студенты-
физики

Ответы к экзамену по ММФ
Теоретический минимум

Барон Яков

5 семестр
Боголюбов А.Н.

2014

ММФ (экзамен).

Теоретический минимум.

1. Лемма о поведении решений ур-ния $(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = 0$, $x \in (a, b)$, где $k(x) = (x-a)\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$, в особых точках.

   см. ММФ(К) – п. 1.

2. Ур-ние Бесселя и его ФСР. Определение ф-ций, входящих в эту ФСР, и их графики.

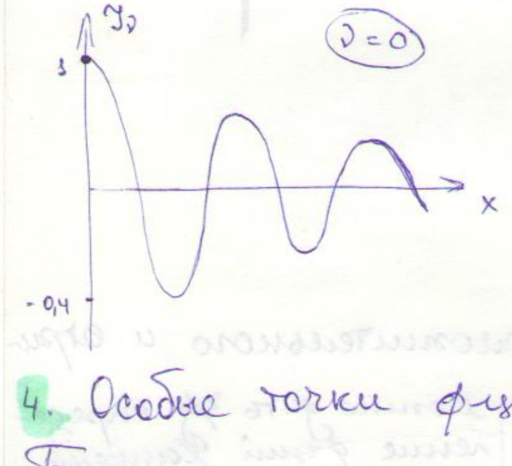
   см. ММФ(К) – п. 2.

3. Определение цилиндрической ф-ции. Пример цилиндрической ф-ции и её график.

$$\underbrace{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \iff x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0}_{\text{ур-ние Бесселя}}$$

Любое ненулевое решение ур-ния Бесселя наз. цилиндрической ф-цией.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ – ф-ция Бесселя.



4. Особые точки ф-ций, которые являются решениями ур-ния Бесселя.

   $x = 0$, $x = \infty$.

5. Определение ф-ции Бесселя с помощью обобщённого степенного ряда.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

6. Формулы для ф-ций Бесселя порядков 1/2 и −1/2. Всегда ли ф-ции Бесселя полуцелого порядка можно выразить ч/з элементарные ф-ции? ②

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

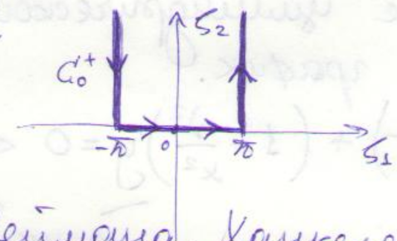
Всегда можно $J_{n+1/2}(x)$ выразить ч/з элементарные ф-ции:

$$J_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n(1/x)\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)+Q_n(1/x)\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)\right\},\ \text{здесь}$$

$P_n(1/x)$, $Q_n(1/x)$ – многочлены; $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=0$.

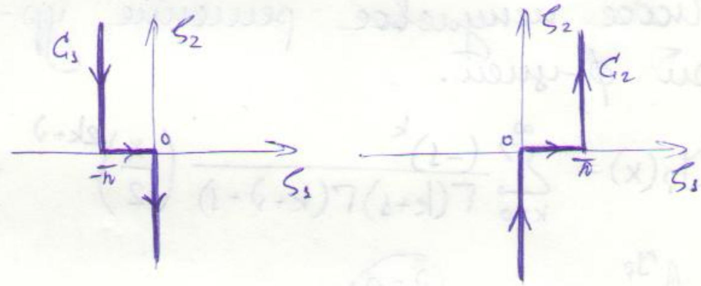
7. Интегральное представление для ф-ции Бесселя.

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^+} e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}\,d\varsigma$$



8. Определение ф-ций Бесселя, Неймана, Ханкеля.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$



$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}\,d\varsigma$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}\,d\varsigma$$

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left(\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)-\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)\right)$$

9. Формула, связывающая ф-ции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.

$$\mathcal{H}_{-\nu}^{(1)}(x)=e^{i\nu\pi}\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)$$
$$\mathcal{H}_{-\nu}^{(2)}(x)=e^{-i\nu\pi}\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)$$

можно д-ть ч/з определение ф-ций Ханкеля, положив в них $\varsigma=-\pi-\alpha$

10. Как связаны ф-ции Бесселя и Ханкеля?

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left\{\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)+\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)\right\}$$

$$J_{-\nu}(x)=\frac{1}{2}\left\{\mathcal{H}_\nu^{(1)}e^{i\nu\pi}+\mathcal{H}_\nu^{(2)}e^{-i\nu\pi}\right\}$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)=i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)=-i\,\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

11. Как связаны ф-ции Неймана и ф-ции Ханкеля? ③

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) - \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)\right)$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) + \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)\right) + iN_\nu(x)$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) + \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)\right) - iN_\nu(x)$$

12. Асимптотические формулы при больших значениях аргумента для ф-ций Бесселя, Неймана и Ханкеля.

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

13. Опишите поведение ф-ций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.

В окр-ти нуля при $x>0$: $J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$, $\nu \geq 0$, $x \to 0$;

$$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0, \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_\nu^{(1,2)}(x) \sim \begin{cases} \pm i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0, \\ \mp i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0. \end{cases}$$

14. Задача на СЗ для ф-ций Бесселя.

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \\ \left(\alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\right)\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \neq 0; \end{cases}$$

Общее решение: $R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}r)$

т.к. $N_n(\sqrt{\lambda}r)$ – неогр. в $r=0$, то $C_2 \equiv 0$. Положим $C_1 = 1$. Тогда СФ исходной задачи имеет вид $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$. Подставляя это в граничное условие, получим дисперсионное ур-ние:

$\boxed{\alpha\sqrt{\lambda}\, J_n'(\sqrt{\lambda}a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0}$ – задача на СЗ для ф-ции Бесселя.

15. Теорема Стеклова в случае задачи на СЗ для ф-ций Бесселя:

„Пусть $f(r) \in C^{(2)}[0,a]$, $|f(0)| < \infty$ и $f(a) = 0$. ~~Пусть такая~~ Тогда любая такая ф-ция может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд: $f(r) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\, r\right)$, где

$$A_m = \frac{\int\limits_0^a f(r) J_n\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\, r\right) r\,dr}{\|J_n\|^2}, \quad \|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\, a\right)\right)^2."$$

16. ЗШЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1го рода. Вид СФ.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 \le r \le a, \\ u\big|_{r=a} = 0, \\ |u(0)| < \infty, \quad u \not\equiv 0; \end{cases} \qquad u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r\right)\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \qquad k = 1, 2, \dots$$

$\lambda_k^{(n)}$ – k-й корень ур-ния $J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$.

17. ЗШЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 2го рода. Вид СФ.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 \le r \le a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0, \\ |u(0)| < \infty, \quad u \not\equiv 0; \end{cases} \qquad u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r\right)\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \qquad k = 1, 2, \dots$$

$\lambda_k^{(n)}$ – k-й корень ур-ния $J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a\right) = 0$.

18. Характеристическое ур-ние для определения СЗ ЗШЛ для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий различного типа $\left(\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\right)\Big|_{r=a} = 0, |\alpha| + |\beta| \not\equiv 0\right)$:

$$\alpha\sqrt{\lambda}\, J_n'(\sqrt{\lambda}a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

19. Общая формула для квадрата нормы СФ задачи на СЗ для цилиндрических ф-ций.

$$\|u_{nk}\|^2 = \|J_n\|^2 \|\Phi_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)^2 - n^2}{a^2h^2}\right) J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\cdot \varepsilon_n \pi$$

ГУ заданы так: $\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\Big|_{r=a} = 0$; $\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0, \\ 1, & n\neq 0. \end{cases}$

20. СФ круга для граничных условий Дирихле и Неймана.

Дирихле: $u|_{r=a} = 0 \longmapsto u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}$, $n = 0,1,2,\dots$ $k = 1,2,\dots$

$\lambda_k^{(n)}$ – k-й корень ур-ния $J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$.

Неймана: $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \longmapsto u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}$, $n = 0,1,2,\dots$ $k = 1,2,\dots$

$\lambda_k^{(n)}$ – k-й корень ур-ния $J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$.

