

студенты-
физики

Ответы к экзамену по ММФ Письменная часть

Барон Яков

5 семестр
Боголюбов А.Н.

2014

Письменная часть.Билет 1.

1. Принцип максимума для гармонической функции.

„Гармоническая в области D функция, отличная от постоянной, непрерывная в замкнутой области \bar{D} , достигает своих максимальных и минимальных значений только на границе S области D .“ здесь $\bar{D} = D \cup S$.

D-во:

т.к. функция $u(M)$ непр. в \bar{D} , то она достигает своего максимального значения в этой замкн. области. Д-жем, что это максимальное значение достигается функцией $u(M)$ на пов-ти S .

Пл: пусть функция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D :

$$u_0 = \max_{\bar{D}} u(M) = u(M_0) \geq u(M), \quad M - \text{любая точка области } \bar{D}.$$

Окружим точку M_0 сферой $\Sigma_r^{M_0}$ радиуса r , целиком лежащей в области D , и применим теорему о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Sigma_r^{M_0}} u(P) dS \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Sigma_r^{M_0}} u(M_0) dS = u(M_0) \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Sigma_r^{M_0}} dS = u(M_0)$$

Написанная цепочка соотношений верна только в случае, если:

$$u(P)|_{\Sigma_r^{M_0}} \equiv u(M_0).$$

Действительно, т.к. крайние элементы цепочки равны, то:

$$\int_{\Sigma_r^{M_0}} u(P) dS = 4\pi r^2 u(M_0).$$

Если теперь предположить, что хотя бы в одной точке P_0 сферы $\Sigma_r^{M_0}$:

$u(P_0) < u(M_0)$, то это непр-во, в силу непр-ти $u(M)$, будет иметь место и в некоторой окрестности точки P_0 на сфере $\Sigma_r^{M_0}$, откуда:

$$\int_{\Sigma_r^{M_0}} u(P) dS < 4\pi r^2 u(M_0), \quad \text{что приводит к противоречию.}$$

$$\text{След-но, всюду на сфере } \Sigma_r^{M_0}: u(P) \equiv u(M_0).$$

Поскольку ρ произвольно, то его можно выбрать так, чтобы сфера $\Sigma_\rho^{M_0}$ касалась пов-ти \mathcal{S} . Точку касания обозначим M^* . В точке M^* и достигается максимальное значение $U_0 = U(M_0)$.

Применяя проведённые рассуждения к гармонической функции $V \equiv -U$, получим достижение на пов-ти \mathcal{S} минимального значения.

Покажем, наконец, что только функция, тождественно равная постоянной может достигать своего максимального значения во внутр. точках области.

Из проведённых выше рассуждений следует, что функция $U(M) = U_0$ не только на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$, но и, в силу произвольности ρ , всюду внутри шара $K_\rho^{M_0}$, ограниченного этой сферой.

Возьмём произв. точку M области \mathcal{D} . Соединим точки M_0 и M кривой \mathcal{C} , цепочкой ломаных в обл. \mathcal{D} . Обозначим наименьшее расстояние точек \mathcal{C} от пов-ти \mathcal{S} $\frac{1}{3}d$, а длину кривой \mathcal{C} — $\frac{1}{3}l$. Пусть т. M_1 явл. последней точкой пересечения кривой \mathcal{C} и сферы $\Sigma_d^{M_0}$. Поскольку $U(M_1) = U(M_0)$, то, повторяя проведённые рассуждения, получим, что всюду внутри шара $K_d^{M_1}$ функция U постоянна и равна $U(M_0)$. Возьм на кривой \mathcal{C} точку M_2 , являющуюся последней точкой пересечения кривой \mathcal{C} и сферы $\Sigma_d^{M_1}$, и продолжая данный процесс, в результате конечного числа шагов, которое не более l/d , получим, что внутри шара, которому принадлежит т. M , функция U постоянна и равна $U(M_0) = U_0$. В силу произвольности т. M и непрерывности функции U в замкн. обл. $\bar{\mathcal{D}}$. Таким образом, из всех гармонических функций, непрерывных в $\bar{\mathcal{D}}$, только постоянная может достигать своего максимального значения во внутр. точках области.

Аналогично для минимального значения.

2. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для уравн. Гельмгольца в случае граничных условий общего вида.

„При $h(P) \geq 0$ на \mathcal{S} краевая задача:
$$\begin{cases} \Delta u - \kappa^2 u = 0 & \text{в } \mathcal{D}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_{\mathcal{S}} = f \end{cases}$$
 не может иметь более одного классического решения.“

Д-во: Покажем, что однородная задача $\begin{cases} \Delta u - \kappa^2 u = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)|_S = 0, h \geq 0; \end{cases} \quad (3)$ имеет только тривиальное решение.

Применим к решению однородной задачи $1^{\text{о}}$ ф-лу Грина:

$$\int_{\mathcal{D}} u \Delta u \, dV = \int_{\mathcal{S}} u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} u)^2 \, dV.$$

Учитывая, что $\Delta u = \kappa^2 u$ и $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = -hu|_S$, получаем:

$$\kappa^2 \int_{\mathcal{D}} u^2 \, dV + \int_{\mathcal{S}} hu^2 \, dS + \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} u)^2 \, dV \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0 \text{ в } \overline{\mathcal{D}}.$$

Лемма 2.

1. Теорема о нулях КОП.

" КОП $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a, b]$."

Д-во: пусть n - произв. фикс. целое положительное число.

В силу ортогональности полиномов $p_n(x)$ и $p_0(x) \equiv 1$ имеем:

$$\int_a^b p_n(x) \cdot 1 \cdot p(x) \, dx = 0, n > 0.$$

След-но, полином $p_n(x)$ меняет знак на интервале (a, b) в некотором числе $k \geq 1$ различных точек x_1, x_2, \dots, x_k ($x_i \in (a, b)$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$). Тогда полином $p_n(x)$ имеет вид: $p_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k) \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ не меняет знака на (a, b) .

Для док-ва теоремы достаточно показать, что $k=n$.

Пп: $k < n$.

т.к. система КОП $\{p_n(x)\}$ содержит полиномы всех степеней, то для полинома $\zeta_k(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k)$ справедливо разложение:

$$\zeta_k(x) = \sum_{i=0}^k a_i p_i(x), \text{ где } a_k \neq 0.$$

т.к. $k < n$, имеем: $\int_a^b p_n(x) \zeta_k(x) p(x) \, dx = \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b p_n(x) p_i(x) p(x) \, dx = 0.$

С другой стороны: $\int_a^b p_n(x) \zeta_k(x) p(x) \, dx = \int_a^b \zeta_k^2(x) \varphi_n(x) p(x) \, dx \neq 0.$ } получим противоречие.

След-но, $k \geq n$. А поскольку полином n -й степени не может иметь более n нулей, то $k=n$. Отсюда вытекает, что все корни простые.

2. Определение потенциала двойного слоя. Доказательство его (4) основных свойств.

Опр.: Потенциалом двойного слоя в трёхмерном случае наз. интеграл вида $W(M) = - \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$, где S - двусторонняя

пов-ть, \vec{n}_P - внешняя нормаль к пов-ти S в т. P , $\nu(P)$ - ф-ция, заданная на пов-ти S (она наз. плотностью потенциала двойного слоя).

$$W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} dS_P, \text{ где } \varphi - \text{угл. между внутр. нормалью к пов-ти } S \text{ в т. } P \text{ и вектором } \vec{PM}.$$

Св-ва: 1) из опр. следует, что в том случае, когда т. $M \notin S$, потенциал имеет производные всех порядков, которые можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, и явл. гармонической ф-цией: $\Delta W = 0$;

2) при $M \rightarrow \infty$ в случае ограниченной пов-ти: $W = O\left(\frac{1}{z^2}\right), z \rightarrow \infty$.

Лемма 3.

3. Теорема единственности решения ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

„Задача $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^1; \end{cases}$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\bar{\Omega}$.”

$$\Omega = \mathbb{R}^1 \times (0, T] \text{ и } \bar{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0, T].$$

До-во: Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - 2 классических ограниченных решения данной задачи. Ф-ции u_1 и u_2 непр. и опр. в области $\bar{\Omega}$: $|u_k| \leq M; k=1,2$. $\neq v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Ф-ция $v(x,t)$ непр. в обл. $\bar{\Omega}$, ограничена $|v(x,t)| \leq 2M$, удовл. в обл. Ω однородному ур-нию теплопроводности: $v_t = a^2 v_{xx}$, и однородному начальному условию: $v(x,0) = 0$.

Однако применить к ф-ции $v(x,t)$ принцип максимума нельзя, поскольку в неогр. по x области ф-ция $v(x,t)$ может нигде не принимать максимального значения.

Чтобы воспользоваться принципом максимума, Δ огр. по x (5)
область: $|x| \leq L$, где $L > 0$ - вспомогательное число, которое будем затем неограниченно увеличивать. Обозначим:

$$\bar{\Omega}_L = [-L, L] \times [0, T] \text{ и } \Omega_L = [-L, L] \times (0, T].$$

Введём вспомогательную ф-цию (её обычно наз. барьером):

$$\omega(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + at \right).$$

Ф-ция $\omega(x, t)$ непр. в обл. $\bar{\Omega}_L$ и удовл. в области Ω_L одноп. ур-нию теплопроводности (это проверяется непосредственно). Кроме того, ф-ции $v(x, t)$ и $\omega(x, t)$ связаны следующим пер-вым:

$$\omega(x, 0) \geq |v(x, 0)| = 0,$$

$$\omega(\pm L, t) \geq 2M \geq |v(\pm L, t)|.$$

В огр. обл. $\bar{\Omega}_L$ уже справедлив принцип максимума. Применяя принцип сравнения (± формулировка) к ф-циям - $\omega(x, t)$, $v(x, t)$ и к ф-циям $v(x, t)$, $\omega(x, t)$, с учётом последних пер-в, получим:

$$-\frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + at \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + at \right).$$

Зафиксируем точку $(x, t) \in \bar{\Omega}_L$ и перейдём в последнем соотношении к пределу при $L \rightarrow \infty$. Тогда по известной теореме анализа получим:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} v(x, t) = 0.$$

Отсюда в силу независимости ф-ции $v(x, t)$ от L и в силу произвольности точки (x, t) получаем, что всюду в области $\bar{\Omega}$ ф-ция $v(x, t) \equiv 0$. Поэтому всюду в области $\bar{\Omega}$: $u_1 \equiv u_2$, т.е. решение единственно.

2. Построение ф-ции Грина задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в верхнем полупространстве.

Для построения ф-ции Грина в верхнем полупр-стве ($-\infty < x < +\infty$, $y < \infty$, $z \geq 0$) удобнее всего применить метод электростатических изобразений.

Чтобы построить ф-цию Грина, достаточно определить ф-цию v , которая в данном случае явл. решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ при } z > 0, \\ V|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \Big|_{z=0}, \quad M = (x, y, z); \\ V \rightarrow 0 \text{ на бесконечности;} \end{cases}$$

Пусть M_3 - точка, симметричная точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $z=0$. Тогда очевидно, что решением задачи явл. функция:

$V = -\frac{1}{4\pi R_{MM_3}}$. След-но, функция Грина имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_3}}$$

потенциал точечного заряда, размещенного в т. M_0
— потенциал точечного заряда противоположного знака, размещенного в симметричной т. M_3

P.S. Учитывая физическую интерпретацию функции Грина, выражение для неё можно было записать сразу.

Тема 4.

1. Теорема существования классического решения уравнения теплопроводности на отрезке.

„ Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, имеет на нём кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & 0 \leq t < \infty; \end{cases}$$

представленное в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \text{ где } C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, n = 1, 2, \dots$$

До-во: предварительно д-лем обобщённый принцип суперпозиции:

„ Пусть $u_n(x, t), n = 1, 2, \dots$, — частные решения линейного однородного дифференциального уравнения обыкновенного или в частных производных $L[u_n(x, t)] = 0$ и пусть все дифференциальные операции над функцией $u(x, t)$, представленной сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, t)$, входящие в это уравнение, можно проводить путём почленного дифференцирования ряда. Тогда функция $u(x, t)$ также удовлетворяет уравнению $L[u] = 0$.

При выполнении сформулированных в принципе условий получаем: $L[u] = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n] = 0$, что и требовалось доказать. (7)

Перейдём к д-ву теоремы:

Нужно д-ть, что ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$ сходится в области $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, \infty)$ и функция $u(x,t)$, представленная этим рядом, непрерывна в $\bar{\Omega}$, удовлетворяет заданному начальному и граничным условиям, обладает непр. производными, входящими в ур-ние $u_t = a^2 u_{xx}$, и удовлетворяет этому ур-нию в области $\Omega = (0, l) \times (0, \infty)$.

✓ сх-ть ряда. Мажорантным рядом для него будет ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|,$$

который сх-ся в силу условий, наложенных на функцию $\varphi(x)$ и св-в рядов Фурье (см. стр. 245). Поэтому ряд для $u(x,t)$ сх-ся равномерно в $\bar{\Omega}$ и его сумма $u(x,t)$ есть функция, непр. в $\bar{\Omega}$.

Отсюда следует, что функция $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$ удовл. однородным ГУ $u(0,t) = 0$ и $u(l,t) = 0$, поскольку они удовл. все сФ $\sin \frac{\pi n x}{l}$, и при $t=0$ переходит в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ для функции $\varphi(x)$.

