① Лемма о поведении реш.
$(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$ в ос. точ.
$\exists u_1(x)$ и $u_2(x)$ — 2 линейно
независ. р-я ур-я, ∞ ф.
$k(x)$ уд. усл.: $k(x) > 0$ при
$x \in (a,b]$, $k(x) \le (x-a)\psi(x)$
где $\psi(x)$ — непрерывная на
$(a,b]$, $\psi(a) \ne 0$ ⇒ $k(x)$ в $x=a$
имеет нуль первого пор-ка.
⇒ $\exists$ ограниченное реш-е $u_1(x)$,
имеющее конечный предел
в $x=a$, то 2-е реш-е $u_2(x)$
при $x \to a$ и эл. неограничено.
При этом, $u_1(a) \ne 0$, то $u_2(x)$
имеет в $x=a$ под особенности ∞
и $u_1(x)$ имеет в $x=a$
нуль ν-го порядка, то $u_2(x)$
имеет в $x=a$ полюс ν-го пор.

② Ур-е Бесселя, его ФСР
$\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$;
ФСР: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$
(при нецелом ν); $y(x) = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}$
$\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ при $\nu \ne \mathbb{Z}$,
$\{J_\nu, N_\nu\}$ при $\forall \nu$
$\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ при $\forall \nu$

③ Опр. цилиндр. ф-ии (цилиндр)
Любое ненулевое р-е ур-я Б.
-цил-ф. примеры: J_ν, $J_{-\nu}$,
N_ν, H_ν, I_ν, K_ν

④ Особые точки ф-й, кот. реш. Б.
$x = 0$; $J_\nu(x\to 0) = c \cdot x^\nu$ ($\nu \ne 0$)
$c \ne 0$; $N_\nu(x\to 0) = \dfrac{c}{x^\nu}$ ($\nu \ne 0$)
$c \ln(x)$ ($\nu = 0$)

⑤ Опр. ф-ии Бес. с пом. ст. р-да
$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
при $\nu \ge 0$; $\Gamma(k+1) = k!$, $k \in \mathbb{N}^0$, т.к. $\Gamma(n+1)$
$= n\,\Gamma(n)$; при $\nu = 0$: $J_0(x) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{k!\,k!}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

⑥ связь I_{-n} и I_n
$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$;

⑦ $J_{1/2}$ и $J_{-1/2}$. Всегда м. через эл?
$J_{1/2} = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\frac12}$
$J_{-1/2} = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1/2)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\frac12}$
Да! напр. $J_{1/2} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$
$J_{-1/2} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

⑧ Интегр. пр-е ф-ии Б.
$J_\nu = \dfrac{1}{2\pi}\int_c e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$

если ν-целое ⇒
$J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha + in\alpha}\,d\alpha$
или $J_n(x) = \dfrac{i^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi + in\varphi}\,d\varphi$

⑨ Опр. ф-ии Ханкеля
Ф.Х. 1-го и 2-го рода, цил.
ф-ии опр. $\int$

⑩ $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$
$H_\nu^{(1)} = \dfrac{1}{\pi}\int_{c_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$
$H_\nu^{(2)} = \dfrac{1}{\pi}\int_{c_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$
где c_1 и c_2

⑩ $H_{-\nu}$ и H_ν - связь
$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x)$, $H_{-\nu}^{(2)}(x)$
$= e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x)$; док-во: $H_{-\nu}^{(1)}(x) =$
$= \dfrac{1}{\pi}\int_{c_1} e^{-ix\sin\xi - i\nu\xi}\,d\xi =$
$= \dfrac{1}{\pi}\int e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha + i\nu\pi}\,d\alpha =$
$= e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x)$

⑪ J_ν и H - связь.
$J_\nu(x) = \dfrac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\}$
$J_{-\nu}(x) = \dfrac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(x)e^{i\nu\pi} + H_\nu^{(2)}(x)e^{-i\nu\pi}\}$
при $x \in \mathbb{R}$ и ивл. вещ. числ. H

⑫ Опр. ф-ии Неймана
$N_\nu(x) = \dfrac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\}$;
при $x \in \mathbb{R}$ ивл. вещ.. 2. H
$N_\nu(x) = \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{\pi}\int_{c_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi -$
$- \dfrac{1}{\pi}\int_{c_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi = \dfrac{1}{2\pi i}\int$
$e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi$

⑬ Связь J, N, H
$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$,
$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$

⑭ Асимптотич. ф-ла для $H^{1,2}$
$x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
$H_\nu^{(1)} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2})$
$H_\nu^{(2)} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2})$

⑮ Асимпт. ф-ла для J
$J_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2})$
⇒ при больших x осцил.
ф-ии x, где амплитуда $\downarrow$
с ростом x как $x^{-1/2}$, а р-е
между нулями $\to \pi$ (все ну-
ли,кроме $x=0$, простые)

⑯ Асимпт. ф-ла для N
$N_\nu(x) = \dfrac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\} =$
$= \dfrac{1}{2i}\left[\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}e^{i(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} - \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}e^{-i(x -\right.$
$\left. \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2})\right] = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \dfrac{\nu\pi}{2}\right.$
$\left. - \dfrac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2})$

⑰ Поведение J, N, H в окр. 0
$x > 0$ $J_\nu(x) \approx \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu$, $\nu \ge 0$
$N_\nu(x) \approx \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}, & \nu = 0 \\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$
$H_\nu^{(1,2)}(x) \approx \begin{cases} \pm i\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}, & \nu = 0 \\ \mp i\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$

⑱ Задача на собст. зн. для ур-я Б
$\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right) - \left(\lambda - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$
$u(a) = 0$; $|u(0)| < \infty$

⑲ Теор. Стеклова для оп. Бес.
произвольная 2-жды непрер.
дифф. на $[0,a]$ ф-я $f(x)$, уд.
гранич. усл. $f(a) = 0$, $|f(0)| < \infty$
разлагается в абс. и равн.
сход. ряд по собст. ф-ям
данной краевой задачи:
$\begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right) - \left(\lambda - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0 \\ |u(x)| < \infty; \ u(a) = 0 \end{cases}$
$f(x) = \sum_{n} f_n u_n(x)$, $f_n = \dfrac{1}{\|u_n\|^2}\int f(x)$
$\cdot u_n x\,dx$.

⑳ Задача на соб. зн. для O
в сл. гр. усл. 1 рода.
$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{r=a} = 0 \end{cases}$ ☐

㉑ — » — в сл. гр. у. 2 рода
$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$

㉒ Собств. ф-ии круга
$u_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k}\,r\right)\begin{cases}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{cases}$
$n = 1,2,\dots$; $k = 1,2,\dots$; $\boxed{\lambda > 0}$
$\lambda_k^n = \left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$

㉓ Харак. ур-е для опр. собст.
зн-ий задачи для O для 1,2,3
$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{r=a} = 0 \end{cases}$
$J_n\left(a\sqrt{\lambda^{(n)}}\right) = 0$; $J(\mu^{(n)}) = 0$;
усл-е Неймана: $\dfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=a} = 0$
$J_n'(\mu^{(n)}) = 0$, если $\lambda < 0 \Rightarrow u \equiv \text{const}$
3-го рода: $\dfrac{\partial u}{\partial r} - hu\big|_{r=a} = 0$
$\sqrt{\lambda}\,J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$

㉔ Ф-ла для $\|J_n\|^2$ с.ф. зн-ия на с.з.
$\|J_n\|^2 = \int_0^a J_n^2(\sqrt{\lambda}r)r\,dr = \dfrac{a^2}{2}J_n'^2$
$(a\sqrt{\lambda}) - \left(1 - \dfrac{n^2}{a^2\lambda}\right)J_n^2(a\sqrt{\lambda})\dfrac{a^2}{2}$
1) $u|_{r=a} = 0$; $\|J_n\|^2 = \dfrac{a^2}{2}J_n'^2(\mu_k^{(n)})$
2) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=a} = 0$; $\|J_n\|^2 = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\mu_k^{2}}\right)$
$\cdot J_n^2(\mu_k^{(n)})$
3) $\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\big|_{r=a} = 0$; $\|J_n\|^2 =$
$= \dfrac{a^2}{2}\left(1 + \dfrac{\mu_k^{(n)2} - n^2}{a^2h^2}\right)J_n^2(\mu_k^{(n)})$

