (0;T]$. Введем вспомогательную (барьерную) ф-цию:

$W(x;t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$ – непрерывную в $\overline{\Omega_L}$ и удовлетвор. в Ω_L одн. ур-ю теплопроводности. Кроме того $W(x;0) \geq |V(x;0)| \neq 0$ (1);

$W(\pm L, t) \geq 2M \geq |V(\pm L; t)|$. В огранич $\overline{\Omega_L}$ уже справедлив принц. макс. Применяя принц. сравнения к $-W(x;t)$; $V(x;t)$ и $W(x;t)$, $V(x;t)$ с учетом (1) имеем $-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le V(x;t) \le \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$ (1). Зафиксируем точку $(x;t) \in \overline{\Omega_L}$ и перейдем в (1) к пределу при $L \to \infty$; в силу произв. точки $(x;t)$ получаем, что всюду в Ω $V(x;t) \equiv 0$. Теорема док-на.

(3.2) Для построения ф-ии Грина для полупространства $(-\infty < x, y < +\infty, z \geq 0)$ удобнее всего применить метод эл/ст отображения

Чтобы построить ф-цию Гр., достаточно определить ф-цию V, которая в данном случае является решением след. кр. задачи.

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ при } z > 0 \\ V\big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Big|_{z=0}; \quad M = (x;y;z) \quad (1) \\ V \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности} \end{cases}$$

Пусть т M_1 – точка симметр т $M_0(x_0; y_0; z_0)$ относительно плоск $z = 0$

Тогда решением задачи (1) явл. ф-ция $V = -\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$

Т.о. ф-ция Гр. имеет вид ~~$G(M;M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$~~ $G(M;M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$

4.1 Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in (0; L) \quad t \in (0; +\infty) \quad (1) \\ u(x;0) = \varphi(x) & x \in R^1 \quad (2) \\ u(0;t) = u(l;t) = 0 & t \in [0;+\infty) \quad (3) \end{cases}$$

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}, \text{ причем } C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{L} d\xi \quad (4)$$

Справедлива теорема: Пусть $\varphi(x)$ непр на отрезке $[0;l]$ имеет на нем кусочно-непр первую производную и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда классическое решение задачи (1)-(3) сущ и предст ф-лами (4)

Обоснуем вначале обоснуем признак сущ. для интервала $x \in (0;l)$; $t \in (0;+\infty)$ и покажем, что в этой области $u(x;t)$ является классич. решением ур-ния (1). Поскольку

$u_n(x;t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{L}$ (5) удов. гр. условиям, то надо док-ть что ряды полученные формальным диф (4) р/м сход. в этой открытой области. Для этого построим сход. числовой мажор. ряд. Поскольку $\varphi(x) \in C[0;L] \Rightarrow |\varphi(x)| < M \Rightarrow$ из (4) $|C_n| < \frac{2}{L} M \int_0^L d\xi = 2M$

если ряд (4) ф. продиф по t мы имеем $u_t \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 n^2 C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{L}$ (6)

Если ряд (4) формально дважды продиф по x мы имеем

$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 n^2 C_n e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{L}$ (7)

итак достаточно обосновать р/м сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 n \bar{t}}$ (8)

Построим мажорантный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2M e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 n \bar{t}}$, где $t \geq \bar{t} > 0$ для $\forall \bar{t} > 0$ (9)

Сходимость ряда (9) уст. призн Даламбера, откуда имеем сход ряда (8) и сходимость рядов (7) и (6). Т.о. u явл класс. реш задачи.

4.2 С-ма полиномов Лежандра исчерпывает все с.ф. соотв. задачи Ш-Л

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda_n y = 0 & -1 < x < 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

В самом деле, пусть $f(x) \neq P_n(x)$ есть с.ф задачи Ш-Л. соотв. с.зн $\lambda \neq n(n+1)$ тогда по общему с-ву с.ф. имеем $(f; P_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \dots,$ и в силу полноты с-мы $P_n(x)$, получаем, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in (-1;1)$, т.е. не является с.ф.

(5.1) Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = L_M[u] + f_m(M;t) & (M;t)\in Q_\infty \\ u(M;0)=\varphi(M) & M\in\overline{D} \\ N_p[u(P;t)]=0 & P\in S \quad t\in[0;+\infty) \end{cases}$$

$L_M[u]=div(K(M)\,grad\,u)$

$N_p[u]=\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u$

$\rho(M)>0;\ k(M)>0;\ \alpha(P);\ \beta(P)\geq 0;\ \alpha(P)+\beta(P)>0$

Пусть $\rho(M)>0$ и $K(M)>0$ при $M\in D$, тогда классич решение однородного ур-ия теплопроводности $\rho u_t = div(k(M)\,grad\,u)$ непрер. в замкнутом цилиндре $\overline{Q^T}$ во внутр. точках этого цилиндра не может достигать значений больших, чем наиб из нач и гран значений.

Пусть $M=\max\{u(M;0),u(P;t)\}$ при $M\in D;\ P\in S;\ t\in[0;T]$

Предположим, что в точке $(M_0;t_0)\in Q^T$ наша ф-ия принимает значения большие, чем максимальное из нач и гран. значений, т.е $u(M_0;t_0)=M+\varepsilon,\ \varepsilon>0$. Рассмотрим вспомогательную ф-ию:

$$\begin{cases} v(M;t)=u(M;t)+\alpha(t_0-t) \quad \alpha>0 & (1)\\ v(M;t)\in C(\overline{Q}_T) & (2)\\ v(M_0;t_0)=u(M_0;t_0)=M+\varepsilon & (3)\end{cases}$$

Т.о. $\max\{v(M;0)\ M\in D;\ v(P;t)\ P\in S\ t\in[0;T]\}\leq M+\alpha T$. Распорядимся α так что $M+\alpha t<M+\frac{\varepsilon}{2}$ (4), т.е $\alpha<\frac{\varepsilon}{2T}$. По т. Вейерштрасса ф-ия V достигает своего макс. значения $v(M_1;t_1)\geq v(M_0;t_0)=M+\varepsilon$ (5)

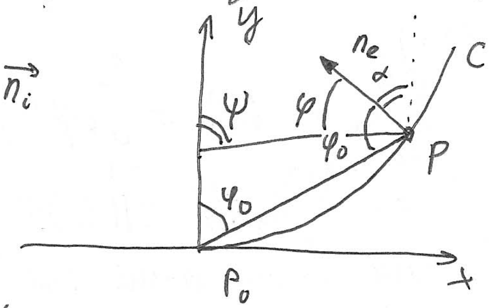
Рассматривая (4) и (5) имеем $(M_1;t_1)\in Q_T$ - внутр точка. А если непр ф-ия V достигает максимизации в M_1, то $grad\,v(M_1;t_1)=0$; $\Delta v(M_1;t_1)\leq 0$; $\frac{\partial v}{\partial t}(M_1;t_1)\geq 0$ (6). Из ф-л (6) вытекает, что

$\nabla u(M_1;t_1)=0$; $\Delta u(M_1;t_1)\leq 0$; $\frac{\partial u}{\partial t}(M_1;t_1)\geq\alpha>0$ (7). Но тогда

$$\underbrace{\rho(M_1)}_{>0}\underbrace{u_t(M_1t_1)}_{>0}=\underbrace{k(M_1)}_{>0}\underbrace{\Delta u(M_1;t_1)}_{\leq 0}+grad(k(M_0))\underbrace{grad\,u(M_1;t_1)}_{=0}.$$ Пришли к протр.

(5.2) Пусть плотность $\mu(P)$ - кус.-непр и огр ф-ия, тогда норм. производная потенц $V(M)$ на внутр нормали при переходе через несущую прямую претерпевает скачок

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0)-\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_e}(P_0)=2\pi\mu(P_0) \quad P_0\in C \quad ;\ \vec{n_e}\equiv\vec{n_i}$$



$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial y}(P_0)\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial y}(P_0)\right)$ - внешн (внутр) пред. значения при стремлении точки M снар. (изнутр) кривой C к этой прямой по внутр. нормали.

$\psi+\varphi+\alpha=\pi \Rightarrow \psi=\pi-(\alpha+\varphi)$

$$\frac{\partial v(M)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial n}(M)=\int_C\mu(P)\frac{\cos\psi}{r_{PM}}dl_p=-\int_C\mu(P)\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{r_{PM}}dl_p=\overbrace{-\int_C\mu(P)\cos\alpha\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}}^{W(M)}+$$

$$+\underbrace{\int\mu(P)\sin\varphi\frac{\sin\alpha}{r_{PM}}}_{=J(M)}$$

Первый интеграл есть пот дв. слоя с плотность $D(P) = \mu(P)\cos\alpha$, а второй интеграл непр, поскольку подынтегр. выр. оценивается

$$|\mu(P)\sin\varphi \frac{\sin\alpha}{r_{PM}}| < N \cdot 1 \cdot \left|\frac{\sin\alpha}{r_{PM}}\right| < \frac{Nk|\xi|}{r_{PM}} \leq Nk$$

т.о. второй интеграл явл р/м сход в т $P_1 \in S$ и след непр в этой т.
Следовательно, разрывные св-ва $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ определяются разр св-вами $W(M)$

$$\lim_{\substack{M \to P_0,\ M \in D \\ \text{внутр.}}} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = J(P_0) + W_i(P_0) = J(P_0) + \overset{0}{W}(P_0) + \pi\mu(P_0) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^0 + \pi\mu(P_0)$$

т.о. $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 2\pi\mu(P_0)$ (в трехмерн случае $4\pi\mu(P_0)$)

6.1 С-ма присоед ф. Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ замкнута в $L_2(-1;1)$