21. Ур-ние для цилиндрических ф-ций чисто мнимого аргумента. ФСР этого ур-ния.

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0$$

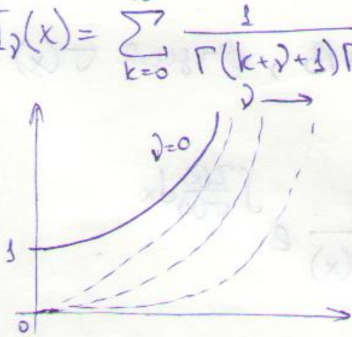
$\{I_\nu(x), K_\nu(x)\}$ – ФСР

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \left\{i^{-\nu}J_\nu(ix)\right\}$$ – ф-ция Инфельда.

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right\}$$ – ф-ция Макдональда.

22. Определение ф-ции Инфельда. Её график.

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ – ф-ция Инфельда.

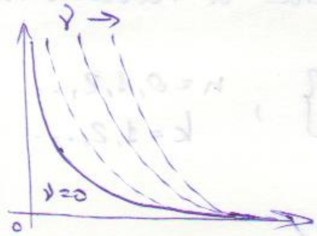


23. Асимптотическая формула при больших значениях аргумента для ф-ции Инфельда.

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\underline{O}(1/x)\right)$$

24. Определение ф-ции Макдональда. Её график.

$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix)$ – ф-ция Макдональда.



25. Асимптотическая формула для ф-ции Макдональда.

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu \cdot i\, \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{i(ix)}\left\{\sqrt{\frac{2}{i\pi x}}\, \overbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}}^{=i^{-\nu}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2})\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left(1+\underline{O}(1/x)\right).$$

26. Определение классических ортогональных полиномов.

Система $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных на отрезке $[a,b]$, наз. системой КОП, если они ортогональны на $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, а весовая ф-ция $\rho(x)$ явл. решением дифференциального ур-ния Пирсона: $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$, $a<x<b$,

где $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ – заданные ф-ции, удовлетворяющие условию:

$$x^m \sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b = 0, \quad m=0,1,\ldots$$

Ф-ция $\tau(x)$ – линейная ф-ция вида $\tau(x) = Ax+B$, ф-ция $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a\neq-\infty, b\neq\infty,\\ x-a, & a\neq-\infty, b=+\infty,\\ b-x, & a=-\infty, b\neq+\infty,\\ 1, & a=-\infty, b=+\infty. \end{cases} \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} e^{\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx}.$$

27. Теорема о нулях КОП:

„КОП $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a,b]$".

28. Производные $p_n'(x)$ также являются КОП, заданными на отрезке $[a,b]$ и ортогональными с весом $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$.

29. Ур-ние для КОП.

Если весовая ф-ция удовл. ур-нию Пирсона и на концах интервала (a,b) выполняются предельные соотношения:

$\lim\limits_{x\to a+0}\rho(x)\sigma(x)=\lim\limits_{x\to a-0}\rho(x)\sigma(x)=0$, то

ортогональный многочлен $p_n(x)$ явл. решением ур-ния:

$\sigma(x)p_n''+\tau(x)p_n'+\lambda_n p_n=0$, где $\lambda_n=-n\left(\tau'+\dfrac{\sigma''(n-1)}{2}\right)$

30. Задача на СЗ для КОП на отрезке с условиями в особых точках.

$$\begin{cases}(\sigma(x)\rho(x)p_n'(x))'+\lambda\rho(x)p_n(x)=0,\ x\in[a,b],\\ |p_n(a)|<\infty,\ |p_n(b)|<\infty.\end{cases}$$

31. Формула для СЗ ЗШЛ для КОП.

$$\lambda_n=-n\left(\tau'+\frac{\sigma''(n-1)}{2}\right)$$

32. Общая формула для КОП (общая ф-ла Родрига).

$p_n(x)=\dfrac{C_n}{\rho(x)}\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{\sigma^n(x)\rho(x)\right\}$, где $C_n=\dfrac{n!\,a_n}{A_{nn}}$, $A_{nm}=(-1)^n\prod\limits_{k=0}^{m-1}\lambda_{k,m}$.

33. Определение полиномов Якоби.

КОП, заданные на отрезке $[-1,1]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, наз. полиномами Якоби и обозначаются $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

34. Формула Родрига для полиномов Якоби.

$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1 - x^2$, поэтому:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}.$$

35. Определение полиномов Лежандра.

КОП, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = 1$, наз. полиномами Лежандра и обозначаются $P_n(x)$. $P_n(x) = P_n^{(0;0)}(x)$.

36. Задача на СЗ для полиномов Лежандра. Выражение СЗ для полиномов Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + \lambda y = 0, \quad -1 \le x \le 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

$$\lambda_n = n(n+1).$$

37. Выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n a_n n! \, C_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

38. Определение полиномов Лагерра. Задача, решениями которой они являются.

КОП, заданные на отрезке $[0, \infty]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, наз. обобщёнными полиномами Лагерра и обозначаются $L_n^\alpha(x)$. Если $\alpha = 0$, то полиномы наз. просто полиномами Лагерра и обозначаются $L_n(x)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dy}{dx}\right) + \lambda x^\alpha e^{-x} y = 0, \\ |y(0)| < \infty, \ |y(\infty)| < \infty. \end{cases}$$

39. Определение полиномов Эрмита. Задача, решениями которой они являются. (9)

КОП, заданные на отрезке $[-\infty, +\infty]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$, наз. полиномами Эрмита и обозначаются $H_n(x)$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2} y = 0, \\ |y(\pm\infty)| < \infty. \end{cases}$$

40. Определение производящей ф-ции КОП.

Ф-ция $\Psi(x,z)$, разложение которой в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид: $\Psi(x,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{C_n n!} z^n$, где

$\{p_n(x)\}$ - система КОП, наз. производящей ф-цией КОП.

41. Выражение производящей ф-ции полиномов Лежандра.

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2-2zx}}$$

42. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой или полной? Сформулируйте соотв. утв.

Система КОП является полной. Полнота является следствием замкнутости. Система полиномов Лежандра является замкнутой и полной на отрезке $[-1, 1]$.

Система О/г (ортогональных) ф-ций $\{\varphi_n(x)\}$ наз. полной, если не существует непр. ф-ции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем ф-циям данной системы.

Система О/г ф-ций $\{\varphi_n(x)\}$ наз. замкнутой на (a,b), если любую непр. ф-цию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи ЛК ф-ций $\{\varphi_n(x)\}$. Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \varphi_i : \int\limits_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon$.

43. Теорема Стеклова для полиномов Лежандра:

„Всякая дважды диф-мая на отрезке $[-1,1]$ ф-ция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$, где $f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$, $n=0,1,\dots$".

44. Определение присоединённых ф-ций Лежандра:

Присоединёнными ф-циями Лежандра наз. ф-ции, определённые соотношениями: $P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

45. Задача на СЗ для присоединённых ф-ций Лежандра. СЗ присоединённых ф-ций Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m}{1-x^2}\right)y=0, & -1\le x\le 1, \\ |y(\pm1)|<\infty. \end{cases}$$

$$\lambda_n=n(n+1).$$

46. Выражение квадрата нормы для ПФЛ.

$$\|P_n^{(m)}\|^2=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

47. Является ли система ПФЛ замкнутой и полной? Сформулируйте соотв. утв.

Система ПФЛ явл. замкнутой и полной в $L_2[-1,1]$.
$L_2[-1,1]$ — пр-во ф-ций, определённых на $[-1,1]$, таких, что интеграл $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$ существует (конечен).

48. Теорема Стеклова для ПФЛ:

„Всякая непр. и дважды диф-мая на отрезке $[-1,1]$ ф-ция $f(x)$, обращающаяся в нуль на его концах, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x),\ \text{где}\ f_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(m)}(x)dx,\ n=0,1,\dots,\ m=0,1,\dots,n.$$

49. Определение сферических ф-ций. Задача на СЗ для сферических ф-ций.

Сферические ф-ции — ограниченные на единичной сфере решения ур-ния:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0, \\ Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi), \\ |Y(0,\varphi)|<\infty,\ |Y(\pi,\varphi)|<\infty; \end{cases}$$

обладающие непрерывными до $2^{го}$ порядка производными.

