① $L[u]=0 \quad x\in(a,b)$

$$L[u]=\big(k(x)u'(x)\big)'-q(x)u(x) \qquad q(x)\in C[a,b]$$

1) $k(x)>0$ при $x\in(a,b)$ (3) — k имеет в т. a нуль 1ого порядка

2) $k(x)=(x-a)\varphi(x)$ (4) — $\varphi(x)$ — непр на $[a,b]$, $\varphi(a)\neq 0$

<u>Лемма</u> $\exists\, u_1, u_2$ — 2 лин незав реш ур-ия $L[u]=0$, $k(x)$ удовл усл (3), (4), тогда если $u_1(x)$ огр в т $x=a$ решение, имеющ вид $u_1(x)=(x-a)^n v(x)$, $n\geq 0$ (5), $v(x)\in C[a,b]$, $v(a)\neq 0$, то $u_2(x)$ неогр при $x\to a$.

---

② $$\underbrace{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{дивергентный член}}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

Ур-ие Бесселя (Ур-ие цилиндрических ф-ций) (Ос. точка ур-ия Бесселя $x=0$)

<u>ФСР</u>: $J_\nu, J_{-\nu}(x)\ (\nu\neq n)$ $\quad H_\nu^{(1,2)}(x),\ N_\nu(x)$

$$H_\nu^{(1,2)}(x)=J_\nu(x)\pm iN_\nu(x)$$

③ $\forall$ ненулевое реш ур-ия Бесселя — цил ф-я

⑤ $$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$ J_ν — частное реш ур-я Бесселя.

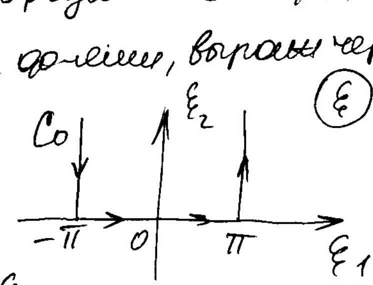
⑥ $$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \qquad \Gamma(k+1)=k\Gamma(k)=\ldots=k!$$

⑦ $$J_{\frac12}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac12}}{\underbrace{\Gamma(k+1)}_{k!}\Gamma\left(k+\frac32\right)}\ ; \qquad J_{-\frac12}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac12}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac12\right)}$$

$$J_{n+\frac12}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(P_n\left(\tfrac1x\right)\sin\left(x-\tfrac{\pi n}{2}\right)+Q_n\left(\tfrac1x\right)\cos\left(x-\tfrac{\pi n}{2}\right)\right)$$

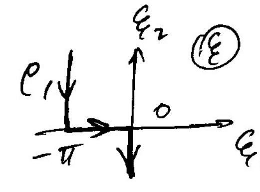
P_n, Q_n — полиномы степени $\leq n$ отн-но аргумента $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=1$

Цил ф-ции полуцелого порядка явл. элем. ф-циями, выраж через эл-ные



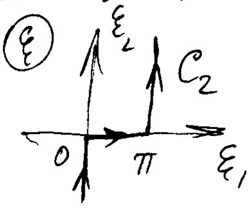
⑧ $$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi$$

⑨ <u>Опр</u> $$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi$$



Ф-я Ханкеля 1ого рода порядка ν

Опр $H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\, d\xi$ Ф-я Ханкеля 2ого рода порядка ν



(10) $H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x)$; $H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x)$

(11) $J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right)$

(12) Опр $N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right)$ Ф-я Неймана

(13) $N_\nu(x) = \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = -\operatorname{Im} H_\nu^{(2)}(x)$

$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm i N_\nu(x)$

(14) Асимптотика при $x \to \infty$

$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$

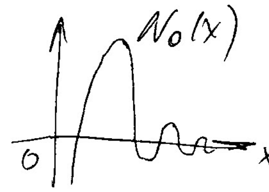
(17) $J_0(0) = 1$ $J_0'(0) = 0$ $\left(J_0'(0) = -\underbrace{J_1(0)}_{=0}\right)$

(Следствие интегр. ф-лы)

$J_1(x)$ имеет в т $x=0$ - ноль 1ого порядка

$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln x + \dots$

$N_1(x)$ имеет в т $x=0$ полюс 1ого порядка



(19) Теорема Стеклова

$\forall f(r) \in C^{(2)}[0, r_0]$ и удовл гр усл-ю $\left(\alpha \frac{df(r)}{dr} + \beta f(r)\right)\Big|_{r=r_0} = 0$ разл в абсолютно равномерно сходящийся ряд по с.ф-ям краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 & r \in (0, r_0) \\ |R(0)| < \infty \\ \left(\alpha \frac{d}{dr}R(r) + \beta R(r)\right)\Big|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

$\mu^{(n)} = \sqrt{\lambda^{(n)}}\, r_0$

$\left\|J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\right\|^2 = \int\limits_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr$

$f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)$ $f_k = \frac{1}{\left\|J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\right\|^2} \int\limits_0^{r_0} f(r) J_n(\,)\, r\, dr$

(20) Задача Штурма-Лиувилля для круга.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & (x,y) \in K_{r_0} \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_C = 0 & u \not\equiv 0 \end{cases}$$

Введем полярную с-му координат с началом в центре круга K_{r_0}:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Phi(\varphi)\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \lambda R\Phi = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu \Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \nu\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \Rightarrow \nu = n^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{т.к. } \nu = n^2, \text{ то}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (\lambda r^2 - n^2)R = 0 \qquad r \in (0, r_0)$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0 \\ |R(0)| < \infty \\ \left(\alpha \frac{d}{dr}R(r) + \beta R(r)\right)\Big|_{r=r_0} = 0 \end{cases} \qquad x = \sqrt{\lambda}\, r \Rightarrow x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Ур-ие Бесселя

$$R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda^{(n)}}\, r) + \underbrace{C_2 N_n(\sqrt{\lambda^{(n)}}\, r)}_{\to 0} \qquad n\text{-номер ур-я}$$

(услов-ти в 0.)

Хар-кое ур-ие для опр-я соб зн. $\alpha\sqrt{\lambda^{(n)}}\, J_n'(\sqrt{\lambda^{(n)}} r_0) + \beta J_n(\sqrt{\lambda^{(n)}} r_0) = 0$

Корень хар-кого ур-ия $\mu^{(n)} = \sqrt{\lambda^{(n)}}\, r_0$

$$\alpha\frac{\mu^{(n)}}{r_0} J_n'(\mu^{(n)}) + \beta J_n(\mu^{(n)}) = 0 \qquad \text{Счетное мн-во вещ}$$

корней $\mu_k^{(n)}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$

номер корня.

$R_k^{(n)}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)$

с. ф-ции круга: $u_{kn}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$u_{kn}(r,\varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}$ $\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$

$\|u_{kn}\|^2 = \|J_n\|^2 \underbrace{\|\Phi_n\|^2}_{=1}$

$$\|J_n\|^2 = \int_0^{r_0} J_n^2(\sqrt{\lambda} r) r\, dr = \frac{1}{\lambda}\int_0^{r_0\sqrt{\lambda}} J_n^2(x)\, x\, dx =$$

$$= \frac{r_0^2}{2}\left(J_n'^2(r_0\sqrt{\lambda}) + \left(1 - \frac{n^2}{r_0^2\lambda}\right) J_n^2(r_0\sqrt{\lambda})\right)$$

I Задача Дирихле $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $J_n(\mu) = 0$ $\lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$

$$\Rightarrow \|J_n\|_1^2 = \frac{r_0^2}{2} J_n'^2(\mu_k^{(n)})$$

II Задача Неймана $\alpha = 1$ $\beta = 0$

$\mu J_n'(\mu) = 0$ $\lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$

$$\|J_n\|_2^2 = \frac{r_0^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{(\mu_k^{(n)})^2}\right) J_n^2(\mu_k^{(n)})$$

III 3-я краевая задача

$$\|J_n\|_3^2 = \frac{r_0^2}{2}\left(1 + \frac{(\mu_k^{(n)})^2 - n^2}{r_0^2 h^2}\right) J_n'^2(\mu_k^{(n)})$$

---

(25) $$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, i^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^k\, i^{2k}}^{=1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

$x \Rightarrow ix \Rightarrow -x^2y'' + ixy' + (x^2+n^2)y = 0$

(26) Опр Ф-я Инфельда: $$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = J_\nu\, i^{-\nu}$$

(27) $I_{-n}(x) = I_n(x)$

(28) $x \to \infty$ $$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + O(x^{-\frac{3}{2}})\right)$$

(29) Ф-я Макдональда:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

(25) $$\boxed{y''+\frac{1}{x}y'-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0}$$

Ур-ие для цил ф-й мнимого аргумента

(30) $x\to\infty$

$$K_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$K_\nu(x)=\begin{cases}\nu=0 \text{ при } x=0 \quad K_0(x)=I_0(x)\ln\frac{2}{x}+\ldots\\ \nu\neq 0 \quad x=0 - \text{полюс } \nu\text{-го порядка}\end{cases}$$

(31) Опр Система полиномов всех степеней $\{p_n(x)\}$, зад на (с возр $-\infty$, в возр $+\infty$) $x\in[a,b]$ наз с-мой классич ортог полиномов, если они ортог на $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, удовл на (a,b) ур-ию Пирсона:

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x))=\tau(x)\rho(x) \qquad x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b=0 \quad m=0,1,\ldots \Rightarrow A,B.$$

$$\tau(x)=Ax+B$$

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & a\neq-\infty;\ b\neq\infty\\ x-a & a\neq\infty\ b=\infty\\ b-x & a=-\infty\ b\neq\infty\\ 1 & a=-\infty\ b=\infty\end{cases}$$

(32) Теорема о нулях:

КОП $p^n(x)$ имеют n простых вещ нулей, располож строго внутри $[a,b]$

(33) С-ма производных КОП явл с-мой КОП, но ортог с другим весом

$$\rho_1=\sigma(x)\rho(x)$$

$$\int_a^b p_n'(x)p_m'(x)\rho_1(x)dx \quad n\neq m$$

Полином $p_n^{(m)}(x)$ явл КОП и ортог с весом $\rho_m(x)=\sigma^m(x)\rho(x)$ $\quad \rho_0(x)=\rho(x)$

(34) $$p_n(x)=\frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n(x)\rho(x)) \qquad p_n^{(n)}(x)=n!a_n$$

$$C_n=\frac{a_n n!}{A_{nn}} \qquad A_{nm}=(-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}$$

Обобщ ф-ла Родрига.

