1. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – 2 ЛНЗ реш-е ур-я $\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) - q(x)u(x)=0$, где $K(x)=(x-a)\varphi(x)$, а $\varphi(a)\neq 0$ непрер. на $[a,b]$ ф-е.

Лемма 1:

Если $u_1(x)$ огранич. при $x=a$ решение, представимое в виде $u_1(x)=(x-a)^n\psi(x)$, то второе решение неограниченно.

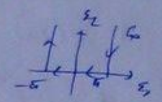
Лемма 2:

Пусть выполн. усл. леммы 1. Если $u_1(a)\neq 0$ (т.е. $n=0$), то $u_2(x)$ имеет в т. $x=a$ логарифм. особенность: $u_2(x)\sim\ln(x-a)$ при $u_1(a)\neq 0$. Если $u_1(x)$ имеет при $x=a$ нуль $n$-го порядка ($n>0$), то $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс того же порядка: $u_2(x)\sim(x-a)^{-n}$, если $u_1(x)\sim(x-a)^n$ ($n>0$).

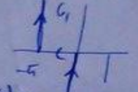
2. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$. Любая пара из след. ф-й образует ФСР:

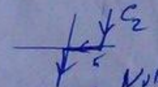
$$\{\underbrace{J_\nu(x), N_\nu(x)}_{\text{вещ.}}, \overbrace{H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)}^{\text{компл.}}\}$$

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)\,d\xi, \quad \zeta=\xi_1+i\xi_2$$



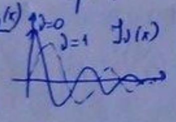
$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)\,d\xi$$

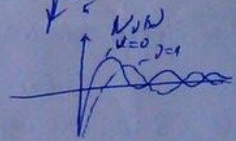




$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_2}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)\,d\xi$$

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\}=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$




3.
$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. Ф-ии б полуцел. порядка всегда можно выразить

4.
$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)=i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)=-i\,\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}=\frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\}$$

интегр. предст-ие в №2. График $N_\nu$ в №2.

5. $x\to\infty$:

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(1/x^{3/2})$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(1/x^{3/2})$$

$$J_\nu(x)=\operatorname{Re}H_\nu^{(1)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(1/x^{3/2})$$

$$N_\nu(x)=\operatorname{Im}H_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(1/x^{3/2})$$

$x\to 0$

$$J_\nu(x)\sim\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad \nu\geq 0,\ x>0$$

$$N_\nu(x)\sim\begin{cases}\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu>0\end{cases}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x)\sim\begin{cases}\pm i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu=0 \\ \mp i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu>0\end{cases}$$

6. Теор Стеклова:

Всякая 2-ой диф. ф-я на $[0,a]$ $f(r)$, огранич. при $r=0$ и обращ. в нуль при $r=a$, может быть разлож. в абс. и равномер. сход-ся ряд по ф-ям Бесселя:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right), \text{ где } A_m = \frac{\int_0^a f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right) r\,dr}{\|J_n\|^2},$$

$$\|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2$$

Задача на соб. значения для оператора Бесселя:

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 \le r \le a \\ \alpha \frac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0 \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \not\equiv 0. \end{cases}$$

задача для опр. $\lambda_n$: $\alpha\sqrt{\lambda_n} J_n'(\sqrt{\lambda}a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$

7. Чисто мним. аргумент:

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0.$$

Ф-я Инфельда:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix); \quad I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

ф-я Макдональда:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi i\, e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

$x \to \infty$:

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right], \quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]$$

При $\nu=0$: $I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots$ $\Rightarrow$ при $x=0$ $I_\nu$ имеет нуль $\nu$-го порядка. Т.к. $I_\nu$ и $K_\nu$ – ФСР, то при $x=0$ при $\nu=0$ $K_\nu(x)$ имеет логарифм. особ-ть, а если $\nu \ne 0 \Rightarrow$ полюс $\nu$-го порядка.