50. Явл. ли система сферических ф-ций замкнутой или полной? Сформулируйте соотв. утв.

Система сферических ф-ций явл. замкнутой на единичной сфере $\Sigma:\{0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, т.к. любая ф-ция $f(\theta,\varphi)$, имеющая непр. вторые производные, может быть аппроксимирована некоторым полиномом из сферических ф-ций. Из замкнутости системы сфер. ф-ций вытекает её полнота.

51. Условие ортогональности для сферических ф-ций.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)\,Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=0,\ \text{где}\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ n_1\ne n_2,\ m_1\ne m_2.$$

52. Выражение квадрата нормы для сферических ф-ций.

$$\|Y_n^{(m)}\|^2=\|P_n^{(m)}\|^2\,\|\Phi_n(\varphi)\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi\varepsilon_m,\ \text{где}\ \varepsilon_m=\begin{cases}2, & m=0\\ 1, & m\ne 0\end{cases}$$

$$n=0,1,2,\dots,\quad m=0,\pm1,\dots,\pm n.$$

53. Теорема Стеклова для сферических ф-ций:

„Всякая непрерывная и дважды непрерывно диф-мая на единичной сфере ф-ция $f(\theta,\varphi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим ф-циям: $f(\theta,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{n} f_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где $f_{nm}=\frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$."

54. Определение шаровых ф-ций. Явл. ли шаровые ф-ции СФ соотв. задачи на СЗ? (12)

Шаровые ф-ции — ограниченные частные решения ур-ния Лапласа в шаре: $\Delta u=0,\ 0\le r\le a$. Явное выражение для ШФ:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=\begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\end{cases}$$

ШФ не явл. СФ соотв. задачи на СЗ, т.к. СФ шара — это ф-ции вида: $u_{nkm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(r,\theta,\varphi)$, где

$\mu_k^{(n+1/2)}$ – k-й корень ур-ния $\alpha\mu J'_{n+1/2}(\mu)+\left(\beta a-\frac{\alpha}{2}\right)J_{n+1/2}(\mu)=0$ при фикс. n.

55. Задача на СЗ для шара в случае линейных граничных условий различного типа:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0$$

$\leftarrow$ Дирихле | Неймана $\rightarrow$

$u|_{r=a}=0$

$J_{n+\frac12}(\mu)=0\rightarrow\mu_k^{(n+1/2)}$

$\lambda=\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2$

$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=0$

$\mu J'_{n+1/2}(\mu)-\frac12 J_{n+1/2}(\mu)=0\rightarrow\mu_k^{(n+1/2)}$

$\lambda=\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2$

56. СФ шара для граничных условий Дирихле и Неймана.

$$u_{nkm}=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Дирихле: $\mu_k^{(n+1/2)}$ из $J_{n+\frac12}(\mu)=0$;

Неймана: $\mu_k^{(n+1/2)}$ из $\mu J'_{n+1/2}(\mu)-\frac12 J_{n+1/2}(\mu)=0$.

57. Что такое характеристики ур-ния в частных производных второго порядка в случае $2^х$ переменных? (13)

$\measuredangle$ линейное отн-но старших производных ур-ние $2^{го}$ порядка: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$.

Ур-ние $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$ наз. характеристическим для $1^{го}$ ур-ния, а интегралы этого ур-ния наз. характеристиками.

58. Определение ур-ний эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае $2^х$ переменных и их канонические формы.

Ур-ние $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ в точке M наз. ур-нием:

а) гиперболического типа, если в т. M: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

$$u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ или } u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

б) параболического типа, если в т. M: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;

$$u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

в) эллиптического типа, если в т. M: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$;

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

59. Определение ур-ний параболического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

пусть $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ — точка области D. Построим квадратичную форму: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0)t_i t_j$.

Невырожденным линейным преобразованием $s_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}t_j$, $i = \overline{1,n}$, $\det\|A_{ij}\| \neq 0$ квадратичная форма всегда может быть приведена к каноническому виду: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2$

При этом согласно з-ну инерции число положительных, (14)
отрицательных и равных нулю коэф-тов λ_i в каноническом виде квадратичной формы явл. инвариантом и не зависит от линейного преобразования.

Если в т. M_0 квадратичная форма в каноническом виде имеет хотя бы один из коэф-тов $\lambda_i = 0$, то исходное ур-ние наз. ур-нием параболического типа.

Канон. форма: $\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \quad (m>0)$.

60. Определение ур-ния гиперболического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

Если в т. M_0 все $\lambda_i \neq 0$, но существуют как положительные, так и отрицательные λ_i, то ур-ние наз. ур-нием гиперболического типа.

Канон. форма: $u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + \Phi$.

61. Определение ур-ния эллиптического типа в случае многих переменных и каноническая форма.

Если в т. M_0 все коэф-ты λ_i одного знака, то ур-ние наз. ур-нием эллиптического типа.

Канон. форма: $\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \Phi = 0$.

62. Определение корректно поставленной задачи по Адамару.

Математическая задача называется поставленной корректно, если:
1) решение задачи существует;
2) решение задачи единственно;
3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных, т.е. устойчиво.

63. Примеры постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и колебаний. Определения классических решений этих задач.

Ур-ние колебаний:

Найти решение ур-ния $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{array}\right\} t>0 \qquad \left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi_1(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x) \end{array}\right\} 0 \le x \le l.$$

Пусть задана ~~задача~~ ограниченная область D с кусочно-гладкой границей S. Начально-краевая задача для ур-ния колебаний в области D заключается в определении в цилиндре $\overline{Q_\infty} = \overline{D} \times [0,\infty)$ ф-ции $u(M,t)$, удовлетворяющей в Q_∞ ур-нию колебаний, начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), \ (M,t) \in Q_\infty, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(M), \ u_t\big|_{t=0} = \psi(M), \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = \mu(P,t)\Big|_{P\in S}, \ |\alpha| + |\beta| \ne 0. \end{cases}$$

Классическим решением НКЗ для ур-ния колебаний явл. ф-ция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре $\overline{Q_\infty}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ ур-нию, начальным и граничным условиям.

Ур-ние теплопроводности:

Краевая задача для ограниченного стержня.

Найти решение ур-ния $u_t = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $0 < t \le T$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$u(x,0) = \varphi(x)$, $0 < x < l$

$u(0,t) = \mu(t)$, $0 < t \le T$.

Пусть задана огр. обл. D с кусочно-гладкой границей S. НКЗ для ур-ния теплопроводности в обл. D заключается в определении в цилиндре $\overline{Q_\infty} = \overline{D} \times [0,\infty)$ ф-ции $u(M,t)$, удовл. в Q_∞ ур-нию теплопроводности, начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \; M \in D, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \; M \in D, \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = \mu(P,t)\Big|_{P \in S}, \; |\alpha| + |\beta| \neq 0. \end{cases}$$

Классическим решением НКЗ для ур-ния теплопроводности явл. ф-ция $u(M,t)$, непр. вместе с 1-ми производными в замкн. цилиндре $\overline{Q}_\infty$, имеющая непр. производные 1-го порядка по t и второго по M в открытом цилиндре Q_∞, удовл. в Q_∞ ур-нию, начальным и граничным условиям.

64. Общая схема метода разделения переменных (метода Фурье). К решению каких задач можно свести решение общей НКЗ в линейном случае (редукция полной задачи)?