Пусть дано $\forall \varepsilon > 0$: $\forall f(x) \in L_2(-1;1)$ в силу плотности простр $C(-1;1)$ в пр-ве $L_2(-1;1)$ найд. ф-ия $g \in C(-1;1)$, такая что $|f-g| < \varepsilon'$ $\forall \varepsilon' > 0$
Т.о. по лемме (*) найдется ф-ия φ такая, что $|g-\varphi| < \varepsilon''$ для $\forall \varepsilon'' > 0$ (1)
В силу теоремы Вейерштрасса и непр ф-ии $\tilde{\varphi}(x)$ для $\forall \varepsilon''' > 0$ найдется такая с-ма коэф $\{\tilde{c}_n\}$ и с-ма полиномов $\{Q_N(x)\}$ $N > 0$, что

$$\max_{[-1;1]} |\tilde{f}(x) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{c}_n Q_n(x)| < \varepsilon''' \quad (2)$$

Но т.к. с-ма полиномов содержит с-мы полиномов всех степеней, то

$$\sum_{n=0}^{N} (\tilde{c}_n Q_n(x)) = \sum_{n=0}^{N+m} (c_n P_n^{(m)}(x)) \quad ; \text{здесь } (m) \text{ — } m\text{-ая производная} \quad (3)$$

Из (2) и (3)

$$\max_{x \in [-1;1]} |\tilde{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N+m} c_n P_n^{(m)}(x)| < \varepsilon''' \quad (4)$$

$$x \in [-1;1] \Rightarrow 0 \leq (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \leq 1$$

$$\max_{x \in [-1;1]} |(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \tilde{\varphi} - \sum_{n=0}^{N+m} c_n \underbrace{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x)}_{= P_n^{(m)}(x)}| < \varepsilon''' \quad (5)$$

; а тут уже прис. ф-ия Л. и далее

Из (25)

$$\|\varphi - \sum_{n=0}^{N+m} c_n P_n^{(m)}(x)\| = \int_{-1}^{1} |\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N+m} c_n P_n^{(m)}(x)|^2 < 2(\varepsilon''')^2 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \quad \|F - \sum_{n=0}^{N+m} c_n P_n^{(m)}(x)\| \leq \|f-g\| + \|g-f\| + \|\varphi - \Sigma \ldots\| = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' < \varepsilon \quad (7)$$

$\Rightarrow$ с-ма прис. ф-ий Лт замкнута в $L_2(x)$; в силу ортогон с-мы пр ф-ий на $L_2(x)$ (по п. индексу), то из замкнут следует полнота, откуда вытекает, что с-ма прис. ф-ий Лк исчерпывает все с.ф. з. Ш-Л

* $\forall f(x) \in C^{(1)}[-1;1]$ можно построить $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x) \in C^{(1)}[-1;1]$ отроксимир ф-ию $f(x)$ на отр $[-1;1]$ в среднем.

(6.2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x;t)\in\Omega_+ \\ u(x;0)=\varphi(x) & x\in\overline{R^+} \\ u_x(0;t)=\mu(t) & t\in[0;+\infty) \\ |u(x;t)|<C & (x;t)\in\overline{\Omega_+} \end{cases}$

Пусть ф-ия $\varphi(x)$ явл. четной: $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Тогда произв по x ф-ии u обр в нуль при $x=0$, т.е $u_x(0;t)=0$ при $t\in[0;+\infty)$;
где $u(x;t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x;\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$ $\quad g(x;\xi;t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}$

Положим $x=0$

$\cancel{u(0;t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x;\xi;t)\varphi(\xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}$

$u_x(0;t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(0;\xi;t)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(0;\xi;t)\varphi_x(\xi)d\xi \approx 0+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{4a^2t}}\varphi_x(\xi)d\xi=0$

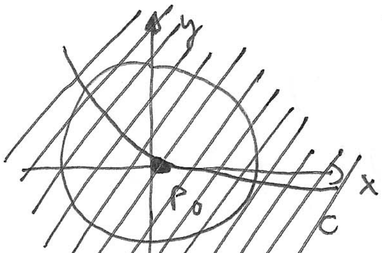
Рассмотрим задачу и продолжим $\Phi(x)$ четным образом $\Phi(x)$ и рассмотрим $U(x;t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x;\xi;t)\Phi(\xi)d\xi$ – удовлетворяет ур-ию теплопр. на всей прямой; нач. условиям на полуоси. В силу доказанного утверждения

$u(x;t)=U(x;t)$ при $x\in\overline{R^+}$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x;\xi;t)\Phi(\xi)d\xi=\int\limits_{0}^{+\infty}(g(x;\xi;t)+g(x;-\xi;t))\varphi(\xi)d\xi$

т.о. $g_2(x;\xi;t)=g(x;\xi;t)+g(x;-\xi;t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}$

(7.1) Пусть $|\mu(P)|<N \Rightarrow V(M)=\int\limits_C \mu(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}dl_P$ непр в R^2 (лог пот пр. слоя)

1) Если $M\notin C$, то интеграл собств и это очевидно
2) Если $M\equiv P_0\in C$. Докажем р/м сходимость $V(M)$ в т P_0



Построим круг C^δ радиуса δ с центром в т P_0 и пусть P – произв точка, отстоящая от P_0 не более чем на δ

$r_{PP_0}\geq|x-\xi|$ $\quad dL_P=\frac{d\xi}{\cos\gamma}<2d\xi$

$$\left|\int\limits_{C^\delta}\mu(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}dL_P\right|<2N\int\limits_{-\delta}^{\delta}\ln\frac{1}{|x-\xi|}d\xi<\varepsilon$$

Отсюда следует р/м сходимость в т P_0 $\Rightarrow$ непр всюду на пл-ти.

(7.2) Метод перевала: Если $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ являются аналитическими ф-циями аргумента ζ в области G, содерж. контур интегрирования, то при больших знач арг x имеет место асимпт. ф-ла:

$$F(x)=\int_C e^{xf(\zeta)}\varphi(\zeta)\,d\zeta = e^{xf(\zeta_0)}\left\{\sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(\zeta_0)|}}\,\varphi(\zeta_0)e^{i\psi}+\underline{O}(x^{-3/2})\right\} \quad (1)$$

где ζ_0 - точка перевала ф-ии $f(\zeta)$, определяемая условием $f'(\zeta_0)=0$, а угол ψ указывает напр наибскор спуска и опред $\underline{\psi=\frac{1}{2}(\pi-\arg f''(\zeta_0))}$

по т Коши можно деформ. контур так, чтобы достич собирания знач. главного интеграла в точке перевала. Найдем ос. т. ф-ии $V(x;y)$ такую что $U(x;y)=const$ $(f(\zeta)=U(x;y)+iV(x;y))$, то ф-ия будет напр вдоль о.н. напр наиск спуска $\operatorname{grad}U=0 \Rightarrow$ т.к. $\operatorname{grad}U-\operatorname{grad}V=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{grad}V=0$ оконч имеем ф-лу (1)

Рассмотрим $H_\nu^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{-ix\sin\zeta+i\nu\zeta}\,d\zeta$

$f(\zeta)=-i\sin\zeta$; $\varphi(\zeta)=e^{i\nu\zeta}$; $f'(\zeta_0)=-i\cos\zeta_0=0 \Rightarrow \zeta_0=-\frac{\pi}{2}$

$f''(\zeta_0)=i\sin\zeta_0=i\sin(-\frac{\pi}{2})=-i \Rightarrow \arg(f''(\zeta_0))=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \psi=-\frac{\pi}{4}$

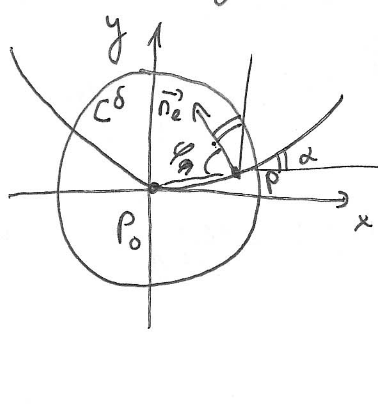
$$H_\nu^{(1)}(x)=e^{ix}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\nu\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}+\underline{O}(x^{-3/2})\right\}$$

для вещ x

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+\underline{O}(x^{-3/2}); \quad H_\nu^{(2)}(x)=(H_\nu^{(1)}(x))^*$$

$$J_\nu(x)=\frac{H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\underline{O}(x^{-3/2})$$

(8.1) Пусть $\nu(P)<N$, тогда $w(M)=\int_C \nu(P)\frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}}\,dL_P$ (П.П.Д.С) существует всюду на плоскости, но не непрерывен.



1) если $M\notin C$, то сущ. доказано

2) $M\equiv P_0\in C$

$\vec{r}_{PP_0}=\{-\xi;\eta\}$

$\vec{n}_P=\{-\sin\alpha;\cos\alpha\}$

$$\cos\varphi_n=\frac{(\vec{r}_{PP_0},\vec{n}_P)}{r_{PP_0}\cdot 1}=\frac{\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha}{r_{PP_0}}$$

$$\left|\int_{C^\delta}\nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\,dL_P\right|<2\pi\gamma\frac{3}{2}k\int_{-\delta}^{\delta}d\xi=\delta Nk\delta<\varepsilon$$

р/м сходимость мы доказали только в случае $M\in C$. Иначе сход нет, т.к. $r_{PM}\to 0$, но $\cos\varphi_0\not\to\frac{\pi}{2}$; т.е не непрерывен ?