(35) Задача Шт-Л для КОП: $$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\rho(x)y=0 & x\in(a,b)\\ |y(a)|<\infty\quad |y(b)|<\infty & (a,b - \text{ос т.})\end{cases}$$

$$\lambda_n=-n\left(\frac{n-1}{2}\sigma''+\tau'\right)$$

$\{p_n\}$ - с-ма замкн и полная $\Rightarrow \lambda_n$ - исчерп все с/зн

Дейл ш-мой производной:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho_m(x)\frac{d\,y_n^{(m)}(x)}{dx}\right)+\lambda_{n,m}\rho_m(x)\,y_n^{(m)}(x)=0$$

$$\lambda_{n,m}=-(n-m)\left(\frac{n-m-1}{2}\sigma''+\tau_m'\right) \qquad \lambda_{n,0}\equiv\lambda_n \qquad \rho_0(x)=\rho(x)$$
$$\tau_0(x)=\tau(x)$$

Ур-ие дейл КОП:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{d\,y_n(x)}{dx}\right)}_{\text{дивергентный член}}+\lambda_n\rho(x)\,y_n(x)=0 \qquad a,b\text{-ое т урие.}$$

$$\lambda_n=-n\left(\frac{n-1}{2}\sigma''+\tau'\right)$$

(38) Опр КОП, опр на $(-1,1)$ и ортог на нем с весом

$$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad \alpha=-\frac{A+B}{2}-1 \qquad \sigma=1-x^2$$
$$\beta=\frac{B-A}{2}-1$$

наз полиномами Якоби. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

(39) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\underbrace{\frac{(-1)^n}{2^n n!}}_{C_n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right)$$

(40)

Полиномы Лежандра:

$$P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x) \qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \qquad \sigma(x)=1-x^2$$
$$\rho(x)=1$$
$$\tau=\sigma'(x)=-2x$$

(41) $$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0 & x\in(-1,1)\\ |y(\pm1)|<\infty\end{cases}$$

(42) $$\lambda_n=-n\left(\frac{n-1}{2}\sigma''+\tau'\right)=+n(n+1)$$

(43) $$\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}$$

$$\sigma(x)=x \qquad \tau(x)=-x+1$$

(44) Полиномы Лагерра:

КОП, зад на $(0,+\infty)$ и ортог на нем с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ наз обобщ ($\alpha\neq0$) полиномами Лагерра.

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$

(45) Полиномы Эрмита: КОП, зад на $(-\infty,+\infty)$ и орг на нем с $\rho(x)=e^{-x^2}$, наз полиномами Эрмита. $\sigma(x)=1$ $\tau(x)=-2x$

$$\|H_n(x)\|^2=2^n n!\sqrt{\pi} \qquad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

(46) Произв ф-я для КОП — ф-ие вида:

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{C_n n!}z^n$$

$P_n^{(n)}(x)=n!\,a_n$

$C_n=\frac{a_n n!}{A_{nn}}$.

$A_{nm}=(-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}[\lambda_{nk}$

$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-\sigma'(t_0)z}$$

t_0 — корень ур-ия: $t-x-\sigma(t)z=0$

(47) $$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

(48) Система полиномов Лежандра полна на $[-1,1]$ и замкнута

С-ма пол Леж исчерп все соб ф-ции краевой зад Ш-Л.

(49) Теорема Стеклова (разложимости)

$\forall f(x)\in C^{(2)}[-1;1]$ разл в абс и равн сх ряд по полиномам Лежандра:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n P_n(x)$$

коэфф Фурье ф-ции $f(x)$ → $$f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

(50) Присоед ф-ции Лежандра — ф-ции вида:

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\big(P_n(x)\big) \qquad m\le n$$

пол Леж

(51) $$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(m)}(x)\right)+\left(\lambda_n-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)}(x)=0\\ |P_n^{(m)}(\pm1)|<\infty\end{cases}$$

Если $m>n$ $P_n^{(m)}=0$

$x\in(-1;1)$

(52) $\lambda_n=n(n+1)$

Лемма $\forall f(x)\in C[-1;1]$ можно постр $\varphi(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\tilde\varphi(x)$, $\tilde\varphi\in C[-1;1]$, что $\varphi(x)$ аппроксимир $f(x)$ на $[-1,1]$ равномерн.

(53) $$\|P_n^{(m)}(x)\|=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

(54) С-ма присоед ф-й Лежандра замкнута в $L_2[-1,1]$

Т.к. $\int_{-1}^{1}P_{n_1}^{(m)}(x)P_{n_2}^{(m)}(x)\,dx=0$ $n_1\ne n_2$ ⇒ полнота с-мы.

$(\rho=1)$

55 Теорема Стеклова.

$\forall f(x) \in C^{(2)}[-1;1]$ $f(\pm 1)=0$ разл в абс и равн сх ряд по присоед ф-ям Леж $(m \neq 0)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x) \qquad f_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x)dx$$

$n=0,1,2,\dots$

---

56 Опр

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y+\lambda Y=0 \quad (1) \quad \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi] \\ Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi) \quad (2) \\ |Y(\theta,\varphi)|\big|_{\theta=0,\pi}<\infty \end{cases}$$

на единичной сфере.

$$\Delta_{\theta\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Огр на ед сфере реш ур-ия (1), удовл условию (2) и облад непр произв до 2го порядка включительно, наз сферич ф-ями:

$$Y_n^{(|m|)}(\theta,\varphi)=P_n^{(|m|)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases} \qquad n=0,1,2,\dots \quad m\in[-n,n]$$

57

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \quad x\in(-1;1) \\ |y(\pm1)|<\infty \end{cases}$$

с.зн: $\lambda_n=n(n+1)$

(в (1) замена $x=\cos\theta$ $y(x)=y(\cos\theta)$) с.ф: $y_{nm}(\cos\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta)$

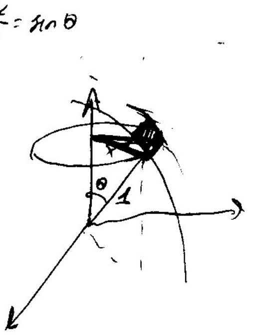
58

С-ма сф ф-й замкнута на ед сфере $\{\theta\in[0,\pi];\ \varphi\in[0,2\pi]\}$ и полна.

59

Сф ф-ции ортогональны на единичной сфере!

$\frac{x}{1}=\sin\theta$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)\,Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=0$$

$n_1\neq n_2 \quad m_1\neq m_2$

60

$$\|Y_n^{(m)}\|^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(|m|)2}(\cos\theta)|e^{im\varphi}|^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1}P_n^{(|m|)2}(x)dx=2\pi\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$n=0,1,2\dots,$ $m=[-n,n]$

$$\left(\|Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\|=\pi(1+\delta_{m0})\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1} \quad n=0,1,2,\dots \quad m=0,1,\dots,n\right)$$

(61) $\forall f(\theta,\varphi) \in C^{(2)}\{\underbrace{\theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]}_{}\}$ (дважды непр диффер на ед сфе ф-и)

ед сфера
разлагается в абс и равномерно сходящ ряд по сф фо-ии:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

$$f_{nm}=\frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(62) Рассм ур-ие Лапласа в шаре радиуса a: $\Delta u=0$

Введем сферич с-му координат:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=0$$

$$u=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{R}+\underbrace{\frac{\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}Y}{Y}}_{=-n(n+1)}=0 \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-n(n+1)R=0$$

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0 \qquad \sigma(\sigma-1)+2\sigma-n(n+1)=0$$

$$\sigma(\sigma+1)-n(n+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sigma=n\\ \sigma=-(n+1)\end{array}\right.$$

$$u_{nm}(\theta,\varphi)=\begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) & \text{для внутр зад}\\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) & \text{для внешн зад}\end{cases}$$ — Частн. реш-е ур-ие Лапласа в сф с-ме коорд

(63) u_{nm} — не явл. с.ф.