Метод Фурье:

пусть задана следующая задача:
найти решение ур-ния $\rho P_t[u] = Lu$, удовл. гр. и нач. условиям:
$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0, \; \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M), \; k = 0, 1, \dots, l-1.$

Тогда решение этого ур-ния можно получить в виде произведения $u(M,t) = \nu(M)T(t)$, причём ф-ции $\nu(M)$ и $T(t)$ определяются из вспомогательных задач: $\begin{cases} L\nu + \lambda\rho\nu = 0, \; \nu(M) \neq 0, \; M \in D, \\ \left(\alpha \frac{\partial \nu}{\partial n} + \beta \nu\right)\Big|_S = 0; \end{cases}$ и

$$\begin{cases} P_t(T) + \lambda T = 0, \\ \frac{\partial^k T}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M). \end{cases}$$

Полная постановка НКЗ имеет вид: $\begin{cases} \rho P_t[u] = Lu + f, \; M \in Q, \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = \mu(P,t), \; P \in S, \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M), \; k = 0, 1, \dots, l-1 \end{cases}$

В силу линейности решение этой задачи можно свести к сумме решений трёх задач:

1) Задачи для однородного ур-ния с неодн. начальными и однор. граничными условиями ($f \equiv 0, \mu = 0, \varphi_k \neq 0$);

2) Задачи для однородного ур-ния с однородн. НУ и неоднор. ГУ ($f \equiv 0, \mu \neq 0, \varphi_k = 0$).

3) Задачи для неоднородного ур-ния с однор. НУ и однор. ГУ ($f \neq 0$, $\mu = 0$, $\varphi_k = 0$).

65. Постановка ЗШЛ для оператора Лапласа с ГУ Дирихле на границе S области D. Основные св-ва СФ и СЗ этой задачи.

ЗШЛ: Найти значения λ, при которых $\exists$ нетривиальные решения ур-ния, удовл. ГУ Дирихле: $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_S = 0; \end{cases}$

Св-ва СФ и СЗ:

1) $\exists$ бесконечно много СЗ $\{\lambda_n\}$ и СФ $\{u_n\}$; СЗ при $n \to \infty$ неограниченно возрастают. Каждому СЗ соответствует лишь конечное число СФ.

2) ~~корн~~ СЗ задачи Дирихле положительны: $\lambda_n > 0$, $\forall n$.

3) СФ ортогональны м/у собой: $\int\limits_D u_n(M) u_m(M) dV = 0$, $n \neq m$.

4) теорема разложимости Стеклова:

„Произвольная дважды непр-но диф-мая в D ф-ция $f(M)$, удовлетворяющая однородному ГУ, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по СФ данной задачи:

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(M), \text{ где } f_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int\limits_D f(M) u_n(M) dV."$$

66. Первая и вторая формулы Грина. Условия их применимости.

Пусть $u = u(x,y,z)$ и $v = v(x,y,z)$ – ф-ции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри замкн. области $T+\Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Тогда имеет место:

а) 1я ф. Грина: $$\int\limits_T u \Delta v dV = \oint\limits_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int\limits_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dV,$$

где $\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z}$ – производная по направлению внешней нормали.

Можно записать и несколько иначе:

$$\int\limits_T u L v dV = \oint\limits_\Sigma k u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int\limits_T (k \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u + q u v) dV,$$ где k, q – непр. в замкн. области $T+\Sigma$ ф-ции, причём $k(M)$ – непрерывно диф-ма в открытой области T.

б) $2^{я}$ ф. Грина: $\int\limits_T (u\Delta v - v\Delta u)dV = \oint\limits_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$.

Можно записать несколько иначе:

$\int\limits_T (uLv - vLu)dV = \oint\limits_\Sigma k\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$, где k, q – непр. в замкн. области $T+\Sigma$ ф-ции, причём $k(M)$ – непрерывно диф-ма в открытой области T.

67. Третья формула Грина для 2D- и 3D-случая.

3D: $$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left(\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{\Delta u}{R_{MM_0}}dV = \begin{cases} u(M_0), M_0 \in D, \\ u(M_0)/2, M_0 \in S, \\ 0, M_0 \notin D+S. \end{cases}$$

Здесь M_0 – фиксированная точка области D.

2D: $$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_C \left(\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dl - \frac{1}{2\pi}\int\limits_D \Delta u \ln\frac{1}{R_{MM_0}}d\sigma = \begin{cases} u(M_0), M_0 \in D, \\ u(M_0)/2, M_0 \in C, \\ 0, M_0 \notin D+C. \end{cases}$$

68. Определение гармонических ф-ций. Примеры. Является ли гармоническая ф-ция бесконечно диф-мой?

Ф-ция $u(M)$ наз. гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до $2^{го}$ порядка включительно и удовлетворяет в этой области ур-нию Лапласа.

Пример: $u(r,\varphi) = \frac{r}{a}\sin\varphi$ – гарм. ф-ция в круге $0 \le r \le a$, т.к. имеет непр. частные производные любого порядка и удовлетворяет в указанной области ур-нию Лапласа $\Delta u = 0$ с граничным условием $u(r,\varphi)|_{r=a} = \sin\varphi$.

Гармоническая ф-ция явл. ∞-но диф-мой, она имеет в области T производные всех порядков. Это следует из $3^{ей}$ ф. Грина, т.к. при $M_0 \in D$ поверхностные интегралы явл. собственными и их можно дифференцировать по координате любое число раз.

69. Теорема Гаусса и теорема о среднем для гармонических ф-ций.

Т. Гаусса: „Если $u(M)$ – ф-ция, гармоническая в области T, ограниченной поверхностью Σ, то имеет место соотношение:
$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, где S – любая гладкая замкн. поверхность, целиком принадлежащая области T".

Т. о среднем: „Если ф-ция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 – какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint\limits_{\Sigma_a} u dS$, где Σ_a – сфера радиуса a с центром в т. M_0, целиком лежащая в обл. T".

70. Принцип максимума и принцип сравнения для гармонических ф-ций.

Принцип максимума: „Если ф-ция $u(M)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$ удовл. ур-нию $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальное и минимальное значения ф-ции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ".

Принцип сравнения: „Если $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны внутри T и если $u(M) \le v(M)$ на границе Σ, то $u(M) \le v(M)$ всюду внутри T".

71. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для ур-ния Лапласа в случае ГУ Дирихле. Каким методом она доказывается?

„Внутренняя задача Дирихле не может иметь двух различных классических решений".

Это утверждение д-тся от противного. Построив ф-цию разности двух классических решений, следует показать, что она тождественно равна нулю.

72. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для ур-ния Лапласа в случае ГУ 3-го рода. Каким методом она доказывается?

„$3^я$ краевая задача для ур. Лапласа: $\begin{cases} \Delta u = -F(M), M \in D, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = f(M); \end{cases}$

где $h \neq 0$, причём $h = h(P) > 0$ при всех $P \in S$,

не может иметь двух различных классических решений".

Идея д-ва: показать, что краевая задача $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = 0; \end{cases}$

имеет только нулевое решение, используя $1^ю$ формулу Грина.

73. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для ур-ния Лапласа в случае ГУ 2-го рода?

Нет, не имеет.

$\measuredangle$ $2^ю$ КЗ: $\begin{cases} \Delta u = -F(M), M \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f(M); \end{cases}$

Если предположить существование двух различных классических решений этой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$, то для их разности $u = u_1 - u_2$ будем иметь $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$. Полагая в $1^й$ ф-ле Грина $v = u$, получим $\operatorname{grad} u = 0 \Rightarrow u(M) = const$, поэтому классическое решение $2^й$ КЗ не единственно и определяется с точностью до произвольной постоянной.

74. Определение регулярной на бесконечности ф-ции в случае двух и трёх переменных.

а) Гармоническая ф-ция $3^х$ переменных $u(M) \equiv u(x, y, z)$ наз. регулярной на бесконечности, если $|u| \leq \frac{A}{r}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leq \frac{A}{r^2}$ при достаточно больших $r \geq r_0$.

б) Ф-ция $2^х$ переменных $u(M) \equiv u(x, y)$ наз. регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

75. Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае. Каким методом она доказывается?

„Внешняя $1^я$ КЗ для гармонических ф-ций с $3^{мя}$ независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности".

76. Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

„Внешняя $1^я$ КЗ для гармонических ф-ций с $2^{мя}$ независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности".

Идея д-ва: допустим существование $2^х$ различных решений $u_1(M)$ и $u_2(M)$ и $\exists$ их разность $u = u_1 - u_2$. $u(M)$ можно мажорировать ф-цией $u_{R_1} = N \dfrac{\ln(R_{MM_0}/R)}{\ln(R_1/R)}$. Если неограниченно увеличивать R_1, то $u_{R_1}(M) \to 0$ при $R_1 \to \infty$, откуда следует, что $u(M) = 0$.