$K_0(x) = -I_0(x)\ln\frac{2}{x} + \ldots$

8. Назовем систему полиномов $\{P_n(x)\}$ $\boxed{\text{всех}}$ степеней, задан. на отрезке $[a,b]$ системой класс. ортогон. полиномов (ОП), если эти полиномы ортог. на $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, удовл. ур-ю Пирсона: $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$, здесь $\tau(x)$ – линейн. ф-я $= Ax+B$, $A$ и $B$ опр-ся из условия $x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b = 0$, $m = 0,1,2\ldots$, а

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & b \ne \infty,\ a \ne \infty \\ (x-a) & b=\infty,\ a \ne -\infty \\ (b-x) & b \ne \infty,\ a=-\infty \\ 1 & a=-\infty,\ b=\infty \end{cases}$$

Теорема о нулях:

ОП $p_n(x)$ имеет $n$ простых вещест. нулей, располож. внутри отрезка $[a,b]$.

9. $\begin{cases} \frac{d}{dx}\{\sigma\rho \frac{dp_n}{dx}\} + \lambda_n \rho y = 0, & x\in(a,b) \\ |y(a)|<\infty, & |y(b)|<\infty \end{cases}$

Ур с соб. значений: $\sigma(x) p_n''(x) + \tau(x) p_n'(x) + \lambda_m p_n(x) = 0.$

получаем: $p_n(x) x^{m-1} \sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b = -\int_a^b x^{m-1} p_n(x)\sigma(x)\rho(x)dx = 0 \Rightarrow$

$\int_a^b (x^m)' p_n(x)\sigma(x)\rho(x)dx = 0 = p_n(x) \underbrace{x^m\sigma(x)\rho^a(x)}_{0}\Big|_a^b - \int_a^b x^m\{\sigma\rho p_n'' + \underbrace{(\sigma\rho)'}_{\tau\rho} p_n\} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b p_n(x)\{\sigma p_n'' + \tau p_n'\}\rho(x)dx = 0 \quad (1)$

$q_n(x) = \sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) = \sum_1^n c_i p_i(x), \quad (2) \qquad (1),(2) \Rightarrow$

$0 = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b p_m(x) p_i(x)\rho(x)dx = c_m \int_a^b p_m^2(x)\rho(x)dx = c_m \|p_m\|^2, \; m<n$

$c_0, c_1 \ldots c_{m-1} = 0 \quad c_m \neq 0. \quad \Rightarrow q_n(x) = c_m p_n(x)$

$\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) = c_m p_n(x). \qquad \lambda_m = -c_m \Rightarrow$

$\underline{\sigma(x) p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_m p_n'(x) = 0.}$

10.

$\rho_m p_n^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_{mm}} \frac{d}{dx}\{\rho_{m+1} p_n^{(m+1)}\} \Rightarrow \rho p_n(x) = \rho_0 p_n^{(0)} = \frac{1}{\lambda_{n0}} \frac{d}{dx}(\rho_1 p_n^{(1)}) =$

$= \ldots \frac{1}{A_{nm}} \frac{d^m}{dx^m}(\rho_m p_n^{(m)}), \quad A_{nm} = (-1)^n \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk}.$

т.к. $p_n^{(n)} = n! a_n$, то $m=n$: $\quad p_n(x) = \underbrace{\frac{n! a_n}{A_{nn}}}_{c_n} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\rho_n(x))$;

$\underline{p_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n(x)\rho(x))}$ — обобщ. ф-ла Родрига

Для полиномов Лежандра: $\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \Rightarrow$

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$

11. Полиномы Лежандра

Класс. ортог. полином на $[-1,1]$ и орт. с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ — полином Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$;

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}.$

полиномы Лежандра — $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x).$

$\rho(x) = 1, \quad \tau(x) = -2x. \qquad P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}((1-x)^n(1+x)^n)$

Задача на соб. зн.:

$\begin{cases} \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + \lambda_n y = 0 & -1<x<1 \\ |y(\pm1)|<\infty, & \lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1) = n(n+1), \text{ т.к. } \alpha=\beta=0. \end{cases}$

$\|P_n\|^2 = (-1)^n a_n n! c_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$ из $\|p_n\|^2 = (-1)^n n! a_n c_n \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx.$

$a_n x^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!}$

12. Полиномы Лагерра — от полинома Якоби $\alpha=0$, $\beta=\infty$.