Т.к. каждой член ряда (*) явл. решением однородного ур-ния $u_t = a^2 u_{xx}$, то в силу обобщённого принципа суперпозиции достаточно показать, что в области Ω существует u_t и u_{xx} , и их можно вычислить путём почленного диф-ния ряда (*).

Покажем, что при $t \geq \bar{t}$, где $\bar{t} > 0$ - любое число, сходятся равномерно ряды из производных: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$, где

$$u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x - \text{общий член ряда (*).$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ непр. на отрезке $[0, l]$, то она сгр. на нём: $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in [0, l]$, где $M > 0$ - некоторая постоянная и:

$$|C_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right| \leq 2M.$$

Потому при $t \geq \bar{t}$ получаем:

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \bar{t}} \quad (1)$$

и

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \bar{t}} \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) вытекает, что для док-ва равномерной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ нужно доказать сходимость мажорантных рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \bar{t}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $N = 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2$ — для первого мажорантного ряда, $N = 2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2$ — для второго.

Сходимость ряда вида (3) следует из признака сходимости Даламбера, т.к.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 (2n+1) \bar{t}} = 0.$$

Поскольку при $t \geq \bar{t} > 0$ мажорантные ряды сходятся, то сами ряды сходятся равномерно и ряд (*) можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t при $t \geq \bar{t}$ или, ввиду произвольности $\bar{t} > 0$, в области $\Omega = (0, l) \times (0, \infty)$.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x, t)$, представленная рядом (*), удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$.

Итак, мы докажем, что при условиях теоремы функция $u(x, t)$, представленная ф-лой (*) с коэф-тами $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, n=1, 2, \dots$, явл. классическим решением НКЗ.

2. Доказать, что система полиномов Лежандра исчерпывает все сф соответствующей ЗШЛ.

Полиномы Лежандра: $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n)$

пусть $P_n(x) = y$, тогда ЗШЛ:
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + \lambda_n y = 0, \\ \tau(x) = -2x; \sigma(x) = 1-x^2 \\ |y(\pm 1)| < \infty, x \in (-1, 1). \end{cases}$$

$$\lambda_n = -n \left(\tau' + \frac{n-1}{2} \sigma'' \right) = n(n+1)$$

Поскольку система Коши Лежандра задана на конечном интервале $[-1, 1]$, то в силу т. Вейерштрасса она явл. замкнутой, а след-но, полней и исчерпывает все сф ЗДЛ. (9)

Лемма 5.

3. Принцип максимума для ур-ния параболического типа.

„Решение однородного ур-ния теплопр-ти $\rho u_t = \text{div}(k \text{grad} u)$, непрерывное в замкн. цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0, T]$, во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений больших, чем максимальное из начального и граничного значений.“

Д-во: Нам н.д., что если $\tilde{M}^* = \max \left\{ u(M, 0), u(P, t) \right\}_{M \in \bar{D}, P \in S, t \in [0, T]}$,

то $u(M, t) \leq \tilde{M}^*$, $(M, t) \in Q_T$.

Пп: пусть в некоторой внутренней точке цилиндра $(M_0, t_0) \in Q_T$ ф-ция $u(M, t)$ достигает своего максимального значения, большего \tilde{M}^* : $u(M_0, t_0) > \tilde{M}^*$. Таким образом: $u(M_0, t_0) = \tilde{M}^* + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Введём вспомогательную ф-цию $v(M, t) = u(M, t) + \alpha(t_0 - t)$, (1)
где $\alpha > 0$ — число, которое мы определим дальше. Очевидно,

$v(M_0, t_0) = \tilde{M}^* + \varepsilon$ и $\max \left\{ v(M, 0), v(P, t) \right\}_{M \in \bar{D}, P \in S, t \in [0, T]} \leq \tilde{M}^* + \alpha T < \tilde{M}^* + \frac{\varepsilon}{2}$, (2)

если выбрать α так, чтобы $\alpha T < \frac{\varepsilon}{2}$.

Т.к. ф-ция $v(M, t)$ непр. в замкн. цилиндре \bar{Q}_T , то она должна в некоторой точке $(M_1, t_1) \in \bar{Q}_T$ достигать своего максимального значения. Очевидно, что: $v(M_1, t_1) > v(M_0, t_0) = \tilde{M}^* + \varepsilon$,

откуда следует, что точка (M_1, t_1) — внутр. точка цилиндра Q_T , поскольку в силу (2) на границе цилиндра Q_T (т.е. на границе области D и в нач. момент) максимальное значение ф-ции $v(M, t)$ не превосходит величины $\tilde{M}^* + \varepsilon/2$.

Итак, $(M_1, t_1) \in Q_T$, т.е. $M_1 \in D, t_1 \in (0, T]$.

Поскольку в T (M_s, t_s) функция $v(M, t)$ достигает своего максимума (10) ного значения, то в этой точке выполняются условия максимума:

$$\text{grad } v(M_s, t_s) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t}(M_s, t_s) \geq 0; \quad \Delta v(M_s, t_s) \leq 0. \quad (3)$$

Заметим, что в ф-ле (3) при $t_s < T$: $\frac{\partial v}{\partial t}(M_s, t_s) = 0$, а при $t_s = T$:

$\frac{\partial v}{\partial t}(M_s, t_s) \geq 0$. Из ф-л (1) и (3) следует, что:

$$\text{grad } u(M_s, t_s) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(M_s, t_s) \geq \alpha > 0,$$

$$\Delta u(M_s, t_s) \leq 0 \quad (4)$$

Ф-ция $u(M, t)$ явл. решением ур-ния $\rho u_t = \text{div}(k \text{grad } u)$, которое можно записать в следующем виде: $\rho u_t = k \Delta u + \text{grad } k \text{grad } u$. (5)

Сравнивая (4) и (5) и учитывая, что по условию $\rho(M) > 0$, $k(M) > 0$, приходим к выводу, что в точке (M_s, t_s) ур-ние (5) не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

2. Вывод ф-лы для разрыва нормальной производной потенциала простого слоя.

Исследуем поведение нормальной производной потенциала простого слоя при переходе \mathcal{E}_z пов-ть S . Плотность $\mu(P)$ потенциала будем считать непрерывной на пов-ти ф-цией.

Пусть P_0 - произвольная точка пов-ти S , $\vec{n}_e(P_0)$ - внешняя единичная нормаль в точке P_0 . \mathcal{E} производную потенциала простого слоя $V(M)$ по направлению $\vec{n}_e(P_0)$:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n_e} = \vec{n}_e(P_0) \text{grad}_M V(M) = \int_S \mu(P) \vec{n}_e(P_0) \text{grad}_M \frac{1}{R_{MP}} dS_P \quad (1)$$

и исследуем её поведение при $M \rightarrow P_0$ по направлению $\vec{n}_e(P_0)$.

Учитывая, что ф-ция R_{MP} зависит лишь от разности координат точек M и P , ф-лу (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) &= - \int_S \mu(P) \vec{n}_e(P_0) \text{grad}_P \frac{1}{R_{MP}} dS = \int_S \mu(P) [\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \text{grad}_P \frac{1}{R} dS - \\ &- \int_S \mu(P) \vec{n}_e(P) \text{grad}_P \frac{1}{R} dS \end{aligned} \quad (2)$$

(т.к. $\text{grad}_M \frac{1}{R_{MP}} = -\text{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}$), где $\vec{n}_e(P)$ - внеш. единичная нормаль к (11) пов-ти в точке P.

Второе слагаемое в (2) есть потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(P)$: $W(M) = - \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$. Поэтому:

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \int_S \mu(P) [\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \text{grad}_P \frac{1}{R_{MP}} dS + W(M) = Y(M) + W(M) \quad (3)$$

Покажем, что функция $Y(M)$ непр. в т. P_0 . Для этого оценим подынтегральную функцию в окр-ти P_0 :

$$f = \left| \mu(P) [\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)] \text{grad}_P \frac{1}{R_{MP}} \right| \leq C |\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)| \frac{1}{R_{MP}^2}, \text{ т.к. } |\mu| \leq C.$$

Поскольку $|\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0)| = \sqrt{(\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0))(\vec{n}_e(P) - \vec{n}_e(P_0))} = \sqrt{2 - 2\cos\gamma} = 2 \left| \sin \frac{\gamma}{2} \right|$,

где γ - угол \vec{e}_y нормальными в т. P и P_0 , то:

$$f \leq \frac{2 \left| \sin \frac{\gamma}{2} \right| C}{R_{PM}^2} \leq \frac{\gamma C}{R_{PM}^2} \leq \frac{AC R_{PP_0}^\delta}{R_{PM}^2}, \text{ т.к. для пов-ти Лангунова } \gamma < AR_{PP_0}^\delta.$$

Полученная оценка обеспечивает непр-ть интеграла $Y(M)$ в т. P_0 , когда $M \rightarrow P_0$ по нормали $\vec{n}_e(P_0)$. Следно, $Y(M)$ непр. в т. P_0 .

Таким образом, разрывные св-ва $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ согласно (3) определяются

вторым слагаемым $W(M)$. Из св-ва потенциала двойного слоя известно, что:

$$\left. \begin{aligned} W_i(P) &= \dot{W}(P) + 2\pi\mu(P), \\ W_e(P) &= \dot{W}(P) - 2\pi\mu(P), \\ \cancel{W_i(P)} &= \cancel{W_e(P)} = \cancel{4\pi\mu(P)} \end{aligned} \right\} (\star)$$

Используя (\star) , из (3) получаем:

$$\lim_{M \rightarrow P_0, M \in \mathcal{D}} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = Y(P_0) + W_i(P_0) = Y(P_0) + \dot{W}(P_0) + 2\pi\mu(P_0) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0) \right)^{\circ} + 2\pi\mu(P_0),$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0) \right)^{\circ}$ - прямое значение нормальной производной в т. P_0 .

$$\text{Аналогично: } \lim_{M \rightarrow P_0, M \in \mathcal{D}_e} \frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0) \right)^{\circ} - 2\pi\mu(P_0).$$

Введем обозначения: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0) \right)_i$ - внутр. предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя;

$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0) \right)_e$ - внеш. предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя.

Если пов-ть незамкнутая, то внутр. и внеш. стороны пов-ти определяются выбором внешней нормали.

Тогда разрывные св-ва непрерывной производной потенциала (12) простого слоя можно описать следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 4\pi\mu(P).$$

Тема 6.

1. Доказать замкнутость системы присоединённых функций Ле-жандра.

Для д-ва нам понадобится лемма:

„Для всякой непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x)$ можно построить такую непрерывную на $[-1, 1]$ функцию $\bar{\varphi}(x)$, что функция $\varphi(x) = (1-x^2)^{m/2} \bar{\varphi}(x)$ приближает в среднем функцию $f(x)$ на $[-1, 1]$ “.

её д-во можно найти на стр. 134-135 (СБК).

Перейдём к док-ву замкнутости системы ПФЛ.

Заб.: „Система ПФЛ замкнута в пр-ве $L_2[-1, 1]$ с нормой

$$\|f(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(x) dx}.$$

Итак, пусть задана некоторая функция $f(x) \in L_2[-1, 1]$. Известно, что $\forall \varepsilon' > 0 \exists g(x) \in C[-1, 1]: \|f(x) - g(x)\|_{L_2} < \varepsilon'$. (1)

Согласно лемме: $\forall \varepsilon'' > 0 \exists \varphi(x) = (1-x^2)^{m/2} \bar{\varphi}(x)$, причём $\varphi(x) \in C[-1, 1]$:

$$\|g - \varphi\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^1 |g(x) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon''^2. \quad (2)$$

Согласно т. Вейерштрасса функцию $\bar{\varphi}(x)$ можно равномерно приблизить на отрезке $[-1, 1]$ системой полиномов, т.е. $\forall \varepsilon''' > 0$

$$\exists \{C_n\} \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in [-1, 1]: \left| \bar{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^N C_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right| < \varepsilon'''. \quad (3)$$

Умножив левую часть нер-ва (3) на $0 \leq (1-x^2)^{m/2} \leq 1$ (и тем самым уменьшив его) и учитывая, что $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$, получим:

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \varphi(x) - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon''', \text{ след-но:}$$

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)}(x) \right\|_{L_2} < \sqrt{2} \varepsilon''' \quad (4)$$

Какоже, из пер-во (1), (2) и (4), применяя пер-во Δ -ка для нормы, получим: (33)

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)} \right\|_{L_2} \leq \|f - g\|_{L_2} + \|g - \psi\|_{L_2} + \left\| \psi - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)} \right\|_{L_2} < \varepsilon' + \varepsilon'' + \sqrt{2}\varepsilon''' < \varepsilon$$

соответствующем выборе $\varepsilon', \varepsilon''$ и ε''' .