㉕ Ур-е для цил. ф. чисто мн. арг.
$u = J_0(ix) \Rightarrow \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right) + \left(1\right.$
$\left. - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$; $\dfrac{1}{ix}\cdot\dfrac{d}{d(ix)}\left(ix\dfrac{1}{i}\dfrac{du}{dx}\right) +$
$+\left(1 + \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$
$-\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right) + \left(1 + \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$

㉖ Опр. ф-ии Инфельда
$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$
$+1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
- ивл. вещ. при $x > 0$

㉗ I_n и I_{-n} связь $\dfrac{\Gamma(k)\,J(x)}{\Gamma(x)}$
$I_{-\nu}(x) = (-1)^n I_n(x)$;
$I_n(x) = (i)^{-n}J_n(ix) = \dfrac{(i)^n}{\dots}J_{-n}(ix)$
$= \{I_n = (i)^n J_{-n}(ix)\} = (-1)^n \dfrac{(i)^{-2n}\Gamma(x)}{(-1)^n}$
$= (-1)^{-2n}I_{-n} = I_{-n}(x)$

㉘ Асимпт. ф-ла для I
$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = i^{-\nu}\dfrac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(ix)$
$+ H_\nu^{(2)}(ix)\} = \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

㉙ Опр. ф-ии Макдональда
$K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$

㉚ Асимпт. ф-ла для Макд.
$K_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}e^{-x}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

㉛ Опр-е классич. орт. полин.
Опр. наз. сист. $\{p_n(x)\}$ полиномов
всех степеней, опр. на $[0,b]$
системой классич. орт.
полиномов, если они орто-
гональны на $[a,b]$ с весом
$\rho(x)$, уд. на $[a,b]$ дифф. ур-ю
Пирсона $\dfrac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x)$
где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ - ф-ии, уд. усл.
$x^m\sigma(x)\rho(x)\big|_a^b = 0$, $m = 0,1,\dots$
$\tau(x) = Ax + B$ (A, B опр-ся доп.
усл-е $x^m\dots$), а ф-я $\sigma(x)$:
$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & \text{при } a \ne -\infty, b \ne \\ x-a, & a \ne -\infty, b = \infty \\ b-x, & a = -\infty, b \ne \infty \end{cases}$
где общ. реш. ур-я Пир.
$\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int\dfrac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx\right)$, $\rho \ge 0$

㉜ Теорема о нулях КЛОП
КЛОП $P_n(x)$ имеет ровно n
простых нулей строго
внутри отр-ка $[a,b]$

㉝ Явл. ли КЛОП произв. от КЛОП
да! c весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$
(задан. на $[a,b]$)

㉞ Ур-е для КЛОП
$\sigma(x)p_n'' + \tau(x)p_n' + \lambda_n p_n(x) = 0$
или $\dfrac{d}{dx}\{\sigma\rho\,\dfrac{dp_n}{dx}\} + \lambda_n\rho p_n = 0$

㉟ Задача на с.ф. для КЛОП
$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{\sigma\rho\,\dfrac{dy}{dx}\} + \lambda_n\rho y = 0, \ x \in (a,b) \\ |y(a)| < \infty; \ |y(b)| < \infty \end{cases}$

㊱ Ф-ла для с.з. ур-я Ш.-Л для КЛОП
$\lambda_n = -n\left[\tau' + \dfrac{n-1}{2}\sigma''\right]$

㊲ Общ. ф-ла для КЛОП (Родриг.)
$p_n(x) = \dfrac{C_n}{\rho(x)}\dfrac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}$
$C_n = \dfrac{n!\,A_n}{A_{nn}}$; $A_{nm} = (-1)^m\dfrac{\prod_{1}^{m}\lambda_{nk}}{\dots}$
$\lambda_{nm} = -(n-m)\{(n-m-1)\dfrac{\sigma''}{2} + \tau'\}$

38) Опр. полин. Якоби

КЛОП, задан. на $[-1,1]$ и ортогон. на нём с весом $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, наз-ся полин. Якоби и обознач. $\rho^{(\alpha,\beta)}(x)$

39) Ф-ла Родрига для п. Якоби

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \Rightarrow \rho^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

40) Опр. полин. Лежандра

частный случай п. Якоби при $\alpha=\beta=0$ и обозн. $P_n(x) \Rightarrow$
$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \Rightarrow \rho(x) \equiv 1$
$\sigma(x) = \frac{d}{dx}\sigma(x) = ?$
$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + \lambda_n P_n = 0$
ф-ла Родрига для пол. Якоби
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

41) Задача на собств. зн. для Леж.
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda_n y = 0, \quad -1<x<1$$
$|y(\pm 1)| < \infty$

42) в-с для д.у. полин. Леж.
$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1) \Rightarrow \alpha=\beta=0$
$\Rightarrow \lambda_n = n(n+1)$

43) $\|\cdot\|^2$ для полин. лежандр
$c_n\sigma' = \int \sigma^n(x)\rho(x)dx \Rightarrow \|P_n\|^2 = (-1)^n n!$
$(-1)^n a_n n! \int_{-1}^{1} (1+x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1}$

44) Опр-е пол. Лагерра

КЛОП, задан. на $[0,\infty)$ и ортогон. на нём с весом $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, наз-ся полин. Лагерра и об. $L_n^{(\alpha)}(x)$
$L_n = \frac{1}{n!}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\cdot x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right)$

45) Опр. пол. Эрмита

КЛОП, зад. на $(-\infty,\infty)$ и орт. на нём с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ — пол. Эрмита $\{C_n = (-1)^n\} \Rightarrow$
$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

46) Опр. производ. ф-ии КЛОП

производ. ф-ей КЛОП наз-ся ф-я $\Psi(x,z)$, разложении кот. в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид $\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{P}_n(x)}{n!}z^n$,
где $\bar{P}_n(x) = \frac{1}{c_n}P_n(x)$; общий вид
$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\cdot\frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)}$$
где $t_0 = t_0(x,z)$ — корень $t - x - z\sigma(t) = 0$

47) Произв од. ф. для п. лежандра
$zt^2 + t - (z+x) = 0 \leftarrow t - x - z\sigma(t)$
$= 0 \Leftrightarrow \Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n$
$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$

48) Явл. ли сист. п. Леж. замк. ч. п.

система пол. Лежа. полна на $[-1,1]$ и замкнута

49) Теорма Стеклова для Леж.

Всякая 2-жды диф. (непрерыв.) на отр-ке $(-1,1)$ ф-я Ω Н-х разлагается в абс. и равн. сход. ряд по полин. лежандра $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}f_n P_n(x)$, где $f_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$, $n=0,1,\dots$ — коэф. Фурье ф-ии $f(x)$

50) Опр. присоед. ф-ии Лежандр

Присоед. ф. лежандра наз-ся ф-ии, определ. соотн.: $P_n^{[m]}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$, где
$P_n(x)$ — полином лег-ра
при $m > n$: $\equiv 0$; при $m=2k$ — полин. степени n; при $m = 2k+1$ — иррац. ф-ии)

51) Задача на с.з. для пр. ф. Леж.
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{[m]}(x)\right] + \left[\lambda_n - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^{[m]} = 0$$
$|P_n^{[m]}(\pm 1)| < \infty; \quad -1 < x < 1$

52) Собс. зн. для прис. ф. Лек.
$\lambda_n = n(n+1)$

53) $\|\cdot\|^2$ для прис. ф. Лех.
$$\|P_n^{[m]}\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

54) Явл. ли сист. присоед. ф. Лех. замкн. и полнов?