(8.2) Общее выр. пр. ф-ии КОП $\Psi(x;z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1-z\sigma'(t_0)}$

где t_0 – корень ур-ия $t - x - z\sigma(t) = 0$ $\quad \left(\tilde{L}_n = \frac{L_n}{c_n}\right)$

полиномы Лагера $(a=0;\ b=\infty)$

$\sigma(x) = x \quad ; \ c_n = n!$

$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

$$\Psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{e^{-t_0}}{e^{-x}} \frac{1}{1-z}$$

$t - x - tz = 0 \Rightarrow t = \frac{x}{1-z}$

$$\Rightarrow \Psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{1-z}$$

(9.1) см. (5.2)

(9.2) $\sigma(x) = 1; \ \rho(x) = e^{-x^2}; \ c_n = (-1)^n$

$$\Psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (-z)^n = \frac{e^{-t_0 x^2}}{e^{-x^2}}$$

$t - x - z = 0 \Rightarrow t = x + z$

$$\Rightarrow \Psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (-z)^n = e^{-(2xz+z^2)}$$

(10.1) Пусть $\upsilon(P)$ – кусочно-непр., ограниченная ф-ия, тогда в точке непрерывности этой ф-ии ЛПДС $W(M)$ претерпевает скачок

$W^{(i)}(P_0) - W^{(e)}(P_0) = 2\pi \upsilon(P_0)$ $\quad$ (для Пов Пот $4\pi\upsilon(P_0)$)

Рассмотрим ф-ию $I(M) = W(M) - W_0(M) = W(M) - \int \upsilon(P_0) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}} dL_P =$

$= \int (\upsilon(P) - \upsilon_0) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}} dL_P$, где $\upsilon_0 = \upsilon(P_0)$

Докажем р/м непр $I(M)$ в точке P_0. В самом деле $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$; такая что $|\upsilon(P) - \upsilon(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ при $r_{PP_0} < \delta$. Но с другой стороны, выберем C^δ так, что

$\int_{C^\delta} \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}} dL_P \le 2\pi$, то отсюда следует равн сходимость $I(M)$ в т P_0

$\Rightarrow$ непр в P_0. Т. образом $\quad W^{(i)} = \overset{\circ}{W} + \pi \upsilon(P_0) \Rightarrow W^{(i)} - W^{(e)} = 2\pi \upsilon(P_0)$

Используя ф-лу Гр (III) можно показать, что для $\upsilon_0 = const$ справедл.

$$\overset{\circ}{W}(M) = \begin{cases} 0 & M \notin \bar{G} \\ \pi \upsilon_0 & M \in C \\ 2\pi \upsilon_0 & M \in G \end{cases}$$
(полагаем в III ф-ле Гр $U = \upsilon_0 = const$)

(10.2) Рассмотрим внешнюю задачу

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ в } D_e\\ u|_S = f\\ u(M) \rightrightarrows 0 \text{ на беск.}\end{cases}$$

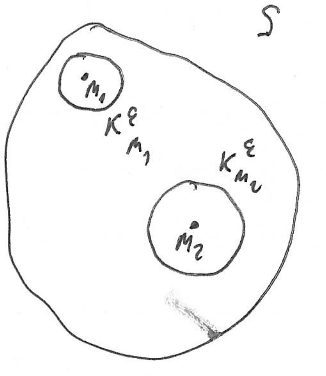
(NB! опред регулярности)

Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного классич. решения, регулярного на бесконечности.

Пусть существует два решения u_1 и u_2. Разность $v = u_1 - u_2$ есть решение однородной задачи $\Delta v = 0$ в D_e; $v|_S = 0$ р/м стремящ. к нулю на бесконечности. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ сущ. R_0 такое, что $|v| \le \varepsilon$ при $r \ge R_0$. Окружим пов-ть S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R $(R > r_0)$. Применяя принц. максимума для ф-ия Лапласа в области D_R между S и Σ_R, получим $|v(M)| \le \varepsilon$ всюду в D_R. В силу произвольности ε $(\varepsilon \to 0)$ и R $(R \to \infty)$ отсюда получаем $v(M) \equiv 0$ всюду в D_e. Следовательно, решение внешней задачи Д. единств.

(11.1) Ф-ия Грина симметрична $G(M;Q) \equiv G(Q;M)$

Введем две ф-ии $u_1(M) = g(M;M_1)$; $u_2(M) = g(M;M_2)$ и введем область $D_\varepsilon = D \setminus (\overline{K^\varepsilon_{M_1}} \cap \overline{K^\varepsilon_{M_2}})$; где $K^\varepsilon_{M_1;M_2}$ - шары радиусом ε с центрами в т. M_1 и M_2.



Напишем вторую ф-лу Грина

$$\int\limits_{D_\varepsilon}\left\{u_1 \overset{=0}{\Delta u_2} - u_2 \overset{=0}{\Delta u_1}\right\} dV =$$

$$= \int\limits_S \left\{\underset{\overset{\shortparallel}{0\,(\text{на } S)}}{u_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{u_2} \frac{\partial u_1}{\partial n}\right\} d\sigma + \int\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1} + \Sigma^\varepsilon_{M_2}} \left\{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right\} d\sigma$$

имеем

$$\oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1}} \left\{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right\} d\sigma = \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_2}} \left\{u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right\} d\sigma$$

можно записать через представл. для ф-ии $u_2(M)$ в случае внутр з. Д рассматривая u_2 внутри $\Sigma^\varepsilon_{M_1}$ $(M_2 \notin \Sigma^\varepsilon_{M_1})$

$$u_2(M_1) = -\oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) d\sigma,$$ также имеем $$u_1(M_2) = -\oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_2}} \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) d\sigma$$

откуда $-u_2(M_1) = -u_1(M_2)$ или $g(M_1;M_2) = g(M_2;M_1)$. Теор. док-на.

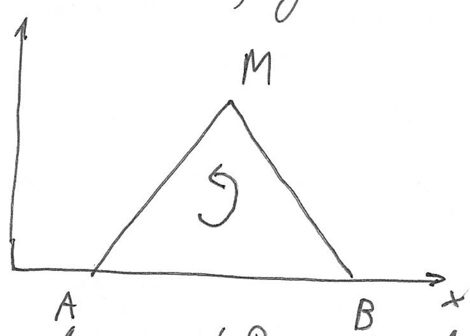
(11.2) Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x;t)\ ; & (x;t)\in\Omega \qquad (1)\\ u(x;0)=\varphi(x)\ ;\ u_t(x;0)=\psi(x) & x\in R^1 \qquad (2)\end{cases}$$

где a^2 - пост. коэф, $\Omega=R^1\times(0;+\infty)$

Сформулируем ф-лы Гр. в след. виде: Пусть ф-ия $F(x;t)$ непр. диф. в области D и непр. в области $\bar{D}$: $F(x;t)\in C^{(1)}(D)\cap C(\bar{D})$, где $\bar{D}=D\cup\Gamma$.

Имеет место след. ф-лы:



$$\int\limits_D \frac{\partial F(x;t)}{\partial t}\,dx\,dt=-\oint\limits_\Gamma F(x;t)\,dx$$

$$\int\limits_D \frac{\partial F(x;t)}{\partial x}\,dx\,dt=\oint\limits_\Gamma F(x;t)\,dt\ , \qquad (3)$$

где контур Γ проходится в положит. направлении (D пох слева)

Предположим, что классическое решение (1), (2) для неоднор. ур-ия колеб. существует.

Возьмем на фазовой плоскости точку M и построим хар. треуг ABM. Проинтегрируем (1) по всему треуг, предвар. умножив на $\frac{1}{2a}$. Имеем

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM}(u_{tt}-a^2u_{xx})\,dx\,dt=\frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM}f(x;t)\,dx\,dt \qquad (4)$$

Применяя в левой части ф-лы ф-лу (3)

$$\int\limits_{\Delta ABM}u_{tt}\,dx\,dt=-\int_A^B u_t\,dx-\int_B^M u_t\,dx-\int_M^A u_t\,dx$$

$$\int\limits_{\Delta ABM}u_{xx}\,dx\,dt=\int_A^B u_x\,dx+\int_B^M u_x\,dt+\int_M^A u_x\,dt \qquad (5)$$

Поскольку на отрезке AB $dt=0$, а на отрезках хар-к BM и MA имеет место соотношение $dx=-a\,dt$ и $dx=a\,dt$ из ф-л (5) имеем

$$\int\limits_{\Delta ABM}(u_{tt}-a^2u_{xx})\,dx\,dt=-\int_A^B u_t\,dx+a\int_B^M(u_t\,dt+u_x\,dx)-a\int_M^A(u_t\,dt+u_x\,dx)=$$

$$=-\int_A^B u_t\,dx+a\left[u(M)-u(B)-u(A)+u(M)\right] \qquad (6)$$

Из (4) и (6) $\quad u(M)=\dfrac{u(A)+u(B)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_A^B u_t\,dx+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM}f(x;t)\,dx\,dt$

Учитывая, что M, A, B имеют соотв коорд $(x;t)$; $(x-at;0)$; $(x+at;0)$, и используя н.у (2) окончательно имеем ф-лу для реш (1); (2)

$$u(x;t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi;\tau)\,d\xi\,d\tau$$

12.1 Рассмотрим задачу $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$; $x \in (a;b)$, где (1)

$k(x) > 0$ при $x \in (a;b)$; $k(x) = (x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – непр. на отрезке $[a;b]$ (2) ф-ия и $\varphi(a) \neq 0$, т.е. коэф. $k(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль перв. порядка.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – два линейно незав. решения ур-ия спец. ф-ий, коэф. которого удовлетв. услов. (2). Тогда, если существует огр. решение $u_1(x)$, имеющее конечный предел в точке $x=a$, то второе решение $u_2(x)$ при $x \to a$ явл. неогр. Причем если $u_1(a) \neq 0$, то $u_2(x)$ имеет в точке $x=a$ лог. особенность, а если $u_1(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль ν-го порядка, то ф-ия $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс ν-го пор.