77. Имеет ли место единственность решения внешней КЗ с ГУ Неймана для ур-ния Лапласа в двумерном и трёхмерном случаях?

В 2D-случае: нет. ~~Реше~~ Решение внешней задачи Неймана (если оно $\exists$) определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

В 3D-случае: да. Неединственное решение имеет только внутренняя задача Неймана.

78. В чём состоит различие в постановках и св-вах решений внутренних и внешних КЗ для ур-ния Лапласа в двумерном и трёхмерном случае?

В том

79. Определение ф-ции Грина внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае и ~~зада~~ вид решения с помощью ф-ции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ u|_S = f; \end{cases}$

Ф-ция $G(M,P)$ наз. ф-цией Грина внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в области D, если удовлетворяет следующим условиям:

а) $G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v$, где v - гармоническая в D ф-ция;

б) $G(M,P)\big|_{P\in S} = 0.$

$$u(M) = -\oint_S f \frac{\partial G}{\partial n_P} dS_P + \int_D G F dV$$

80. Определение ф-ции Грина внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в двумерном случае и вид решения с помощью ф-ции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ u|_\Gamma = f; \end{cases}$

Ф-ция $G(M,Q)$ наз. ф-цией Грина внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в области D на плоскости, если удовлетворяет следующим условиям:

а) $G(M,Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MQ}} + v$, где v - гармоническая в D ф-ция;

б) $G(M,Q)\big|_{Q\in\Gamma} = 0$, где Γ - замкн. контур, граница D.

$$u = -\oint_\Gamma f \frac{\partial G}{\partial n} dl + \int_D G F d\sigma.$$

81. Определение ф-ции Грина внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае и вид решения задачи с помощью ф-ции Грина. $\begin{cases} \Delta u = -F \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = f; \end{cases}$

Ф-ция $G(M,Q)$ наз. ф-цией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в области D, если:

а) $G(M,Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, где v - гармоническая в D ф-ция;

б) $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 - площадь пов-ти S.

$$u(M) = \oint_S fG\,dS + \frac{1}{S_0}\oint_S u\,dS + \int_D GF\,dV.$$

82. Метод ф-ций Грина решения краевых задач для ур-ния Лапласа.

83. Определение объёмного потенциала. Использование объёмного потенциала при решении ур-ния Пуассона.

Интеграл $V(M) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}} dV_Q$, где $\rho(Q)$ - ограниченная интегрируемая ф-ция, определённая в области D, наз. объёмным потенциалом.

Если $\rho(M)$ интегрируема с квадратом, то $V(M)$ является обобщённым решением ур-ния Пуассона $\Delta V(M) = -4\pi\rho$.

84. Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

$\measuredangle$ н/с интеграл вида $V(M) = \int_D F(M,Q) f(Q) d\tau_Q$, где $F(M,Q)$ - ф-ция, неограниченная при $M=Q$ и непрерывная по M, а $f(Q)$ - ограниченная ф-ция. Этот интеграл наз. равномерно сходящимся в т. M_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall M \in K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}\ \forall D_{\delta(\varepsilon)} \subset K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)} : \left| \int_{D_{\delta(\varepsilon)}} F(M,Q) f(Q) d\tau_Q \right| \leq \varepsilon$.

Здесь $K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$ - шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром M_0.

85. Определение потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трёхмерном случаях.

а) Потенциалом простого слоя в трёхмерном случае наз. интеграл вида $V(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}$, где S - нек. пов-ть; $\mu(P)$ - ф-ция, заданная на пов-ти S; ф-ция μ наз плотностью потенциала простого слоя.

В двумерном случае потенциал простого слоя имеет вид:
$V(M) = \int_C \mu(P) \ln\frac{1}{R_{MP}} dl_P$, где C - некоторая кривая.

б) Потенциалом двойного слоя в трёхмерном случае наз. интеграл вида: $W(M) = -\int\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$, где S – двусторонняя пов-ть, $\vec{n}_P$ – внешняя нормаль к пов-ти S в точке P (в том случае, когда пов-ть S незамкнута, внешняя нормаль выбирается произвольно), $\nu(P)$ – ф-ция, заданная на пов-ти S; ф-ция ν наз. плотностью потенциала двойного слоя.

$W(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS_P$, где φ – угол м/у внутренней нормалью к пов-ти S в точке P и вектором $\vec{PM}$.

В двумерном случае потенциал двойного слоя имеет вид: $W(M) = -\int\limits_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln\frac{1}{R_{MP}} dl_P = \int\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} dl_P$, где $\vec{n}_P$ – внешняя нормаль к кривой C в точке P, φ – угол м/у внутренней нормалью в точке P и вектором $\vec{PM}$. В случае незамкнутой кривой направление внешней нормали выбирается произвольно.

86. Определение поверхности Ляпунова.

Пов-ть S наз. пов-тью Ляпунова, если выполнены следующие условия:

1) В каждой точке пов-ти S существует определённая нормаль (или касательная пл-ть).

2) $\exists$ такое число $d > 0$, что прямые, параллельные нормали в т. P пов-ти S, пересекают не более одного раза часть пов-ти S, лежащую внутри шара радиуса d с центром в т. P.

3) Угол $\gamma(M,P) = (\vec{n}_M, \vec{n}_P)$ м/у нормалями в точках M и P пов-ти S удовл. условию: $\gamma(M,P) \le A R_{MP}^{\delta}$, где $A, \delta = const$, $A > 0$, $0 < \delta \le 1$. При этом т. M принадлежит части пов-ти S, находящейся внутри сферы радиуса d с центром в т. P.

87. Теорема о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.

„Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью $|\mu(P)| \le N$, заданной на гладкой пов-ти S, явл. непрерывной ф-цией во всём пр-ве. Гладкость пов-ти определяется наличием непрерывной нормали в каждой точке.

88. Теорема о существовании потенциала двойного слоя. 25

„Потенциал двойного слоя $W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}} dS_P$ с непрерывной и ограниченной плотностью $|\nu| \le C$ на пов-ти S существует, т.е. явл. сходящимся н/с интегралом при $M \in S$."

89. Претерпевает ли разрыв при переходе ч/з несущую пов-ть потенциал простого слоя?

Нет, т.к. потенциал простого слоя явл. непрерывной ф-цией во всём пр-ве (по п. 87).

90. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей пов-ти? Формула скачка потенциала двойного слоя при переходе ч/з несущую пов-ть.

Потенциал двойного слоя $W(M_0) = -\nu_0 \int_S \frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}} dS_P$ имеет значение:

а) $4\pi\nu_0$, если M_0 лежит внутри пов-ти S;

б) $2\pi\nu_0$, если M_0 лежит на пов-ти S;

в) 0, если M_0 лежит снаружи пов-ти S.

Потенциал двойного слоя в некоторой т. P_0, лежащей на пов-ти S, явл. разрывной ф-цией, для которой имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} W^0_B(P_0) &= W^0_S(P_0) + 2\pi\nu(P_0) \\ W^0_H(P_0) &= W^0_S(P_0) - 2\pi\nu(P_0) \end{aligned}\right\}$$

где $W^0_B(P_0)$ $(W^0_H(P_0))$ – предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к т. P_0 с внутренней (наружной) стороны.

Ф-ла скачка потенциала: $W^0_B(P_0) - W^0_H(P_0) = 4\pi\nu(P_0)$.

91. Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для ур-ния Лапласа к союзным интегральным ур-ниям Фредгольма.

а) Внутренняя задача Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u|_S = f; \end{cases}$ (S – пов-ть Ляпунова.)

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Внешняя задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f; \end{cases}$ $u \rightrightarrows 0$ на ∞.

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = -\frac{1}{2\pi}f(P_0),\ P_0 \in S$$

Итак, инт. ур-ния для внутр. задачи Дирихле и для внеш. задачи Неймана явл. союзными инт. ур-ниями, и исследование этих двух задач следовало бы вести одновременно.

б) Внешняя задача Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u|_S = f; \end{cases}$ и регулярна на ∞.