система присоед. ф-ий лег. замкнута в $L_2[-1,1]$
т.к. прис. ф-ии как собств. ф-ии зад. ш-л ортогонал. с $\rho(x) \equiv 1$ при разн. n с $\Rightarrow$ полнота системы

55) Теор. Стеклова для пр. ф. Л

Всякая 2-жды диф. $f(x)$, дважды непрерыв. диф. на $[-1,1]$ и обращ. в нуль на его концах $f(-1) = f(1) = 0$, разлагается в абс. и равном. сход. ряд по пр. ф. Лежандра ($m \neq 0$): $f(x) = \sum f_n P_n^{[m]}(x)$, где коэф. то
$$f_n = \frac{1}{\|P_n^{[m]}\|^2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^{[m]}(x)dx, \quad n=0,\dots$$
где $\|P_n^{[m]}\|^2 = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

56) Опр. сфер. ф-ии

обращ. на единичной сфере решении ур-я:
$\Delta_{v\varphi}Y + \lambda Y = 0, \quad 0 < v < \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$
удовл. усл-ю периодичности по φ: $Y(v,\varphi) = Y(v,\varphi+2\pi)$
и облад. непрерыв. произв. до второго порядка, наз. сферич. ф-ями $|Y_{v\varphi}| = \frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sin^2 v}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$; $|Y(0,\varphi)|$

57) Задача на с.з. для сфер. ф.
$\Delta_{v\varphi}Y + \lambda Y = 0, \quad 0 < v < \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$
$Y(v,\varphi) = Y(v,\varphi+2\pi)$
$|Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty$

58) Явл. ли сист. сф. ф. полн. и...

система сф. ф. замкнута на единич. сфере ε: $\{0 < v < \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$; система сфер. ф. полна

59) Усл. ортогональности сф. ф
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{n_1}^{(m)}(v,\varphi)Y_{n_2}^{(m)}(v,\varphi)\sin v\, dv\, d\varphi$$
при $n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2$

60) $\|\cdot\|^2$ для сфер. ф-ии
$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_n^{(m)}(v,\varphi)Y_n^{(m)}dv$$
$= 2\pi\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad m=0$
(для ф-ии $Y_n^{(m)}(v,\varphi) = P_n^{[m]}$
$(\cos v)e^{im\varphi}$ $(n \leq m \leq n)$)
и $\|h_n^{(\pm m)}\|^2 = 2\pi\varepsilon_m\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$
$\varepsilon_m = \begin{cases}1, & m=0 \\ 1/2, & m\neq 0\end{cases}$
(для ф-ии см. №61)

61) Теор. Стеклово для сф. ф.

Всякая ф-я $f(v,\varphi)$ дважды непр. диф. на единич. сфере разлагается в абс. и равн. сход. ряд по сфер. ф.
$f(v,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_m f_{nm}Y_n^{(m)}(v,\varphi)$
где f_{nm} имеют вид:
$$f_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(v,\varphi)Y_n^{(m)}(v,\varphi)$$
$\cdot\sin v\, dv\, d\varphi$ (для ф-ии:
$Y_n^{(m)}(v,\varphi) = P_n^{[m]}(\cos v)\sin m\varphi$
$Y_n^{(m)}(v,\varphi) = P_n^{[m]}(\cos v)\cos m\varphi$
$(m = 0,\dots,n)$

62) Опр. шар. ф-ии

ф-ии $U_{nm}(r,v,\varphi)$ опр. ф-ей
$U_{nm}(r,v,\varphi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(v,\varphi) \\ r^{-(n+1)}Y_n^{(m)}(v,\varphi)\end{cases}$
и явл. частным реш. ур-я Лапласа в сфер. с.к. $(\Delta U = 0)$, наз. шар. ф-ями

63) Явл. ли шар. ф. с.ф. соотв. задачи на с.з?
не явл.

64) З. на с.з. для шара - 1ч.
$\begin{cases}\Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in K_a \\ u|_{r=a} = 0; \quad u \neq 0\end{cases}$

65) Зад. на с.з. для шара - Нейм
$\begin{cases}\Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in K_a \\ \partial u/\partial r|_{r=a} = 0 \\ u \neq 0\end{cases}$
$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{v\varphi}u$
$\Delta_{v\varphi}u = \frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sin^2 v}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

66) Собст. ф-ии шара
$U_{nm}(r,v,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{n+1/2}}{a}r\right)$
$Y_n^{(m)}(v,\varphi) \Rightarrow k=1,2,\dots \quad n=0,1,\dots$
$m = 0,\pm 1,\dots \pm n$

67) Что такое характ. ур-я в т. пр. 2-го пор-ка в а-з. 2-пер.

это интеграл. хар-ки ур-й
$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\,dxdy + a_{22}\,dx^2 = 0$ для
ур-я $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x,y,u,u_x,u_y) = 0$ $(\rho \in \mathcal{L}(x,y))$

68) Опр. ур-ий эллипт., парабол. и гиперб. типов в т. z пер.
$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$
$\Rightarrow$ гиперб.: если в т. М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$; эллипт.: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$; параболич.: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
где $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ — дискрим.

69) Канонич. форма г., э., п. ур.
г.: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = F$ или $U_{\xi\eta} = F$
э.: $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,U,U_{\xi},U_{\eta})$
п.: $U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,U,U_{\xi},U_{\eta})$

70) Опр. корректно п. з. Адам.

задача исс-ся кор-но пост. (по Адамару), если:
1) задача имеет р-е при р (при $\forall$ допустимых исходн. усилиях (сущ. реш-я) 2) каждым исходн. данном и соотв. только 1
реш-е (единственность реш.) 3) реш-е устойчиво ($z = \varepsilon(u)$, и-исх. дан., z-реш)

71) Пример пост. н-кр з. для ур-я колебания
$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); \quad 0<x<l, \quad t>0$
$u(0,t) = \mu_1(t) \quad (t \ge 0)$
$u(l,t) = \mu_2(t)$
$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le l$
$u_t(x,0) = \psi(x)$

72) Опр. клас. реш. н-к з. для ур-я кол.

клас. реш.
нач-кр. задачи для $u_{tt} = \text{div}$
$(k\,\mathrm{grad}\,u) - qu + f, \quad (M,t) \in Q_t$
$u(M,0) = \varphi(M), \quad u_t(M,0) = \psi$
$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t)$
$M \in D, P \in S, t \in [0,\infty)$ наз-ся
ф-я $u(M,t)$, непрер. вместе с первыми произв. в зам. цилиндре $\bar{E}_t$, имеющ. непр. произв. второго порядка в открытом цилиндре Q_∞ удовл. в Q_∞ ур-ю 1, нач. усл. 2 и гр.-усл 3.

73) пр. постановки нач.-кр. зад. для ур-я теплопроводн.
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l,\; 0<t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x) & 0\le x\le l \\ u(0,t)=\mu_1(t),\; u(l,t)=\mu_2(t) & 0\le t\le T \end{cases}$$

74) класс. реш. для ур-я тепл.
Классиф. реш. нач-кр. зад.
$\rho(N)u_t = \operatorname{div}(k(N)\operatorname{grad}u) + f(N,t),\quad (N,t)\in C_{\ell,\infty}$
$u(N,0)=\varphi(N),\; N\in \bar D$
$\alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u=\mu(P,t),\; P\in S,$
нсч-ая ф-я $u(N,t)$ непрер.
вместе с первыми произв.
по координатам в данном цилиндре D_∞, имеющ. непр. произв. 2-го поряд. по t и вторую по M в откр. цилин.
D_∞, удовл. в D_∞ ур-ю, нач. усл. и гран. усл.

75) Общ. схема метода разделения
построение реш. нач-кр. зад.
в виде ряда по нек. ортогон. сист. ф-ий, при чём это сист. сдн. сч самой задачи.
Р.ин. у-су: $\{u_t - \Delta u + f$
с.ф. и с.ч. $\{\Delta \bar v + \lambda \bar v = 0$
                   $\{\partial_n = 0$
2) примен. т. Стеклова
(с.в. $(\bar v_n, \bar v_m) = \delta_{nm})$
3) если $\exists$ класс.реш. ∂-зн (1),
то по т. ст. разлож. в ряд

76) к реш. каких задач м. свести реш. нач-кр. з-чи? (редукция)
$\rho u_t = Lu + f \quad в D$
$[\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta u]_S = \mu(P,t)],\; P\in S,\; |\alpha|+|\beta|\ne 0$
$\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_0 = \psi_k(N),\; k=0,1,\dots l-1$
$\Rightarrow$ 1) однородн. зад с нач.
$\Rightarrow$ 1) усл.; 2) неоднород. с
нул. нач. и гран. усл;
3) однородн. с нул. нач.у.