Последнее пер-во дает замкнутость системы ПФЛ в пр-ве $L_2[-1, 1]$. ■

2. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Нам понадобится лемма:

„Пусть функция $\Phi(x)$ определена на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, имеет на ней ограниченные производные до N -го порядка включительно, и лин. комбинация $\sum_{k=0}^N a_k \Phi^{(k)}(x)$, где $a_k = \text{const}$, $k = \overline{0, N}$,

четна отн-но точки $x=0$. Тогда функция:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi) d\xi \quad (1)$$

удовл. условию $\sum_{k=0}^N a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=0} = 0$. „до ее можно пойти на стр. 275-276 (СБК).

$$\text{Задача: } \begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & (x, t) \in \Omega_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \overline{\mathbb{R}^+}, \\ u_x(0, t) = 0, & t \in [0, \infty) \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_+ = \{0 < x < \infty, 0 < t < \infty\}, \\ \overline{\mathbb{R}^+} = \{0 \leq x < \infty\}. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку мы будем искать классическое решение, предположим, что функция $\varphi(x)$ удовл. условию согласования НУ и ГУ: $\varphi(0) = 0$. Введем функцию $\Phi(x)$, являющуюся четным продолжением функции $\varphi(x)$ на всю бесконечную прямую:
$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \overline{\mathbb{R}^+}, \\ \varphi(-x), & x \in \overline{\mathbb{R}^-}. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Задача Коши: } \begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \\ U_{t=0} = \Phi(x). \end{cases}$$

Записывая решение в виде интеграла Пуассона (1) и Φ -взяв функцию $U(x, t)$ на положительной полуоси, получим решение задачи (1). При этом ГУ Коши выполняется в силу леммы. С помощью Φ -ы (2) получим:

$$u(x,t) = U(x,t) = \int_{x \in \mathbb{R}^+} \{G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Таким образом, решение 4-мой задачи можно записать в виде $u(x,t) = \int_0^\infty G_2(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi$, где:

$$G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\}.$$

$G_2(x,\xi,t)$ наз. функцией Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Тема 7.

1. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.

„Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью, заданной на гладкой пов-ти, явл. непр. функцией во всем пр-ве“.

До-во: Мы установили (св-ва потенциала), что потенциал простого слоя явл. непр. функцией вне пов-ти S ($V=O(1/r)$, $r \rightarrow \infty$). Остается показать, что при выполнении условий теоремы потенциал простого слоя непрерывен на пов-ти S и его значения вне пов-ти S непр-но приближаются к значениям на S . Для этого в силу указанных ранее св-в равномерно сходящихся χ -с интегралов достаточно показать, что интеграл:

$$V(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS}{R_{MP}}, \quad |\mu| \leq A \text{ равномерно сх-е в точках пов-ти } S.$$

Пусть M_0 - произв. точка пов-ти S . Построим шар $K_\delta^{M_0}$ радиуса δ с центром в т. M_0 . Обозначим $\frac{2}{3} S_1$ ту часть пов-ти S , которая расположена внутри $K_\delta^{M_0}$, $S_2 = S \setminus S_1$. Тогда:

$$V(M) = \int_{S_1} \mu \frac{dS}{R_{MP}} + \int_{S_2} \mu \frac{dS}{R_{MP}} = V_1(M) + V_2(M).$$

Пусть M - произв. точка, отстоящая от т. M_0 не более чем на δ :

$$R_{MM_0} \leq \delta.$$

Нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\left| \int_{S_1} \mu \frac{dS}{R_{MP}} \right| \leq \varepsilon$ при всех M ,

для которых $R_{MM_0} \leq \delta$.

Введем локальную систему координат (x, y, z) с началом в (15)
 т. M_0 , направив ось z вдоль внешней нормали к пов-ти S в
 т. M_0 . Пусть в этой системе координат $M = (x, y, z)$, $P = (\xi, \eta, \zeta)$,
 S'_1 - проекция S_1 на пл-ть (x, y) , $dS = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma}$, где γ - угол \angle между нор-
 мальной в точке P и осью z . Оценим V_1 :

$$|V_1(M)| \leq A \int_{S_1} \frac{dS}{R_{MP}} = A \int_{S'_1} \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \leq A \int_{S'_1} \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

Пусть $K_{2\delta}$ - круг радиуса 2δ с центром в т. $M' = (x, y, 0)$, лежащий
 в пл-ти (x, y) и содержащий S'_1 внутри себя. Величину δ выберем
 настолько малой, что $\cos \gamma > \frac{1}{2}$, что возможно, поскольку пов-ть
 гладкая. Тогда: $|V_1(M)| \leq 2A \int_{K_{2\delta}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$

Введя полярную систему координат (ρ, φ) с центром M' , получим:

$$|V_1(M)| \leq 2A \int_0^{2\delta} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 8\pi A \delta \leq \varepsilon.$$

След-но, интеграл по S_1 эк-ва равномерно стп-но M в т. M_0 и пред-
 ставляет собой непрерывную в т. M_0 ф-цию. Поэтому потенциал
 простого слоя $V(M)$ непрерывен в точках пов-ти S .

Из приведенных рассуждений следует, что потенциал простого
 слоя с орг. плотностью непрерывен во всем пр-ве. ■

2. Получить асимптотику ф-ции Бесселя при больших значе-
 ниях аргумента.

✗ ф-цию Ханкеля: $H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta \quad (1)$

Интеграл (1) - это интеграл по комплексной переменной ζ , зави-
 сящий от параметра x , для оценки которого при $x \rightarrow \infty$ можно
 использовать метод перевала. Осн. положения метода перевала:

Если $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ явл. аналитическими ф-циями аргумента ζ в
 области G , содержащей контур интегрирования C , то при больших
 значениях аргумента x имеет место асимптотическая формула:

$$F(x) = \int_C e^{x f(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta = e^{x f(\zeta_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x |f''(\zeta_0)|}} \varphi(\zeta_0) e^{i\psi} + O(x^{-3/2}) \right\} \quad (2), \text{ где}$$

ζ_0 - точка перегиба функции $f(\zeta)$, определяемая условием $f'(\zeta_0) = 0$, (16)
 а угол ψ указывает направление наибыстрейшего спуска и определяется следующим образом: $\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(\zeta_0))$.

Применяя ф-лу (2) к интегралу (1), получим:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} e^{ix} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-i\nu \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2}) \right\} \quad (3).$$

Ф-ла (3) выполняется при условии $x \gg 1$.

Поскольку $H_\nu^{(1)}(z)$ явл. аналитической функцией комплексной переменной z на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, то в силу общих св-в аналитического продолжения ф-ла (3) остается справедливой при $|z| \gg |v|$ в области $|\arg z| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

При $x \in \mathbb{R}$ имеем: $H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-3/2})$. Отсюда напрямую получаем асимптотику для функции Бесселя при $x \rightarrow \infty$:

$$Y_\nu(x) = \text{Re } H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{O}(x^{-3/2}).$$

Глава 8.

1. Теорема о существовании потенциала двойного слоя.

Получим предварительно некоторые оценки.
 Пусть M_0 - некоторая точка пов-ти S . Введём локальную систему координат (x, y, z) с началом в т. M_0 , направив ось z вдоль внешней нормали в т. M_0 . Плоскость (x, y) при этом совпадает с касательной плоскостью. Т.к. S - пов-ть Липшица, то (в силу усл. 2 из опр. пов-ти Липшица) $\exists \rho_0$, что ур-ние пов-ти S при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0$ может быть записано в виде: $z = z(x, y)$, причём $z(x, y)$ - однозначная непрерывно диф-мая ф-ция. Получим оценки для ф-ции $z(x, y)$ и её первых производных в указанной окр-ти. Направляющие косинусы внешней нормали \vec{n}_P в точке P пов-ти S при $\rho < \rho_0$ выражаются ф-лами:

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Обозначим α, β проекцию вектора \vec{n}_P на плоскость (x, y) , а α', β' - углы, образованные вектором \vec{n}_P с осями x и y :

$$\cos \alpha = \cos \alpha' \sin \gamma, \quad \cos \beta = \cos \beta' \sin \gamma.$$

Т.к. в любой области выбора системы координат $z(M_0) = 0, z_x(M_0) = 0, z_y(M_0) = 0$, то ρ_0 можно выбрать достаточно малым так, что:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \frac{1}{2} \text{ при } \rho < \rho_0. \text{ Тогда: } \left. \begin{aligned} |\cos \alpha| &\leq \sin \gamma \leq AR_{M_0P}^\delta \\ |\cos \beta| &\leq AR_{M_0P}^\delta \end{aligned} \right\} (1)$$

$$|z_x| = \left| \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right| \leq 2|\cos \alpha| \leq 2AR_{M_0P}^\delta \quad (2) \quad (\text{в силу упр. 3 опр. пов-ти Лемнува})$$

$$\text{Аналогично: } |z_y| \leq 2AR_{M_0P}^\delta \quad (3)$$

Используя ф-лу Тейлора для функции $z(x, y)$ в указанной окр-ти M_0 , получим: $z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y})$, где $0 \leq \bar{x} \leq x, 0 \leq \bar{y} \leq y$. Отсюда

$$\text{находим: } |z(x, y)| \leq \rho|z_x| + \rho|z_y| \leq 4AR_{M_0P}^{\delta+\delta} \quad (4).$$

Переходим к ρ -ву теореме:

$$\text{«Потенциал двойного слоя } W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} dS_P \quad (5)$$

с непр. и опр. плотностью $|\nu| \leq C$ на пов-ти S существует, т.е. явл. сходящимся \forall $M \in S$ »

До-во: пусть M -произв. точка пов-ти S . Оценим подынтегральную функцию в окр-ти τ - M . Введем локальную систему координат, как это было сделано выше. Пусть τ - P имеет координаты (ξ, η, ζ) . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\xi}{R_{MP}} \cos \alpha + \frac{\eta}{R_{MP}} \cos \beta + \frac{\zeta}{R_{MP}} \cos \gamma.$$

Отсюда, учитывая оценки (1)-(4), получаем:

$$|\cos \varphi| \leq |\cos \alpha| + |\cos \beta| + \frac{|\zeta|}{R_{MP}} \leq AR_{MP}^\delta + AR_{MP}^\delta + 4AR_{MP}^\delta = 6AR_{MP}^\delta \quad (6)$$

След-но, для точек P пов-ти S в окр-ти τ - M подынтегральная функция в (5) имеет оценку: $\left| \nu \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} \right| \leq \frac{6AC}{R_{MP}^{2-\delta}}, \quad (7)$

которая обеспечивает сх-ть \forall $M \in S$ интеграла (5) в точках M пов-ти S .

Оценка (7) справедлива для любой точки M , расположенной на (18) пов-ти S . Поэтому эта оценка обеспечивает равномерную по $M \in S$ сх-ть интеграла (5) в любой точке $M_0 \in S$ и его непрерывность на пов-ти S .

Итак, \exists прямое значение потенциала двойного слоя, и это прямое значение непрерывно как функция точек пов-ти S .

2. Получить производящую функцию для полиномов Лагерра.

Для полиномов Лагерра: $\sigma(x) = x$; $\rho(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \{x^n e^{-x}\}$$

$$t - x - z\sigma(t) = 0$$

$$t - x - zt = 0 \rightarrow t_0 = \frac{x}{1-z}$$

$$\Psi(x, z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)} = \frac{e^{-\frac{x}{1-z}}}{e^{-x}} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}$$

Итак: $\frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n(x)}{n!} z^n$, где $\tilde{L}_n(x) = \frac{L_n(x)}{c_n}$, и поскольку для

полиномов Лагерра $c_n = \frac{1}{n!}$, то окончательно получим:

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n.$$

Тема 9.

1. Теорема о разрыве нормальной производной потенциала этого слоя.

см. Тема 5 (п. 2).

2. Получить производящую функцию для полиномов Эрмита.

Для полиномов Эрмита: $\sigma(x) \equiv 1$; $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$t - x - z\sigma(t) = 0$$

$$t - x - z = 0 \rightarrow t_0 = x + z$$

$$\Psi(x, z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)} = \frac{e^{-(x+z)}}{e^{-x^2}} \cdot \frac{1}{1-0} = e^{-(2xz+z^2)} \quad (19)$$

Значит: $e^{-(2xz+z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{U}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x)}{n!} (-z)^n$, т.к. $C_n = (-1)^n$.

Делая в последней ф-ле замену z на $-z$, получим окончательно выражение для производящей ф-ции:

$$\Psi(x, z) = e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x)}{n!} z^n.$$

Билет 10.

1. Теорема о разрыве потенциала двойного слоя.

„Потенциал двойного слоя претерпевает разрыв при переходе z/z пов-ть“.

Д-во:

\neq сначала потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\gamma_0 = \text{const}$:

$$W(M) = -\gamma_0 \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P \quad (1)$$

Будем считать, что пов-ть S замкнутая. Тогда интеграл (1) легко вычисляется. Для вычисления его применим 3^ю ф-лу Грина, положив в ней $u \equiv \gamma_0$. Тогда получим:

$$-\int_S \gamma_0 \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P = \begin{cases} 4\pi\gamma_0, & M \in D, \\ 2\pi\gamma_0, & M \in S, \\ 0, & M \in D_c (M \notin D + S). \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения: $\dot{W}(P_0)$ - значение потенциала двойного слоя, когда точка P_0 лежит на пов-ти S ($P_0 \in S$), т.е. прямое значение потенциала в точке P_0 ; $W_i(P_0)$ - предельное значение потенциала $W(M)$ в т. P_0 на пов-ти изнутри, т.е. $W_i(P_0) = \lim_{M \rightarrow P_0 \in S} W(M)$,

$W_e(P_0)$ - предельное значение потенциала W в т. P_0 на пов-ти снаружи, т.е. $W_e(P_0) = \lim_{M \rightarrow P_0 \in S} W(M)$.