Пусть $u_1(x)$ – огранич. решение ур-ия (1), предст. в виде $u_1(x) = (x-a)^{\nu} v(x)$ (3)
$\nu \geq 0$

где $v(x)$ – непр на отрезке $[a;b]$ ф-ия, причем $v(a) \neq 0$. Ф-ия $u_1(x)$ огр в точке $x=a$ при $\nu = 0$ и имеет в этой точке нуль ν-го порядка при $\nu > 0$. Представим линейно независимое решение $u_2(x)$ в виде квадратуры через ф-ию $u_1(x)$. Очевидно $u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = (k(x)(u_1u_2' - u_1'u_2))' = 0$, откуда вытекает, что определитель Вронского, построенный по решениям $u_1(x)$, $u_2(x)$, имеет вид
$W[u_1, u_2] = u_1u_2' - u_1'u_2 = \frac{C}{k(x)}$ (4), где постоянная C не равна нулю, т.к. по условию решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – линейно независимы.

Поделив обе части (4) на $u_1^2(x)$, получим

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{u_1u_2' - u_1'u_2}{u_1^2} = \frac{C}{ku_1^2}$$

Проинтегрируем последнее уравнение в пределах от x_0 до x:

$$u_2(x) = u_1(x)\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{C\,d\alpha}{k(\alpha)u_1^2(\alpha)} + C_1\right\}$$

Нас интересует поведение решения, линейно независимого от $u_1(x)$. Поэтому постоянную C_1 можно положить равную нулю, т.к. слагаемое $C_1u_1(x)$, линейно связанное с $u_1(x)$, ведет себя так же, как ф-ия $u_1(x)$. Кроме того, поскольку ур-ие (1) является однородным, то ф-ии $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются с точностью до произвольного постоянного множителя и можно положить $C = 1$. Выберем, наконец, x_0 так, чтобы ф-ия $v(x)$ не обращалась в нуль на отрезке $[a;x_0]$. Это, очевидно, возможно, поскольку $v(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $v(a) \neq 0$.

В результате, сохраняя для решения линейно независимого с $u_1(x)$, обозначение $u_2(x)$, получим

$$u_2(x) = u_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{k(\alpha)u_1^2(\alpha)} \quad (5)$$

Подставим (2) и (3) в (5) и обозначим $\psi(x) = \varphi(x)v^2(x)$

(12.1) прод

При нашем выборе x_0 ф-ия $\psi(x)$ отлична от нуля на отрезке $[a;x_0]$. Воспользовавшись теоремой о среднем, получим для $x\in(a;x_0)$

$$u_2(x)=u_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{k(\alpha)\,u_1^2(\alpha)}=(x-a)^{\nu}v(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{(\alpha-a)^{2\nu+1}\psi(\alpha)}=\frac{(x-a)^{\nu}v(x)}{\psi(x^*)}\begin{cases}\ln(\alpha-a)\Big|_{x_0}^{x} & \nu=0\\ -\dfrac{1}{2\nu(\alpha-a)^{\nu}}\Big|_{x_0}^{x} & \nu>0\end{cases}$$

где $x^*\in(a;x_0)$.

Т.о., $u_2(x)=f_1(x)+f_2(x;x_0)$, где

$$f_1(x)=\frac{v(x)}{\psi(x^*)}\begin{cases}\ln(x-a) & \text{при } \nu=0\\ -\dfrac{1}{2\nu(x-a)^{\nu}} & \text{при } \nu>0\end{cases}$$

и

$$f_2(x;x_0)=\frac{(x-a)^{\nu}v(x)}{\psi(x^*)}\begin{cases}-\ln(x_0-a) & \text{при } \nu=0\\ \dfrac{1}{2\nu(x_0-a)^{2\nu}} & \text{при } \nu>0\end{cases}$$

Из последних ф-л, следует, что ф-ия $f_2(x;x_0)$ остается огранич. при $x\to a$, а ф-ия $f_1(x)$ при $x\to a$ неогр. возрастает либо как $|\ln(x-a)|$, либо как $(x-a)^{-\nu}$, что и док-т лемму.

(12.2) Запишем ур-ие для произв m-го порядка КОП:

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}(x)\frac{dp_n^{(m)}}{dx}\right\}+\lambda_{nm}\rho_m p_n^{(m)}=0,\ \text{где } \lambda_{nm}=-(n-m)\left\{(n-m-1)\frac{\sigma''}{2}+\tau'\right\},\ m=0,1,\dots$$

$\rho_0\equiv\rho;\ \lambda_{n0}\equiv\lambda_n$

В силу этого ур-ия

$$\rho_m p_n^{(m)}=-\frac{1}{\lambda_{nm}}\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}p_n^{(m+1)}\right\}.$$ Рекуррентно применяя последнюю ф-лу:

$$\rho p_n(x)\equiv\rho_0 p_n^{(0)}=-\frac{1}{\lambda_{n0}}\frac{d}{dx}\left(\rho_1 p_n^{(1)}\right)=\frac{1}{\lambda_{n0}\lambda_{n1}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\rho_2 p_n^{(2)}\right)=\dots=\frac{1}{A_{nm}}\frac{d^m}{dx^m}\left(\rho_m p_n^{(m)}\right),\quad(1)$$

где $A_{nm}=(-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}$.

Т.к. $p_n^{(n)}=n!\,a_n$, то, полагая в ф-ле (1) $m=n$, получим

$$p_n(x)=\frac{n!\,a_n}{A_{nm}}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho_n(x)\right)$$ или, обозначая, $C_n=\dfrac{n!\,a_n}{A_{nm}}$

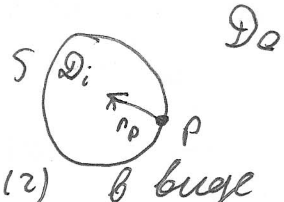
$$p_n(x)=\frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\rho(x)\right\}$$ — обобщ. ф-ла Родрига.

Коэф. C_n определяются из условий нормировки

(13.1) Рассмотрим внутр. задачу D для ур-ия Λ

$$\begin{cases} \Delta W(M) = 0 & M \in D_i \quad (1) \\ W(P) = g(P) & P \in S \quad (2) \end{cases}$$

$W(M) \in C^{(2)}(D_i) \cap C^{(1)}(\overline{D_i})$



Будем искать решение задачи (1)-(2) в виде потенциала дв. слоя с неизв плотностью $\nu(P)$

$$W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P \quad (3)$$

Мы можем подобрать $\nu(P)$, чтобы выполн. (2). (1) выполн для $\forall \nu(P)$

Рассмотрим внутр. предельное значение

$$W^{(i)}(P_0) = 2\pi \nu(P_0) + W(P_0) = g(P_0); \quad P_0 \in S \quad (4)$$

$$2\pi\nu(P_0) + \int_S \nu(P_0) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = g(P_0); \quad P_0 \in S \quad (5)$$

(5) есть интегр. ур-ие Фр. второго рода с полярн. ядром.

$$K(P; P_0) = \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}^2} \quad (6)$$

Если при λ_0 ($\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$) сущ. решение не равное нулю, то оно спектр.

Если $\lambda \neq \lambda_0$, то ур-ие Фр. второго рода разрешимо и однозначно при $\forall$ непрерывной правой части.

Образуем союзное интегральное ур-ие

$$K_{союз} = K(P_0; P) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\frac{1}{r_{P_0P}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2} \quad (7)$$

союзное ур-ие для ур-ия (5)

$$\nu(P_0) + 2\pi \int_S \mu(P) \frac{\cos\psi_0}{r_{P_0P}^2} d\sigma_P = h(P_0) \quad P_0 \in S \quad (8)$$

Союзные ур-ия имеют одинак с-мы с. знач.

Покажем, что (8) получается при решении внешней з. Неймана.

$$\begin{cases} \Delta V(M) = 0 & M \in D_e \quad (9) \\ \frac{\partial V}{\partial n}(P) = h(P) & P \in S \quad (10) \\ V(M) \rightrightarrows 0 & r_M \to \infty \quad (11) \end{cases}$$

$V(M) \in C^{(2)}(D_e) \cap C^{(1)}(\overline{D_e})$

Ищем решение в виде $V(M) = \int_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P \quad (12)$

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n}(P_0) = 2\pi\mu(P_0) + \frac{\partial V}{\partial n}(P_0) = h(P_0) \quad P_0 \in S \quad (13)$$

Из (13) аналог. переходу (4) → (5) имеем ур-ие (8)

В рассмотренном случае решение внутр. задачи D и внешн задачи N ед.

Покажем, что $\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ не является с. зн союзн. ур-ий (5) и (8)

Предположим, что $\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ - с. зн ур-ия (8); следов $\mu(P_0)$ - с. ф. реш ур. (8)

$$\frac{\partial V_0}{\partial n}(P_0) = 2\pi\mu_0(P_0) + \int_S \mu_0(P) \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = 0.$$

13.1 прод

Образуем пов потенциал $V_0(M)$ простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$

$$V_0 = \int_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\, d\sigma_M \qquad (15)$$

$\Delta V_0(M) = 0$; $M \in D_e$ (вне несущ. пов-ти) (16) $\Rightarrow \frac{\partial V_0}{\partial n}(P) = 0$ $P \in S$

по теореме о р/м стремлении потенц. простого и дв слоя к нулю на беск., в случае огран. несущ. пов-ти $V_0(M) \Rightarrow 0$ при $r_m \to \infty$; в силу ед. решения внутрен. задачи Н в трехмерном случае мы имеем, что $V_0(M) = 0$ при $M \in \overline{D^{(e)}}$ $\Rightarrow V_0(P) = 0$ при $P \in S \Rightarrow \Delta V_0(M) = 0$ $M \in D^i$;

т.к. $V_0(P) = 0$ при $P \in S$ мы получим внутр. задачу Д.

$$\begin{cases} \Delta V_0(M) = 0 & M \in D^{(i)} \quad (19) \\ V_0(P) = 0 & P \in S \quad (20) \end{cases}$$

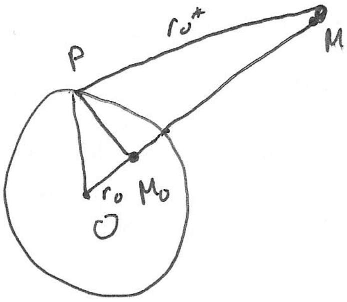
В силу ед. внутр. задачи Д. получаем из (19) и (20), что $V(M) = 0$ при $V \in D^i$ $\Rightarrow V(M) \equiv 0$ при $M \in R^3$

$$\underbrace{\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n}(P_0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial V^{(i)}}{\partial n}(P_0)}_{=0} = 4\pi\mu(P_0) \qquad (21) \Rightarrow \mu(P_0) = 0 \Rightarrow \mu(P) \equiv 0 \quad P \in S,$$ т.е.