77) з. Ш-Л для Δ с гр. ус. Д.
$\begin{cases}\Delta \bar v + \lambda \rho v = 0,\; \bar v \ne 0 \; в\; D \\ \bar v|_S = 0\end{cases}$
1) ∃ со счётное мн-во собст.
зн. λ_n и с.ф. $\{v_n(N)\}$, с.]
при n и неогр. возрастают
каждому с.з. соот. лишь
конечное число соб. ф.
с.ф. ⇒ ранг каждого з.
конечен. 2) при $q\ge 0$ с.з.
зад. Дир. полож.: $\lambda_n>0$ при
3) с.ф. ортогон. между соб.
в D с весом $\rho(M)$: $\int_D\rho(M)v_n$
$\rho dv = 0, n\ne m;$ 4) теор. о разл.
Стеклова: произв. 2-раз
непр. диф. ф-ю удовл. гр.
усл. зад. усл. с рег. в абс.
и равноч. сход. ряд по с.ф.
$f(N) = \sum_{n=1}^\infty f_n v_n(N),$
$f_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_D f v_n dv$

78) Применение м.Ф. в сл.
неодн. гр. усл.
$u(x,t)=\sum_{n=1}^\infty T_n(t)v_n(x) \leftarrow$ сход при
4) $(u_t - \Delta u - f, \bar v_n)=0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(u,\bar v_n) - (u,\Delta\bar v_n)=(f,\bar v_n);\;\dfrac{d}{dt}(u,\bar v_n)+\lambda_n(u,\bar v_n)=(f,\bar v_n)$ 5) $(u,\bar v_n)\big|_t = (u(t),\bar v_n)$
6) $u(z) \Rightarrow u = \sum T_m(t)\bar v_m(x)\big|_t$ и Π по $x \Rightarrow (u,\bar v_n) = \sum T_m(\bar v_m,\bar v_n) = T_n$
7) $(u)\;(4)-(6) \Rightarrow T_n' + \lambda_n T_n = (f,\bar v_m),\; T_n(0)=(\psi,\bar v_n)$
$\Rightarrow T_n(t)$ - одно диф-но
8) $u = \sum T_n(t)v_n(x)$
опр. ч.7) опр. ч.4)

79) перв. форм. Грина.
$$\int_D \bar v \Delta u\, dV = \oint_S \bar v\dfrac{\partial u}{\partial n}dS - \int \nabla v \nabla u\, dV$$
$u, \bar v$-зад. в обл. D непрерыв. вместе с первыми произв. в D и имеющ. непр. 2-ые пр. в D $(\bar v, v \in C^1(\bar D)\cap C^2(D))$
D с гладкой огр. замкнут. пов-ю.

80) Вторая ф. Грина
$$\int_D (\bar v \Delta u - u\Delta\bar v)\,dV = \oint_S\Big(\bar v\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial\bar v}{\partial n}\Big)dS$$

81) Третья ф. Грина
$u(M_0) = \dfrac{1}{4\pi}\oint_S\Big(\dfrac{1}{R_{MM_0}}\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{R_{MM_0}}\Big)dS - \dfrac{1}{4\pi}\int_D\dfrac{\Delta u}{R_{MM_0}}dV,\; M_0\in D$
$[u(MM_0)\le \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ - Р.Реш. ур. теплого] в 3-х мерном сл.

82) Прямер кр. з. для ур.Лап
$\begin{cases}\Delta u = 0 & в\; D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\big|_S = f(P)\big|_S\end{cases}$

83) Опр. гарм. ф-ий. Пример
ф-я $u(N)$, непрерывная в обл. D до второго порядка включительно и удв. в этой обл. ур-ю Лапласа, наз. гарм. в обл. D; пример $\bar v = 1/R_{MM_0}$, если M_0 вне D

84) Теор. Гаус. для гарм. ф.
Если u-гарм. в обл. D ф, то $\oint\partial u/\partial n\, dS = 0$, где S - любая гладкая замкнутая пов-ть, целиком леж в области D

85) Теорема о среднем для
(пусть $u(M)$-гарм. в обл. D
Тогда $u(M_0) = \dfrac{1}{4\pi a^2}\oint_{S_a} u(M)dS$
где S_a - сфера радиуса a с центром в т. M_0, целиком лежащая в обл. D

86) Гарм. ф - ∞ диф?
Гарм. ф-я в обл. D имеет внутри D производные всех порядков ← ф.3. Грина, т.к. при $M_0\in D$ пов. ф. сост. и их можно диф.

87) Принцип max. для г.ф.
Гарм. в обл. D ф-ф $u(M)$ непрерывная в данном об-ти D, достигает своих max и min зн. на гр.
S обл-ти D. (можно усилить:
ф.в. отличная от const и только на границе ...)

88) Принцип фавилизм
Если 2-е ф-ий $u(N)$ и $v(N)$ непрерывно в данной обл-ти D и : $u|_S \le v|_S$, то всюду внутри обл. $u(M)\le v|M$

89) Теор. о ед. реш. ви.кр.зад
(Дирихле) Задача Дирихле
не может иметь более одно
кл. реш. (кл. реш ви.-у.
Дирихле $\Delta u = f$ в D, $u|_S = u_0|_S$
наз. ф-я $u(N)$, непрер. в данн.
обл. $\bar D = D\cup S$, имеющ. непр.
вторые произв. в D, удв. ур.
в кл. смысла в обл. D и удв.
приложк. к гад. гран. зн. $u(P)$)
Док: $\exists u_1, u_2 \Rightarrow$ зад. для $\bar v = u_1-u_2 \Rightarrow v|_S = 0$; по пр. max
$v|_{MK0}$ и $v(M)\ge 0 \Rightarrow v(M)=0$

90) Теор. о ед. реш. ви.з (3 гр. уч
Пусть $h(P)\ge 0$ на S; при $\gcd$
$h\ne 0$. Третья кр. зад. $\Delta u = -F$ в D, $\partial u/\partial n + hu|_S = f$, где n - внеш. по отн. к D нормал. к пов. S, не может иметь более одного класс. реш. (кл. реш. III кр. зад. наз. $u(N)$, непр. вместе с первыми произв. в данн. обл. $\bar D = D\cup S$, имею. непр. вторые произв. в обл. D и удв. ур. 3-х кл. смысла в обл. D и зад. гр. усл. на S)
Док: в силу лин. док. что
$F \equiv 0, f \equiv 0 \Rightarrow u|_S = const$
нул. $\Rightarrow$ I гр. $\Rightarrow u(M)=const$
$=0 \Rightarrow$ одн. зад. имеет нулев. р.