(64) Задача Штурма - Лиувилля для шара радиуса a:

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0\\ \left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta u\right)\right|_{r=a}=0\end{cases} \qquad u\not\equiv 0 \qquad \Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}u.$$

$$u=R(r)\,v(\theta,\varphi)\not\equiv 0$$

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\lambda R r^2}{R}=\frac{-\Delta_{\theta\varphi}v}{v}=\mu \qquad \begin{cases}\Delta_{\theta\varphi}v+\mu v=0\\ v(\theta,\varphi)=v(\theta,\varphi+2\pi)\\ v(\theta,\varphi)\not\equiv 0\end{cases}$$

$$\left.\left(\alpha\frac{dR}{dr}+\beta R\right)\right|_{r=a}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0 \quad |R(0)|<\infty \qquad v_{nm}(\theta,\varphi)=Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

$$\mu=\mu_n=n(n+1)$$
$n=0,1,2\ldots$
$m=[-n,n]$

$$R(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}} \Rightarrow r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{(n+\frac12)^2}{r^2}\right)y=0$$ св ур Бесселя

$$\begin{cases} r^2y''+ry'+\left(\lambda r^2-(n+\tfrac12)^2\right)y=0\\ \left.\alpha y'+\left(\beta-\frac{\alpha}{2a}y\right)\right|_{r=a}=0 \quad |y(0)|\neq 0\end{cases}$$

$$y(r) = C_1 \mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \cancel{N_{n+\frac{1}{2}}}^{0}(\sqrt{\lambda} r) \qquad C_1 = 1$$

Хар-ное ур-ие: $\alpha\sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right)\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0 \qquad \mu = \sqrt{\lambda}a$

$$R(r) = \frac{\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})} r}{a}\right)}{\sqrt{r}} \qquad n = 0, 1, 2\ldots \quad k = 1, 2, \ldots$$

$\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}$ – k-ный корень ур-ия $\alpha\mu\, \mathcal{J}'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) + \left(\beta a - \frac{\alpha}{2}\right)\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$

$\Rightarrow$ <u>С.ф шара</u> $\quad u_{knm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}}{a} r\right) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$

$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad m \in [-n, n]$

С.значения $\quad \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+\frac{1}{2})}}{a}\right)^2$

---

(67) $a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0$ (1) $\quad z = \varphi(x, y)$ - реш (1)

$a_{11} dy^2 + 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0$ (2) ← хар-ное ур-ие для ур-ия (*)
его общие инт-лы – хар-ки ур-ия (*)

$\varphi(x, y) = C$ - общий инт-л ур-ия (2)

$$\underbrace{a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy}}_{\text{главная часть ур-ия}} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (*)$$

---

(68) (*) $a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

$$\Delta = (a_{12})^2 - a_{11} a_{22}$$

Ур-ие (*) в т $M_0(x_0, y_0)$ наз ур-ем:

1) гиперб типа, если $\Delta(M_0) > 0$
2) эллипт типа, если $\Delta(M_0) < 0$

} диффузия, теплопров, перенос в-ва, нестац проц зав от t

3) параболл типа, если $\Delta(M_0) = 0$ - стацпроц не зав от t $\quad \Delta u = 0$ ур-е Лапл, $\Delta u = f(M)$ ур-ие Пуассона

---

(69) Каноноч формы:

а) гиперб тип: $\quad v_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

б) параболич типа:

$$v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

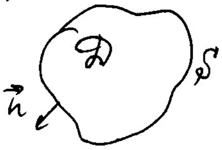
в) эллиптич типа $\quad v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$

(70) Задача наз корректно поставленной по Адамару, если её реш: а) $\exists$ б) ! в) непр зав от входных данных — устой-ть зад   (n+1)-мерн откр цил

(71)
$$(*)\begin{cases} \rho(M)u_{tt} = \underbrace{\mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u)}_{(k(x)u_x)_x \text{ - одном вар-т}} + f(M,t) \quad (1) & (M,t)\in Q_\infty = D\times(0,+\infty) \\ & M\in D,\ t\in(0,+\infty) \\ u(M,0)=\varphi(M) \\ u_t(M,0)=\psi(M) & \Big\}\ M\in\bar D \\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u=\mu(P,t) & P\in S\quad t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

$\rho(M), k(M)>0$ $M\in\bar D$ $\alpha(P),\beta(P)>0$ $P\in S$
$\alpha+\beta>0$
(одновр $\neq0$)

$k(M)=0$ — ос точки.
$\vec n$ — внешн нормаль.



(72) **Опр** Ф-я $u(M,t)$ наз классическим решением зад (*), если
1) $u(M,t)\in C^{(2)}(Q_\infty)\cap C^{(1)}(\bar Q_\infty)$
2) Удовл ур-ю (1) в классич смысле
3) Непр примыкает к нач и гр условиям (напр $\lim\limits_{t\to0}u(M,t)=\varphi(M)$)

Необх усл $\exists$ реш — согласие нач и гр усл $\alpha(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\beta(P)\varphi=\mu(P,0)$ + гладкость вх данных
$\alpha(P)\frac{\partial\psi}{\partial n}+\beta(P)\psi=\mu_t(P,0)$

(73)
$$(*)\begin{cases} c(M)\rho(M)u_t=\mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u)+f(M,t) \quad (1) & (M,t)\in Q_T \\ u(M,0)=\varphi(M) \quad M\in\bar D & Q_T=\underset{M\in}{D}\times\underset{t\in}{[0,T]} \\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u=\mu(P,t) \quad P\in S,\ t\in[0,T] \end{cases}$$

(74) Ф-я $u(M,t)$ наз класич реш зад (*), если   (парабол!)
1) $u(M,t)\in C^{(1),(2)}_{t,\,M}(Q_T)\cap C^{(0),(1)}_{t,\,M}(\bar Q_T)$
1 раз непр дифф по t, дважды непр дифф по координате
2) Удовл ур-ю (1) в классич смысле
3) Непр примык к нач и гр усл: $\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\beta\varphi=\mu(P,0)$

(75) Метод разделения пер-х (метод Фурье) состоит в построении реш начально-краевой задачи в виде ряда по некот ортонорм с-ме ф-ций (эта с-ма функций возникает у самой задачи)

$$\begin{cases} \rho P_t[u]=Lu \quad \text{в } Q \quad t\in(0,+\infty) \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\big|_S=0 \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(M) \quad k=0,1,\dots,l-1 \end{cases}$$

$$P_t[u]=\sum_{i=0}^{l}a_i(t)\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$$

$Lu=\mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u)-q(M)u$ $q(M)\ge0$ $q(M)$ - непр в $\bar D$

Расм вспом. задачу: $\begin{cases}\rho P_t[u]=Lu\\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u|_S=0\end{cases}$ $u=v(M)T(t)\not\equiv 0$

$\rho v P_t[T]=TLv$ $\frac{P_t[T]}{T}=\frac{Lv}{v(M)\rho(M)}=-\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}Lv+\lambda\rho v=0 & v\not\equiv 0,\ M\in D\\ \alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v|_S=0\end{cases}$ $\begin{cases}P_t[T]+\lambda T=0 & T\not\equiv 0,\ t>0\\ \frac{\partial^k T}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(M) & k=0,1,\dots,l-1\end{cases}$

$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n T_n(t)$

---

(76) В силу линейности задачи её можно свести её реш к сумме реш 3ех задач:

1) для однор ур-ия ($f\equiv 0$), неоднор нач и однор гр усл.

2) неодн ур-ие $f\not\equiv 0$, однор нач и однор гр усл.

3) однор ур-ие, однор нач и неодн гр усл-я. $u=u_1+u_2+u_3$.

(77) $\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0; & M\in D\\ u(P)=0\end{cases}$ $u=u(M)$ $k(M)=1$

$u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar D)$ $p(M)=1$, $q(M)=0$

Св-ва с.ф. и с.зн: $k(M)\in C^{(1)}(\bar D)$ $p(M), q(M)$

1) $\exists$ счетн мн-во вещ с.зн $\{\lambda_n\}$ и соответ с.ф. $\{u_n(M)\}$

2) С.ф., соотв разл с.зн ортог с весом $p(M)=1$

Ортог с-ма $\{u_n(M)\}$ замкнута и полна $\Rightarrow$ для нее справ теор разл-ия Стеклова

С.зн. $\{\lambda_n\}$ неотрицательна

(78) $\begin{cases}\rho P_t[u]=Lu & \text{в } Q\\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u|_S=\mu(P,t), & P\in S \quad |\alpha|+|\beta|\neq 0\\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0 & k=0,1,\dots,l-1\end{cases}$

новая неизв ф-я

$u(M,t)=U(M,t)+V(M,t)$

$\alpha\frac{\partial V}{\partial n}+\beta V|_S=\mu(P,t)\Big|_{P\in S}$

$LV-\rho P_t[V]$ = $f(M,t)$

$\begin{cases}\rho P_t[U]=LU+f(M,t)\\ \alpha\frac{\partial U}{\partial n}+\beta U|_S=0\\ \frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0} & k=0,1,\dots,l-1\end{cases}$

$\nearrow$ $\begin{cases}\rho P_t[U_1]=LU_1\\ \alpha\frac{\partial U_1}{\partial n}+\beta U_1|_S=0\\ \frac{\partial^k U_1}{\partial t^k}=-\frac{\partial^k V_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0}\end{cases}$ $k=0,1,\dots,l-1$

$\searrow$ $\begin{cases}\rho P_t[U_2]=LU_2+f\ (1)\\ \alpha\frac{\partial U_2}{\partial n}+\beta U_2|_S=0\\ \frac{\partial^k U_2}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$

Пусть решена зад $\begin{cases}Lv+\lambda\rho v=0 & \{\lambda_n\}\\ \alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v|_S=0 & \{v_n\}\end{cases}$

$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(M)$

$u_n(t)$ выбир так, чтобы вып ур-ие (1).

(стр 64)

(79) $\int\limits_D v\, div(k(M)\, grad\, u)\, dV = \oint\limits_S k(P)\, v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \int\limits_D k(M)\, grad\, u\, grad\, v\, dV$ 1ая ф-ла Грина

Условия гладкости на ф-ции:

$k(M) \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$

$u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$

$v(M) \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$

(80) 2ая ф-ла Грина:

$$\int\limits_D \left(v\, div(k(M)\, grad\, u) - u\, div(k(M)\, grad\, v)\right) dV = \oint\limits_S k(P)\left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma$$

$u, v \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$

(81) 3-я ф-ла Грина

а) Трехмерн случай: S - граница обл D

$$\Omega_3 u(M_0) = -\iiint\limits_D \frac{\Delta u}{r}\, dV + \iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma \qquad \Omega_3 = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in D \\ 2\pi, & M_0 \in S \\ 0, & M \notin \bar{D} \end{cases}$$

б) Двумерн случай:

$\frac{1}{r_{MM_0}} \to \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ $\quad G$ - плоская обл

$$\Omega_2 u(M_0) = -\iint\limits_G \Delta u \ln \frac{1}{r_{MM_0}}\, dV + \int\limits_C \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right) dl_P$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in G \\ \pi, & M_0 \in C \\ 0, & M_0 \notin \bar{G} \end{cases}$$

---

(83) Опр Ф-ция $u(M)$ наз гарм в обл D, если она непр со своими производными до 2го порядка включительно и удовл в этой обл ур-ю Лапласа

$\Delta u = 0, \; M \in D$

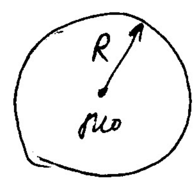
$u \in C^{(2)}(D)$

(84) Теорема Гаусса. $\exists$ ф-я $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ явл гарм в D, тогда $\iint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0$ $\quad \sigma$ - $\forall$ пов-ть $\in D$

Σ — граница обл D

85 Ф-ла среднего значения:

$\exists\, u(M)$ - гарм ф-я в обл D



шар

Σ_{M_0} - сфера

$$u(M_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_D u(M)\, dV_M$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_{M_0}} u(P)\, d\sigma_P$$

86 Сущ-ние произв $\forall$ порядка у гарм ф-ций.