$\mu(P)$ не является с.ф., отсюда следует, что $\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}$ не явл с.зн ур-ий (5) и (8) при любых непр ф-циях $g(P)$ и $h(P)$

Док-ны две теоремы: 1) внутр. задача Д. однозначно разрешима при любой непрерывной гр. ф-ии $g(P)$ и её решение представимо в виде пов. дв. слоя; 2) в трехмерном случае внешн. з. Н. однозн. разрешима при любой непр. гр. ф-ии $h(p)$ и её решение пред. в виде потенц. простого слоя.

13.2
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & M \in K_0^a \\ u(P) = \mu(P) & P \in \Sigma_0^a \end{cases}$$



$$r_0 \cdot r_0^* = a^2 \Rightarrow \frac{r_0}{a} = \frac{a}{r_0^*} \Rightarrow \Delta OPM_0 \sim \Delta OPM_0^* \Rightarrow$$

$$\frac{r_0}{a} = \frac{a}{r_0^*} = \frac{r_{PM_0}}{r_{PM_0^*}} \Rightarrow \frac{1}{r_{PM_0^*}} = \frac{a}{r_0\, r_{PM_0^*}}$$

$$g(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0\, r_{MM_0^*}}\right\}$$

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma_0^a} \frac{\partial g(P; M_0)}{\partial n_P}\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_0^a} \frac{a^2 - r^2}{r^3_{PM_0}}\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

14.1 Рассмотрим внутр. задачу Н.

$$\begin{cases}\Delta v(M)=0 & M\in D^i \qquad (1)\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(P)=h(P) & P\in S \qquad (2)\end{cases}$$

Будем искать решение в виде потенц. простого слоя

$$v(M)=\int_S \mu(P)\,\frac{\cos\psi_0}{r_{PM}}\,d\sigma_P \qquad (3)$$

Рассмотрим прирасту внутр. пред ~~знач~~ значения

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n}(P_0) = -2\pi\mu(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n}(P_0) = h(P_0) \qquad P_0\in S \quad (4)$$

имеем уравнение

$$2\pi\mu(P_0) - \int_S \mu(P)\,\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}}\,d\sigma_P = -h(P_0) \qquad P_0\in S \quad (5)$$

союзное ему ур-ие

$$2\pi\nu(P_0) - \int_S \nu(P)\,\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\,d\sigma_P = -g(P_0) \qquad P_0\in S \quad (6)$$

к нему приводит внешн. задача Д.

$$\begin{cases}\Delta W(M)=0 & M\in D_e \qquad (7)\\ W(P)=g(P) & P\in S \qquad (8)\\ W(M)\rightrightarrows 0 & r_M\to\infty \qquad (9)\end{cases}$$

Ища решение в виде пот дв. слоя $W(M)=\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2_{PM}}\,d\sigma_P$ (10)
и рассматр пред зн $W^{(e)}(P_0) = -2\pi\nu(P_0) + W(P_0) = g(P_0)$ (11)
приходим к (6)

Из $\int_S \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\,d\sigma_P = 2\pi$ $(P_0\in S)$ (12) следует, что $\lambda_0=-\frac{1}{2\pi}$ явл. с. знач, которому соотв с.ф $\nu_0=const$ ур-ия (27) и $\mu_0(P)$ ур-ия (26) (условием разреш является ортогон. прав. части ко всем с.ф. союзного ур.)
Докажем, что $\mathrm{rang}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)=1$. Допустим, что с. зн. $\left(-\frac{1}{2\pi}\right)$ соотв с.ф. $\mu_{01},\dots \mu_{0r}$. Образуем $v_{0k}(M)=\int_S \frac{\mu_{0k}(P)}{r_{PM}}\,d\sigma_P$ (13). Для v_{0k} им. зад.

$$\begin{cases}\Delta v_{0k}=0 & M\in D^i \qquad (14)\\ \dfrac{\partial v_{0k}}{\partial n}(P)=0 & P\in S \qquad (15)\end{cases}$$

Т.к. решение внутр задачи Н. опред. с точностью до аддитивн. постоянной, то $v_{0k}(M)=C_k$ $M\in\overline{D^i}$ $\forall k=1,2,\dots n$. (16) Рассмотрим $V(M)$:

$$V(M)=v_{0k}(M)-\frac{C_k}{C_1}v_{01}(M)=\int_S\left\{\mu_{0k}(P)-\frac{C_k}{C_1}\mu_{01}(P)\right\}\frac{1}{r_{PM}}\,d\sigma_P \qquad (17)$$

(17) – пот. простого слоя, причем в силу (16) $V(M)=0$ $M\in\overline{D^i}$ (18)
для $V(M)$ имеем задачу

$$\begin{cases}\Delta V(M)=0 & M\in D_e \qquad (19)\\ V(P)=0 & P\in S \qquad (20)\\ V(M)\rightrightarrows 0 & \text{при } r_m\to\infty \qquad (21)\end{cases}$$

(14.1) прод

В силу ед. решения внешн. з. D $V(M)=0$ при $M\in \bar{D}^e$ [redacted] (22)

$$\underbrace{\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n}(P)}_{=0}-\underbrace{\frac{\partial V^{(i)}}{\partial n}(P)}_{=0}=4\pi\underbrace{\left(\mu_{0k}(P)-\frac{c_k}{c_1}\mu_{0,1}(P)\right)}_{=0} \quad (23)$$

$\Rightarrow \mu_{0k}(P)=\frac{c_k}{c_1}\mu_{0,1}(P) \Rightarrow \operatorname{rang}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)=1$

Итак, для разр. уравнений (5)-(6) необходимо выполнение условия

$$\int_C v_0\, h(P)\,d\sigma_P=0 \Rightarrow \int_S \frac{\partial v}{\partial n}(P)\,d\sigma_P=0 \quad (24)$$

Но также д.б. разрешима внешн задача D.

$\int_S \mu_0(P)\,g(P)\,\sigma_P$ [redacted] $=0$ (25)

Условие (25) не вяжется с ед. решением внешн. задачи D

Это связано с тем, что мы ищем решение внешн. задачи D в виде потенциала дв. слоя, который ведёт себя ~~как~~ на бесконечн. как $\underline{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ в то время как регулярное решение задачи D должно вести себя на бесконечности как $\underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$. Будем искать решение внешней задачи D в виде

$$W(M)=\int_S v(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}\,d\sigma_P+\frac{\alpha}{r_{M_iM}} \quad (26) \qquad M_i\in D_i;\ \alpha=const$$

Записав соответствующее интегр. ур-ие. мы получим правую часть в виде $g(P_0)+\frac{\alpha}{r_{M_iP_0}}$ и необходимое условие разреш. принимает вид $\int_S\left(-g(P_0)+\frac{\alpha}{r_{M_iP_0}}\right)d\sigma_P=0$ (27)

$$\alpha\underbrace{\int_S \frac{\mu_0(P)}{r_{M_iP_0}}\,d\sigma_P}_{=const\ (\text{можем подобр.})}=\int_S g(P)\,\mu_0(P)\,d\sigma_P \quad (28)$$

$\alpha=\int_S g(P)\,\mu_0(P)\,d\sigma_P$; тогда $W(M)=\int_S v(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}\,d\sigma_P+\frac{1}{r_{M_iM}}+\int_S g(P)\,\mu_0(P)\,d\sigma_P$ (29)

Действительно соотв. интегр ур-ие будет иметь беск. кол-во решений, но

$$W(M)=\int_S (v(M)+cv_0)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}\,d\sigma_P+\frac{\alpha}{r_{M_iM}}=\int_S v(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM_0}^2}\,d\sigma_P+cv_0\underbrace{\int_S\frac{\cos\varphi}{r_{PM_0}^2}\,d\sigma_P}_{=0\ (M\in D^e)}+\frac{\alpha}{r_{M_iM}}$$

то решение внешн. ~~внутр.~~ задачи D. ед.

Док-ли две теоремы

1) Внутр. з. Н. имеет решение опред с точностью до ад. постоянной при вып. необх услов разреш. (24); её решение представимо для любой непр. ф-ии в виде пот. простого слоя.

2) Внешн з D. ~~имеет~~ однозн. разреш. для любой гр. ф-ии и её решение представимо в виде (29)

(14.2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (x;t) \in \Omega_\infty \quad (1) \\ u(x;0) = \varphi(x) & \\ u_t(x;0) = \psi(x) & x \in R^1 \quad (2) \end{cases}$

Ур-ие хар-к имеет вид $dx^2 - a^2 dt = 0$, которое распадается на два $dx - adt = 0$; $dx + adt = 0$

имеем два семейства хар-к

$x - at = const = C_1$; $x + at = const = C_2$

Для приведения к канон. виду надо ввести перем $\xi = x - at$; $\eta = x + at$

Мы имеем след. канон. ф-лу

$u_{\xi\eta} = 0$

Проинтегрировав по η: $u_\xi = \hat{f}(\xi)$; затем проинтегрировав по ξ:

$u = \int \hat{f}_1(\xi) d\xi + f_2(\eta)$, что можно записать в виде $u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

в старых переменных: $u(x;t) = f_1(x+at) - f_2(x-at)$ $\overset{(1)}{-}$ решение однор ур:

$\begin{cases} u(x;0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) & x \in R^1 \\ u_t(x;0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x) & ('\text{ - по } x \text{ (при } t=0)) \end{cases}$

перепишем задачу через ζ

$\begin{cases} f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = \varphi(\zeta) \\ f_1(\zeta) - f_2(\zeta) = \frac{1}{a} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(\alpha) d\alpha + C \end{cases}$

откуда

$\begin{cases} f_1(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) + \frac{1}{2a} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \\ f_2(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) - \frac{1}{2a} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2} \end{cases}$

возвр к (1)

$$u(x;t) = f_1(x+at) - f_2(x-at) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

(15.1) В трехмерном случае решение внешней задачи Н., регулярное на бесконечности, единственно.