91) Единств. для з. Неймана
кл. реш. не ед. и опр. с точн.
до произв. const, т.к. су
док-ва для III: $\operatorname{grad} u = 0$ в D
$u|_S = 0$, а для Неймана: grad
$u = 0 \Rightarrow u(N) = const,$ а const
не определяется $(\oint f(P)dS = 0)$

92) Опр. Регул. на ∞ ф-ии в
сл. 3-х пер-ах
Ф-я $u(N)$ трёх пер-ах $(N = (x,y,z))$, наз-ся регулярн. на ∞, если дост. далеко
от 0 $\Rightarrow |u|\le A/r;\; |\partial u/\partial x|\le A/r^2;\; |\partial u/\partial y|\le A/r^2;\; |\partial u/\partial z|\le A/r^2,$
где $A = const$

93) Рег. на ∞ в сл. 2-х пер.
Ф-у 2х пер-ах $u(x,y)$ наз-у регулярной на ∞, если она имеет конечный предел на ∞

94) Теор. о ед. реш. вишн.кр.
зад Дирихле в трёхмерн. сл.
Вишн. задача Дирихле не может иметь более одного кл. реш. регул. на ∞
Док: $\exists 2$ реш. u_1 и u_2; $\bar v = u_1-u_2$-реш. $\partial v = 0$ в D_e, $v|_S = 0$
$v|_\infty$ при реш. на $\infty \Rightarrow$ при $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_0$, $|v|_S = 0$ при $\partial v_1, max \Rightarrow v(M)=0$

95) Теор. о ед. р. вишн. зад. Дирихле
для ур. Лапл. в 2-мерн. сл.
Вишн. задача Дирихле на пл-ти не может иметь более одного клас. реш. регул. на ∞. Док: Рассм. одн. зад. $\Delta u = 0$ в D_e, $u|_\Gamma = 0$, $|u|\le N$ и покажем, что его имеет ед. нул. реш. методу м-ды

96) Единств. реш. ви.кр.зад
Неймана в двумерн. сл.?
зад. решим. не всегда, а если ей реш. ∃, то оно неединств.
$(\oint f(P)dl = 0$ - усл. разреш.)

97) -"- 3-х мерном сл.
Решение единств. (произв. 1 ф. гр. (как для ви.) $\bar v = 0$ на ∞

98) стр. ф. Грина ви. зад. Дир-
3-х мерном сл.
ф. $G(M,Q)$ наз-у ф. Грина
ви.зад. Дирихле для опр. Лапласа, если она удв. ур.
$\Delta G = 1/4\pi R_{MP} + \bar v$, где $\bar v$-гарм. всюду в D ф-и
2) $G(M,P)|_{P\in S} = 0$

99) -"- в 2-мерн случае
ф. Грина ви. задачи Дирихле во пл-ти, если 1) $G(M,Q) = (1/2\pi)\ln(1/R_{MQ}) + \bar v$, где $\bar v$-гарм. в D ф-и
2) $G(M,Q)|_\Gamma = 0$; Γ-гладк. контур, огр. ланш. обл. D

100) Грин ви. зад Неймана (3-х)
ф. $G(M,Q)$ наз-у ф-и Грина ви. вперёд задачи Неймана для Δ, если 1) $G(M,Q) = 1/4\pi R_{MQ} + \bar v$, где $\bar v$-гарм. в D ф-и 2) $\partial G/\partial n|_S = -1/S_0$, где S_0-площадь пов-ти S

101) Объём. потенциал. Св-ва
Интеграл $V(M) = \int\dfrac{\rho(Q)}{R_{QM}}dV_Q$
наз. об. пот.
1) Рассмотр. об. пот. как объём ф-и ⇒ при $\nabla \rho$ $V(M)$ явл. обобщ. реш. ур-и Пуассона $\Delta V = -4\pi\rho$. при δ не жел. укл. на ρ (если ρ-классич. ограничен. и S ф-и, то $V(M)$ непр. диф. ф. во всём пр-ве) если ρ-непр. вместе с S при некот. ρ-непр. вместе с S пусть. $V(M)$ свертка ρ и $1/\rho$

102) Теор. о равномер. сход. несобств. $\int$, зав. от пар-ра
Интеграл $V(M) = \int F(M,Q)f(Q)$
наз равномерно сходится в т. M_0, если для $\forall \varepsilon \geq 0$ $\exists \delta(\varepsilon)>0$, что $\int_{D(\varepsilon)}F(M,Q)f(Q)dV\le \varepsilon$ вып-ся для $\forall$ точки $M\in K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$ и для обл-ти $D(\varepsilon)\subset K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$, где $K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$-шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром M_0
∘ Интеграл $V(M) = \int\dots$ равн. сход. в т. M_0 есть непрер. ф-и в этой точке M_0

Столбец 1

103) Опр. поверхн. потенц. простого слоя

Потенц. простого слоя в 3-х мерном случае наз-ся интеграл вида $V(M) = \int_S \frac{\mu(P)}{R_{MP}} dS_P$, где S — искомая пов-ть, $M(P)$ — фо-и, зад. на пов-ти S, μ — плотность потенциала.

104) —"— двойного слоя

—"— $W(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MP}} dS_P$ где S — двусторонняя пов-ть пр. внешней нормали к пов-ти $S \in r$, P (в том сл. когда пов S недвижима, ... коэфф. ... слева) $\nu(P)$ — фо-и, зад. на S — плотн. или $W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} dS_P$ где ψ — угол между вн. норм. к пов-ти S в т.P и вектором PM.

105) Логарифм. пот. 2-го слоя

на пл-ти потенциал двойн. слоя (лог) $\Rightarrow W(M) = -\int_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P = \int_C \nu(P) \frac{\cos\psi}{R_{MP}} dl_P$, где n_P — внешн. нормаль к кривой C в т.P, ψ — угол между внутр. норм. в т.P и вектором PM.

106) Лог. пот. простого слоя

$V(M) = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P$

107) Пов-ть Ляпунова

пов-ть S наз-ся пов-тью Л. если: 1) В каждой точке пов. S ∃ определ. нормаль (или касательная плоскость) 2) ∃ такое $d>0$, что прямые, ∥ нормали в т. P пов. S, пересекают не более однократно часть пов-ти S, лежащ. внутри шара радиуса d с цен. в т. P; 3) угол $\gamma(M,P) = (n_M, n_P)$ между нормалями в т-ках P пов-ти S уд. усл. $\gamma(M,P) \le A R_{MP}^\delta$, где $A, \delta = const$, $A>0$, $0<\delta\le1$, при этом т. $M \in$ част. пов. S, находящ. внутри сферы радиуса d с центром в т. P.

108) Теор. о ∃ и непр. потенц. пр. сл.

потенциал простого слоя с огранич. непрерыв. плотностью, задан. на гладкой пов-ти, сущ. непр. и огр. во всём пр-ве и сущ. (т.е. сход. интегралы) при $M \in S$.

109) Теор. о ∃ пот. дв. слоя

потенциал двойного слоя $W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} dS_P$ с непр. и огр. плотностью $|\nu| \le$ на пов. S сущ., т.е. интегр. сход. ибо $\int$ при $M \in S$ и он ивл. непрерывной ф-ей на S (как ф-ия μ, только пов-ти).

110) Разрыв пот. прост. слоя при ... изм. пов (при перех)?

Нет, т.к. он непрерывен во всём пр-ве.

Столбец 2

111) 3-е потенц. дв. слоя с пост. пл-ю внутр. и вне пов-ти?

V_i — центры, W_e — снаружи
$W_i(M) = W^0(M) + 2\pi \bar\nu_0$; $W_e(M) = W^0(M) - 2\pi \bar\nu_0$ или так:
$\begin{cases} 4\pi\bar\nu_0, & M\in D \\ 2\pi\bar\nu_0, & M\in S \\ 0, & M\in D_e \end{cases}$ $(M \notin D+S)$

112) Скачок пот. 2-слоя при переходе через пов. пов.

$W_i(P) = W^0(P) + 2\pi\nu(P)$
$W_e(P) = W^0(P) - 2\pi\nu(P)$
$W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\nu(P)$

113) 2 соотн. ур. Фредгольма к кот. свод. вн. з. и внеш. дир. и нейман для ур. лап.

$\nu(P_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P + \frac{1}{2\pi} f(P_0)$
$\mu(P_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P - \frac{1}{2\pi} f(P_0)$
$P_0 \in S$ ↑ (с пр. для дир.)

114) —"— вн. з. Нейм. внеш. з. Д.

$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P$
$= \frac{1}{2\pi}\oint_C \left[\frac{d}{R_{PP_0}}\right] - f(P_0)\}$, $P_0 \in S$,
$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0)$, $P_0 \in S$

115) Т. о ∃ реш. вн. з. Д. для ур.

Внутренняя зад. Дирихле $\Delta u = f$ в D; имеет и притом единств. клас. р. при любой непр. ф-ии f.