$\exists\, u(M)$ - гарм ф-я в D. Применим к ней 3-ю ф-лу Грина:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\Bigg(\underbrace{\iiint_D \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}\, dV_M}_{0} + \underbrace{\iint_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}}\right) d\sigma_P}_{\text{соб инт-л.}}\Bigg)$$

$M_0 \notin S \Rightarrow$ инт-л диф-ем по пар-ру ∞ число раз.

$\frac{1}{r_{PM_0}}$ - ∞ диф-ма M_0 - пар. P.

(Обл D наз связной, если $\forall$ 2т этой обл можно соед ломаной, целиком леж в этой обл.)

87 Принцип max.

$\not\equiv$ const ф-ция $u(M)$ непр в $\bar{D}$ ($u \in C(\bar{D})$) и гарм в обл D (замкн, связн) достигает своего max знач только на гр обл D.

88 Принцип сравнения:

1) Если $u(P) \le v(P)$ $P \in S$, то $u(M) \le v(M)$, $M \in D$

2) $|u(P)| \le v(P)$ $P \in S \Rightarrow |u(M)| \le v(M)$, $M \in D$

3) $|u_1(P) - u_2(P)| \le \varepsilon$ $P \in S \Rightarrow |u_1(M) - u_2(M)| \le \varepsilon$, $M \in D$

---

89 $\begin{cases} \Delta u = -f(M) \\ u(P) = \mu(P) \end{cases}$ $\quad u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$

$\lim\limits_{\substack{M \to P \\ P \in S}} u(M) = \mu(P)$ - непр примык к гр знач $\mu(P)$

Задача Дирихле не может иметь более одного класс решения

Д-во От противного: $\exists\, u_1, u_2$ - решения. Составим $v(M) = u_1 - u_2$ гарм и $v(P) = 0$

Принцип max: $v(M) \le 0$ (max зн на гр S) и $v(M) \ge 0$ (min зн на гр S) в $D \Rightarrow v(M) \equiv 0$ в D

(90) $\exists\, h(p)\geq 0$ на S $h\not\equiv 0$ $\begin{cases}\Delta u=-f\\ \frac{\partial u}{\partial n}+hu\big|_s=\mu\end{cases}$ Задача не может иметь более одного классич решения.

$\bar{n}$ – внешн нормаль

$\underline{\text{Д-во}}$: Задача линейная $\Rightarrow$ дост д-ть, что $\begin{cases}\Delta u=0\\ \frac{\partial u}{\partial n}+hu\big|_s=0\end{cases}$ имеет только нулевое решение

1ая ф-ла Грина $v\equiv u$

$$\iiint_{D}u\underbrace{\Delta u}_{=0}=\oint_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iiint_D(\operatorname{grad}u)^2dV \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_s=-hu\Big|_s\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_S hu^2ds+\iiint_D(\operatorname{grad}u)^2dV=0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{grad}u=0,\ M\in D\\ u|_s=0\end{cases}\Rightarrow u\equiv 0$$

(91) Задача Неймана $h\equiv 0\Rightarrow \operatorname{grad}u=0\Rightarrow u=const$ – неопределенность

$\Rightarrow$ класс реш внутр зад Неймана ~~не~~ и опр-ся с точн до const

Из теор Гаусса $\Rightarrow$ $\begin{cases}\Delta u=0,\ M\in D\\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_s=f(p),\ p\in S\end{cases}\Rightarrow \iint_S f(p)d\sigma_p=0$. усл $\exists$ класс реш-я

---

(92) Ф-я $u(x,y,z)$ наз рег на ∞, если при $r>R^*$

$$|u|\leq\frac{A}{r}\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\leq\frac{A}{r^2}$$

(93) Ф-я $u(x,y)$ – рег на ∞, если она имеет конечный $\lim$ на ∞

Имеют место оценки: $(r>R^*)$ $|u|<A$; $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|<\frac{A}{r^2}$

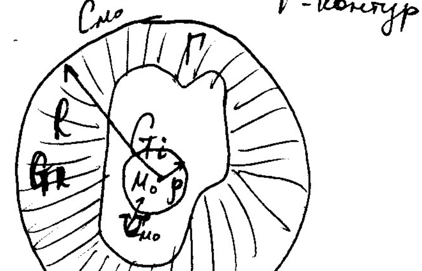
(94) Внешняя задача Дирихле: 3ехм зад $\begin{cases}\Delta u=0,\ M\in D_e\\ u(P)=\mu(P),\ P\in S\\ u(M)\rightrightarrows 0\ \ r_M\to\infty\end{cases}$

$\underline{\text{Теорема}}$: Реш!

(95) Двумерный случай. $\underline{\text{Теор}}$ класс реш зад!

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ M\in G_e\\ u(P)=\mu(P),\ P\in\Gamma\\ |u(M)|\leq N,\ M\in\bar{G}_e\end{cases}$$

$C^R_{M_0}$ – окр-ть Γ – контур.



$\underline{\text{Д-во}}$: $\exists\, u_1\neq u_2$ $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$ $|u_1|\leq N_1$ $|u_2|\leq N_2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\Delta v=0,\ M\in G_e\\ v(P)=0,\ P\in\Gamma\\ |v(M)|\leq N\end{cases}$

$|v(M)|\leq N_1+N_2=N$

Составим ф-ю - барьер: $w(M,R)=N\dfrac{\ln\frac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln\frac{R}{\rho}}$ – гарм (логарифм)

$$\begin{cases}\Delta_M w=0,\ M\in G_e\\ w\big|_\Gamma>0\quad w\big|_{C^R_{M_0}}=N\end{cases}\Rightarrow w \text{ – мажоранта ф-я для } |v| \ \begin{pmatrix}\text{2ой}\\ \text{принцип}\\ \text{срав}\end{pmatrix}: |v(\bar{M})|\leq w(\bar{M},R),\ \bar{M}\in G_e^R$$

Зафиксир т $\bar{M}$ и $\lim\limits_{R\to\infty}$ $\Rightarrow w\to 0\Rightarrow v=0$ $\bar{M}\in G_e$ (открыт) $\Rightarrow u_1(\bar{M})=u_2(\bar{M})\Rightarrow$ противоречие

(97) Зекм случай Реш зад Нейм! $v = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M\in D_e \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f, & p\in S \\ u \rightrightarrows 0 & r_M\to\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & M\in D_e \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & p\in S \\ v(M) \rightrightarrows 0 & r_M\to\infty \end{cases}$$

$v\in C^{(2)}(D_e)\cap C^{(1)}(\bar D_e) \Rightarrow$ справ 1,2,3 ф-лы Грина

$$\int\limits_{D_e} v\underbrace{\Delta v}_{=0}\, dV = \oint\limits_{S} v\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} d\sigma - \int\limits_{D_e} \text{grad}^2 v\, dV \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{grad}\, v = 0 \Rightarrow v = C = const$ т.к. $v \rightrightarrows 0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ реш! $u_1 = u_2$

(96) 2-мерн случ

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M\in D_e \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f, & p\in S \\ |u| < N \end{cases} \quad v = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \\ |v| < N \end{cases} \Rightarrow \text{grad}\, v = 0$$

$v = C = const$

$u_1 - u_2 = const$

реш не!

(98) Ф-я Грина задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M\in D \\ u(p) = \mu(P), & p\in S \\ u(M) \in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar D) \end{cases} \qquad M_0\in D$$

3-я ф-ла Грина: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P - \int\limits_D \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta u}{r_{MM_0}}dV_M$

$$\boxed{g(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M,M_0)} \qquad \begin{cases} \Delta_M v(M,M_0) = 0 & M\in D \\ v(P,M_0) = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}} & p\in S \quad M_0\in D \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} \Delta_M g(M,M_0) = -\delta(M,M_0), & M\in D \\ g(P,M_0) = 0 \quad p\in S, & M_0\in D \end{cases}$$

Опр Ф-я $g(M,M_0)$, имеющ вид, явл реш обобщ зад (1), наз ф-ей Грина зад Дирихле для опер Лап

(99) $g(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M,M_0)$ (аналогично)

(100) Ф-я Грина внутр задачи Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M\in D \\ \frac{\partial u}{\partial n_p} = \mu(P), & p\in S \\ u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar D) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + v \\ \left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S_0} \end{cases}$$

S_0 - пл-дь пов-ти S

$$\begin{cases} \Delta_M v(M,M_0) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n_p}(P,M_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) \end{cases}$$

(101) $\exists$ в обл D задана ф-е $\rho(M)$ инт-л $\exists$ и непр дифф

Объемным пот-лом наз инт-л: $u(M)=\int_D \frac{\rho(Q)}{r_{MQ}}\,dV_Q$ $\quad |\rho(M)|<N$ плотность пот-ла

$\rho(M)\in C^{(1)}(D) \Rightarrow \Delta u(M)=-4\pi\rho(M)$

$\Delta\left(\frac{1}{r_{MQ}}\right)=-4\pi\delta(M,Q) \Rightarrow \Delta u=\Delta\left(\frac{1}{R}\cdot\rho\right)=\left(\Delta\frac{1}{R}\right)\rho=-4\pi\rho$

На пл-ти объемным (или логарифмич) пот-лом наз инт-л вида:

$$u(M)=\int_D \rho(Q)\ln\frac{1}{r_{MQ}}\,d\sigma_Q \qquad \Delta u=-2\pi\rho$$

---

(102) $u(M)=\int_D f(M,Q)\,dV_Q$ (1) $\quad f(M,Q)$ - непр по M, неогр при $M=Q$

Стр204.