Пусть $u_1 \not\equiv u_2$ - реш. нашей задачи. Рассмотрим $v = u_1 - u_2$. Задача:

$\begin{cases} \Delta v = 0 & M \in D^{(e)} \quad (1) \\ \frac{\partial v}{\partial n}(P) = 0 & P \in S \quad (2) \\ v(M) \rightrightarrows 0 & r_M \to \infty \quad (3) \end{cases}$

$\int\limits_{D_e} v \underbrace{\Delta v}_{=0} dV = \int\limits_S v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} d\sigma - \int\limits_{D^e} grad^2 v \, dV \Rightarrow grad\, v = 0 \Rightarrow v = const = C$

В силу (3) имеем $C = 0 \Rightarrow v \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2 \Rightarrow$ реш ед.

(15.2) $W[J_\nu; H_\nu^{(1)}] = -\frac{1}{\sin\nu\pi} W[J_\nu; J_{-\nu}]$.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{x^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)}\right\} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2 P(x)\right\} \qquad |P(0)|<\infty$$

$$\cancel{J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\right.} \qquad J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + x^2 Q(x)\right\} \qquad |Q(0)|<\infty$$

$$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{2xP(x) + x^2P'(x)\right\}; \quad J_{-\nu}'(x) = -\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{2xQ(x) + x^2Q'(x)\right\}$$

$$W[J_\nu; J_{-\nu}] = J_\nu J_{-\nu}'(x) - J_\nu'(x)J_{-\nu}(x) = -\frac{2\nu}{x}J_\nu J_{-\nu} = -\frac{2\nu}{x} = xR(x) \qquad |R(0)|<\infty$$

$$W[J_\nu; J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)} + xS(x) \qquad |S(0)|<\infty$$

$$\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu) = \nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \nu\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)} = \frac{\nu\pi}{\sin\nu\pi} \Rightarrow$$

$$W[J_\nu; J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x}\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi} + xS(x)$$

(Т. Остроградского–Лиувилля; $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ $\;W[y_1; y_2] = Ce^{-\int p(x)dx}$)

Для ур-ия Бесселя ($y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0$) $\;W[J_\nu; J_{-\nu}] = C(\nu)e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \frac{C(\nu)}{x}$

$$\Rightarrow -\frac{2\nu\sin\nu\pi}{\nu\pi x} + xS(x) = \frac{C(\nu)}{x} \Rightarrow C(\nu) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}$$

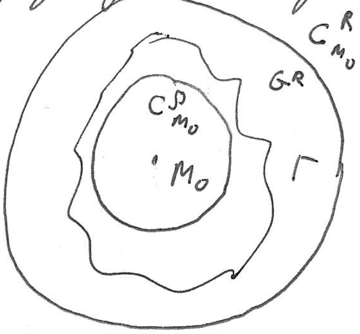
$$\Rightarrow W[J_\nu; J_{-\nu}] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

(т.к. для $\nu = n$ $\;W[J_n; J_{-n}] = 0$, то ф-ла справ. и для $\nu = n$)

отсюда имеем $W[J_\nu; H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}$; $\;W[J_\nu; H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x}$

(16.1) Рассмотрим внешн. задачу D для ур-ия Л в двумерном случае.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & M\in G_e \quad (1)\\ u(P) = \mu(P) & P\in\Gamma \quad (2)\\ |u(M)|\le N & M\in\overline{G_e} \quad (3)\end{cases}$$



Классическое реш задачи (1)–(3) ед.

Пусть $u_1(M)\not\equiv u_2(M)$. Введем $V(M) = u_1 - u_2$. Спр. задача

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & M\in G_e \quad (4)\\ V(P) = 0 & P\in\Gamma \quad (5)\\ |V(M)|\le N_1 + N_2 = N & N\in G_e \quad (6)\end{cases}$$

построим барьер: $W(M;R) = N\frac{\ln r_{MM_0}/\rho}{\ln R/\rho}$. Справедлива задача

$$\begin{cases} \Delta W = 0 & M\in D_e \quad (7)\\ r_{MM_0} > \rho;\ R > \rho \quad W > 0 & \text{на } \Gamma \quad (8)\\ W = N & \text{на } C^R_{M_0} \quad (9)\end{cases}$$

Сравнив (4)–(6) с (7)–(9) мы видим, что ф-ия W явл мажорантой для $|V|$, т.к. из принц. максимума (принц. сравн.) вытекает, что $|V(\bar M)|\le W(\bar M; R)$ для $\forall\,\bar M\in G_R$. Зафиксируем $\bar M$ и перейдем к пределу при $R\to\infty$; тогда $W(\bar M; R)\to 0 \Rightarrow |V(\bar M)| = 0$ $\;\bar M\in G_e \Rightarrow u_1(M)\equiv u_2(M)$ $\;M\in G_e$.

(16.2) $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-\nu}\frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right\} =$

$$= i^{-\nu}\frac{1}{2}\left\{e^{i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right] + e^{-i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right]\right\} =$$

$$= e^{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right\}$$

(17.1) Будем рассматривать ур-ия Бесселя и случай $\nu \geq 0$:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \ (1); \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \ (2)$$

Ур-ие Б. имеет особую точку $x = 0$. Поэтому её решение $y(x)$ можно искать в виде обобщенного степ. ряда (метод Фробениуса)

$$y(x) = x^\sigma(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\sigma+m} \ (3)$$ где $a_0 \neq 0$ и σ - неизв. пост.

подставив ряд в ур-ие и из требов. обращения в нуль в получ. выражении всех коэф при всех степ. x будем иметь след. рек. соотнош:

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0;\ a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0,\ a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0, \dots, \ (4)$$

$$a_m[(\sigma+m)^2 - \nu^2] + a_{m-2} = 0, \ m = 2, 3, \dots$$

Из первого ур-ия вытекает, что $\sigma^2 - \nu^2 = 0$ или $\sigma = \pm\nu$ (5)

при $\sigma = -\nu$ и $\nu \neq \frac{m}{2}$, $m = 1, 2, \dots$, выполнено условие $(\sigma+m)^2 - \nu^2 \neq 0$ $m = 1, 2, \dots$ (6)

при $\sigma = \nu$ (6) вып. всегда

Из второго ур-ия (4) при $\sigma = \pm\nu$, следует, что $a_1 = 0$ (7) Условие (6) дает согласно (6) рекур. ф-лу

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Из ф-л (7) и (8) вытекает, что все неч. коэф равны нулю.

а) рассмотрим случай $\sigma = \nu$. Положим в (8) $m = 2k$:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+\nu)} \quad (9)$$

Последовательно применяя ф-лу (9), получим:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \quad (10)$$

Решение однор ур-ия Б (2) определяется с точностью до ~~коэф.~~ произв. множит. a_0. Выберем его в виде

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \quad (11)$$

(17.1) прод

Тогда из (10) и (11) получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ – сходится по пр. Даламбера

δ) $\sigma = -\nu$. Положим в (8) $m = 2k$. Тогда из (8) получим $\nu \neq k$, т.е ν не явл. целым числом. Положив

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$$

аналогично получим

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu\to n} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} =$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

(17.2) см (8.2)

$$\rho(x) \equiv 1;\quad \tau(x) = \frac{d}{dx}\sigma(x) = -2x;\quad \sigma(x) = -x^2;\quad C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

$$\psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{P}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{C_n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-2z)^n$$

$$zt^2 + t - (z+x) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z}$$ выбираем $t^+ \to x \quad z \to 0$

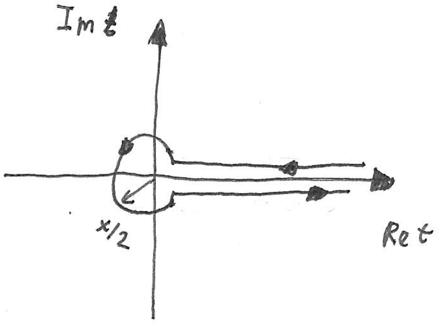
$t^- \to \infty \quad z \to 0$

заменяя $(-2z)$ на z

$$\psi(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

(18.1)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t} t^{-z-1} dt$$



положим $z = k+\nu$

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t} t^{-k-\nu-1} dt$$

имеем

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!}\frac{dt}{t} =$$

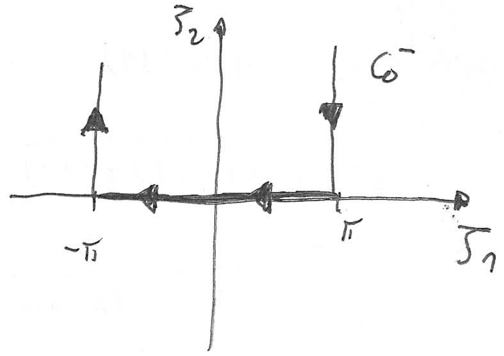
$$= \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu e^{\frac{x^2}{4t} - t}\frac{dt}{t}$$

Сделаем замену $t = \frac{x}{2} e^{i(\zeta-\pi)}$

$dt = -it\,d\zeta$; $\frac{x}{2t} = e^{i(\zeta-\pi)}$

$\frac{x^2}{4t} - t = \left(e^{i2(\zeta-\pi)} - 1\right)t = \frac{x}{2}\left\{e^{i(\zeta-\pi)} - e^{-i(\zeta-\pi)}\right\} =$

$= ix\sin(\zeta-\pi) = -ix\sin\zeta$



имеем

$J_\nu = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^-} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^+} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}\,d\zeta$ — интегр. пр. Зомерфельда

$\xi = \zeta_2$ при $\zeta = \pm\pi + i\zeta_2$; $\alpha = \zeta_1$ при $\zeta = \zeta_1$ имеем

$J_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}\,d\alpha - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-x\,sh\,\xi - \nu\xi}\,d\xi$

при $\nu = n$

$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha + in\alpha}\,d\alpha \cancel{= \left\{\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{i^n}{2\pi}}$

(18.2) Существует ед. кл. решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x;0) = \varphi(x) \\ u_t(x;0) = \psi(x) \end{cases}$$

которое опред ф-лой Даламбера.