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\alpha}{R_{P_0 O}} - f(P_0)\right\},\ P_0 \in S,\ \alpha = \text{const}.$$

Внутренняя задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f; \end{cases}$

может быть сведена к инт. ур-нию Фредгольма:

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0),\ P_0 \in S.$$

Итак, инт. ур-ния для внеш. задачи Дирихле и для внутр. задачи Неймана явл. союзными инт. ур-ниями, и исследование этих двух задач можно вести одновременно.

92. Теорема существования решения внутренней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа. Метод её док-ва.

„Внутр. задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0,\ M \in D, \\ u|_S = f(P),\ P \in S; \end{cases}$ в области D, ограниченной пов-тью S, имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной ф-ции $f(M)$."

Идея д-ва: задача сводится к инт. ур-нию Фредгольма:
$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0$: далее док-тся, что это ур-ние (уже однородное союзное) имеет только тривиальное решение методом от противного.

93. Теорема существования решения внешней задачи Неймана для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае. Метод её док-ва.

„Внешняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D_e, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции $f(M)$."

Идея док-ва: задача сводится к инт. ур-нию Фредгольма:
$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = -\frac{1}{2\pi}f(P_0)$. Разрешимость задачи свелась к вопросу о разрешимости инт. ур-ния, которое, согласно I т. Фредгольма имеет и притом ! решение при любой непр. ф-ции f, поскольку соотв. однородное ур-ние (см. п. 92) имеет только тривиальное решение.

94. Теорема существования решения внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа. Метод её док-ва.

„Внутр. задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в обл. D имеет классическое решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной, при любой непр. ф-ции $f(M)$, удовл. ур-нию: $\oint\limits_S f(P)dS = 0$."

Идея док-ва: —//—

95. Теорема существования решения внешней задачи Дирихле для ур-ния Лапласа. Метод её док-ва.

„Внешняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D_e, \\ u|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции f."

Метод док-ва: решение ищется параллельно с союзным (28)
инт. ур-нием для внутр. задачи Неймана.

96. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для ур-ния Лапласа. Откуда оно следует?

~~В силу линейности задачи~~ $\cancel{\begin{cases}\Delta u = -F \text{ в } D,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f;\end{cases}}$ ~~достаточно показать, что однородная краевая задача~~ $\cancel{\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ в } D,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0;\end{cases}}$ ~~имеет только нулевое решение.~~

$\begin{cases}\Delta u = -F \text{ в } D,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f;\end{cases}$ Ф-ла Гаусса: $\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow \oint\limits_S f(P)\,dS = 0.$

Это явл. необходимым условием разрешимости внутр. задачи Неймана.

97. Потенциал Робена. Его физический смысл.

Потенциал Робена определяется интегралом:

$V(M) = \oint\limits_S \frac{\mu_0(P)}{R_{MP}} d\sigma_P$ в $D + \Sigma$, где D - область, ограниченная замкнутой пов-тью S, а $\mu_0(P)$ - СФ ур-ния: $2\pi\mu(P_0) + \oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}} d\sigma_P = 0,\ P_0 \in S.$

Физ. смысл: это потенциал, создаваемый зарядами на проводящей пов-ти, а его плотность есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой пов-ти.

98. Фундаментальное решение ур-ния Гельмгольца в двумерном и трёхмерном случаях.

а) двумерный случай: ур. Гельмгольца: $\Delta_2 u + cu = 0$

при $c = k^2 > 0$: $\mathcal{H}_0^{(1)}(kR_{MM_0}),\ \mathcal{H}_0^{(2)}(kR_{MM_0}),\ N_0(kR_{MM_0})$;

при $c = -\varkappa^2 < 0$: $K_0(\varkappa R_{MM_0})$.

б) <u>трёхмерный случай</u>: $\Delta u + cu = 0$

при $c = k^2 > 0$: $\dfrac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \dfrac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \dfrac{\cos kR_{MM_0}}{R_{MM_0}}$;

при $c = -\chi^2 < 0$: $\dfrac{e^{-\chi R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}$.

99. Определение поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для ур-ния Гельмгольца.

$V(M) = \int\limits_S \mu(P) \dfrac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$ – потенциал простого слоя.

$W(M) = -\int\limits_S \nu(P) \dfrac{\partial}{\partial n_P} \dfrac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$ – потенциал двойного слоя.

100. В чём отличие принципа максимума для ур-ния Лапласа и Гельмгольца?

Принцип максимума для ур-ния Гельмгольца:
„Решение ур-ния $\Delta u - \chi^2 u = 0$, определённое и непрерывное в замкн. области $D \cup S$, не может достигать во внутренних точках области D положительных максимальных и отрицательных минимальных значений."

Принцип максимума для ур-ния Лапласа:
„Если ф-ция $u(M)$, определённая и непр. в замкн. области $T + \Sigma$, удовлетворяет ур-нию $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальное и минимальное значения ф-ции $u(M)$ достигаются на пов-ти Σ."

101. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для ур-ния Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

1. Первая КЗ для ур-ния Гельмгольца $\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = 0, M \in D, \\ u|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$

не может иметь более одного.

2. Вторая и третья КЗ для ур-ния Гельмгольца $\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, M \in D, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ не могут иметь более одного классического решения при $h(P) \geq 0$.

102. Принцип максимума и принцип сравнения для уравнения параболического типа.

Принцип максимума:

„Если ф-ция $u(M,t)$, определённая и непрерывная в замкнутом цилиндре $\overline{Q_T} = \overline{D} \times [0,T]$, удовлетворяет ур-нию $\rho(M) u_t = \underbrace{\operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u)}_{L[u]} + f(M,t), M \in D, t \geq 0$, то максимальное и минимальное значение ф-ции $u(M,t)$ достигаются или в начальный момент, или в точке границы $P \in S$:

$M = \max \{u(M,0), u(P,t), M \in \overline{D}, P \in S, t \in [0,T]\}$."

Принцип сравнения:

„Пусть $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ – два классических решения ур-ния теплопроводности $\rho(M) u_t = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) + f(M,t), M \in D, t \geq 0$, непрерывных в замкнутом цилиндре $\overline{Q_T} = \overline{D} \times [0,T]$.

а) Если имеют место соотношения:

$\begin{cases} u_1(M,0) \leq u_2(M,0), M \in D, \\ u_1(P,t) \leq u_2(P,t), P \in S, t \in [0,T]; \end{cases}$ $\begin{cases} u_1(M,0) \leq u_2(M,0), M \in \overline{D}, \\ u_1(P,t) \leq u_2(P,t), P \in S, t \in [0,T]. \end{cases}$

то $u_1(M,t) \leq u_2(M,t)$ во всём цилиндре $\overline{Q_T} = \overline{D} \times [0,T]$.

б) Если имеют место соотношения:

$\begin{cases} |u_1(M,0) - u_2(M,0)| \leq \varepsilon, M \in D, \\ |u_1(P,t) - u_2(P,t)| \leq \varepsilon, P \in S, t \in [0,T]; \end{cases}$ то $|u_1(M,t) - u_2(M,t)| \leq \varepsilon, M \in D$."

103. Теорема единственности и теорема устойчивости решения внутренней НКЗ Дирихле для ур-ния параболического типа. Метод их док-ва.

Т. единственности: „Внутренняя НКЗ Дирихле:

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u) + f(M,t), \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M\in D, \\ u(P,t) = \mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,T], \\ \varphi(P) = \mu(P,0),\ P\in S; \end{cases}$$ может иметь только одно классическое решение."

Док-во проводится от противного.

<u>Т. устойчивости</u>: "Классическое решение задачи

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u) + f(M,t), \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M\in D, \\ u(P,t) = \mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,T]; \end{cases}$$ устойчиво по начальным и граничным значениям в равномерной норме."

104. Теорема существования классического решения НКЗ Дирихле для однородного ур-ния теплопроводности на отрезке.

"Пусть ф-ция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, имеет на нём кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда существует классическое решение задачи:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0<x<l, \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t>0; \end{cases}$$
представимое рядом:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x,$$
где $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$, $n=1,2,\ldots$"

105. Ф-ция Грина для ур-ния теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чём её физ. смысл?