Потенциал двойного слоя с постоянной плотностью γ_0 согласно (2) явл. кусочно-постоянной ф-цией. Ф-лу (2) можно переписать в следующем виде:

$$W_i(M) = \dot{W}(M) + 2\pi\gamma_0,$$

$$W_e(M) = \dot{W}(M) - 2\pi\gamma_0.$$

} (3)

(20)

✗ теперь потенциал двойного слоя с невр. плотностью $\gamma(P)$ и покажем, что для него справедливы ф-лы, аналогичные (3).

Пусть P_0 - произв. точка пов-ти S . Потенциал двойного слоя с плотностью $\gamma(P)$ представим в виде:

$$W(M) = \int_S \gamma(P) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS = J(M) + \tilde{W}(M) = \int_S [\gamma(P) - \gamma(P_0)] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS + \int_S \gamma(P_0) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS \quad (4)$$

Второе слагаемое $\tilde{W}(M)$ представляет собой потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\gamma(P_0)$, св-ва которого нам уже известны. Докажем, что первое слагаемое $J(M)$ есть ф-ция, невр. в т. P_0 .

Для этого достаточно д-ть равномерную эк-ть по параметру M интеграла $J(M)$ в точке P_0 . Возьмём произв. $\varepsilon > 0$. Из невр-ти ф-ции $\gamma(P)$ в т. P_0 следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ такая окр-ть K_ε точки $P_0 \in S$, что:

$|\gamma(P) - \gamma(P_0)| \leq \varepsilon$ при $P \in K_\varepsilon$. Оценим интеграл по K_ε :

$$\left| \int_{K_\varepsilon} [\gamma(P) - \gamma(P_0)] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS \right| \leq \varepsilon \int_{K_\varepsilon} \frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2} dS_P.$$

Используя ф-лу (2), можно показать, что при достаточно малом K_ε :

$$\int_{K_\varepsilon} \frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2} dS \leq B \text{ при всех } M. \text{ Поэтому получаем:}$$

$$\left| \int_{K_\varepsilon} [\gamma(P) - \gamma(P_0)] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} dS \right| \leq \varepsilon B, \text{ что означает равномерную эк-ть интеграла } J(M) \text{ в т. } P_0. \text{ Значит, ф-ция } J(M) \text{ невр. в т. } P_0.$$

Таким образом, разрывные св-ва потенциала двойного слоя $W(M)$ в т. P_0 согласно (4) определяются вторым слагаемым $\tilde{W}(M)$. Перейдём к пределу в (4) при $M \rightarrow P_0$. Сохраняя прежние обозначения и используя св-ва потенциала с постоянной плотностью, получим:

$$W_i(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_i(P_0) = J(P_0) + \dot{W}(P_0) + 2\pi\gamma_0 = \dot{W}(P_0) + 2\pi\gamma_0,$$

$$W_e(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_e(P_0) = J(P_0) + \dot{W}(P_0) - 2\pi\gamma_0 = \dot{W}(P_0) - 2\pi\gamma_0. \quad \text{где}$$

$\dot{W}(P_0) = J(P_0) + \dot{W}(P_0)$ - прямое значение $W(M)$ в т. $P_0 \in S$.

Таким образом, потенциал двойного слоя при переходе $\frac{1}{2}$ пов-ти претерпевает разрыв, и величина этого разрыва определяется ф-лами:

$$W_i(P) = \dot{W}(P) + 2\pi\gamma(P),$$

$$W_e(P) = \dot{W}(P) - 2\pi\gamma(P),$$

$$W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\gamma(P).$$

2. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в трехмерном случае с ГУ Дирихле.

„Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности“.

Д-во: пусть существует 2 решения u_1 и u_2 . Разность $v = u_1 - u_2$ есть решение однородной задачи:
$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{в } D_e, \\ v|_S = 0; \end{cases}$$

равномерно стремящееся к нулю на ∞ -ти. След-но, $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists R_0: |v| \leq \varepsilon$ при $r > R_0$.

Окружим пов-ть S сферой Σ_R достаточно большого радиуса $R (R > R_0)$. Применяя принцип максимума для уравнения Лапласа в области D_R между S и Σ_R , получим:

$$|v(M)| \leq \varepsilon \text{ всюду в } D_R.$$

В силу произвольности $\varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$ и $R (R \rightarrow \infty)$ отсюда получаем, что $v(M) \equiv 0$ всюду в D_e . След-но, решение внешней задачи Дирихле единственно.

Лемма 11.

3. Теорема о симметрии функции Грина для уравнения Лапласа с ГУ Дирихле.

„Функция Грина задачи Дирихле симметрична“.

Д-во:

Введем обозначения: $u(M) = G_1(M, M_1)$, $v(M) = G_1(M, M_2)$.

Окружим точки M_1 и M_2 сферами Σ_1 и Σ_2 соответственно достаточно малого радиуса. В функциях u и v в области между S , Σ_1 и Σ_2 применим 2^ю ф-лу Грина. Учитывая ГУ для функции Грина, получим:

$$\oint_{\Sigma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \oint_{\Sigma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (1) \quad (22)$$

x -вектор v внутри Σ_1 ^{согласно} представлению для решения ур. Лапласа

$$v(M) = \oint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} G - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \int_{\mathcal{D}} G \Delta u dV, \text{ получим:}$$

$$v(M_1) = - \oint_{\Sigma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (2)$$

$$\text{Аналогично: } u(M_2) = - \oint_{\Sigma_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем: $-v(M_1) + u(M_2) = 0$, т.е.

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1).$$

2* (из Тиместа 14). Вывод формулы Даламбера.

~~$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где $u_1(x, t)$ - решение задачи Коши для однородного ур-ния колебаний с неодн. нач. условиями, $u_2(x, t)$ - решение задачи для неоднородного ур-ния колебаний с однородными нач. условиями.~~

~~x задачу Коши для однородного ур-ния колебаний:~~

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (x, t) \in \Omega, & (1) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}^1; & (2) \end{cases}$$

предположим, что \exists классическое решение задачи (1), (2). Преобразуем ур-ние колебаний (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Ур-ние характеристическое ур-ния (1) имеет вид: $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$$dx - a dt = 0 \quad \quad dx + a dt = 0$$

Характеристиками явл. 2 семейства прямых:

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2, \quad \text{где } C_1, C_2 = \text{const.}$$

Введем новые переменные: $\xi = x - at, \eta = x + at$. Тогда ур-ние колебаний (1) преобразуется к виду: $U_{\xi\eta} = 0$, (3)

$$\text{где } U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Найдём общий интеграл ур-ния (3). Для всякого решения (23) ур-ния (3) получаем: $U_\eta(\xi, \eta) = \bar{f}(\eta)$, где $\bar{f}(\eta)$ — ф-ция одного переменного η . Интегрируя последнее равенство по η при фиксированном ξ , получим: $U(\xi, \eta) = \int \bar{f}(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, (4)

где $f_1(\xi)$ — ф-ция только переменного ξ ; $f_2(\eta)$ — —//— переменного η . Верно и обратное: каковы бы ни были диф-ные ф-ции $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$, ф-ция $U(\xi, \eta)$, определяемая ф-лой (4), представляет собой решение ур-ния (3). Т.к. всякое решение ур-ния (3) может быть представлено в виде (4) при определённом выборе ф-ции f_1 и f_2 , то ф-ла (4) явл. общим интегралом этого ур-ния. След-но, ф-ция:

$$u(x, t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \quad (4')$$

явл. общим интегралом ур-ния (1).

Определим ф-ции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворились нач. условия (2): $u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$,

$$u_t(x, 0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}^1$$

} (5)

где штрих означает производную по полному аргументу соответствующей ф-ции.

Обозначим аргументы ф-ций f_1 и f_2 ζ и ξ . Тогда, интегрируя второе из равенств (5), получим: $f_1(\xi) + f_2(\xi) = \varphi(\xi)$,

$$-f_1(\xi) + f_2(\xi) = \frac{1}{a} \int_{\xi_0}^{\xi} \psi(z) dz + C, \quad (6)$$

где $\xi_0, C = \text{const}$.

Вычитая и складывая равенства (6), получим:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} \varphi(\xi) - \frac{1}{2a} \int_{\xi_0}^{\xi} \psi(z) dz - \frac{C}{2},$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{2} \varphi(\xi) + \frac{1}{2a} \int_{\xi_0}^{\xi} \psi(z) dz + \frac{C}{2},$$

причём последние два рав-ва должны выполняться при любом значении аргумента $\xi \in \mathbb{R}^1$. Подставляя найденные выражения (7) для ф-ций f_1 и f_2 при значениях их аргументов соответственно $\xi = x-at$ для $f_1(\xi)$ и $\xi = x+at$ для $f_2(\xi)$ в ф-лу (4'),

получим:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz - \text{ф-ла Даламбера.}$$

2. Получить формулу для решения неоднородного ур-ния колебаний на бесконечной прямой. (24)

Справка о ф-лах Грина из курса мат. анализа:

пусть ф-ция $F(x,t)$ непрерывно диф-ма в обл. \mathcal{D} и непрерывна в обл. $\bar{\mathcal{D}}$: $F(x,t) \in C^{(1)}(\mathcal{D}) \cap C(\bar{\mathcal{D}})$, где $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$ - двумерная обл. с границей Γ в плоскости (x,t) . Тогда имеют место следующие ф-лы:

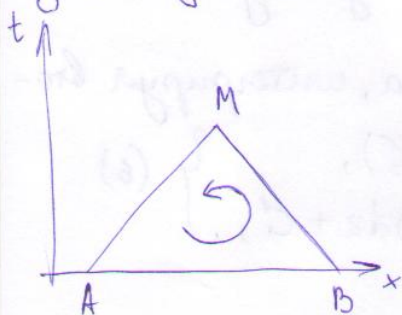
$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} dx dt = - \oint_{\Gamma} F(x,t) dx \quad \text{и} \quad \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx dt = \oint_{\Gamma} F(x,t) dt, \quad (\star)$$

где контур Γ проходится в положительном направлении (то-би обл. \mathcal{D} находится слева от направления движения).

* Ур-ние колебаний (неоднородное) на бесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega, & (1) \quad \Omega = \mathbb{R}^1 \times (0, \infty), \quad a^2 = \text{const} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1; & (2) \end{cases}$$

Предположим, что классическое решение задачи (1), (2) для неоднородного ур-ния колебаний с неоднородными пог. условиями существует.



Возьмём на фазовой плоскости точку M и построим характеристический $\triangle AMB$. Проинтегрируем ур-ние (1) колебаний по этой \triangle -ку, предварительно умножив его на $1/2a$. В результате получим:

$$\frac{1}{2a} \int_{\triangle AMB} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \frac{1}{2a} \int_{\triangle AMB} f(x,t) dx dt \quad (3)$$

Применим к интегралам в левой части ф-лы Грина (\star):

$$\left. \begin{aligned} \int_{\triangle AMB} u_{tt} dx dt &= - \int_{B \rightarrow A} u dx - \int_{M \rightarrow B} u dx - \int_{A \rightarrow M} u dx, \\ \int_{\triangle AMB} u_{xx} dx dt &= \int_{A \rightarrow B} u_x dt + \int_{B \rightarrow M} u_x dt + \int_{M \rightarrow A} u_x dt. \end{aligned} \right\} (4)$$

Поскольку на отрезке AB $dt=0$, а на отрезках характеристик BM и MA имеют место соотношения $dx = -adt$ и $dx = adt$ из ф-л

(4) имеем:

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = - \int_A^B u dx + a \int_B^M (u_t dt + u_x dx) - a \int_M^A (u_t dt + u_x dx) =$$

$$= - \int_A^B u dx + a [u(M) - u(B) - u(A) + u(M)]. \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует ф-ла:

$$u(M) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2a} \int_A^B u dx + \frac{1}{2a} \int_{\Delta ABM} f(x,t) dx dt.$$

Зная, что точки M, A, B имеют соответственно координаты (x, t), (x-at, 0), (x+at, 0), и используя нач. условия (2), окончательно получаем ф-лу для решения задачи (1), (2):

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Лемма 12.

1. Лемма о поведении решений в свободной точке для уравнения сепаратных функций $(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = 0, x \in (a, b)$, где $k(x) = (x-a)\varphi(x), \varphi(x) \neq 0$.

„ Пусть $L[u] \equiv \underbrace{(k(x)u'(x))'}_{(1)} - \underbrace{q(x)u(x)}_{(2)}, L[u] = 0$ при $x \in (a, b)$ и пусть:

- 1) $k(x) \geq 0, x \in [a, b],$
- 2) $k(x) = (x-a)\varphi(x)$
- $\varphi(x) \in C[a, b], \varphi(a) \neq 0$

Пусть также $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - линейно независимые решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям (3). Тогда если $u_1(x) = (x-a)^n v(x)$, где $v(x) \in C[a, b]; v(a) \neq 0, n > 0, (4)$

то решение $u_2(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow a$.