$\sigma(x)=x$, $\rho(x)=\frac{1}{x}\exp\left\{\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx\right\}=x^{\alpha}e^{Ax}$, $\alpha=B-1$.

$\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha>-1$.

Опр: Классич. О.П. на $[0,\infty)$ и орт. с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ — обобщ. полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^{-x}x^{n+\alpha}\right\}$.

$\alpha=0 \Rightarrow L_n^{(0)}(x)$ — полиномы Лагерра.

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^n e^{-x}\right\}$$

Нр. задача:
$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}L_n\right)+\lambda_n e^{-x}L_n=0, \quad 0<x<\infty,$$

$L_n$ непр. и квадратично интегрируемы с весом $\rho=x^{\alpha}e^{-x}$ на $[0,\infty)$

Полиномы Эрмита: $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$. $\sigma(x)=1$,

$\rho(x)=\exp\left\{\int\tau(x)dx\right\}$, $\tau(x)=-2x \Rightarrow \rho(x)=e^{-x^2}$.

Опр: Классич. О.П. на $(-\infty,\infty)$ и орт. с весом $\rho=e^{-x^2}$ — полиномы Эрмита, $\lambda_{n}$. наст.

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right); \quad \begin{cases}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x^2}y=0, & -\infty<x<\infty\\ y \text{ имеет непр. нен., квадр. интег. с весом } e^{-x^2} \text{ на } (-\infty,\infty)\end{cases}$$

13.

Производящей ф-ей классич. О.П. наз-ся ф-я $\Psi(x,z)$, разложение которой в ряд Тейлора при малых $z$ имеет вид
$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_n(x)}{n!}z^n, \text{ где } \tilde{P}_n(x)=\frac{1}{C_n}P_n(x).$$

Для полиномов Лежандра:
$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)}, \quad t-x-z\sigma(t)=0 \Rightarrow zt^2+t-(z+x)=0,$$

ближ. корень к $t=x$ при малых $|z|$ $\quad t_0^{+}=\frac{-1+\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z} \Rightarrow$

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{1+2zt_0^{+}}=\frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}, \text{ и т.к. } \frac{\hat{P}_n(x)}{n!}z^n=\frac{P_n(x)}{C_n n!}z^n=P_n(x)(-2z)^n \Rightarrow$$

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\quad}}=\sum P_n(x)(-2z)^n, \text{ замен. } z \text{ на } -\frac{z}{2}:$$

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

---

14. Из общ. св-в классич. О.П.: система полин. Лежандра полная, замкнутая. $[-1,1]$

Теорема Стеклова:

Всякая 2-ж. диф. ф-я на $[-1,1]$ $f(x)$ разложима абс. и равномер. сход-ся ряд по полиномам Лежандра: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n P_n(x)$,

где $R_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)P_n(x)dx$, $n=0,1,2\ldots$

15. Присоед. ф-ии Лежандра — ф-ии, опр-е соотношением
$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \quad m>n \; P_n^{(m)}\equiv 0, \; m \text{ — целое, не выше } n.$$

Задача: $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(m)}(x)\right]+\left(\lambda_n-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)}(x)=0, \quad -1<x<1$

$$|P_n^{(m)}(\pm 1)|<\infty; \quad \lambda_n=n(n+1); \quad \|P_n^{(m)}\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

16. 1) Система присоед. ф. Лежандра замкнута $L_2[-1, 1]$.