116) Т. о ∃ реш. внеш. з. Нейм.

Внеш. зад. нейман: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ в D_e имеет и притом единств. реш-е при $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f$ ∀ ед. ∃ кл. реш-е ур. $\Delta u = 0$.

117) Т. о ∃ реш. вн. з. Нейман

вн. зад. Н.: $\Delta u = 0$ в D, $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f(P)$, $P \in S$, имеет ед. кл. реш. при непр. f, ∀де усл. $\oint_S f(P) dS = 0$.

118) Т. о ∃ реш. внеш. з. Дир.

вн. з. D имеет ед. кл. реш. при ∀ непр. f, $\Delta u = 0$ в D_e, $u|_S = f$, регулярна на ∞.

119) необх. усл. разреш. вн. зад. Нейм.

$\oint_S f(P) dS = 0$

120) Потенциал Робена?

$V(M) = \oint_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}} = 1 \quad \mu_0$
$\mu_0(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0$ — это есть потенциал, созд. зар. шариком на проводнике: пов., а его плотность есть поверхн. плотность зарядов, кот. устанавливается на этой пов-ти. ($\oint \mu_0 dS = $ емкость)

Столбец 3

121) Фунд. реш. ур-я Гельм-ца 2-х мерном сл.

при $c = -\chi^2 < 0 \to K_0(\chi R_{MM_0})$
$[K_0(\chi R_{MM_0}) \sim \ln \frac{1}{\chi R_{MM_0}}]$
при $c = k^2 > 0$ в огр. обл-ти $H_0^1(k R_{MM_0})$, $H_0^2(-//-)$, $N_0(k R_{MM_0})$
в неогр. обл. $\Rightarrow$ одна из ф.
$H_0^{1,2}(k R_{MM_0})$; $[K_0^{1,2} = \mp \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{\chi}$,
$N_0 \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\chi}$ при $\chi \to 0$; $H_0^{1,2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} e^{\pm i(\chi - \frac{\pi}{4})}$ при $\chi \to \infty]$

122) Фунд. реш. 3-х мерной сл.

при $c = k^2 > 0 \Rightarrow \frac{\exp(\pm ik R_{MM_0})}{R_{MM_0}}$
в огр. обл при $c = -\chi^2 < 0 \Rightarrow \frac{\exp(\pm \chi R_{MM_0})}{R_{MM_0}}$
$\frac{\exp(\pm \chi r)}{r}$ и $\frac{\cos\chi r}{r}$ — эквивалентно
где $r = R_{MM_0}$

123) Объёмн. пот. для ур. Гельм.

$J(M) = \int_D \rho(Q) \frac{e^{ik R_{MQ}}}{R_{MQ}} dV_Q$
[объёмн. пот. $\rho(M)$ с непр. диф-ю $\rho(Q)$ ивл. дважды диф. ф-ей и уд. ур.: $\Delta J + k^2 J = -4\pi\rho(M)$ $M \in D$]

124) Потенциал простого слоя

$V(M) = \int_S \mu(P) \frac{e^{ik R_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$ при $M \notin S$ пот. $V(M)$ уд. ур.: $\Delta V + k^2 V = 0$

125) Потенц. двойного слоя

$W(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ik R_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$
при $M \notin S \Rightarrow \Delta W + k^2 W = 0$

126) Усл-я выполн. принц. max

$\Delta u + cu = 0$ т. при $c \le 0$
[при $c > 0$ например: в круге $0 \le r < a$ реш. ур. $\Delta u + k^2 u = 0$ ивл. $J_0(kr)$, имеющая max при $r = 0$ (в центре кр.)]

127) Единств. реш. вн. кр. з.

при $\Delta u + cu = 0$ при $c \le 0$ — ед. реш.! * задача $\Delta u - \chi^2 u = 0$ в D, $u|_S = f$ не м. иметь более одного класс. реш., * задача $\Delta u - \chi^2 u = 0$ в D, $\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = f$ при $h(P) \ge 0$ не м. иметь более одн. кл. реш. (при $c > 0$ соб. зн. с матрицей $\Delta u - k^2 u$ могут совпадать с ...)

128) Общ. н. кр. задача для ур. параболич. типа

∃ $\delta_T + D \times (0,T]; f(M,t): M\in D$, $t\in(0,T]$; $\delta_T = \bar D\times[0,T] \equiv \{f(M,t), M\in D, t\in[0,T]\}$; $\bar D = D \cup S$; $\rho(M)u_t = \text{div}(k(M)\text{grad}u) + f(M,t)$; $u(M,0) = \varphi(M)$, $[u_t]|_S \equiv 0$, $M \in D$; $[P]\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t)$, $P\in S$, $t\in[0,\infty]$, где $\rho(M) = \bar\rho(M)$, $\rho(N)>0$, $\bar\rho(N)$ — плотность, $k(N)>0$ — коэф. теплопр., $\alpha(P) \ge 0$, $\beta(P) \ge 0$: $\alpha(P) + \beta(P) > 0$.

Столбец 4

129) Опр. клас. реш. нач.-кр. зад. парабол. типа

клас. реш. н-к з. (см №128) наз-ся ф-ция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми произв. по коорд. в замкн. цилиндре, имеющая непрерыв. при δ_T и лишь. непрерыв. пр. первого порядка по t и второго порядка по M в откр. цилиндре δ_T, удовл. в D во вн. ур-ю (L) нач. усл., гр. усл. [необх. усл.: $\alpha(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t)$, $P\in S$]

130) Принцип max для парабол.

$J(M,t)$ непрерывна в замкн. цилиндре $\overline{\delta_T} = \{M\in D, 0\le t\le T\}$ и удовл. в откр. цилиндре δ_T однородному ур-ю $\rho u_t = \text{div}(k\text{grad}u)$, где $\rho(M)$, $k(M) > 0$, $\rho(M) \ge 0$. Тогда $u(M,t)$ может достигать своих макс. max и минимал. min зн-ий только лишь при $t = 0$ либо на пов-ти S граничную обл-ти.

131) Принцип сравнения ①

если 2 реш-я ур: $\rho u_t = \text{div}(k(M)\text{grad}u) + f(M,t)$, $u(M,t)$ непр. в замкн. цилиндре $\overline{\delta_T}$, уд. усл.: $u_1(M,0) \ge u_2(M,0)$, $M\in D$ и $u_1(P,t) \ge u_2(P,t)$, $P\in S$, $t\in[0,T]$, то $u_1(N,t) \ge u_2(N,t)$, $(M,t)\in \overline{\delta_T}$; ② Если 2 кл-а реш-я u_1, u_2 непрер. в замкн. цилиндре δ_T, уд. усл. $|u_1(M,0) - u_2(M,0)| \le \varepsilon$, $M\in D$ и $|u_1(P,t) - u_2(P,t)| \le \varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$, то $|u_1(N,t) - u_2(M,t)| \le \varepsilon$, $(M,t)\in\overline{\delta_T}$

132) Т. о ед. реш. вн. кр. з. для параб.

Задача $\rho u_t = \text{div}(k\text{grad}u) + f$, $u(M,t)\in \overline{\delta_T}$; $u(M,0) = \varphi(M)$, $M\in D$, $u(P,t) = \mu(P,t)$, $P\in S$, $t\in[0,T]$ может иметь т. одно кл. реш. [показ. усл. для кл. реш. $\varphi(P)$; $u(P,0) = \varphi(P)$, $P\in S$]

133) Теор. об устойч. —"—

Клас. реш. зад. (см. №132) устойчиво по нач. и гранич. в равномерной норме.

134) Теор. о ∃ для ур. Фурье однород. ур. тепл. на отрезке

∃ ф-и $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,l]$, имеет кусочно-непр. производную и уд. усл. $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда кл. реш. зад.: $u_t = a^2 u_{xx}$, $0<x<l$; $0<t<\infty$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $0\le x\le l$; $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $0 \le t < \infty$, предст. рядом $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty c_n \exp\left(-\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \sin \frac{\pi n x}{l}$, где $c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l}x\,dx$, $n=1,...$

135) Ф. Грина на отр. при Дир.