До-во: $u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = 0$

$$(k(x)(u_1 u_2' - u_1' u_2))' = 0$$

$$k(x)(u_1 u_2' - u_1' u_2) = C_1; W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$$

$$\frac{u_1 u_2' - u_1' u_2}{u_1^2(x)} = \frac{C_1}{k(x)u_1^2(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{C_1}{k(x)u_1^2(x)}$$

$u_2 = u_1(x) \left\{ C_1 \int_{x_0}^x \frac{dz}{k(z)u_1^2(z)} + C_2 \right\}$. Как интересует поведение решения, (26)
 линейно независимого от $u_1(x)$. Поэтому
 постоянную C_2 можно положить равной нулю. Кроме того, поскольку
 уравнение (2) явл. однородным, то функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются с
 точностью до произвольного постоянного множителя и можно поло-
 жить $C_1 = 1$. Выберем, наконец, x_0 так, чтобы функция $v(x)$ не обраща-
 лась в нуль на отрезке $[a, x_0]$. Это, очевидно, возможно, поскольку
 $v(x) \in C[a, b]$ и $v(a) \neq 0$.

$$u_2(x) = (x-a)^n v(x) \int_{x_0}^x \frac{dz}{(z-a)^{2n+1} \underbrace{\varphi(z)v^2(z)}_{:=\psi(z)}}$$

При нашем выборе x_0 функция $\psi(x) \neq 0, x \in [a, x_0]$. По теореме о сред-
 нем, получим для $x \in (a, x_0)$:

$$u_2(x) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \int_{x_0}^x \frac{dz}{(z-a)^{2n+1}} = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} \ln(z-a) \Big|_{x_0}^x, & n=0, \\ -\frac{1}{2n(z-a)^{2n}} \Big|_{x_0}^x, & n>0. \end{cases} \text{ при } x^* \in (a, x_0).$$

Таким образом:

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0), \text{ где } f_1(x) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} \ln(x-a), & n=0, \\ -\frac{1}{2n(x-a)^{2n}}, & n>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \ln(x-a), & n=0, \\ -\frac{v(x)}{2n\psi(x^*)(x-a)^{2n}}, & n>0. \end{cases}$$

$$\text{и } f_2(x, x_0) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} -\ln(x_0-a), & n=0, \\ \frac{1}{2n(x_0-a)^{2n}}, & n>0. \end{cases}$$

Из последних ф-л следует, что функция $f_2(x, x_0)$ остаётся ограниченной
 при $x \rightarrow a$, а функция $f_1(x)$ при $x \rightarrow a$, а функция $f_2(x)$ при $x \rightarrow a$ неограни-
 ченно возрастает либо как $|\ln(x-a)|$, либо как $(x-a)^{-n}$. Т.е., если
 $u_1(a) \neq 0$, то $u_2(x)$ имеет в точке $x=a$ логарифмическую особен-
 ность, а если $u_1(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль n -го порядка, то
 функция $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс n -го порядка.

2. Получите общую формулу Рунге для классических ортого-
 нальных полиномов.

Производные m -го порядка $\rho_n^{(m)}(x)$ КОП слева явл. КОП. Для (27) их ур-ние выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \rho_{m+1}(x) \frac{d\rho_n^{(m)}}{dx} \right\} + \lambda_{nm} \rho_m \rho_n^{(m)} = 0, \quad (1)$$

где $\lambda_{nm} = -(n-m) \left\{ (n-m-1) \frac{\sigma''}{2} + \tau' \right\}$, $m=0, 1, \dots$, $\rho_0 \equiv \rho$, $\lambda_{n0} \equiv \lambda_n$.

В силу ур-ния (1): $\rho_m \rho_n^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_{nm}} \frac{d}{dx} \left\{ \rho_{m+1} \rho_n^{(m+1)} \right\}$,

и, в частности, рекуррентно применяя последнюю ф-лу, находим:

$$\rho \rho_n(x) \equiv \rho_0 \rho_n^{(0)} = -\frac{1}{\lambda_{n0}} \frac{d}{dx} \left(\rho_1 \rho_n^{(1)} \right) = \frac{1}{\lambda_{n0} \lambda_{n1}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\rho_2 \rho_n^{(2)} \right) = \dots = \frac{1}{A_{nm}} \frac{d^m}{dx^m} \left(\rho_m \rho_n^{(m)} \right), \quad (2)$$

где $A_{nm} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk}$. Т.к. $\rho_n^{(n)} = n! a_n$, то, подставив в ф-лу (2) $m=n$, получим:

$$\rho_n(x) = \frac{n! a_n}{A_{nn}} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho_n(x) \right), \text{ или, обозначая } C_n = \frac{n! a_n}{A_{nn}}:$$

$$\rho_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \sigma^n(x) \rho(x) \right\} - \text{обобщенная ф-ла Rodrigues.}$$

Вылет 13.

1. Теоремы существования решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для ур-ния Лапласа в трёхмерном случае.

а) „Внутренняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ u|_S = f; \end{cases}$ S -пов-ть Лиapunова. имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной ф-ции f .“

Д-во: \neq внутр. задаче Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ u|_S = f. \end{cases} \quad (1)$

Будем искать решение в виде потенциала двойного слоя:

$$u(M) = - \int_S \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P, \quad (2)$$

где по-прежнему ядро интегрального представления (2) явл. производной ф-ции решения по внешней нормали \vec{n}_P к пов-ти S . $\gamma(P)$ определим так, чтобы на пов-ти S ф-ция (2) непре-

равно притыкается к Γ : $\lim_{M \rightarrow P_0 \in S} u(M) = f(P_0), P_0 \in S, \quad (3) \quad (28)$

притом точка $M \in D$ стремится к граничной точке P по-ти S изнутри области D . При этом, чтобы получить решение, непр. в замкнутой обл. \bar{D} , необходимо в каг-ве граничных значений искомого решения на по-ти S принять предельные значения $u_i(P_0)$ потенциала двойного слоя (2) изнутри области. Из усл. (3), учитывая св-во потенциала двойного слоя $W_i(P) = \dot{W}(P) +$

$$+ 2\pi v(P), \text{ получаем: } - \int_S v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P + 2\pi v(P_0) = f(P_0), P_0 \in S \quad (4)$$

Перепишем (4) в виде:
$$v(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0) \quad (5)$$

(5) есть инт. ур. Фредгольма 2^{го} рода с полярным ядром отно-но непр. плотности $v(P)$, при этом в силу оценки $|\cos \varphi| \leq 6A R_{PP_0}$, для ядра ур-ния (5) имеет место оценка:

$$|K(P_0, P)| \leq \frac{6A}{R_{PP_0}^{2-\delta}}, \delta > 0, \text{ обеспечивающая сж-ть интеграла.}$$

Если \exists решение $v(P)$ ур-ния (5), то, подставляя его в (2), получим классическое решение внутр. задачи Дирихле. Таким образом, вопрос о разрешимости внутр. задачи Дирихле (1) сводится к вопросу о разрешимости инт. ур-ния (5). Покажем, что оно имеет и при этом !-ное решение при любой непр. ф-ции f .

Для ур-ний Фредгольма с полярным ядром справедлива теорема Фредгольма. Поэтому, согласно 1^{ей} т. Фредгольма (стр. 222), для док-ва однозначной разрешимости ур-ния (5) достаточно показать, что однородное ур-ние:

$$v(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0 \quad (6)$$

имеет только трив. реш. Согласно 2^{ой} т. Фредгольма (стр. 222) исходное и сопряженное инт. ур-ние:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0 \quad (7)$$

имеет одни и те же СЗ, а ранги их одинаковы. В данном случае легче исследовать ур-ние (7).

Покажем, что (7) имеет только трив. реш.

(29)

III: пусть $\mu_0(P) \neq 0$ — решение ур-ния (7), непрерывное. Построим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M) = \int_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} \quad (8)$$

Функция $V(M)$ явл. гармонической функцией как в D_i , так и в D_e и равномерно стремится к нулю в ∞ -ти. Вычислим предельное значение нормальной производной функции $V(M)$ на S . Согласно

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P) \text{ имеем: } \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \int_S \mu_0(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP}} dS_P - 2\pi\mu_0(P_0), P_0 \in S.$$

Поскольку $\mu_0(P)$ есть реш. ур-ния (7), то: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 0$ на S .

Таким образом, функция $V(M)$ явл. решением внешней однородной задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D_e, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial n_e}\right|_S = 0, \\ V \rightarrow 0, z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (9)$$

В силу !-ти решения внешней задачи Неймана в трёхмерном случае задача (9) имеет только трив. реш.:

$$V(M) \equiv 0 \text{ в } D_e \cup S.$$

Функция $V(M)$, как потенциал простого слоя (8), непрерывна при переходе \approx пов-ти S . Поэтому в обл. D функция $V(M)$ есть решение однородной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } D, \\ V|_S = 0. \end{cases}$$

В силу !-ти решения внутр. задачи Дирихле: $V(M) \equiv 0$ в $D \cup S$.

Итак, $V(M) \equiv 0$ во всем пр-ве. Воспользуемся ф-лой $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = -\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 4\pi\mu(P)$, находим: $\mu_0(P) \equiv 0$ на S , что противоречит исходному предположению. След-но, ур-ние (7) имеет только трив. реш.

Согласно 1^т т. Фредгольма неодн. ур. Фредгольма (5) имеет и при этом !-ное решение при любой непр. ф-ции f . Отсюда вытекает, что при любой непр. ф-ции f внутренняя краевая задача Дирихле (3) имеет классическое решение, и это решение !-но.

3) „Внешняя задача Неймана“ $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n_e} \Big|_S = f, \\ u \geq 0 \text{ в } \infty\text{-}\pi; \end{cases} \quad (\tilde{1})$ (30)

имеет и притом единственное классическое решение при любой непр. ф-ции f .

2-во: * внеш. задаче Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n_e} \Big|_S = f, \\ u \geq 0 \text{ в } \infty\text{-}\pi; \end{cases}$

Решение этой задачи будем искать в виде потенциала простого слоя: $u(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} \quad (\tilde{2})$

При любой непр. плотности $\mu(P)$ функция $(\tilde{2})$ гармоническая в D_e и удовл. условию регулярности на $\infty\text{-}\pi$. Плотность $\mu(P)$ определим так, чтобы выполнялось ГУ: $\lim_{M \rightarrow P_0 \in S} \frac{\partial u}{\partial n_e}(M) = f(P_0), P_0 \in S \quad (\tilde{3})$

Воспользуемся ф-цей $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)$, из $(\tilde{3})$ получим:

$$\int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P - 2\pi\mu(P_0) = f(P_0), \text{ или}$$

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -\frac{1}{2\pi} f(P_0), P_0 \in S \quad (\tilde{4})$$

Когда решение ур-ния $(\tilde{4})$ и подставив его в $(\tilde{2})$, получим классическое решение задачи $(\tilde{1})$. Таким образом, вопрос о разрешимости краевой задачи $(\tilde{1})$ сведён к вопросу о разрешимости инт. ур-ния. Инт. ур-ние $(\tilde{4})$ согласно $1^{\text{й}}$ т. Фредгольма имеет и притом 1 -ное решение при любой непр. ф-ции f , поскольку есть однородное ур-ние (ур. $(\tilde{7})$), как было доказано, имеет только трив. решение. Таким образом, внешняя задача Неймана разрешима при любой непрерывности ф-ции f .

2. Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре методом электростатических изображений. (31)

Чтобы построить функцию Грина, достаточно определить функцию $V(G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + V$, где V - гарм. функ. в D_e , которая в данном случае явл. решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ в } K_a, \\ G(M, M_0)|_{M \in S} = 0. \end{cases} \quad \text{пусть } M_0 \text{ - произв. точка внутри шара.}$$

Опр.: Точка M_1 наз. сопряжённой (симм.) к т. M_0 относительно сферы S , если т. M_1 лежит на прямой, соединяющей центр O сферы S и т. M_0 , по ту же сторону от центра O , что и т. M_0 , и при этом:

$$r_0 \cdot r_1 = a^2, \text{ где } r_0 = R_{OM_0}, r_1 = R_{OM_1}.$$

Лемма: Если $M \in S$, то $R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$. (г-во $\frac{1}{z}$ подобие Δ -ков, easy).

Возьмём $V(M) = -\frac{1}{4\pi} \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_{MM_1}}$, где M_1 - точка, сопряжённая точке M_0 отно-сно сферы S .

Таким образом: $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right)$.

Билет 14.

3. Теоремы существования решений внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

„Внешняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u|_S = f; \end{cases}$ имеет !-ное классическое решение при любой непрерывной функции f .“

„Внутренняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n_e}|_S = f(P), P \in S; \end{cases}$ имеет классическое решение при любой непрерывной функции f , удовлетворяющей условию $\int_S f(P) dS = 0$.“

Д-во: \neq внутр. задачу Неймана: $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n_e} \right|_S = f(P), P \in S; \end{array} \right. \quad (1)$ (32)

Решение задачи (1) будем искать в виде потенциала простого слоя: $u(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} \quad (2)$

Плотность $\mu(P)$ определяется из ГУ: $\left(\frac{\partial u}{\partial n_e} \right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n_e} \right)_o + 2\pi\mu(P_0) = f(P_0), P_0 \in S.$

След-но, для функции $\mu(P)$ получаем инт. ур-ние:

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), P_0 \in S \quad (3)$$

Подставляя решение ур-ния (3) в (2), получим классическое решение задачи (1). Задача (1) имеет решение не всегда. Необходимым условием существования решения явл. соотношение:

$$\int_S f(P) dS = 0 \quad (\text{необходимое см. стр. 170-172}). \quad (4)$$

Одновременно будем \neq и внешней задачей Дирихле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ в } \mathcal{D}_e, \\ u|_S = f, \\ u \text{ регулярна на } \infty\text{-ти;} \end{array} \right. \quad (5)$$

Решение задачи (5) будем искать в виде:

$$u(M) = - \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{M0}}, \quad (6)$$

где $\alpha = \text{const}$, R_{M0} - расст. от τ -М до некоторой фикс. τ , $O \in \mathcal{D}$. Решение представлено в виде потенциала двойного слоя и потенциала точечного заряда, находящегося внутри области \mathcal{D} (о необход-ти такого представления см. стр. 229).