2) поскольку все присод. ф. лежащие как соб. ф. задачи Ш-Л ортог. с весом 1 при разных $n$: $\int_{-1}^{1} P_{n_1}^{(m)}(x) P_{n_2}^{(m)}(x)\,dx = 0 \quad n_1 \neq n_2$, то из

(1) вытекает полнота системы присод. ф-й Лежандра.

Т. Стеклова:

Всякая ф-я $f(x)$, 2-ды непр. диф на $[-1, 1]$ и обр. в 0 на концах $f(-1) = f(1) = 0$, разлаг-ся в абс. и равном. сх-ся ряд по присод. ф-ям Лежандра $(m \neq 0)$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x)$,

$f_n = \frac{1}{\|P_n^{(m)}\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x)\,dx, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad \|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

12.
$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0 & (1) \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi) \\ |Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty. \end{cases}$$

Огр. на единич. сфере решение ур-я (1), удовл. гр. условиям, наз-ся сферич. ф-ями

$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi$

$\|Y_n^m\|^2 = \|P_n^m\|^2 \|\Phi_m\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \varepsilon_m \pi, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$

$\lambda_n = n(n+1)$

Т Стеклова: Всякая ф-я $f(\theta,\varphi)$, дважды непр. диф. на единичн. сфере, разлаг-ся в абс. и равномерно сх-ся ряд по сферич. ф-ям:

$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где $f_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

Ортог-ть: $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi) Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi) \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0 \quad n_1 \neq n_2,\ m_1 \neq m_2$

$\| \ \| = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \varepsilon_m \pi, \quad n = 0, 1, \ldots \quad m = 0, \pm 1, \ldots n, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$

18. Задача Ш-Л для опер. Лапласа в круге с гр. усл. 1,2,3 р.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in K_a \text{ - обл. круга} \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_c = 0, & |\alpha| + |\beta| \neq 0, \ u \not\equiv 0. \end{cases} \quad (0 < r \leq a)$$

$u = R(r)\Phi(\varphi)$, $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda}\, r)$, $\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, $\nu = \nu_n = n^2, n = 0, 1 \ldots$

$\{\lambda_n\} \Leftarrow \alpha\sqrt{\lambda}\, J_n'(\sqrt{\lambda}\, a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}\, a) = 0$

$\mu = \sqrt{\lambda}\, a$

$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$, $\mu_k^{(n)}$ - корень $\alpha\mu J_n'(\mu) + \beta a J_n(\mu) = 0$.

$u_{kn}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r\right) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad k = 1, 2 \ldots \quad \lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2.$

19. Ш-Л усл. Дирихле і осн. св-ва соб. ф-й

св-ва: 1) ∃ бесконеч. счет. мн-во соб. знач. $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \lambda_n \le$

2) Все соб. знач. положительны: $\lambda_n > 0$.

3) Соб. ф-ии ортогональны в обл. $D \subset$ с весом $\rho(M)$: $\int u_n u_m \rho dV = 0$, $n \ne m$.
непр.

4) Теор. Стеклова: Произв-ая 2-ды диф. ф-я в замкн. обл. $\bar{D}$ $f(M)$, удовл. гр. усл. $f|_S = 0$, разлагается в абс. и равномерно сход-ся ряд по соб. ф-ям задачи Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), & u|_{x=a} = \varphi_2(y) \\ u|_{y=0} = \psi_1(x), & u|_{y=b} = \psi_2(x) \end{cases}$$

20. 1-3 ф-лы Грина, усл. применимости. 3ф. Гр. 2-мер. и 3-мер. случ.

1) $\int\limits_D v \Delta u \, dV = \oint\limits_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_D \nabla v \nabla u \, dV$

2) $\int\limits_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dV = \oint\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$

3) $\frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R}\right) dS - \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{\Delta u}{R} dV = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in D \\ \frac{u(M_0)}{2}, & M_0 \in S \\ 0, & M_0 \notin D+S \end{cases}$

(3d, верна для ∀ достаточно гладк. ф-й.