Опр Инт-л (1) наз $\rightrightarrows$ в т M_0, если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)$ $\left|\int_{D^{\delta(\varepsilon)}} f(M,Q)\,dV_Q\right|<\varepsilon$

$\forall M\in K_{M_0}^{\delta(\varepsilon)}$ $\quad \forall D\subset K_{M_0}^{\delta(\varepsilon)}$

обл шар.

---

(103) Логарифмические пот-лы (на пл-ти)

Простого слоя

$$v(M)=\int_C \mu(p)\ln\frac{1}{r_{pM}}\,dl_p$$

в 3ехмерном случае

$$v(M)=\int_S \mu(p)\frac{dS_p}{r_{pM}}$$

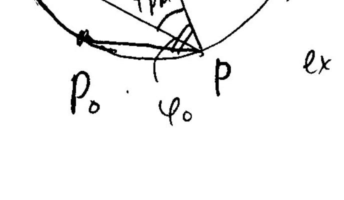
S - некот пов-ть.

Двойного слоя

$$w(M)=\int_C \nu(p)\frac{\partial}{\partial n_p}\left(\ln\frac{1}{r_{pM}}\right)dl_p=\int_C \nu(p)\frac{\cos\varphi_{pM}}{r_{pM}}\,dl_p$$

в 3ехм случае

$$w(M)=-\int_S \nu(p)\frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{r_{pM}}\right)dS_p=\int_S \nu(p)\frac{\cos\varphi_{pM}\,dS_p}{r_{pM}^2}$$



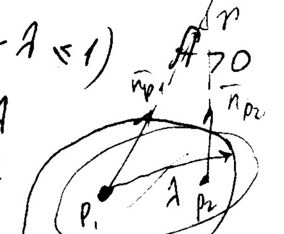
(107) Пов-ть S наз пов-тью Ляпунова, если:

1) $\forall$ т P пов S $\exists$ кас-ная пл-ть (нормаль)

2) $\forall P_0\in S$ $\exists\delta>0$ (общее для всей пов-ти): часть пов-ти $S^\delta=S\cap K^\delta_{P_0}$ (внутри шара) в местной (локальной) сист коорд может быть предст в виде однозн ф-ции $z=f(x,y)$
($\exists d>0$: прямые $\parallel \vec{n}_p$ пов-ти S пересекают не более одного раза часть пов-ти S, (если внутри шара рад d с центром в т P)

3) $\gamma(P_1,P_2) = (\vec n_{P_1}, \vec n_{P_2})$ $\quad \gamma(P_1,P_2) \le A\, r^{\lambda}_{P_1P_2}$ $\quad (0<\lambda\le 1)$ $\quad A>0$

$P_2 \in S^{\lambda}_{P_1}$



(108) $\exists\, |\mu(P)| < N \Rightarrow v(M) = \int\limits_C \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM}}\, dl_P \in C(\mathbb{R}^2)$

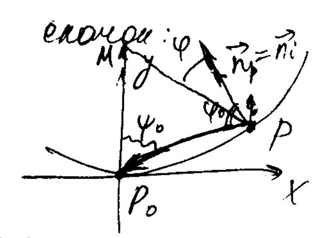
S - ляпунова пов-ть (в каждой т. $\exists$ непр нормаль) или кус-но гл пов-ть $\quad v(M) = \int\limits_S \mu(P) \frac{dS}{r_{MP}}$ $\quad |\mu| < N$

(109) $\exists\, |\nu(P)| < N \Rightarrow w(M) = \int\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}}\, dl_P$ $\exists$, но не непр

(110) Разрыв нормальных производных пот-ла простого слоя

$\exists\, \mu(P)$ — кус-непр и огр ф-я $\Rightarrow$ норм произв пот-ла $v(M)$ по внутр нормали при переходе через несущую кривую претерпевают скачок:

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = 2\pi\mu(P_0)$$



(111) $\nu(P) = \nu_0$ (const)

$$\overset{\circ}{w}(M) = \nu_0 \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right) dS_P$$

Зехм сл.

$$\overset{\circ}{w}(M) = \begin{cases} 0, & M \notin \overline{D} \\ 2\pi\nu_0, & M \in S \\ 4\pi\nu_0, & M \in D \end{cases}$$

(112) $\overset{\circ}{w}{}^{(i)}(P_0) - \overset{\circ}{w}{}^{(e)}(P_0) = 4\pi\nu(P_0)$

$\overset{\circ}{w}{}^{(i)} = \overset{\circ}{w}(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$

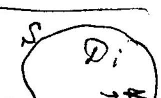
$\overset{\circ}{w}{}^{(e)} = \overset{\circ}{w}(P_0) - 2\pi\nu(P_0)$

прямое знач ПДС

на пов-ти скачки в 2 раза меньше.

---

(113) Внутр зад Дирихле для ур-ия Лапласа:



$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D_i \\ u|_S = g(P), & P \in S \end{cases}$ $\quad S$ - пов-ть Ляпунова, $g(P) \in C(S)$

Решение этой зад ищем в виде пот-ла двойного слоя

$$w(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r^2_{PM}}\, dS_P \Rightarrow \begin{cases} \Delta w(M) = 0, & M \in D_i \\ w(P) = g(P), & P \in S \\ w(M) \in C^{(2)}(D_i) \cap C^{(1)}(\overline{D}_i) \end{cases}$$

гарм ф-я

$w^{(i)}(P_0) = w(P_0) + 2\pi\nu(P_0) = g(P_0)$

это! однор ур-ие $\Leftarrow$ $2\pi\nu(P_0) + \int\limits_S \nu(P_0) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\, dS_P = g(P_0)$, $P_0 \in S$ $\quad$ Инт ур-ие Фредгольма с полярным ядром отн-но неизв $\nu(P)$

Сопряжённое ур-ие: $2\pi\mu(P_0) + \int\limits_S \mu(P) \frac{\cos\psi_0}{r^2_{PP_0}}\, dS_P = 0$. $\quad$ Это же ур-ие получ при реш внеш зад Неймана.

$$\begin{cases} \Delta v_0(M)=0, & M\in D^e \\ \frac{\partial v_0}{\partial n}(P)=0, & P\in S \\ v_0(M)\rightrightarrows 0, & r_M\to\infty \end{cases}$$

+ стр 226

$v_0(M)\in C^{(2)}(D^e)\cap C^{(1)}(\bar D_e)$

$v_0(M)=\int\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\,d\sigma_P$

$$\begin{cases} \Delta v(M)=0 \\ \frac{\partial v}{\partial n}(P)=h(P) \\ v(M)\rightrightarrows 0 \; r_M\to\infty \end{cases}$$

$v(M)=\int\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}}\,d\sigma_P$

$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n}(P_0)=2\pi\mu(P_0)+\frac{\partial v}{\partial n}(P_0)=h(P_0),\; P_0\in S$

(114) Внутр зад Неймана и внешнее зад Дирихле:

Внутр зад Неймана:

$$\begin{cases} \Delta v=0, & D\ni M \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n_e}\right|_S=h(P), & P\in S \end{cases}$$

$v(M)=\int\limits_S \mu(P)\frac{d\sigma_P}{r_{PM}}$.

$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_e}=\frac{\partial v}{\partial n_e}(P_0)-2\pi\mu(P_0)=h(P_0)$

$2\pi\mu(P_0)-\int\limits_S \mu(P)\frac{\cos\psi_0}{r^2_{PP_0}}\,d\sigma_P=-h(P_0)\qquad P_0\in S$

$2\pi\nu(P_0)-\int\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}\,d\sigma_P=-g(P_0)$

$$\begin{cases} \Delta w(M)=0, & M\in D_e \\ w(P)=g(P) \\ w(M)\rightrightarrows 0 \; r_M\to\infty \end{cases}$$

$w(M)=\int\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_{PM}}{r^2_{PM}}\,d\sigma_P$

$w^{(e)}(P_0)=-2\pi\nu(P_0)+w(P_0)=g(P_0)$

---

(115) Внутр зад Дирихле однозн разреш $\forall$ непр гр ф-ции $g(P)$ и её реш представимо в виде пот-ла двойного слоя

(116) В зехм случае внешн зад Неймана однозн разрешима $\forall$ непр гр ф-ции $h(P)$ и её реш представимо в виде пот-ла простого слоя

(117) Внутр зад Неймана имеет реш, опр с точностью до const, при выполнении необх усл-я разрешимости $\int\limits_S \frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma_P=0$ $\left(\int\limits_S h(P)\,d\sigma_P=0\right)$, её решение представимо $\forall$ непр огр ф-ции $h(P)$ в виде пот-ла простого слоя.

(118) Внешн зад Дирихле однозн разрешима $\forall$ непр огр ф-ции $g(P)$ и её реш предст в виде $w(M)=\int\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_{PM}}{r^2_{PM}}\,d\sigma_P+\frac{1}{r_{M_iM}}\int\limits_S g(P)\mu_0(P)\,d\sigma_P$

(120) Ф-ция $v_0(M)=\int\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}\,d\sigma_P$ – пот-л Робена (пот-л изобс проводящего тела) $M_i\in D_i$

---

(122) $\Delta u+cu=0$

$\frac{\sin kr}{r}$ – огр во всем пр-ве

$u=\frac{e^{\pm ikr}}{r}\;(c=k^2>0)\Rightarrow u=\frac{e^{ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}},\;\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}};\;\frac{\cos kr_{MM_0}}{r_{MM_0}}$

Зехм случай: $u=\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\;(c=-\varkappa^2<0)\Rightarrow u=\frac{e^{-\varkappa r_{MM_0}}}{r_{MM_0}}$

$\frac{e^{+\varkappa r}}{r}$ – неогр возр.