Плотность потенциала $\nu(P)$ определяется ГУ:

$$\lim_{M \rightarrow P_0 \in S} u(M) = f(P_0), P_0 \in S.$$

Используя ф-лу $W_2(P) = \dot{W}(P) - 2\pi\nu(P)$, откуда получим:

$$- \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} dS - 2\pi\nu(P_0) + \frac{\alpha}{R_{P_0}} = f(P_0).$$

След-но, для функции $\nu(P)$ получаем инт. ур-ние:

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{R_{P_0 O}} - f(P_0) \right\}, P_0 \in S. \quad (7) \quad (33)$$

Инт. ур-ние (3) и (7) явл. союзными инт. ур-ниями. Поэтому их разрешимость можно исследовать одновременно.

$$\neq \text{однор. ур-ние: } \nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0, P_0 \in S. \quad (8)$$

Ранее было показано (см. билет 10, н.д. ф. (2)), что при $P_0 \in S$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -1, P_0 \in S. \quad \text{Поэтому очевидно, что ф-ция } \nu(P) = \nu_0 = \text{const}$$

явл. решением ур-ние (8). Это означает, что $\lambda = 1$ явл. СЗ ядра $K(P_0, P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}}$, которому

соотв. СФ $\nu = \nu_0 = \text{const}$. Согласно 2^й т. Фредгольма $\lambda = 1$ явл. СЗ и союзного ядра $K^*(P_0, P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}}$. Поэтому прежде всего рассмотрим ранг этого СЗ.

Покажем, что ранг СЗ $\lambda = 1$ равен единице. Для этого достаточно показать, что однор. ур-ние: $\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0 \quad (9)$

имеет только одну СФ. Пусть $\mu_0(P)$ - СФ ур-ние (9). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M) = \int_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}$$

Поскольку $\mu_0(P)$ удовл. ур-нию (9), то:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_P} \right)_i = \int_S \mu_0(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P + 2\pi \mu_0(P_0) \equiv 0. \quad \text{След-но, ф-ция } V(M) \text{ есть решение внутр. однор. задачи}$$

Неймана: $\int \Delta V = 0$ в D , поэтому $V(M) = C = \text{const}$ в $D+S$ ($C \neq 0$)

Пусть \exists второе ненулевое решение $\tilde{\mu}_0(P_0)$ ур-ние (9), т.е. вторая ЛНЗ на S с $\mu_0(P)$ СФ, соотв. СЗ $\lambda = 1$. Тогда аналогично предыдущему:

$\tilde{V}(M) = \int_S \tilde{\mu}_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} = \tilde{C} = \text{const} \neq 0$ всегда в $D \cup S$. Построим ф-цию:

$$V_s(M) = \frac{\tilde{C}}{C} V(M) - \tilde{V}(M) = \int_S \left(\frac{\tilde{C}}{C} \mu_0 - \tilde{\mu}_0 \right) \frac{dS}{R_{MP}} \quad (10)$$

По построению $V_1(M) \equiv 0$ в $\mathcal{D}U \mathcal{S}$. Поскольку согласно (10) $V_1(M)$ есть потенциал простого слоя, то его плотность равна нулю на \mathcal{S} : $\frac{\tilde{C}}{C} \mu_0(P) - \tilde{\mu}_0(P) \equiv 0, P \in \mathcal{S}, \Rightarrow \mu_0(P) = \tilde{\mu}_0(P) = 13. \Rightarrow$

\Rightarrow ранг СЗ $\lambda = 1$ равен единице. СФ $\mu_0(P)$ ур-ние (9) нормируем так, чтобы: $\int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} \equiv 1$ всегда в $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. (11)

потенциал Робинса

Итак, ур-ние (9) имеет !-ную СФ $\mu_0(P)$, а сопряженное однород. ур-ние: $\gamma(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0, P_0 \in \mathcal{S}$, имеет !-ную СФ $\gamma = \gamma_0 = const$, причём можно считать, что $\gamma_0 = 1$.

Отсюда получаем, используя 3^ю т. Фредерльма, что неодн. ур-ние (3) разрешимо, если: $\int_{\mathcal{S}} f(P) \cdot 1 \cdot dS = 0$, (12)

а ур-ние (7) разрешимо, если: $\int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\alpha}{R_{P_0}} - f(P) \right) \mu_0(P) dS_P = 0$. (13)

При выполнении усл. (12) решение ур-ния (3) имеет вид: $\mu(P) = \bar{\mu}(P) + C \mu_0(P)$, где (14)

$\bar{\mu}$ - нек. реш. неодн. ур-ния (3), C - произв. постоянная. Подставляя (14) в (2), получаем решение внутр. задачи Неймана:

$$u(M) = \int_{\mathcal{S}} \bar{\mu}(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} + C \int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}, \text{ или согласно (11):}$$

$$u(M) = \int_{\mathcal{S}} \bar{\mu}(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} + C. \quad (15)$$

Итак, усл. (4) явл. не только необх., но и дост. усл. разрешимости внутренней задачи Неймана. При его выполнении она имеет решение при любой непр. ф-ции f , представленное в виде (15).

✗ Теперь усл. (13). Его можно записать в виде:

$$\alpha \int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{P_0}} = \int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) f(P) dS_P.$$

Поскольку $0 \in \mathcal{D}$, то в силу (11): $\int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{P_0}} \equiv 1$.

Поэтому: $\alpha = \int_{\mathcal{S}} \mu_0(P) f(P) dS_P$. (16)

Теперь будем считать, что α определена соотношением (16). (35)
 Тогда усл. разрешимости (4) выполняется автоматически. Ур-ние
 (7) разрешимо при любой непр. ф-ции $f(P)$, но решение его
 не!-но и имеет вид: $v(P) = \bar{v}(P) + C$, (37)

где $v(P)$ - нек. решение ур-ния (7), C - произв. пост. Подставив
 (37) в (6), получим решение внеш. задачи Дирихле:

$$u(M) = - \int_S \bar{v}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} dS - C \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{Mo}} \quad (18)$$

т.к. при $M \in D_e$: $\int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P \equiv 0$, то из (18) получаем:

$$u(M) = - \int_S \bar{v}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{Mo}}. \text{ Величина } \alpha \text{ опр. соотношени-}$$

ем (16).

Таким образом, внешняя задача Дирихле при любой непр. ф-ции
 f имеет !-ное классическое решение. ■

2. Вывод формулы Даламбера.

см. билет 13 (п. 2*)

Билет 15.

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи
 для ур. Лапласа в трёхмерном случае с ГУ Неймана.

см. билет 13 (п. 18). (или см. стр. 174-175)

2. Получить определитель Вронского функций Бесселя и Ханкеля.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) &= Y_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) &= Y_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned} \right\} (1) \quad \mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = i \frac{Y_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - Y_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \quad (2)$$

пусть $\nu \neq n, n \in \mathbb{Z}$. В силу (2):

$$W[Y_\nu, \mathcal{H}_\nu^{(1)}] = -\frac{i}{\sin \pi\nu} W[Y_\nu, Y_{-\nu}] \quad (3)$$

определитель Вронского, построенный на решениях ур-ния
 Бесселя, должен иметь вид: $W[Y_\nu, Y_{-\nu}] = \frac{C_\nu}{x}$, где C_ν - зависящая

от ν постоянная. Найдем ее.

$$Y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} \right\} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2 P(x) \right\}, \quad (5)$$

где функция $P(x)$ ограничена в $x=0$.

Аналогично: $Y_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + x^2 Q(x) \right\}, \quad (6)$

где $Q(x)$ орг. в $x=0$. Дифференцируя (5) и (6), имеем:

$$Y'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ 2x P(x) + x^2 P'(x) \right\},$$

$$Y'_{-\nu}(x) = -\frac{\nu}{x} Y_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left\{ 2x Q(x) + x^2 Q'(x) \right\}.$$

Используя (5) - (7):

$$W[Y_\nu, Y_{-\nu}] = Y_\nu Y'_{-\nu} - Y_{-\nu} Y'_\nu = -\frac{\nu}{x} Y_{-\nu}(x) Y_\nu(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) Y_{-\nu}(x) -$$

$$- Y_{-\nu}(x) \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ 2x P(x) + x^2 P'(x) \right\} + Y_\nu(x) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left\{ 2x Q(x) + x^2 Q'(x) \right\},$$

а заменив $Y_\nu(x)$ и $Y_{-\nu}(x)$ по ф-лам (5) и (6), окончательно получим:

$$W[Y_\nu, Y_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)} + x R(x), \quad (8)$$

где $R(x)$ орг. в $x=0$.

Сравнивая (4) и (8): $C_\nu = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}, R(x) \equiv 0.$

Используя св-ва гамма-функции, получим: $C_\nu = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi}. \quad (9)$

(9) \rightarrow (4): $W[Y_\nu, Y_{-\nu}] = -\frac{2}{\pi x} \sin \pi \nu, \quad (10)$

отсюда с учетом (3): $W[Y_\nu, H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}. \quad (11)$

из (1) вытекает, что $W[Y_\nu, H_\nu^{(1)}] = i W[Y_\nu, N_\nu] \Rightarrow W[Y_\nu, N_\nu] = \frac{2}{\pi x}.$

Наконец, используя св-ва функции Коши и ф-лы (1):

$$W[Y_\nu, H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x}.$$

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в двумерном случае с Г Дирихле.

„Внешняя задача Дирихле на плоскости не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности.“

До-во: Δ одноп. задачу:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D_e, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ |u| \leq N, N = \text{const.} \end{cases}$$

Покажем, что эта задача имеет только нулевое решение.

Возьмем внутри контура Γ точку M_0 . Построим окр-ть $G_a^{M_0}$ радиуса a с центром в т. M_0 , целиком лежащую внутри Γ . Пусть R_{M_0} - расстояние \llcorner у точками M и M_0 . Функция $\ln \frac{R_{M_0}}{a}$ гармонична всюду в D_e и положительна в D_e , т.к. $R_{M_0} > a$ при $M \in D_e$.

Построим окр-ть $G_b^{M_0}$ радиуса b с центром в т. M_0 , содержащую контур Γ внутри себя. Δ функцию, называемую „барьером“:

$$U_b(M) = N \frac{\ln \frac{R_{M_0}}{a}}{\ln \frac{b}{a}}. \text{ Она гармонична в } D_e, U_b(M)|_{G_b^{M_0}} = N,$$

$U_b(M) > 0$ при $M \in \Gamma$. В силу принципа максимума: $|u(M)| \leq U_b(M)$ всюду \llcorner у контуром Γ и окр-тью $G_b^{M_0}$.

Фиксируем т. M . Пусть $b \rightarrow \infty$. Тогда $U_b(M) \rightarrow 0$. След-но, $u(M) = 0$.

В силу произвольности т. M : $u(M) \equiv 0$ всюду в D_e . След-но, одноп. задача имеет только трив. рещ., а рещ. неодн. задачи !-но. ■

2. Получить асимптотику функции Инфелянда для больших значений аргумента.

в Темате 7 (п.2) была получена асимптотика функции

Конкретно:
$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

(при $x \rightarrow \infty$)

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + \underline{O}(x^{-3/2})$$

$$\begin{aligned}
 I_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} &= i^{-\nu} Y_\nu(ix) \Big|_{x \rightarrow \infty} = i^{-\nu} \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ix) + \mathcal{H}_\nu^{(2)}(ix) \} = \\
 &= i^{-\nu} \frac{1}{2} \left\{ e^{i(ix)} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi ix}} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2}) \right] + e^{-i(ix)} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi ix}} e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + \underline{O}(x^{-3/2}) \right] \right\} = e^x \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + \underline{O}(x^{-3/2}) \right\}
 \end{aligned}$$

Таким образом: $I_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (1 + \underline{O}(1/x))$.

Задача 17.

1. Получить представление функции Бесселя в виде обобщенного степенного ряда.

уравнение Бесселя: $\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$ (0)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Будем искать решение в виде: $y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\sigma+m}$, где (1)

$a_0 \neq 0, \sigma = \text{const.}$

подставив (1) в (0), из требования обращения в нуль в полученном выражении коэф-тов при всех степенях x , получим:

$$\left. \begin{aligned}
 a_0(\sigma^2 - \nu^2) &= 0, \\
 a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] &= 0, \\
 a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 &= 0, \\
 \dots &\dots \\
 a_m[(\sigma+m)^2 - \nu^2] + a_{m-2} &= 0, m=2,3,\dots
 \end{aligned} \right\} (2)$$

из первого уравнения (2) вытекает, что $\sigma = \pm \nu$ (3)

Как легко установить, при $\sigma = -\nu$ и $\nu \neq \frac{m}{2}, m=1,2,\dots$, выполняется условие: $(\sigma+m)^2 - \nu^2 \neq 0, m=1,2,\dots$ (4)

при $\sigma = \nu$ усл. (4) выполняется всегда.