<u>Общий вид</u>:
$$\begin{cases} G(M,Q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q), & t\geq 0, \\ G(M,Q,t) \equiv 0, & t<0; \end{cases}$$
где $\{v_k\}$ – СФ отрезка, λ_n – СЗ отрезка $(n=0,1,\ldots)$

Для ур-ния теплопроводности на отрезке:
$$\begin{cases} G(M,Q,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi, & t\geq 0, \\ G(M,Q,t) \equiv 0, & t<0; \end{cases}$$

<u>Физ. смысл</u>: температура тела D в точке M в момент времени t, если возбуждение тела производится мгновенным точечным источником, действующим в момент времени $t=0$ в точке Q.

106. Постановка начальной задачи для ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой. Теорема единственности решения начальной задачи для ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

Постановка задачи: Найти ограниченную ф-цию $u(x,t)$, определённую в области $-\infty \leq x \leq +\infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющую ур-нию теплопроводности: и нач. условию:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty \leq x \leq +\infty,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty \leq x \leq +\infty; \end{cases}$$

Теорема единственности:

„Задача для ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty \leq x \leq +\infty, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty \leq x \leq +\infty; \end{cases}$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{\Omega}$."
($\overline{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0,T]$)

107. Теорема существования классического решения задачи Коши для ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

„Если $\varphi(x)$ - непр. и ограниченная на бесконечной прямой ф-ция, то формула $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ определяет при $(x,t) \in \overline{\Omega}$ классическое решение задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}^1, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$"
(здесь $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)$)

108. Фундаментальное решение ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой. Его св-ва и физический смысл.

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$ - фунд. решение ур-ния теплопроводности.

Св-ва: а) $G(x,\xi,t)$ определена при $t > 0$ и положительна $G(x,\xi,t) > 0$, $x,\xi \in \mathbb{R}^1$;

б) $G(x,\xi,t)$ удовл. по переменным x и t однородному ур-нию теплопроводности $G_t = a^2 G_{xx}$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

в) $G(x,\xi,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-\xi)} d\xi = \delta(x,\xi)$. Значит, $G(x,\xi,t)$ на $\mathbb{R}^1$ явл. решением задачи Коши:
$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, & (x,t) \in \overline{\Omega}, \\ G(x,\xi,0) = \delta(x,\xi), & x,\xi \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

г) Принцип взаимности (св-во симметрии):

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z).$$

т.е. действие в точке (x,y,z) источника, находящегося в точке (ξ,η,ζ), равно действию в точке (ξ,η,ζ) такого же источника, помещённого в точку (x,y,z).

Ф-ция $G(x,\xi,t)$ с физ. точки зрения представляет собой температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется некоторое кол-во тепла $q>0$. А т.к. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,dx = 1$, то кол-во тепла на бесконечной прямой не изменяется с течением времени.

109. Что такое „парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?

Из вида ф-ции $G(x,\xi,t)$ следует, что температура точки бесконечной прямой, сколь угодно далеко расположенной от точки ξ, где находится источник, и в моменты времени, сколь угодно близкие к начальному моменту $t=0$, отлична от нуля. Это явление противоречит конечной скорости распространения тепла и носит название „парадокса ∞-ной теплопроводности". Указанный парадокс связан с недостаточной полнотой феноменологической физической модели, применяемой при выводе ур-ния теплопроводности. Для построения более полной математической модели следует использовать дополнительные физические соображения, учитывающие, в частности, молекулярную структуру вещества.

110. Постановка начально-краевой задачи для ур-ния теплопроводности на полубесконечной прямой. В чём заключается „метод продолжения для построения решения НКЗ для ур-ния теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?

Постановка задачи: Найти огр. ф-цию $u(x,t)$, определённую в области $x>0,\ t>0$, удовлетворяющую ур-нию теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x>0,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x\geq 0, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta u(0,t) = \mu(t),\ t\geq 0, \\ |\alpha| + |\beta| \neq 0. \end{cases}$$

„Метод продолжения": требуется решить задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\geq 0, \\ |u(x,0)|<M,\ x\geq 0; \end{cases}$$

где ГУ имеют вид $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu(t)$ (Неймана) или $u(0,t)=\mu(t)$ (Дирихле). Тогда можно решить вспомогательную задачу, записав решение в виде суммы $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ представляет влияние только НУ, а $u_2(x,t)$ – только ГУ.

Для ф-ции $u_1(x,t)$, удовлетворяющей ур-нию, введём вспомогательную ф-цию $U(x,t)$, определённую на $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющую ур-нию и условиям:

$$\begin{cases} U(0,t)=0, \\ U(x,0)=\psi(x); \end{cases} \text{ где } \psi(x)=\begin{cases} \varphi(x),\ x>0, \\ -\varphi(-x),\ x<0. \end{cases} \text{ (Дирихле)},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(0,t)=0, \\ U(x,0)=\psi(x); \end{cases} \text{ где } \psi(x)=\begin{cases} \varphi(x),\ x>0, \\ \varphi(-x),\ x<0. \end{cases} \text{ (Неймана)}.$$

Тогда решение задачи для $u_1(x,t)$ удастся записать в виде:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{a^2 t}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

111. Ф-ция Грина для ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае ГУ Дирихле.

$$G_1(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

112. Ф-ция Грина для ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае ГУ Неймана.

$$G_2(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

113. Общий вид решения НКЗ для неоднородного ур-ния теплопроводности на полупрямой в случае однородных ГУ.

Требуется решить задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ x>0, \\ |u(x,0)|<M,\ x>0; \end{cases}$$

где ГУ имеют один из видов:

а) $u(0,t)=0$ (Дирихле): $u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G_1(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$, где

$G_1(x,\xi,t-\tau)=G(x,\xi,t-\tau)-G(x,-\xi,t-\tau)$

б) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ (Нейман): $u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G_2(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$, где

$G_2(x,\xi,t-\tau)=G(x,\xi,t-\tau)+G(x,-\xi,t-\tau)$

в) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+hu(0,t)=0$ (3го рода):

$$u(x,t)=\int\limits_0^\infty G_3(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G_3(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\cdot d\tau,$$ где

$$G_3(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)-2h\int\limits_0^\infty G(x,-\xi-\eta,-t)e^{-h\eta}d\eta.$$

114. Постановка начальной задачи для ур-ния теплопроводности в пр-ве. Теорема единственности её решения.

<u>Постановка задачи:</u> Найти ф-цию $u(M,t)$, удовл. ур-нию теплопроводности и нач. условию: $\begin{cases} u_t=a^2\Delta u+f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3, \\ u(M,0)=\varphi(M), & M\in\mathbb{R}^3; \end{cases}$

здесь $\Omega_3=\mathbb{R}^3\times(0,T]=\{(M,t): M\in\mathbb{R}^3, t\in(0,T]\}$,

$\overline{\Omega}_3=\mathbb{R}^3\times[0,T]$.

<u>Теорема единст-ти:</u> „Поставленная выше задача может иметь лишь одно классическое решение, ограниченное в Ω_3".

115. Теорема существования классического решения задачи Коши для ур-ния теплопроводности в пр-ве.

„Если ф-ция $\varphi(M)$ непр. и огр. во всём трёхмерном пр-ве $\mathbb{R}^3$, то ф-ла $u(M,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}G(M,Q,t)\varphi(Q)dV_Q$ определяет при $(M,t)\in\Omega_3$ классическое решение задачи Коши для ур. теплопр-ти в пр-ве:

$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u+f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3, \\ u(M,0)=\varphi(M), & M\in\mathbb{R}^3; \end{cases}$ при $f(M,t)\equiv 0$. Здесь:

$$G(M,Q,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right).''$$

116. Общий вид решения однородного ур-ния теплопр-ти на полубесконечной при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Принцип Дюамеля.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ x \geq 0, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \ x \geq 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \ t \geq 0, \ \mu(0) = 0, \\ |u(x,t)| \leq C, \ x \geq 0, \ t \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

Эта лабудень была построена с помощью интеграла Дюамеля:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \text{ где } W(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Такой приём построения НКЗ с неодн. ГУ в виде интеграла Дюамеля явл. частным случаем общего метода решения данного класса линейных НКЗ, известного под названием принципа Дюамеля.