(121) двумерный случай:
$\Delta u + cu = 0$ $\quad u = A_1 J_0(kr) + A_2 N_0(kr)$ $(c = k^2 > 0) \Rightarrow u = K_0(\varkappa r_{MM_0}) \sim \ln \frac{1}{\varkappa r_{MM_0}}$

$u = C_1 I_0(\varkappa r) + C_2 K_0(\varkappa r)$ $(c = -\varkappa^2 < 0) \Rightarrow u = H_0^{(1)}(kr_{MM_0}), H_0^{(2)}(kr_{MM_0}), N_0(kr_{MM_0})$

$$H_0^{(1,2)}(x) \approx \mp \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \quad N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}.$$

(123) $u(M) = \int_D \rho(Q) \frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}} dV_Q$ – объемный пот-л

(124) $v(M) = \iint_S \mu(P) \frac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} dS_P$ – пот-л простого слоя

(125) $w(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} \right) dS_P$ – пот-л двойного слоя.

---

(126) Классич реш однор ур-ия $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, определенное и непр в $\bar{D}$, не может достигать во внутр т обл D полож max и отрицат min знач.

(127) I: $\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, & M \in D \\ u|_S = f \end{cases}$ $\quad$ Теорема Задача не может иметь более одного классич решения.

классич реш: $u = C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$

II, III: $\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, & M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_S = f \end{cases}$ $\quad$ Теорема При $h(P) \geq 0$ на S з-а не может иметь более одного классич решения.

классич реш: $u \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$

---

(128) $\begin{cases} \rho(M) u_t = \underbrace{\operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u)}_{L_M[u]} + f(M,t) & (M,t) \in Q_\infty \quad D \times (0,\infty) \\ u(M,0) = \varphi(M), \; M \in \bar{D} \\ \alpha(p) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(p) u = \mu(P,t), \; P \in S \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$

уд теплоемкость, пл-ть

$\rho(M) = c(M)\bar{\rho}(M)$; $\bar{\rho}(M) > 0$

$\alpha(p), \beta(p) \geq 0 \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$

$k(M) > 0$

$\alpha(p) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} + \beta(P) \varphi(P) = \mu(P, 0)$ (необх усл ∃ реш)

(129) классич Реш: $u(M,t) \in C^{(2),(1)}_{M,t}(Q_\infty) \cap C^{(1),(0)}_{M,t}(\bar{Q}_\infty)$
и удовл в Q_∞ нач и гр усл.

(130) Принцип max: Решение однородного ур-ия теплопров-ти $(\rho > 0, k > 0)$
$\rho u_t = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) =$, непр в $\bar{Q}_T$; $u \in C(\bar{Q}_T)$, во внутр т $\bar{Q}_T$ не может достигать значение >, чем наиб из нач и граничн знач-й

$$\underline{M} = \max\{u(M,0), u(P,t)\} \quad M \in \bar{D}, P \in S, t \in [0,T]$$

(131) Принцип сравнения:

$\exists\, u_1(M,t),\ u_2(M,t)$ — 2 класс реш однор ур-ие теплопров-ти.

$u_1, u_2 \in C(\overline{Q_T})$

1) Если $u_1(M,0) \le u_2(M,0)$, $M \in \overline{D}$; $u_1(P,t) \le u_2(P,t)$ $t \in [0,T]$ $\Rightarrow u_1(M,t) \le u_2(M,t)$

2) Если $|u_1(M,0) - u_2(M,0)| < \varepsilon$ $M \in \overline{D}$; $|u_1(P,t) - u_2(P,t)| < \varepsilon$, $P \in S, t \in [0,T]$ $\Rightarrow |u_1(M,t) - u_2(M,t)| < \varepsilon$ $(M,t) \in \overline{Q_T}$

(132)

$$(*)\ \begin{cases} \rho(M) u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) + f(M,t) \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M \in \overline{D} \\ u(P,t) = \mu(P,t),\ P \in S,\ t \in [0,T] \end{cases}$$

Класс реш зад (*) Дирихле для ур-ие теплопров!

(133) Класс реш (*) уст по нач и гр знач (в равномерной форме)

(134) Сущ-ние класс реш-я ур-ие теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0,l),\ t \in (0,+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l] \\ u(0,t) = 0 \quad u(l,t)\ 0,\ t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Теорема $\exists\, \varphi(x) \in C[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кус-непр 1ую произв и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, тогда класс реш зад $\exists$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi \quad \forall n = 1,2,\ldots$$

(135) ф-я ист.

$$g(M,Q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q)$$

а) $\begin{cases} \rho(M) u_t = L_M[u] + f(M,t),\ Q_\infty \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M \in \overline{D} \\ N_p[u] = \mu(P,t),\ P \in S\ t \in [0,+\infty) \end{cases}$

б) $\begin{cases} L_M[v_n] + \lambda_n \rho(M) v_n = 0 \\ v_n(P) = 0,\ P \in S \end{cases}$

в) $u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M)$

г) $\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t) \\ u_n(0) = \varphi_n \end{cases}$ $n = 1,2,\ldots$

$$f_n(t) = \int f(Q,t) v_n(Q)\,dV_Q$$

$\|v_n\| = 1$

$$\varphi_n = \int_D \varphi(Q)\rho(Q) v_n(Q)\,dV_Q$$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau + \varphi_n e^{-\lambda_n t}$$

(136)

(136) $(*)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t)\in\Omega_\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ |u(x,t)|<M, & (x,t)\in\overline{\Omega}_\infty \end{cases}$ $\Omega_T = \mathbb{R}^1\times[0,T]$ $\overline{\Omega}_T = \mathbb{R}^1 [0,T]$

(137)

Теорема классич реш задачи ∃!

Д-во! $\exists u_1(x,t)\neq u_2(x,t)$ $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$

$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (x,t)\in\Omega_\infty \\ v(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^1 \\ |v(x,t)|<2M, & (x,t)\in\overline{\Omega}_T \end{cases}$ пр max в неогр обл применить нельзя $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ огр обл-ть $\Omega_T^L = [-L, L]\times(0,+\infty)$ Исп метод барьеров:

$$w(x,t,L)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right)$$

$w_t = a^2 w_{xx}$ $w(x,0,L)\geq 0$ ~~$w(x,0)$~~

$w(\pm L,t,L)\geq 2M$

$v(x,0)=0$

$|v(\pm L,t)|<2M$

Принцип сравн: $-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{\bar{x}^2}{2}+a^2\bar{t}\right) < |v(\bar{x},\bar{t})| < \frac{4M}{L^2}\left(\frac{\bar{x}^2}{2}+a^2\bar{t}\right)$

$L\to\pm\infty \Rightarrow v(\bar{x},\bar{t})\to 0 \Rightarrow v(\bar{x},\bar{t})=0$ всюду в Ω_T $(\bar{x},\bar{t})$ – $\forall_T \in \overline{\Omega}_T^L$

$\Rightarrow u_1 = u_2$

---

(138) Задача (*) может иметь только одно классическое решение, огр в $\overline{\Omega}_\infty$

(139)

$$g(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$ – фунд реш ур-ия теплопров на ∞ прямой

(140) Св-ва фунд реш:

1) $g(x,\xi,t)>0$, $t>0$ $\xi\in\mathbb{R}^1$, $(x,t)\in\Omega_\infty$

2) $g_t = a^2 g_{xx}$ $(x,t)\in\Omega_\infty$, $\xi\in\mathbb{R}^1$ $t>0$

3) $g(x,\xi,0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\xi)}d\xi = \delta(x,\xi)$

Фунд реш ур-ия теплопров на $\mathbb{R}^1$ явл реш задачи Коши:

$\begin{cases} g_t = a^2 g_{xx}, & (x,t)\in\Omega_\infty \\ g(x,\xi,0)=\delta(x,\xi), & x\in\mathbb{R}^1, \xi\in\mathbb{R}^1 \end{cases}$

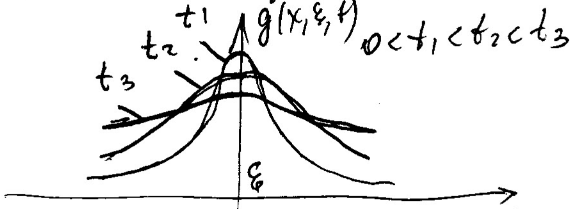
4) $f(x,t)=0 \Rightarrow u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \Rightarrow g(x,\xi,t)$ – температура прямой в т x в мом времени t, если в т ξ в мом $t=0$ действ мгнов точ ист.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)dx = \left| z=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz = 1 \Rightarrow$ кол-во тепла на прямой не меняется.

Мощность мгнов ист.

кол-во тепла $Q = c\rho \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\,dx = c\rho$

5) Принцип взаимности (ист, помещ в т x, производит в т ξ такое же действие, какое производит в т x тот же ист, помещ в т ξ)



$$g(x,\xi,t) = g(\xi,x,t)$$

6) Величина пл-ди фигуры, располож м/у кривой и осью x, умнож на $c\rho$ – кол-во тепла, подведенное к беск прямой в нач момент. Для малых $t>0$ почти всё тепло сосредоточ в малой окр-ти ξ. В мом $t=0$ всё тепло сосред в т ξ: в т $x=\xi$ $\quad g(\xi,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$ $\Rightarrow$ температура в т ξ где при $t=0$ мгнов введен тепла $\to \infty$

(143) $\mathbb{R}^+ = \{0<x<\infty\}$ $\qquad \bar{\Omega}_+ = \{0\le x<\infty, 0\le t<\infty\}$

$\Omega_+ = \{x\in(0,\infty), t\in(0,\infty)\}$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t)\in\Omega_+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\bar{\mathbb{R}}^+ \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta u(0,t) = \mu(t), & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

$|\alpha|+|\beta| \ne 0$

$\alpha\varphi'(0) + \beta\varphi(0) = \mu(0)$

$+$ реш $\in C(\bar{\Omega}_+)$

(144) Принцип продолжения.