Предполагая сущ. другого решения проделываем те же выкладки и имеем ту же ф-лу.

Если предположить, что $\varphi(x) \in C^{(2)}(R_1)$; $\psi(x) \in C^{(1)}(R_1)$, то прямой подстановкой убедимся, что классич ур-ие сущ и предст. ф-лой Даламбера

! см. (14.2)

(19.1) Интегр. предст. ф-ии Бесселя подсказывает, что можно искать решение уравнения Бесселя в ф-ме интегралов на комплексной плоскости вида:

$y(x) = \int\limits_C e^{-ix\sin\zeta}\Phi(\zeta)\,d\zeta$, (1) где C — контур на компл. плоскости $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, концы которого уходят на бесконечность, а $\Phi(\zeta) = e^{i\nu\zeta}$

Контур C может уходить на бесконечность лишь в тех областях, где обеспечена сходимость интеграла (1). При веществ. $x > 0$ сходимость интеграла обеспечивается, если мнимая часть $\sin\zeta$ ~~меньше~~ нуля;

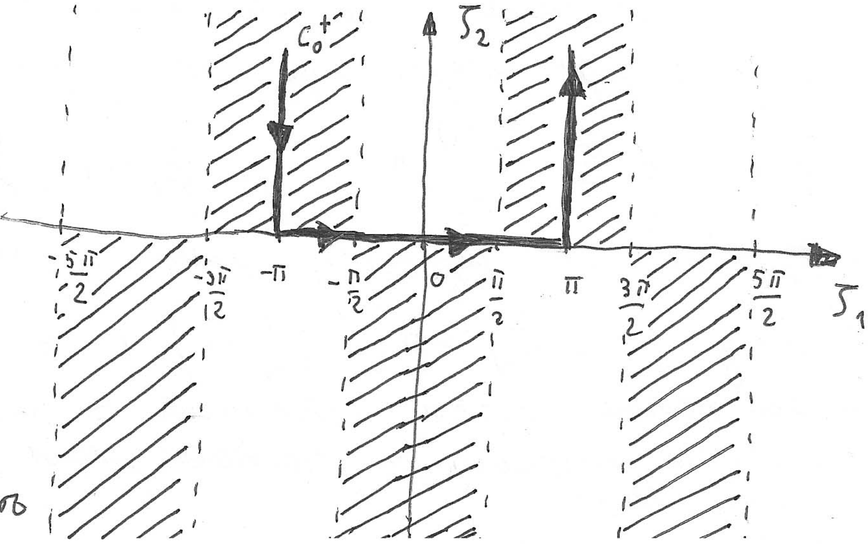
$\mathrm{Im}\,\sin\zeta = \cos\zeta_1\,sh\,\zeta_2 < 0$. (2)

(19.1) прод

При $\zeta_2 > 0$ имеем $\operatorname{sh}\zeta_2 > 0$, и условие (2) выполняется если $\cos\zeta_1 < 0$, т.е $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \zeta_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

При $\zeta_2 < 0$ условие (2) вып, если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \zeta_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

т.о. получаем с-му областей, в которых контур может уходить на бесконечность.



Покажем теперь, что $y(x)$ удовл. ур-ию Бесселя. Обозначим через L_ν оператор Бесселя $L_\nu[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y$, а через $K(x;\zeta)$ - ядро интеграла (1): $K(x;\zeta) = e^{-ix\sin\zeta}$. Легко убедиться в справ. ф-лы:

$L_\nu[K(x;\zeta)] = -K_{\zeta\zeta}(x;\zeta) - \nu^2 K(x;\zeta)$

Проинтегрируем интеграл $L_\nu[y]$ по частям, учитывая, что в силу выбора контура C подстановки на бесконечности обращаются в нуль (заметим, что для интегр (1) вып. услов дифф по зн. интеграла), получим

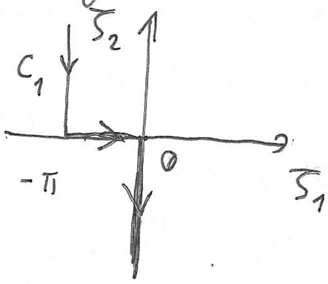
$$L_\nu[y(x)] = \int_C L_\nu[K(x;\zeta)]\varphi(\zeta)d\zeta = -\int_C\{K_{\zeta\zeta}(x;\zeta) + \nu^2K(x;\zeta)\}\varphi(\zeta)d\zeta =$$
$$= -\int_C K(x;\zeta)\{\varphi''(\zeta) + \nu^2\varphi(\zeta)\}d\zeta$$

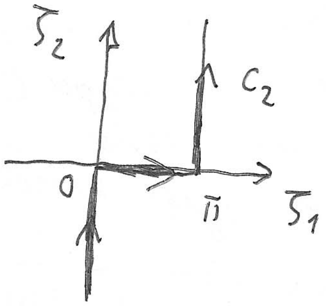
Из выр следует, что при $\varphi(\zeta) = e^{i\nu\zeta}$ ф-ия $y(x)$ опред соотн (1) будет удов. ур-ию Бесселя $L_\nu[y] = 0$.

Определим ф-ии Ханкеля I и II го рода

$$H_\nu^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\zeta_1 + i\nu\zeta}d\zeta$$

$$H_\nu^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-ix\sin\zeta_1 + i\nu\zeta}d\zeta$$





(19.2) см. (14.2)

(20.1) см (7.2)

(20.2) см (13.2)

(21.1) Производящей ф-ей КОП называется ф-ия $\Psi(x;z)$, разложение в ряд Тейлора которой при дост. малых z имеет вид

$$\Psi(x;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{p}_n(x)}{n!}z^n, \quad \text{где } \tilde{p}_n(x)=\frac{1}{C_n}p_n(x) \quad (1)$$

Будем исходить из обобщ. ф-лы Родрига: $p_n(x)=\frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}$. (2)

В силу $\rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx\right)$ ф-ия $\sigma^n(z)\rho(z)$ является аналит. ф-ей компл. ~~ф-ия~~ переменной z в окр. отрезка $[a;b]$ действ. оси компл. плоскости z. Воспользуемся для ее n-ой произв. интегр. представл. Коши:

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}}dt \quad (3),$$

где интеграл берется по контуру, содерж. точку $t=x$ внутри себя. Из (3) и (2) вытекает, что $\tilde{p}_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}}dt$ (4). Подставляя (1) в (4)

$$\Psi(x;z)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\rho(t)}{t-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right)^n dt$$

При достаточно малом $|z|$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right\}^n=\frac{1}{1-\frac{\sigma(t)z}{t-x}}=\frac{t-x}{t-x-\sigma(t)z}$$

и окончательно

$$\Psi(x;z)=\frac{1}{2\pi i\rho(x)}\int_C\frac{\rho(t)}{t-x-z\sigma(t)}dt \quad (5)$$

При $z=0$ $t=x$ – нуль знаменателя в (5) $\overset{\text{т.к.}}{\Rightarrow}$ $t=x$ – расположено внутри контура C ?! $\Rightarrow$ по непрерывности при малых z внутри C будет только один нуль знаменателя, т.е. подынтегральная ф-ия будет иметь ед. полюс

$$\Psi(x;z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}2\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{\rho(t)}{(t-x)-\sigma(t)z};t_0\right]=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-\sigma'(t_0)z}$$

где t_0 – корень ур-ия $(t-x)-\sigma(t)z=0$

(21.2) см. (140) (142)

дополнение к 140.4°)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x;\xi;t)dx=\left\{z=\frac{x-\xi}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}$$

Мощность точечного источника: $Q=C\tilde{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x;\xi;t)dx=C\tilde{\rho}=\rho$

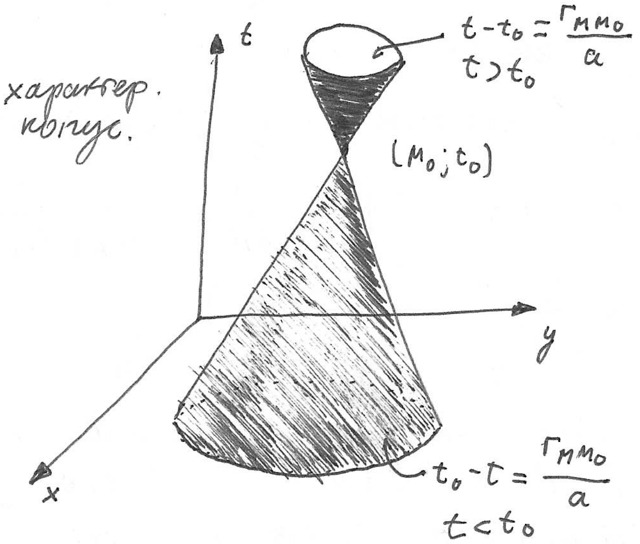
? ЛнМФ 260-...