Двумерная:

$$\frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \left(\ln \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}\right) dl - \frac{1}{2\pi} \int\limits_D \Delta u \ln \frac{1}{R_{MM_0}} d\sigma = \begin{cases} u(M_0) & M_0 \in D \\ \frac{u(M_0)}{2} & M_0 \in C \\ 0 & M_0 \notin D+C \end{cases}$$

21. Т. Гаусса: Если $u$ - гармонич. ф-я в обл. $D$, то

$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, где $S$ - ∀ глад. замкн. пов-ть $\subset D$.

Т о среднем: пусть $u(M)$ - гарм. ф-я в обл. $D$. тогда

$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint\limits_{\Sigma_a} u(M) dS$, где $\Sigma_a$ - сфера радиуса $a$ с центром в т. $M_0 \in D$.

Принцип максимума: Гармонич. в обл. $D$ ф-ия $u(M)$, непрер. в замкн. обл. $\bar{D}$, достигает своих макс. и мин. значений на границе $S$ обл. $D$.

Принцип сравнения: Если 2 гарм. ф-ии в $D$ $u(M)$ и $v(M)$ непр. и замкнуты в $\bar{D}$ и $u|_S \le v|_S$, то всюду внутри $D$ $u(M) \le v(M)$.

22. $\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_\Sigma=\varphi\end{cases}$ – 1 кр. задача Дирихле, реш-е единственно;

метод: $v=u_1-u_2$, $\begin{cases}\Delta v=0\\ v|_\Sigma=0\end{cases}$, пусть $\exists M: v(M)>0$ дост. макс. на границе – противореч. $v\equiv 0 \Rightarrow u_1=u_2$.

$\begin{cases}\Delta u=0\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma=\varphi\end{cases}$ – 2 кр. задача Неймана, реш-е <u>не</u> единственно.

$\oint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma=0$, если $\int_\Sigma \varphi\, d\sigma\neq 0$ – нет решений.

$\begin{cases}\Delta u=0\\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_\Sigma=\varphi,\ h\geq 0\end{cases}$ – 3 кр. задача реш-е единственно.

$v=u_1-u_2$. $\begin{cases}\Delta v=0\\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}+hv\right)\Big|_\Sigma=0\end{cases}$ 1 ф-ла Грина $\int_D v\underbrace{\Delta v}_{=0}\,dV=\int_\Sigma v\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=-hv}d\sigma-\int(\nabla v)^2dV \Rightarrow$

$\underbrace{\int(\nabla v)^2dV}_{\geq 0}+\underbrace{\int_\Sigma hv^2d\sigma}_{\geq 0}=0 \Rightarrow \begin{cases}v=const\\ v=0\end{cases}$

<u>$h<0$ – реш. не единств.</u>

23. Характеристики ур-е в ч. пр-ых 2 порядка в случае 2 переменных: линейное относительно старш. производных ур-е:

$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$. Тогда ур-е

$a_{11}dy^2-2a_{12}dx\,dy+a_{22}dx^2=0$ – характеристическое; его интегралы – характеристики.

24. Ур-е $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$ в т. M

гиперболич. типа, если в т. M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$

парабол. типа, если в т. M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$

эллиптич. типа, если в т. M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$.

| |
|---|
| $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$ |
| $u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$ |
| $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$ |

каноническ. форма

гиперб: $\rho(M)u_{tt}-\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u)+q(M)u=f(M,t) \Leftrightarrow Lu-a^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=f(M,t)$

парабол: $\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu \Leftrightarrow Lu+a\frac{\partial u}{\partial t}=f(M,t)$

эллиптич: $Lu=\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u)-q(M)u=f(M,t)\Leftrightarrow Lu=f(M)$

$L$ – эллиптич. оператор.