$G(M,Q,t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \bar v_n(M) \bar v_n(Q)$ при $t>0$ и $\equiv 0$ при $t<0$ (функ. источника).

136) Нач. зад. на ∞ прямой

$\Omega = \mathbb{R}^1\times[0,T]$ и $\bar\Pi = \mathbb{R}^1\times[0,T]$; $\mathbb{R}^1 - \infty$ прямая $\Rightarrow u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $(x,t)\in\Omega$; $u(x,0) = \varphi(x)$; $x\in\mathbb{R}^1$

137) Т. о ед. реш. нач. зад. на ∞ пр.
задачи $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in$
$\in \Omega; \ u(x,0) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^1$ (где
$\Omega = \mathbb{R}^1 \times (0,T), \ \overline{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0,T], \ \mathbb{R}^1$-∞ пр)
может иметь т. одно клас.
реш. огр. в $\overline{\Omega}$ (клас. реш.
зад. наз. $u(x,t)$ опред. и непр.
вместе со вторым произв.
по x и перв. пр. по t в Ω,
уд. ур-ю u) в этой обл.
непр. по t в $\overline{\Omega}$ и уд. нач. усл.)
Док: ∃ u_1, u_2 ⟹ от противно

**138) Т. о ∃ кл. реш. зад. коши
на ∞ пр.** Если $\varphi(x)$-
непр. и огр. на ∞ прям. е'
для что $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)$
$\varphi(\xi)d\xi$, где $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp$
$[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}]$ опред. при $(x,t) \in \overline{\Omega}$
клас. реш. задачи коши
(см. № 137)

139) Фунд. реш. тепр. на ∞ пр.
$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}) -$
фунд. реш. в одномерн. сл.

140) Основ. св-ва фунд. реш.
1) $G(x,\xi,t)$ опред. при $t > 0$ и
положительна 2) удв. ур.
теплопр. при $t > 0$
$G_t(x,\xi,t) = a^2 G_{xx}(x,\xi,t), (x,t) \in$
$\xi \in \mathbb{R}^1$ 3) $G(x,\xi,0) = \delta(x,\xi)$
4) $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)dx = 1$ ⟹ с фрод. т.
⟹ G - температура в т. x в
момент t 5) ▵ величина
площади подграфика = кол-
во тепла, перед. к-ю теплом
в нач. момент. ... 6) G симметр.
по x и ξ ⟹ (источник в точке
может поместить источники)

141) Физ. смысл. фунд. реш.
G - ф-я источника ⟹
температура в т. x в момент
времени t, если δ-наг. м.
$t = 0$ в т. ξ мгновенно выд.
кол. кол-во тепла $q > 0$
(кол-во тепл. в-ва, иол на ∞ пр.
в послед. момент не улел.)

142) Парадокс ∞ темпер.
... ⟹ на ∞ скор.
$t > 0$ и на $t < 0$ ⟹ противоречит кл.
скорости тепла ⟹ уч-ва
недостат. физ. модели (надо учит.
напр. иолек. стр-ру вещ-ва)

143) Н. кр. задачи на 1/2 ∞ пр.
$\Omega_1 = \{0 < x < \infty, -\infty < t < \infty\}$
$\Omega_2 = \{0 < x < \infty, 0 < t < \infty\}$
$\Omega_3 = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty\}$
$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega_1$
$u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^1 +$
$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = \mu(t), t \in [0,\infty)$
где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ (кл. реш. ;
$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t)$)

144) метод продолжения
$u_t = a^2 u_{xx}, x > 0, \ u|_{t=0} =$
$= \varphi(x), x > 0; \ \partial_x^2 u / \partial x^2 |_{x=0}$
продолжаем $\varphi(x)$ задачи. при
$x \geq 0$ на всю действ. ось x
построить $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при
$x \geq 0; \ \sum_k a_k \Phi^{(k)}|_x = -\sum_k \frac{a_k \psi}{s-x}|_s$
при $x \leq 0$ и непрерывн.
произв. до N-го порядка ⟹
задача на ∞ прямой
⟹ Дир: $a_0 = 1, a_1 = 0$ ⟹ $\varphi(x)$-иг.
⟹ продолж. нечётным обр-
иию: $a_1 = 1, a_0 = 0$ ⟹ $\varphi'(x)$-иг.
иечётн. ⟹ $\Phi(x)$-чётная ⟹
$\psi(x)$ прод. чётн. обр.

145) Ф-ла Грина для Дирихле
$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)$
$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}]$

146) Ф-ла Грина для Нейм.
$G_2 = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$
$[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}]$

**147) Общ. вид. реш. неодн. ур.
на 1/2 ∞ пр.** для одн. гр. у.с.
$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Phi(\xi)d\xi$
где $\Phi(x)$ опр. на ∞ прям.
имее сущ. произв. до N-го пр.
и $\sum_{k=1}^N a_k \Phi^{(k)}(x)$ нечётна отн. нач.

148) Н-к. задача тепл. в простр.
$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), (M,t) \in \Omega_2$
$u(M,0) = \varphi(M), M \in \mathbb{R}^3 +$
$\Omega = 3-х иерн. \Delta, \ a \ \Omega_2 = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$
$= f(M,t); M \in \mathbb{R}^3, t \in (0,T);$
$\overline{\Omega}_3 = \mathbb{R}^3 \times [0,T], клас.$

**149) Тер. о един. реш. задачи коши
для тепл. в пр-ве** Если $\varphi(M)$ непрер. и огран.
в всем пр-ве $\mathbb{R}^3$, то
$u(M,t) = \int G(M,\Theta,t) \varphi(\Theta)d\omega$
опред. при $(M,t) \in \Omega_3$ клас.
реш. зад. (см. 148) при
$f(M,t) \equiv 0$ $[G(M,\Theta,t) = (\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}})^3$
$\exp(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2t})]$

150) Теор. о ед. реш. зад. коши
если в зад. к. $u_t = a^2 \Delta u$
$(M,t) \in \Omega_2; \ u(M,0) = \varphi(M), M \in$
нач. ф-и $\varphi(M)$ представл.
в виде $\varphi(M) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$
то реш. иел. $u(M,t) = u_1 u_2 u_3$
$u_1(x,t), u_2(z,t)$ где u_1, u_2, u_3
- реш. одномерн. задач

**151) Общ. вид. реш. одн.
ур-я на 1/2 ∞ прям.** Дир.
$u_t = a^2 u_{xx}, (x,t) \in \Omega_2$
$u(x,0) = 0, x \in \mathbb{R}^1 +$
$u(0,t) = \mu(t), t \geq 0, \mu(0) = 0$ [$u(x,t) \leq c$
$(x,t) \in \overline{\Omega}_1$
$\Rightarrow u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$

152) принцип Дюамеля
Если ∃ д-ча с гр. усл. вида
$u(0,t) = \mu(t)$ ($t > 0$), нулевой
нач. и доп. гран. усл., то
реш. этой задачи м.б.
предст. в виде: $u(x,t) =$
$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x,t-\tau) \mu(\tau)d\tau$, где
$W(x,t)$ - реш. аналогично
краев. зад. при $W(0,t) = 1$

153) Общ. кр-н. зад. гиперб. т.
D-задача огр. обл. с
кусочно-глад. гран. S, доп.
прим. ф-лу Грина. Опред. цил.
цилиндр $Q_T = D \times [0,T]$
1) $\rho u_{tt} = div(k \cdot grad u) - qu + f$
$(M,t) \in Q_T; \ u(M,0) = \varphi(M),$
$u_t(M,0) = \psi(M), M \in D; \ u|_P$)
$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P) u = \mu(P,t), P \in S; t \in [0,T];$
$|\alpha| + |\beta| \neq 0$

154) клас. реш. для гип. ур.
клас. реш. н-к. з. ∃ нач. $u(M,t)$
непрер. вместе с первыми
произв. в рамках цилиндре
для имеющ. непрер. произв.
второго порядка в открт.
цилиндре и уд. ур-ю, нач. и гран. усл.
(несоб. усл.: $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_{P \in S}$
$\mu(P,0)|_{P \in S}; \ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_{P \in S} = \mu_t$
$(P,0)|_{P \in S}$

155) Т. о ед. реш. общ. н-к зад.
задача (см. 153) м. иметь т. 1
реш. клас. Док: от противн.
и с пом. ф. Грина.