(22.1)

Введем локальное время t':

$t' = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$

характер. конус.



$u(r;\theta;\varphi;t) \to \mathcal{U}(r;\theta;\varphi;t')$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t'^2}$$

$$\Delta_{\theta;\varphi} u = \Delta_{\theta;\varphi}\mathcal{U}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t'}$$

$$\Delta \mathcal{U} = -\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}\right) - \frac{1}{a^2}\mathcal{F} \quad (1)$$

(подставив все в $u_{tt} = a^2\Delta u + f(M \cdot t)$
$u(M;0) = \varphi(M)$; $u_t(M;0) = \psi(M)$)

~~рассмотрим~~

$$\left(\cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t'^2}} = \cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t'^2}} + a^2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} + 2a\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r\partial t'} + \frac{2a^2}{r}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \frac{2a}{r}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'} + \frac{a^2}{r^2}\Delta_{\theta;\varphi}\mathcal{U} + \mathcal{F}(M;t)\right)$$

Рассмотрим $t' = 0$: мы можем формально рассмотреть (1) как ур-ие Пуассона. При этом разум мы предполагаем решение нашего исходного ур-ия. Выразим с помощью гр. ф-лы Гр решение ур-я (1)

$$u(M_0;0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n}(P;0) - \mathcal{U}(P;0)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right\}d\sigma_P + \frac{1}{2\pi a}\int_D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n_P}\left(r\frac{\partial \mathcal{U}(M;0)}{\partial r}\right)dV_M +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^3}\int_D\frac{\mathcal{F}(M;0)}{r_{MM_0}}dV_M \quad (2)$$

Предполагая, что D - звездная от M_0: любой луч выходящий из M_0 пересекает S в одной точке.

$$I = \int_D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}(M;0)\right)dV_M = \int_D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}(M;0)\right)r^2\,dr\,d\omega =$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}(P;0)r^2 d\omega = \int_S \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{U}}{dt'}(P;0)\cos(\widehat{\vec{n}_P\vec{r}})\,d\sigma_P = \int_S\frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}(P;0)\frac{dr}{dn_P}d\sigma_P \quad (3)$$

(3) → (2)

$$\mathcal{U}(M_0;0) = \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial \mathcal{U}(P;0)}{\partial n} - \mathcal{U}(P;0)\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \frac{2}{a r_{M_0P}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t'}(P;0)\frac{\partial r}{\partial n_P}\right\}d\sigma_P +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_D\frac{\mathcal{F}(M;0)}{r_{MM_0}}dV_M \quad (4)$$

Вернемся к пред. коорд:

$$\frac{\partial \mathcal{U}(P;0)}{\partial n} = \left\{\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial r}}_{=-\frac{1}{a}}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}_{t = t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}} = \left\{\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}_{t = t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}}$$

$$u(M_0;0) = \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \frac{1}{a r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}\Bigg|_{t = t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}} d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a^2}\int_D\frac{f\left(M; t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}dV_M$$

(22.2) см (75)-(78)

(23.1) запишем ф-лу Кирхгофа:

$$u(M_0;t)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)+\frac{1}{ar_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}\Bigg|_{t=t_0-\frac{r_{MP}}{a}}d\sigma_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_D\frac{f\left(M;t_0-\frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}dV_M$$

Пусть выполняется условие гладкости входных данных задачи К:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta u+f(M;t) & (M;t)\in\Omega_3=R^3\times(0;T]\\ u(M;0)=\varphi(M); \; u_t(M;0)=\psi(M)\end{cases}$$

обеспечив сущ. решение и применимость ф-лы К.

$\Sigma_{M_0}^{at_0}\to S$; $K_{M_0}^{at_0}\to D$; тогда

$$u\left(P;t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}\right)=u\left(P;t_0-\frac{at_0}{a}\right)=u(P;0)=\varphi(P)\qquad P\in\Sigma_{M_0}^{at}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(P;t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(P;0)=\psi(P)\qquad P\in\Sigma_{M_0}^{at_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_{M_0}^{at}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)r^2d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)\Big|_{r=at_0}d\omega=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_\Omega r\varphi\Big|_{r=at_0}d\omega=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}d\sigma_P$$

$t_0\to t$; $M_0\to M$

$$u(M;t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_M^{at}}\frac{\varphi(P)}{r_{PM}}d\sigma_P+\int_{\Sigma_M^{at}}\frac{\psi(P)}{r_{PM}}d\sigma_P\right\}+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{K_M^{at}}\frac{f\left(Q;t-\frac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}}dV_Q$$

Если $\varphi\in C^{(3)}(R^3)$, $\psi(P)\in C^{(2)}(R^3)$, $f(M;t)\in C^{(2)}(\Omega_3)$, то ф-ла П. является класс. решением.

(23.2) Рассмотрим внутр. задачу Неймана:

$$\Delta u=-F \text{ в } D;\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=f\qquad(1)$$

(1) имеет решение не всегда, когда реш сущ оно неедин.

Рассмотрим представление для $u(M)$ в случае з. Д

$$u(M)=\oint_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}G-u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}dS-\int_D G\Delta u\,dV,$$ но в случае з Н. нельзя наложить доп. условие: $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S=0$ (2), что-бы исключить слагаемые $u|_S$ (аналогично первой к. краевой задачи). Действительно, если потребовать удов. ф-ей $G=\frac{1}{4\pi R}+v$ д.у., то для опред v имеем кр. задачу.

$$\begin{cases}\Delta v=0\\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\Big|_{P\in S}\end{cases}\qquad(3)$$

(23.2) прод.

Воспольз. ф. ф-лой Грина, положив в ней $u \equiv 1$

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P = -1 \neq 0 \quad M \in D$$ (4); следов (3) решения не имеет. Это означает, что ф-ии $G = \frac{1}{4\pi R} + V$, удовл условию (2) не существует.

Т.к. решение внутр. задачи Н. определено с точностью до произв. пос. слагаемого, заметим, что получим иной предел решения, накладыв. условие $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = C_0 = const \neq 0$. C_0 выберем, когда разр задачи

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D \\ \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_S = C_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\Big|_{P \in S} \end{cases}$$

т.е. $$\oint_S \frac{\partial V}{\partial n}dS = \oint \left\{C_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\right\}dS_P = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} C_0 = -\frac{1}{S_0}$$

т.о. ф-ия $G(M;Q)$ называется ф-ей Гр. внутр. з Н. для оператора Δ:

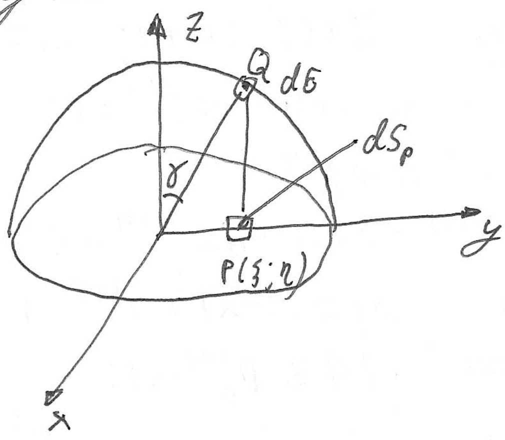
1) $G(M;Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + V$, где V – гарм в D ф-ия

2) $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 – площ. пов-ти S

(24.1) см ф-лу П для трехмерного случая (23.1)

Положим $M = M(x;y)$; $P = P(\xi;\eta)$ – двум. случай, тогда из ф-лы П(1) можно получить ф-лу для дв. случая

$$d\sigma = \frac{dS_0}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$



$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}$$

$$\frac{d\sigma}{at} = \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4\pi a}\int_0^{at} d(a\tau)\int_{U_M^{at}} \frac{f(Q;t-\tau)}{r_{QM}}d\sigma_Q \quad (3)$$

из (1)-(3)

$$u(x;y;t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_{U_M^{at}} \frac{\varphi(\xi;\eta)\,d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \int_{U_M^{at}} \frac{\psi(\xi;\eta)\,d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \int_{U_M^{a\tau}} \frac{f(\xi;\eta;t-\tau)\,d\xi\, d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$

24.2 $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} e^{i(ix)} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2}) \right\} =$

$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

25.1 $P_n^{(m)} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ (1) (def)

Получим диф. ур-ие для присоед ф-ий Л. Ф-ия $P_n(x)$ удов ур-ю Л.

$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$ (2)

Продиф. (2) m раз, учитыв. ф-лу Лейбница: $(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}$

Получим

$0 = [(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u]^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} - \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2x)^{(k)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} =$

$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} =$

$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} + \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} (1-x^2)^{(l)} u^{(m-l+2)} + n(n+1)u^{(m)} =$

$= C_m^0 (1-x^2) u^{(m+2)} + (C_m^1 + C_m^0)(1-x^2)' u^{(m+1)} + (C_m^2 + C_m^1)(1-x^2)'' u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)}$,

причем мы учли, что $k = 0, 1, 2$; а $l = 1, 2$, поскольку произв более высоких порядков от $(1-x^2)$ тожд равны нулю.

Поскольку $C_m^1 + C_m^0 = m+1$; $C_m^0 = 1$; $C_m^2 + C_m^1 = \frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2}$; то

$[(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u]^{(m)} = (1-x^2)u^{(m+2)} + (m+1)(-2x)u^{(m+1)} + \frac{m(m+1)}{2}(-2)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0$; т.е

$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2x(m+1)u^{(m+1)} - m(m+1)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0$. (3)

Полагая $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u^{(m)}(x)$, получаем из (3) след. ур-ие для ф-ии $y(x) \equiv P_n^{(m)}(x)$:

$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} y = 0$ (4)

или

$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} y = 0$ (5)

25.2 см. 1.2