А
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x,t)\in\Omega^+ \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in\bar{\mathbb{R}}^+ \\ u(0,t) = 0 & t\in[0,+\infty) \\ |u(x,t)|<C, & (x,t)\in\bar{\Omega}_+ \end{cases}$$

Продолжим $\varphi(x)$ нечетным образом

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x>0 \\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi$$ – удовлетв ур теплопр на всей прямой $\Rightarrow$ на $\mathbb{R}^+$

и уд нач усл на Ω_+

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} g_1(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$g_1(x,\xi,t) = g(x,\xi,t) - g(x,-\xi,t) = $$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

Б
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \\ |u(x,t)|<C, & x\in\bar{\Omega}_+ \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x>0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = U(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \big(g(x,\xi,t) + g(x,-\xi,t)\big)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$\bar{\mathbb{R}}^+$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$g_2 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

(147)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t)\in \Omega_+ \\ u(x,0) = 0, & x\in \overline{R}^+ \\ u(0,t) = 0, & t\in[0,T] \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty g_1(x,\xi, \quad) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$g_1 = g(x,\xi,t) - g(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (x,t)\in\Omega_+ \\ u(x,0) = 0 & x\in \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & t\in[0,T] \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty g_2(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$g_2 = g(x,\xi,t) + g(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (x,t)\in\Omega_+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - h u(0,t) = 0, & t\in[0,T] \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty g_3(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t\int_0^\infty g_3(x,\xi,t-\tau) f(\xi,t)\, d\xi\, d\tau$$

$$g_3(x,\xi,t) = g(x,\xi,t) + g(x,-\xi,t) - 2h\int_0^\infty g(x,-\xi-\eta,t)e^{-h\eta}\, d\eta$$

$$g_3(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} - 2h\int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} - h\eta}\, d\eta\right)$$

---

(148) $\Omega_3 \equiv \mathbb{R}^3\times(0,\infty)$ $\quad \overline{\Omega}_3 \equiv \mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(M,t) & (M,t)\in\Omega_3 \\ u(M,0) = \varphi(M), & M\in \overline{\mathbb{R}}^3 \\ |u(M,t)| < C & (M,t)\in\overline{\Omega}_3 \end{cases}$$

(149) стр 271 Фунд реш ур-ия теплопров в пр-ве наз ф-цию $g(M,M_0,t)$

$$\begin{cases} g_t = a^2\Delta g & (M,t)\in\Omega_3 \\ g(M,M_0,0) = \delta(M,M_0) & M\in\mathbb{R}^3,\ M_0\in\mathbb{R}^3 \\ g \text{ непр всюду, кроме т } (M_0,0) \end{cases}$$

$$g(M,M_0,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

---

(150) Если $\varphi(M)$ непр и огр в $\mathbb{R}^3$, то $u(M,t) = \int_{R^3} g(M,\xi,t)\varphi(\xi)\, dV_\xi$ — класс реш при $f\equiv 0$

инт-л Пуассона

(151) С285

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x,t)\in\Omega_+ \\ u(x,0) = 0 & x\in\overline{R}^+ \\ u(0,t) = \mu(t), & t\geq 0,\ \mu(0)=0 \\ |u(x,t)| \leq C & (x,t)\in\overline{\Omega}_+ \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau$$

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(x,t-\tau)\mu(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & (x,t)\in\Omega_+ \\ w(x,0) = 0 & x\in\overline{R}^+ \\ w(0,t) = 1 & t\geq 0 \\ |w(x,t)| < M & (x,t)\in\overline{\Omega}_+ \end{cases}$$

152

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=\mu(t) \\ |u(x,t)|<C \end{cases}$$

$u(x,t) \doteqdot \tilde u(x,p) \qquad \mu(t)\doteqdot M(p)$

$\tilde u(x,p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)\,dt$

$M(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\mu(t)\,dt$.

$$u_t(x,t) \doteqdot p\tilde u(x,p) - \underbrace{u(x,0)}_{=0} \Rightarrow u_t(x,t)\doteqdot p\tilde u(x,p)$$

$$u_t=a^2u_{xx} \doteqdot p\tilde u = a^2 \tilde u_{xx} \qquad \begin{cases} \tilde u_{xx} = \frac{p}{a^2}\tilde u & x\in\mathbb{R}^+ \\ \tilde u(x,0)=M(p) \end{cases}$$

$$\tilde u(x,p)=M(p)e^{-\frac{\sqrt p}{a}x} = M(p)\,p\underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt p}{a}x}}{p}\right)}_{\doteqdot G(x,t)}$$

свертка

Исп. теорему об изображении производной

$G(x,0)=0$

$G(x,t)$ – оригинал изображения $\frac{e^{-\frac{\sqrt p}{a}x}}{p}$

$$p\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt p}{a}x}}{p}\right)\doteqdot \frac{\partial}{\partial t}G(x,t)$$

Теорема об изображении свертки:

$$\tilde u(x,p)=M(p)\,p\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt p}{a}x}}{p}\right)\doteqdot \underbrace{\int_0^t \frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t}\mu(\tau)\,d\tau}_{\text{инт-л Дюамеля}} = u(x,t)$$

$$\begin{cases} G_t=a^2G_{xx} & (x,t)\in\Omega_+ \\ G(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^+ \\ G(0,t)=1, & t\in[0,+\infty) \\ |G(x,t)|<C, & (x,t)\in\Omega_+ \end{cases} \qquad v(x,t)=1-G(x,t) \qquad \begin{cases} v_t=a^2v_{xx} \\ v(x,0)=1 \\ v(0,t)=0 \\ |v(x,t)|<C \end{cases}$$

$$v(x,t)=\int_0^{+\infty} g_+(x,\xi,t)\cdot 1\cdot d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt\pi}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt t}}^{+\infty} e^{-z^2}dz - \frac{1}{\sqrt\pi}\int_{\frac{x}{2a\sqrt t}}^{+\infty} e^{-z^2}dz =$$

$z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt t} \qquad z=\frac{x+\xi}{2a\sqrt t}$

$$=\frac1{\sqrt\pi}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt t}}^{\frac{x}{2a\sqrt t}} e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt\pi}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt t}}e^{-z^2}dz = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt t}\right) \qquad G=1-v=-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt t}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt t}\right) = \frac{x}{2a\sqrt\pi}\,\frac{1}{t^{\frac32}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

свертка $u(x,t)=\int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(x,t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau \Rightarrow u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt\pi}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\frac32}}$

(153)
$$(*)\begin{cases} \rho(M)u_{tt} = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) + f(M,t) & (M,t)\in Q_\infty \\ u(M,0)=\varphi(M) & M\in \bar D \\ u_t(M,0)=\psi(M) & M\in\bar D \\ \alpha(p)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(p)u = \mu(P,t),\ p\in S & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

n - внешняя нормаль $\rho(M), k(M)>0$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, $\alpha,\beta\geq 0$ 1)

(154) Классич. реш. задачи (*) наз. ф-ция $u(M,t)\in C^{(2)}(Q_\infty)\cap C^{(1)}(\bar Q_\infty)$ и удовл. в Q_∞ нач. и гр. усл.

Если гр. усл. есть условие Дирихле ($\alpha=0$) $\Rightarrow$ непр-ть 1ых произв. по M в $\bar D$ не треб. 2)

---

(155) Задача (*) может иметь только одно классич. решение.

Д-во: Применим мах неприменении к ур-нию гиперб. типа.

Рассм. вспомогат. ф-цию: $E(t) = \frac12\int\limits_D\left(\rho v_t^2 + k\operatorname{grad}^2 v\right)dV$

$v(M,t) = u_1 - u_2$ (2 классич. реш.)

$$\begin{cases} \rho v_{tt} = Lv & (M,t)\in Q_\infty \\ v(M,0)=v_t(M,0)=0 & M\in\bar D \\ \alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\big|_S = 0 & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_D\left(\rho v_t v_{tt} - k\operatorname{grad} v\operatorname{grad} v_t\right)dV =$$

$$= \int\limits_D v_t\left(\rho v_{tt} - \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} v)\right)dV + \int\limits_S k(p)v_t\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma_p$$

a) $\exists\alpha>0, \beta\geq 0, p\in S \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\beta}{\alpha}v$ $= -\frac12\frac{d}{dt}\int\limits_S k(p)\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}v^2 d\sigma_p$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(E(t)+\frac12\int\limits_S\frac{k(p)\beta(p)}{\alpha(p)}v^2d\sigma_p\right)}_{\Rightarrow\ const}=0$$

$v(M,0)=0$ $v_t(M,0)=0$ $\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow E+\frac12\int\limits_S\frac{k\beta}{\alpha}v^2d\sigma_p=0$ $E\geq 0$ $\int\geq 0 \Rightarrow E=0 \to v_t=0$ $\operatorname{grad} v=0$

$\Rightarrow v = const = c \Rightarrow c=0\Rightarrow u_1=u_2$.