Из второго уравнения (2) при $\sigma = \pm \nu$ следует, что (39)

$$a_1 = 0. \quad (5)$$

Условие (4) даёт согласно уравнению (2) рекуррентную формулу:

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)}, \quad m=2,3,\dots \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что все нечётные коэффициенты равны нулю.

Пусть $\sigma = \nu$. Положим в (6) $m=2k$. Тогда из (6) следует:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)} \quad (7)$$

Последовательно применяя формулу (7), получим:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \quad (8)$$

Решение однородного уравнения Бесселя (1) определяется с точностью до произвольного множителя a_0 . Выберем его в виде:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (9)$$

Тогда из (8), (9) получим:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$Y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

2. Получить производящую функцию для полиномов Лежандра.

для полиномов Лежандра: $\sigma(x) = 1-x^2$; $\rho(x) \equiv 1$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n)$$

$$\left. \begin{aligned} t-x-z\sigma(t) &= 0 \\ t-x-z(1-t^2) &= 0 \\ zt^2+t-(z+x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_0^{(+)} = \frac{-1 + \sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z}$$

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1-z\sigma'(t_0)} = \frac{1}{1+z \frac{1}{z} (-1 + \sqrt{1+4xz+4z^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}$$

и поскольку $\frac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n = \frac{P_n(x)}{n!} z^n = P_n(x) (-2z)^n$, то:

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-2z)^n. \quad (40)$$

Сделаем в последней ф-ле замену z на $-\frac{z}{2}$, получим:

$$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Задание 18.

1. Построить интегральное представление функции Бесселя.

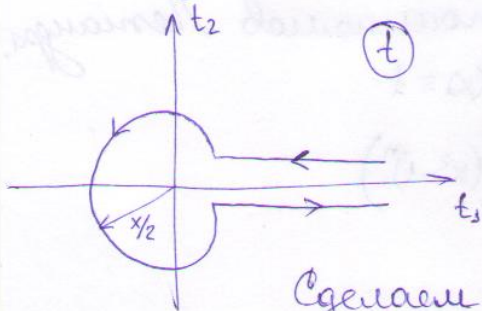
Воспользуемся ф-лой:

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-t} t^{-k-\nu-1} dt \quad (1)$$

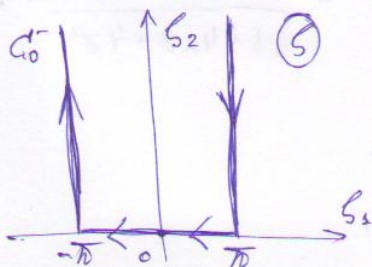
Подставляя (1) в ряд для функции Бесселя и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} J_{\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-t} \left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu} e^{\frac{x^2}{4t}-t} \frac{dt}{t} \quad (2) \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Коши, выберем в кар-ве γ контур, состоящий из дуги $(-\infty, \frac{x}{2})$ на верхнем берегу разреза вдоль положительной вещественной оси, окружности с центром в $t=0$ и радиусом $\frac{x}{2}$, которая обходится против часовой стрелки, и дуги $(\frac{x}{2}, +\infty)$ на нижнем берегу разреза.



Сделаем замену $t = \frac{x}{2} e^{-i(\zeta-\pi)}$. При этом контур γ на комплексной ζ -ти $t = t_1 + it_2$ перейдет в контур ζ_0 на ζ -ти $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ с соотв. направлением обхода.



Учитывая, что: $dt = -itd\zeta$, $\frac{x}{2t} = e^{i(\zeta - \pi)}$

$$\frac{x^2}{4t} - t = (e^{i2(\zeta - \pi)} - 1)t = \frac{x}{2} \{ e^{i(\zeta - \pi)} - e^{-i(\zeta - \pi)} \} =$$

$$= ix \sin(\zeta - \pi) = -ix \sin \zeta,$$

и используя ф-лу (2), получим: $y_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\zeta_0^-} e^{-ix \sin \zeta + i\zeta} d\zeta$.

Итак: $y_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta_0^+} e^{-ix \sin \zeta + i\zeta} d\zeta$.

2. Теорема существования классического решения однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

„ Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно диф-ма, а функция $\psi(x)$ непрерывно диф-ма на бесконечной прямой \mathbb{R}^1 . Тогда классическое решение задачи Коши $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}^1; \end{cases}$

существует и определяется ф-лой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

До: непосредственной проверкой легко установить, что функция $u(x,t)$, представленная ф-лой Даламбера, явл. классическим решением задачи Коши. ■

Тема 19.

1. Построить интегральное представление функций Коши 1^{го} и 2^{го} рода.

Будем искать решение уравнения Бесселя в форме интегралов на комплексной плоскости вида $y(x) = \int_{\Gamma} e^{-ix \sin \zeta} \Phi(\zeta) d\zeta$, (1)

где Γ - контур на комплексной плоскости $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, концы которого уходят на ∞ -ть, а функция $\Phi(\zeta) = e^{i\zeta}$.

Контур C может уходить на ∞ -ть лишь в тех областях, где обеспечена сходимость интеграла (1). При вещественном $x > 0$ e^{ix} -ть интеграла обеспечивается, если мнимая часть $\sin \zeta$ меньше нуля: (42)

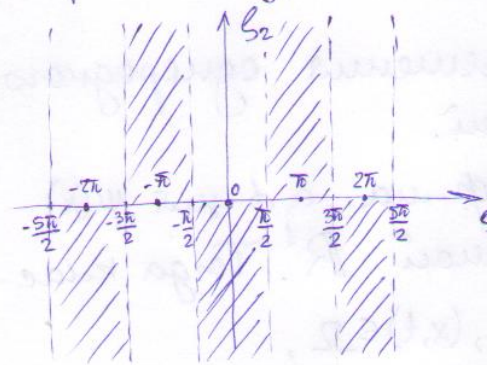
$$\text{Im} \sin \zeta = \cos \zeta_1 \cdot \text{sh} \zeta_2 < 0 \quad (2)$$

При $\zeta_2 > 0$ имеем $\text{sh} \zeta_2 > 0$, и усл. (2) выполняется, если $\cos \zeta_1 < 0$, т.е.

при: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \zeta_1 < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

При $\zeta_2 < 0$ усл. (2) выполняется, если: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \zeta_1 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, получаем систему областей (заштрихованы), в которых контур может уходить на ∞ -ть. Заметим, что контур C_0^+ , введенный выше для функции Бесселя лежит в этих областях.



Покажем теперь, что $y(x)$ удовл. ур-нию Бесселя. Обозначим \mathcal{L}_ν оператор Бесселя:

$$\mathcal{L}_\nu [y] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y,$$

а $\mathcal{L}_\nu K(x, \zeta)$ - ядро интеграла (1):

$$K(x, \zeta) = e^{-ix \sin \zeta}.$$

Легко убедиться в справедливости ф-лы:

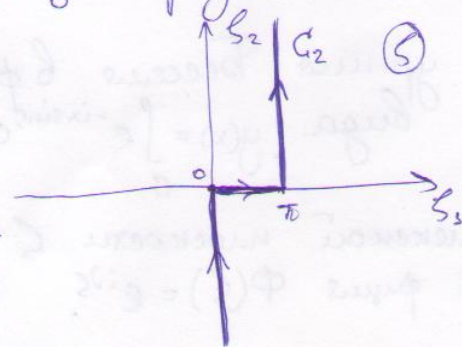
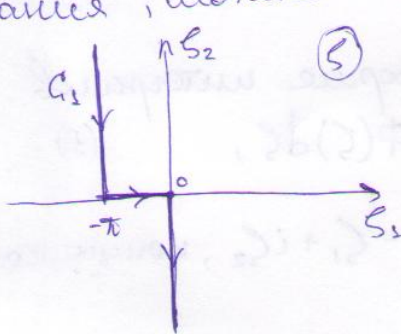
$$\mathcal{L}_\nu [K(x, \zeta)] = -K_{\zeta\zeta}(x, \zeta) - \nu^2 K(x, \zeta).$$

Принтергрируем интеграл $\mathcal{L}_\nu [y]$ по частям, учитывая, что в силу выбора контура C подстановки на ∞ -ти обращаются в нуль, получим:

$$\mathcal{L}_\nu [y] = \int_C \mathcal{L}_\nu [K(x, \zeta)] \Phi(\zeta) d\zeta = - \int_C \{K_{\zeta\zeta}(x, \zeta) + \nu^2 K(x, \zeta)\} \Phi(\zeta) d\zeta =$$

$$= - \int_C K(x, \zeta) \{ \Phi''(\zeta) + \nu^2 \Phi(\zeta) \} d\zeta.$$

Из полученного выражения следует, что при $\Phi(\zeta) = e^{i\nu\zeta}$ функция $y(x)$, определенная соотношением (1), будет удовлетворять ур-нию Бесселя $\mathcal{L}_\nu [y] = 0$. Выбирая различным образом контур интегрирования, можно получить различные цилиндрические функции.



$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta,$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{C_2} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta,$$

функции Hankel ν^{20} и 2^{20} рода.

2. Вывод ф-лы Даламбера.
см. Билет 11 (n. 2*)

Билет 20.

1. Получить асимптотику функции Коши при большом значении аргумента.

см. Билет 7 (n. 2)

2. Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре методом электростатических изображений.

см. Билет 13 (n. 2)

Билет 21.

1. Вывод общей ф-лы производящей функции классических ортогональных полиномов.

Будем исходить из обобщенной ф-лы Родрига:

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \sigma^n(x) \rho(x) \} \quad (1)$$

Из уравнения Рурсона имеем: $\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right) \Rightarrow$

\Rightarrow функция $\sigma^n(z) \rho(z)$ явл. аналитической функцией комплексной переменной z в окр-ти отрезка $[a, b]$ действительной оси комплексной плоскости z . Воспользуемся для n -й производной интегральным представлением Коши: $\frac{d^n}{dx^n} \{ \sigma^n(x) \rho(x) \} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(t) \rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$, (2)

где интеграл берётся по контуру, содержащему точку $t=x$ внутри себя. Из ф-лы Родрига и (2) вытекает, что:

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(t) \rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt \quad (3)$$

Подставляя (3) в $\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(t)}{t-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma(t)z}{t-x} \right\}^n dt. \quad (44)$$

При достаточно малом $|z|$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma(t)z}{t-x} \right\}^n = \frac{1}{1 - \frac{\sigma(t)z}{t-x}} = \frac{t-x}{t-x - \sigma(t)z}$$

и окончательно:
$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi i \rho(x)} \int_C \frac{\rho(t)}{t-x - z\sigma(t)} dt \quad (4)$$

При $z=0$ подынтегральная функция (4) имеет внутри контура C единственный простой полюс $t=x$. След-но, по непрерывности, при достаточно малых $|z|$ контур C всегда можно выбрать так, что внутри него будет находиться единственный простой полюс t_0 , являющийся корнем ур-ния:
$$t-x - z\sigma(t) = 0 \quad (5)$$

Очевидно, $t_0 = t_0(x, z)$, где $t_0(x, z)$ означает тот корень ур-ния (5), который при малых $|z|$ близок к $t=x$.

Вычислив интеграл в (4) с помощью вычетов, получим общее выражение производящей функции КОП:

$$\Psi(x, z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)},$$

где $t_0 = t_0(x, z)$ - корень ур-ния (5).

2. Свойства фундаментального решения ур-ния теплопроводности на бесконечной прямой.

Функция $G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ (1) наз. фундаментальным реше-

нием ур-ния теплопроводности в одномерном случае:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in \Omega, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1; \end{cases}$$

Формальное решение ~~данной~~ задачи Коши: ~~предст~~

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1; \end{cases} \quad \text{представляется ф-лой:} \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (2)$$

Перейдем к свойствам:

1) Из ф-лы (1) следует, что функция $G(x, \xi, t)$ определена при $t > 0$ и положительна: $G(x, \xi, t) > 0$.

2) Непосредственной проверкой легко установить, что функция $G(x, \xi, t)$ по переменным x и t удовл. однородному уравнению теплопроводности при $t > 0$: $G_t(x, \xi, t) = a^2 G_{xx}(x, \xi, t)$, $(x, t) \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

3) Известно, что разложение дельта-функции в интеграл Фурье имеет вид: $\delta(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-\xi)} dk$. Поэтому из ф-лы:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 k^2 t + ik(x-\xi)} dk \quad (\text{см. стр. 256-258}) \quad \text{следует, что:}$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x, \xi).$$

Это значит, что $G(x, \xi, t)$ явл. решением задачи Коши:

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, & (x, t) \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^1, & \text{непрерывным всюду, } \overline{\Omega} \text{ } \text{кроме} \\ G(x, \xi, 0) = \delta(x, \xi), & x \in \mathbb{R}^1, \xi \in \mathbb{R}^1; & \text{точки } (\xi, 0), \text{ т.е. при } x = \xi, t = 0. \end{cases}$$

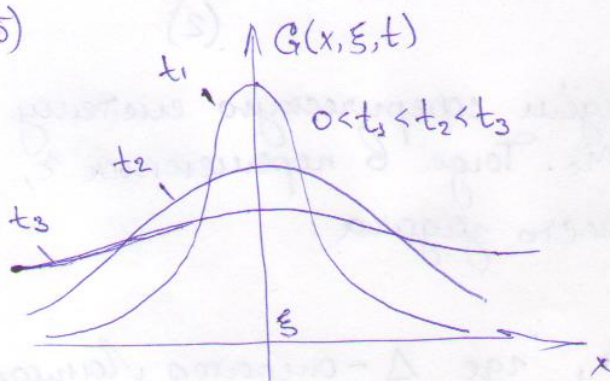
Отсюда следует, что $G(x, \xi, t)$ явл. обобщенной функцией.