117. Теорема единственности решения общей НКЗ для ур-ния колебаний. Метод её док-ва.

„Задача:
$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + f, \ (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M), \\ u_t(M,0) = \psi(M), \end{cases} M \in \overline{D}, \\ \alpha(P) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P) u = \mu(P,t), \ P \in S, \ t \in [0, \infty), \ |\alpha| + |\beta| \neq 0;$$

может иметь только одно классическое решение.

Идея док-ва: предположим $\exists$-ние $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ – решения. $\measuredangle$ $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. $\measuredangle$ вспомогательную ф-цию:

$E(t) = \frac{1}{2} \int_D (\rho v^2 + k \operatorname{grad}^2 v) dV$. Оказывается, что $E(t) \equiv 0 \Rightarrow v(M,t) \equiv 0$.

118. Теорема существования классического решения НКЗ для однородного ур-ния колебаний на отрезке в случае однородных ГУ Дирихле.

„Пусть в задаче $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0,l), t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,l], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \geq 0; \end{cases}$ ф-ция $\varphi(x) \in C^{(2)}[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, причём:

$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$; а ф-ция $\psi(x) \in C^{(1)}[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Тогда решение этой задачи существует и равно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + \psi_n \cdot \frac{\sin \frac{\pi n a}{l} t}{\frac{\pi n a}{l}} \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x, \text{ где}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{Bmatrix} = \frac{2}{l} \int_0^l \begin{Bmatrix} \varphi(\xi) \\ \psi(\xi) \end{Bmatrix} \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi.“$$

119. Определение ф-ции влияния мгновенного точечного импульса (ф-ции Грина) для ур-ния колебаний на отрезке.

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n} t} V_n(M) V_n(Q), \text{ где } V_n, \lambda_n - \text{СФ и СЗ ЗШЛ}:$$

$$\begin{cases} L_M[V_n] + \lambda_n V_n = 0,\ M \in D, \\ N_P[V_n(P)] = 0,\ P \in S; \\ \|V_n\| = 1. \end{cases}$$

Явно: (это опр.) $G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \sin \frac{\pi n a}{l} t$.

120. Постановка начальной задачи для ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

Найти ф-цию $u(x,t)$, определённую при $t \geq 0$ на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, удовл. ур-нию и нач. условиям:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

121. Формула Даламбера.

Решение одномерного волн. ур-ния: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0$, с нач. условиями $u(x,0) = \varphi(x)$ и $u_t(x,0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

P.S. $u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at)$

122. В чём состоит метод распространяющихся волн?

Метод состоит в поиске решения ур-ния колебаний в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях: ф-ция $u(x,t)$ ищется в виде суммы $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$, каждая из которых представляет неизменный профиль, перемещающийся вправо или влево по оси x.

123. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть ф-ция $\varphi(x) \in C^{(2)}(-\infty,+\infty)$, а ф-ция $\psi(x) \in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$. Тогда классическое решение задачи Коши: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x); \end{cases}$

существует и единственно, и определяется ф-лой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz."$$

124. Теорема устойчивости решения задачи Коши для ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть начальные ф-ции $\varphi_\alpha(x)$ и $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, двух задач Коши

$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0) = \varphi_\alpha(x), \\ u_t(x,0) = \psi_\alpha(x); \end{cases}$ удовлетворяют условиям: $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^1$ и $\int\limits_a^b |\psi_1(z) - \psi_2(z)|^2 dz \le \varepsilon^2(b-a)$

для любых конечных a и b $(a<b)$. Тогда для решений этих задач при $t \in [0,T]$ выполняется нер-во: $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon(1+T)$, $-\infty<x<+\infty$, $t\ge 0$."

125. Что такое „характеристический треугольник" на фазовой плоскости?

Выберем на фазовой плоскости фиксированную точку $M(x_0, y_0)$ и проведём ч/з неё характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$. Эти характеристики пересекут ось x соответственно в точках $P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$, значение ф-ции в т. $M(x_0, t_0)$ равно $u(x_0, y_0) =$ $= f_1(x_0 - at_0) + f_2(x_0 + at_0)$. Таким образом, значение ф-ции $u(x,t)$ в т. $M(x_0, t_0)$ определяется значениями ф-ций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках

$P(x_0-at_0, 0)$ и $Q(x_0+at_0, 0)$ соответственно, являющихся вершинами ΔMPQ, образованного отрезками двух характеристик и отрезком оси x. Этот треугольник наз. характеристическим Δ-ком точки $M(x_0, t_0)$. (39)

126. В чём состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?

Для решения ур-ния колебаний интегрируем ур-ние колебаний по „характеристическому Δ-ку" (умножив предварительно на $1/2a$) и применяем к результату ф-лы Грина.

127. Общая формула решения начальной задачи для неодн. ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz = f_1(x-at) + f_2(x+at) + \frac{a}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

128. Теорема существования и единственности классического решения неодн. ур-ния колебаний на бесконечной прямой.

„Пусть ф-ция $f(x,t)$ непрерывно диф-ма при $-\infty<x<+\infty$, $t>0$. Тогда решение задачи существует, единственно, и определяется ф-лой:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.\text{"}$$

129. В чём состоит „метод продолжения" построения решения НКЗ для ур-ния колебаний на полупрямой в случае однородных ГУ Дирихле и Неймана?

В задаче Дирихле ф-ции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаются нечётным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases}\varphi(x), & x>0;\\ -\varphi(-x), & x<0;\end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

, а в задаче Неймана – чётным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ \varphi(-x), & x<0;\end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

И уже продолженные ф-ции подставляются в ф-лу Даламбера.

130. Решение НКЗ для однородного ур-ния колебаний на полупрямой в случае однородного НУ и неодн. ГУ Дирихле. Каким методом можно его получить?

Решение одномерного волнового ур-ния:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0,$$

с одпор. НУ: $\left.\begin{matrix} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{matrix}\right\}, \ -\infty < x < +\infty,$

и неодн. ГУ: $u(0,t) = \mu(t), \ t > 0$, имеет вид:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \ 0 < t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), \ t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Это можно получить, если искать ф-цию $u(x,t)$ в виде: $u(x,t) = f(x-at)$.

131. Постановка задачи Коши для ур-ния колебаний в пр-ве.

Найти ф-цию $u(M,t)$, удовл. ур-нию:

$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), \ (M,t) \in \Omega_3, \ \Omega_3 = \mathbb{R}^3 \times [0,T]$

и НУ: $\begin{cases} u(M,0) = \varphi(M), \\ u_t(M,0) = \psi(M). \end{cases}$

132. Формула Кирхгофа.

Для решения ур-ния $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), \ (M,t) \in \Omega_3$

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} \frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial R}{\partial n_P} \right\} dS_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{f\left(M, t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right)}{R_{M_0M}} dV_M,$$ где $R = R_{M_0P}$, S - произв. гладкая замкн. пов-ть; $\mathcal{D}$ - область, ограниченная пов-тью S.

133. Формула Пуассона, выражающая решение задачи Коши для ур-ния колебаний в 3^x-мерном пр-ве.

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \oint\limits_{S_{at}^M} \frac{\varphi(P)}{R_{MP}} dS_P + \oint\limits_{S_{at}^M} \frac{\psi(P)}{R_{MP}} dS_P \right\},$$ где S_{at}^M - сфера радиуса at с центром в т. M.

134. В чём состоит „метод спуска Адамара"?

Метод состоит в том, чтобы из ф-лы решения с большим числом пространственных переменных получить ф-лу с меньшим числом пространственных переменных. Применим не только к ур-нию колебаний.

135. Формула Пуассона, выражающая решение задачи Коши для ур-ния колебаний в двумерном пр-ве.

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{U_{at}^{M}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \int\limits_{U_{at}^{M}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{U_{a\tau}^{M}} \frac{f(\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

где U_{at}^{M} – круг радиуса at с центром в т. M.