**156) Т. о ∃ кл. реш. для стр в
сл. Дирихле**
$u_{tt} = a^2 u_{xx}, (x,t) \in \Omega = (0,1) \times (0,\infty)$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in [0,l]$
$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \in [0,\infty)$
Пусть нач. ф-ии задачи
удв. условия: $\varphi(x)$ дважды
непр. дифф. на $[0,l]$ имеет
на ней кусочно непр. трет.
произв., $\psi(x)$ непрер. диф.
на $[0,l]$ и имеет на ней
кус.-непр. 2-ую произв.
$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0;$
$\psi(0) = \psi(l) = 0$ ⟹ тогда ∃ клас.
реш., представ. формулой
$u(x,t) = \sum_n (a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t)$
$\sin \sqrt{\lambda_n} x$, где $\omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \lambda_n \in [\pi]$
$a_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi$
$b_n = \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi$

157) Опр. ф. мгновен. тог. имп. (Грина)
$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi n a} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin$
$\frac{\pi n \xi}{l} \sin \omega_n t; \ \omega_n = \frac{\pi a n}{l}$

158) Нач. зад. на ∞ прямой
$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}$
где $a^2 = const, \ \Omega = \mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$
$\overline{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$

159) Ф-ла Даламбера
$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}$
$\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz$ (← реш. для
одн. нач. зад.)

160) метод распр. волн
сводим ур-е к канонич.
виду $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ ⟹ получ.
⟹ $yp-e: \ dx - a dt = 0 \lor dx + a dt$
$= 0$ интеграл. кот. явл. пр.
лис. ⟹ вводим нов. пер.
$\xi = x + at, \eta = x - at$ ⟹ ур-е
преобр. ⟹ $u_{\xi \eta} = 0$ (или $u_{\eta \xi} =$
$f^*(\eta)$) ⟹ $u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f^*(\xi)$
$= f_1(\xi) + f_2(\eta) \Rightarrow u = f_1 + f_2$
⟹ аналогично ... для огр. случ.

161) Т. о ∃ и ед. кл. р для одн. з.к.
∃ $\varphi(x)$ дважды диф. (непрер.)
а $\psi(x)$ непрер. диф. на ∞
прямой $\mathbb{R}^1$ ⟹ клас. реш.
задачи $u_{tt} = a^2 u_{xx} (x,t) \in \Omega$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}$
существует, единственно
и опред. ф. Даламбера (№159)

162) Теор. об устойчивости р. з. к
Пусть нач. ф-ии $\varphi_1(x), \psi_1(x)$
s-1,2 двух задач коши уд. усл.
$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, x \in \mathbb{R}^1$ и
$\int |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz \leq \varepsilon (b-a)$ для
∀ конечн. a и b ($a < b$) для
этих задач при $t \in [0,T]$
$\Rightarrow |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon (1+T)$
$(x,t) \in \overline{\Omega}$

163) Характерист. ▵ фрд. пл.
$u = f_1(x - at) + f_2(x + at),$
$x - at = c_1, u x + at = c_2, ∃ f_1(x)$
на (x_1, x_2) где $x - at = x_0 - at_0 и x + at =$
x_2 ⟹ ... интерпр.
правовед. д.
аналогично для левой ⟹
выбер. $M(x_0, t_0)$ и провед.
хар-ки $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at =$
$x_0 + at_0$ ⟹ $u(M) = f_1(x_0 - at_0)$
$+ f_2(x_0 + at_0)$ ⟹ u-е в
$P(x_0 - at_0 0) Q(x_0 + at_0 0)$ м. опред.
знач. t, и $t \in$ в Pu в
⟹ u ф-ла Дал. ⟹ значен.
от M в мом. t зависит
т. от Pu Q и от скор.
скорости на стороне PQ
⟹ $u(M) = \frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_Q^P \psi(z)dz$
⟹ нач. дан. $\varphi(x) u \psi(x)$ зад.
вне PQ на оказ. вл. на $u(x_0 t_0)$

164) метод интегрир. на фур.
п. $\ni$ реш-е задачи
$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ (x,t) \in \bar{\Omega}$
$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), x \in \Omega$
$\Omega = \mathbb{R}^1 \times (0,\infty), \ \bar{\Omega} = \mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$
построив хар. Ω и проинтег.
его по нему ур-е (1) х на 1/а
применив ф-лу грина
$\ni$ реш-е задачи

165) Ф-ла для неодн. ур. к на ∞
$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$

166) теор. о сущ. и ед. клас. р.
Пусть $f(x,t)$ непрер. диф.
в обл. Ω. $f(x,t) \in C^1(\Omega)$. Тогда
клас. реш. задачи $u_{tt} =$
$a^2 u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$
$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in \mathbb{R}^1$
сущ., единств и опред. ф-р.
(см. № 165)

167) метод продолж. на 1/2 со
для одн. ур. уч. Дир. и нейм.
Для Дирихле: ф-и $\varphi(x), \psi(x)$
продолж. нечетным обр. на
всю Ω прямую $\Rightarrow u(x,t) =$
$\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$
(аналог. для ψ)
Для нейман.: $\varphi(x)$ и $\psi(x)$
продолж. четным обр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2}$
$0 \leq t \leq \frac{x}{a}, x > 0$
...

168) Р-е для одн. ур-я вол
на 1/2 со в сл. одн. нач и неодн
гран. Дир. Т.к. Бернулли:
т. краевой решения, то реш.
в виде $u(x,t) = f(x-at)$
т.к. $u(x,t) = f(x) = 0$ и $u_t(x,0) = -af'$
$= 0 \Rightarrow u(0,t) = f(-at) = \mu(t)$
$\Rightarrow f(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi > 0 \\ \mu(-\frac{\xi}{a}) & \xi < 0 \end{cases}$
и $\xi = x - at \Rightarrow$
$u(x,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{x}{a} \\ \mu(t - \frac{x}{a}) & t > \frac{x}{a} \end{cases}$

169) з-ча коши для др. $u = b$ пр. ве
$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), (M,t) \in \Omega_3$
$= \mathbb{R}^3 \times (0,T], \ u(M,0) = \varphi(M)$
$u_t(M,0) = \psi(M), M \in \mathbb{R}^3$

170) ф-ла кирхгофа
$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S}\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n_P}(P,t_0$
$-\frac{R}{a}) - u(P,t_0 - \frac{R}{a})\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$
$(P, t_0 - \frac{R}{a})\frac{\partial R}{\partial n_P}ds_P + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{D}\frac{1}{R_{NM}}$
$f(N, t_0 - \frac{R_{NM}}{a})dV_N; \ R \subset R_{MP}$

171) ф-ла Пуассона, вариант
р-ие коши для 3-х м. пр-ве
$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi(P)}{R_{MP}}ds_P$
$+ \int\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi(P)}{R_{MP}}ds_P] (S_{at}^M$ - сфера
рад. at с центром в т. M)

172) метод спуска - метод,
раскл.: в получении ф-лы
реш-е с большим числом
пространств. переменных
ф-лы реш-я с меньшим
числом простр. пер-ых (при
меним не только к ур. кол.
переходим от интегр. по
сфере к $\int$ по проекции
на плоскость, т.е. по кругу
рад. at или на прямую)

173) ф-ла пуассона для 2-мер.
$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{u_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2}}$
$\overline{-(y-\eta)^2}} + \int\limits_{u_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}]$
$+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{u_{a\tau}^M}\frac{f(\xi,\eta,t-\tau)}{\sqrt{(a\tau)^2 - (x-\xi)^2}}$
$\overline{-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta$, u_{at}^M - круг рад.
at с центром в т. M.