4) Из ф-лы (2) следует, что функция $G(x, \xi, t)$ с физич. точки зрения представляет собой температуру в точке x в момент времени t , если в нач. момент $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется нек. кол-во тепла $q > 0$.

Принтегрировав $G(x, \xi, t)$ по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) dx = 1 \Rightarrow \text{кол-во тепла, находящегося на бесконечной прямой } x \in \mathbb{R}^1 \text{ в последующие моменты времени } t > 0, \text{ не изм. с течением времени.}$$

5)



$$G(\xi, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

б) из ф-лы (1) следует, что ф-ция $G(x, \xi, t)$ явл. симметричной (46) по x и ξ . Симметрия ф-ции $G(x, \xi, t)$ по переменным x и ξ представляет собой математическое отражение известного физического принципа взаимности.

Отметим, что отн-но переменной t такая симметрия не имеет места, что явл. выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Тема 22.

1. Вывод формулы Кирхгофа.

Получим интегральное соотношение, связывающее значения решения ур-ния $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t), (M, t) \in \Omega_3 = \mathbb{R}^3 \times (0, T]$ (1)

в произв. r . М. в момент времени t_0 со значениями этого решения и его производных на замкн. пов-ти S , охватывающей r . М., в предыдущие моменты времени.

Мы-во точек (M, t) , определяемое условиями: $\frac{R_{M_0 M}}{a} = t_0 - t, t < t_0$, назовем нижним характеристическим конусом точки (M_0, t_0) и определяет те точки M , из которых возмущение, вышедшее в момент времени t , предшествующий t_0 , в момент t_0 доходит до r . М.

Мы-во точек (M, t) , определяемое условиями: $\frac{R_{M_0 M}}{a} = t - t_0, t > t_0$, составляет верхний характеристический конус точки (M_0, t_0) . Возмущение (сигнал), вышедшее из r . М. в момент t_0 , доходит до r . М. верхнего хар. конуса в момент времени t .

Введем локальное время точки (M_0, t_0) по формуле:

$$t' = t - \left(t_0 - \frac{R_{M_0 M}}{a} \right) = t - t_0 + \frac{R_{M_0 M}}{a} \quad (2)$$

Очевидно, для точки (M_0, t_0) : $t' = 0$. Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в r . М. Тогда в переменных r, θ, φ, t' для ф-ции $u(r, \theta, \varphi, t')$ имеет место задача:

$$\begin{cases} u_{tt'} = a^2 \Delta u + f(M, t'), (M, t') \in \Omega_3; \\ u(M, 0) = \varphi(M), u_{t'}(M, 0) = \psi(M), M \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

где Δ - оператор Лапласа в сферич. системе координат с началом в r . М.

Перейдем в ур-нии (1) к новым переменным $z'=z, \theta'=\theta$, (47)
 $\varphi'=\varphi$ и t' , определяемому по ф-ле (2), сохраняя для пространственных переменных прежние неизмененные обозначения.

Обозначим: $u(z, \theta, \varphi, t) = u(z, \theta, \varphi, t' + (t_0 - \frac{z}{a})) = U(z, \theta, \varphi, t')$

и пересчитаем производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t'} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t'}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

Подставляя ф-лы (3) в (1), получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t'} + \frac{2a^2}{z} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{2a}{z} \frac{\partial U}{\partial t'} + \frac{a^2}{z^2} \Delta_{\theta\varphi} U + F(M, t'), (4)$$

где $F(M, t') = F(z, \theta, \varphi, t') = f(z, \theta, \varphi, t' + (t_0 - \frac{z}{a})) = f(z, \theta, \varphi, t)$,

$$a \Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Ф-лу (4) запишем следующим образом:

$$\Delta U = -\frac{2}{az} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) - \frac{1}{a^2} F(M, t') (5)$$

Предполагая существование решения ур-ния (1), ф-лу (5) можно ∇ как ур-ние Пуассона, правая часть которого явл. ф-цией параметра t' . Используя 3^ю ф-лу Грина (см. стр. 158), выразим решение ур-ния (5) в т. $(M_0, 0)$:

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{z} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} \right\} dS + \frac{1}{2\pi a} \int_D \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=0} dV + \frac{1}{4\pi a^2} \int_D \frac{F(M, 0)}{z} dV, (6)$$

где $\bar{D} = \partial V \cup S$, $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали.

Объемный интеграл, стоящий в правой части ф-лы (6), явл. $\frac{1}{2}$ интегралом 2^{го} рода: $\int_D \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D/K_\epsilon} \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) dV$, где

K_ϵ - шар радиуса ϵ с центром в т. M_0 . Преобразуем этот интеграл.

$$\nabla_{t',k} : \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) = -\text{grad} \left(\frac{1}{z} \right) \text{grad} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right), \text{ то, используя 1-ю ф-лу (48)}$$

Грани, получаем:

$$\int_{\mathcal{D}/K_\varepsilon} \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) dV = \int_{\mathcal{D}/K_\varepsilon} z \frac{\partial U}{\partial t'} \Delta \left(\frac{1}{z} \right) dV - \int_S z \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} dS - \int_{S_\varepsilon} z \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} dS, \quad (7)$$

где S_ε - сфера радиуса ε с центром в $r. M_0$. В области $\mathcal{D}/K_\varepsilon$:

$$\Delta \left(\frac{1}{z} \right) = 0. \text{ На пов-ти } S_\varepsilon: \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}. \text{ След-но:}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S z \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} dS = 0. \text{ Поэтому, переходя в (7) к пределу при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ имеем:}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial t'} \right) dV = \int_S \frac{1}{z} \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial z}{\partial n} dS. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим:

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{z} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{z} + \frac{2}{az} \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial z}{\partial n} \right\} dS + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathcal{D}} \frac{F(M, 0)}{z} dV \quad (9)$$

Вернёмся в ф-ле (9) к первоначальным переменным, учитывая, что при $t'=0$: $t = t_0 - \frac{R_{M_0 P}}{a}$. Поскольку: $U(P, 0) = u(P, t_0 - \frac{R_{M_0 P}}{a})$, $P \in S$ (10)

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n}, \text{ откуда:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{t'=0} = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a} \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0 - \frac{R}{a}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0 - \frac{R}{a}},$$

то, подставляя (10) в (9), окончательно получим:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P} \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) - u \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} \frac{\partial u}{\partial t} \left(P, t_0 - \frac{R}{a} \right) \frac{\partial R}{\partial n_P} \right\} dS_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathcal{D}} \frac{f(M, t_0 - \frac{R_{M_0 M}}{a})}{R_{M_0 M}} dV_M, \quad R \equiv R_{M_0 P}. \quad \text{— ф-ла Кирхгофа.}$$

2. Описать общую схему метода разделения переменных.

Пусть задана следующая задача:

Найти решение ур-ния $\rho_t [u] = Lu$, удовл. ГУ и КУ:

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(M), \quad k = 0, 1, \dots, l-1$$

Тогда решение этого ур-ния можно получить в виде произ- (49)
 ведения $u(M, t) = v(M)T(t)$, при этом функции $v(M)$ и $T(t)$ определяются
 из вспомогательных задач:
$$\begin{cases} Lv + \lambda v = 0, v(M) \neq 0, M \in \mathcal{D}, \\ \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v \right) \Big|_s = 0; \end{cases}$$
 и

$$\begin{cases} P_t(T) + \lambda T = 0, \\ \left. \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(M). \end{cases}$$

$$Lu = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) - q(M)u,$$

$$P_t[u] = \sum_{i=0}^l a_i(t) \frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

$$\rho, q \in C(\mathcal{D}), k \in C^{(1)}(\mathcal{D}), \rho, k > 0, q \geq 0,$$

$a_i(t)$ - непр. функ. переменной $t \in [0, T]$,

Ур-ние Δ -ся в одн. $Q = \mathcal{D} \times (0, T]$.

P.S. Это метод для однородных ур-ний. По-нормальному, см.
 стр. 64-66.

Билет 23.

1. Вывод ф-лы Пуассона, описывающей процесс распростране-
 ния колебаний в трёхмерном пространстве.

см. стр. 341-345

2. Построить функ. Грина внутренней задачи Неймана для
 ур-ния Лапласа.

$$\Delta u = -F \text{ в } \mathcal{D}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s = f. \quad (1)$$

$$\Delta \text{ ф-лу: } u(M) = \oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} G - u \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS - \int_{\mathcal{D}} G \Delta u dV. \quad (\star)$$

случае нельзя наложить на функ. G ген. условие $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_s = 0$, (2)

чтобы исключить слагаемое, содержащее $u|_s$.

Действительно, если потребовать удовлетворения функцией $G = \frac{1}{4\pi R} + v$ ген.
 условия (2), то для определения функ. v получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \mathcal{D}, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \Big|_{R \in s}; \end{cases} \quad (3)$$

Проверим разрешимость этой задачи. Коэф. усл. разрешимости (50) имеет вид: $\int_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0$.

Для вычисления интеграла $\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$, $M \in D$, воспользуемся 3^{ей} ф-лой Грина, положив в ней $u \equiv 1$. Тогда получим:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P = -1 \neq 0, M \in D \quad (4)$$

След-но, задача (3) решения не имеет. Это означает, что ф-ция $G = \frac{1}{4\pi R} + v$, удовл. условию (2), не существует. Снова обра-

тимся к ф-ле (*): $u(M) = \int_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} G - u \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS - \int_D G \Delta u dV$

$$G = \frac{1}{4\pi R_{M\Omega}} + v, \Delta v = 0 \text{ в } D. \quad (5)$$

Решение внутр. задачи Неймана определено только с точностью до произв. постоянного слагаемого. Тогда подберем ф-цию G кр. условию: $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = C_0 = \text{const} \neq 0$, поскольку в этом случае

слагаемое в ф-ле (5), содержащее значение $u|_S$, даёт постоянную. C_0 выберем так, чтобы была разрешима внутр. вторая

КЗ для v : $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = C_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} \Big|_{P \in S}. \end{cases}$ Для этого должно выполняться соотношение:

$$\int_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_S \left\{ C_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} \right\} dS_P = 0. \text{ В силу рав-ва (4) отсюда получаем, что } C_0 = -\frac{1}{S_0}, \text{ где } S_0 - \text{площадь пов-ти } S.$$

Таким образом, ф-ция $G(M, Q)$ наз. ф-цией Грина внутр. задачи Неймана для оператора Лапласа, если:

а) $G(M, Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, где v - гармоническая в D ф-ция;

б) $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{S_0}$, где S_0 - площадь пов-ти S .

Лист 24.

1. С помощью метода спуска Адамара получить ф-лу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в двумерном пр-ве.

см. стр. 346-349

2. Получить асимптотику функции Макдональда при большом значении аргумента.

Пользуясь асимптотикой ф-ции Кошеля 1^{го} рода, полученной в Лист 7 (п.2), получим асимптотику ф-ции Макдональда

$$\text{при } x \rightarrow \infty: K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} i^{\nu+1} e^{i(ix)} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi ix}} e^{-i\nu\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-3/2}) \right\} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Лист 25.

1. Вывод ур-ния для присоединённых функций Лежандра.

Ф-ция $u(x) = P_n(x)$ удовл. ур-нию Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + \lambda_n P_n = 0 \rightarrow (1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0 \quad (1)$$

Продифференцируем (1) m раз, учитывая ф-лу Лейбница:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}$$

$$\text{Получим: } 0 = \left[(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u \right]^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} -$$

$$- \sum_{k=0}^m C_m^k (2x)^{(k)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)} + n(n+1)u^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} (1-x^2)^{(l)} u^{(m-l+2)} + n(n+1)u^{(m)} = C_m^0 (1-x^2) u^{(m+2)} +$$

$$+ (C_m^1 + C_m^0) (1-x^2)' u^{(m+1)} + (C_m^2 + C_m^1) (1-x^2)'' u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)},$$

причём мы знаем, что $k=0,1,2$, а $l=1,2$, поскольку производные более высоких порядков от $(1-x^2)$ тождественно равны нулю.

Поскольку: $C_m^1 + C_m^0 = m+1$, $C_m^0 = 1$,

$$C_m^2 + C_m^1 = \frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2},$$

$$\text{то: } [(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u]^{(m)} = (1-x^2)u^{(m+2)} + (m+1)(-2x)u^{(m+1)} + \\ + \frac{m(m+1)}{2}(-2)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0, \text{ т.е.}$$

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2x(m+1)u^{(m+1)} - m(m+1)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0. \quad (2)$$

Положим $y(x) = (1-x^2)^{m/2} u^{(m)}(x)$, получаем из (2) следующее уравнение для функции $y(x) \equiv P_n^{(m)}(x)$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} y = 0$$

Перепишем его в след. форме:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} y = 0.$$

2. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

см. билет 1 (п.2).