---

(156)
$$(1)\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & x\in(0,l),\ t\in(0,+\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

$$(2)\ u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi na}{l}+\psi_n\frac{\sin\frac{\pi na}{l}t}{\frac{\pi na}{l}}\right)\sin\frac{\pi nx}{l} \qquad \begin{Bmatrix}\varphi_n\\ \psi_n\end{Bmatrix}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\begin{Bmatrix}\varphi(\xi)\\ \psi(\xi)\end{Bmatrix}\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi$$

Теорема $\exists\varphi(x)\in C^{(2)}[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кус. непр. 3-ю производную, $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$; $\psi(0)=\psi(l)=0\Rightarrow$ классич. реш. зад (1) $\exists$ и равно (2)

(157)
$$g(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n a}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}\sin\frac{\pi n a}{l}t$$

ф-я Грина (ф-я влияния от мгнов. импульса) на отрезке

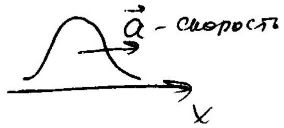
(158)
$$(1)\ \begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & (x,t)\in\Omega_\infty\\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u_t(x,0)=\psi(x) & x\in R^1\end{cases}$$

$$f_2(x-at)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int$$

$$f_1(x+at)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\psi(\alpha)d\alpha$$

(159)
$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

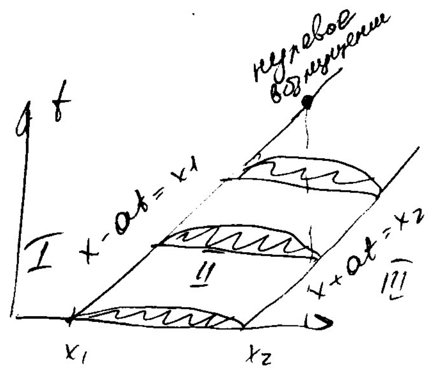
(160) стр321 $u(x,t)=f(x-at)$



$$\begin{cases}x^*=x-at\\ t^*=t\end{cases}$$

$f(x-at)$ - прав

$f(x+at)$ - лев



(161) $\exists!$ реш зад (1) при $f(x,t)=0$, кот опр-ся ф-лой Даламбера

(162) Реш зад (1) уст по нач данным, т.е. если

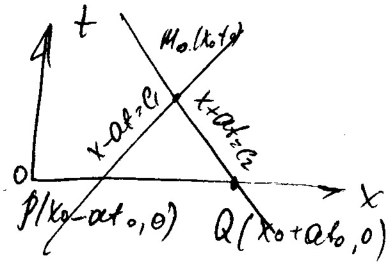
$\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ – нач ф-ции зад Коши

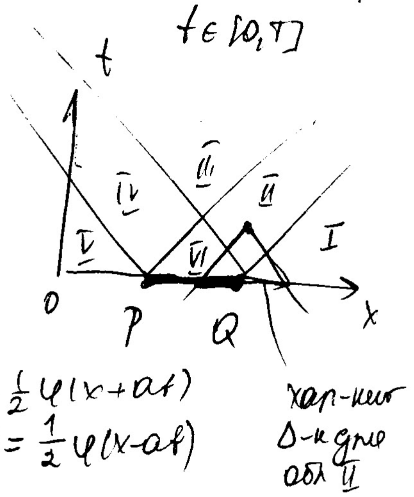
$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\varepsilon \quad x\in R^1\\ \int_a^b|\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)|^2d\alpha<\frac{\varepsilon^2}{b-a}\end{array}\right|\Rightarrow|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon(1+T)$$

$(x,t)\in\bar{\Omega}_T$

$t\in[0,T]$

(163) Хар-кий Δ-к





$$u(M_0)=\frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2}+\frac{1}{2a}\int_P^Q\psi(\alpha)d\alpha$$

$u_{IV}=\frac{1}{2}\varphi(x+at)$

$u_{II}(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)$

Метод распр волн

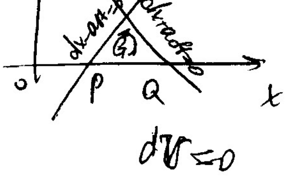
$\psi=0\quad\varphi\neq0$

$$u_{VI}(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

стр328.

(164) Реш неоднор зад получ мет инт-ния по фаз пл-ти:

$\exists F(x,t)\in C^{(1)}(G)\cap C(\bar{G})$



$$\iint_G\frac{\partial F}{\partial t}dx\,dt=-\int_\Gamma F\,dx$$

$$\iint_G\frac{\partial F}{\partial x}dx\,dt=\int_\Gamma F\,dt$$

$dV=0$

$$\iint\limits_{\Delta PQM}(u_{tt}-a^2u_{xx})\,dx\,dt=\iint\limits_{\Delta PQM} f(x,t)\,dx\,dt \quad (1)$$

$$\iint\limits_{\Delta PQM} u_{tt}\,dx\,dt=-\int_P^Q u_t\,dx-\int_Q^M u_t\,dx-\int_M^P u_t\,dx=$$

$$=-\int_P^Q u_t\,dx+a\int_Q^M u_t\,dt-a\int_M^P u_t\,dt$$

$$\iint\limits_{\Delta PQM} u_{xx}\,dx\,dt=\int_P^Q u_x\,\overset{=0}{dt}+\int_Q^M u_x\,dt+\int_M^P u_x\,dt=-\frac{1}{a}\int_Q^M u_x\,dx+\frac{1}{a}\int_M^P u_x\,dx$$

Подст. в (1):

$$-\int_P^Q u_t\,dx+a\int_Q^M(u_t\,dt+u_x\,dx)-a\int_M^P(u_t\,dt+u_x\,dx)=-\int_P^Q u_t\,dx+a(u(M)-u(Q))-$$

$$-a(u(P)-u(M))=\iint\limits_{\Delta PQM} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$u(M)=\frac{\overset{\varphi(P)}{u(P)}+\overset{\varphi(Q)}{u(Q)}}{2}+\frac{1}{2a}\int_P^Q \overbrace{u_t(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\,d\alpha+\frac{1}{2a}\iint\limits_{\Delta PQM} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)\,d\alpha\,d\tau$$

166 $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & (x,t)\in\Omega=\mathbb{R}\times[0,\infty) \\ u(x,0)=0 & x\in\mathbb{R}_1 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

Теорема Если $f(x,t)\in C^1(\Omega_\infty)$ => классич. решение $\exists u!$:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

167 а) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (x,t)\in\Omega_+=\mathbb{R}^+\times(0,\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\overline{\mathbb{R}}^+ \\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u(0,t)=0, & t\in[0,\infty) \end{cases}$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(\alpha)d\alpha$$ — решение задачи

Если $x+at > x-at \geq 0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$ и $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$

Если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=-\varphi(at-x)$ и $\psi_1(x-at)=-\psi(at-x)$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, & t\in[0,\frac{x}{a}], x>0\\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, & t\geq\frac{x}{a}, x>0.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (x,t)\in\Omega_+\\ u(x,0)=\varphi(x)\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\bar{R}^+\\ u_x(0,t)=0, & t\in[0,+\infty)\end{cases}$

$\varphi_2=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases}$

$\psi_2=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$

$$u(x,t)=\frac{\varphi_2(x+at)+\varphi_2(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_2(\alpha)d\alpha$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, & t\in(0,\frac{x}{a}], x>0\\ \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int\limits_0^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha\right), & t\geq\frac{x}{a}, x>0\end{cases}$$

168) $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (x,t)\in\Omega_+\\ u(x,0)=0 & x\in\bar{R}^+\\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\mu(t), & t\in[0,+\infty)\end{cases}$

$u(x,t)=\begin{cases}0, & t\in(0,\frac{x}{a})\\ \mu(t-\frac{x}{a}), & t>\frac{x}{a}\end{cases}$

$u(x,t)=f(x-at)$! прим возб - правовой решение стр 334

Опр форму функц f из нач и гр условий $u(x,0)=f(x)=0$, $x\geq0$

$f(-at)=\mu(t)$, $t\geq0$

$u_t(x,0)=-af'(x)=0$, $x\geq0$

$f(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\geq0\\ \mu(-\frac{\xi}{a}), & \xi\leq0\end{cases}$

(169) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t) & (M,t) \in \Omega_3 \\ u(M,0) = \varphi(M) & M \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(M,0) = \psi(M) & \\ u(M,t) \in C^{(2)}(\Omega_3) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}_3) \end{cases}$

$r = r_{M_0P}$

(170) Ф-ла Кирхгофа стр 341

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P, t_0 - \frac{r}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ra} \frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial r}{\partial n_P} \right) d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a^2} \int_D \frac{f\left(M, t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}} dV_M.$$

(171) Ф-ла Пуассона в 3-хм случае.

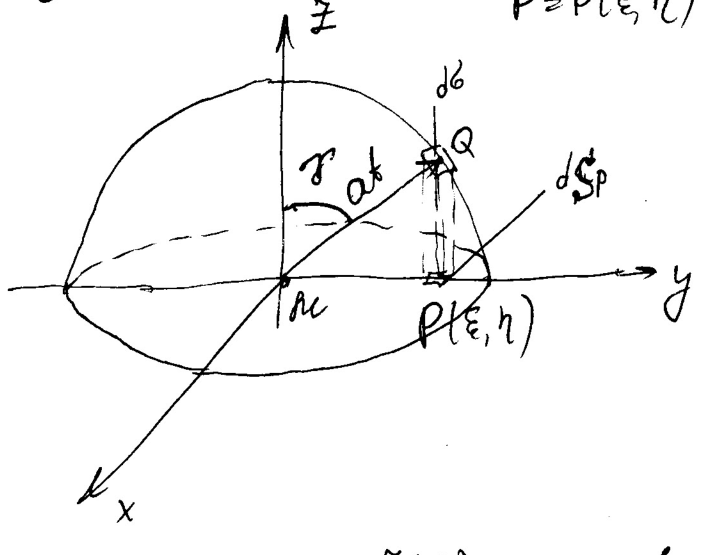
$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_M^{at}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM}} d\sigma_P + \int_{\Sigma_M^{at}} \frac{\psi(P)}{r_{PM}} d\sigma_P \right) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K_M^{at}} \frac{f\left(Q, t - \frac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}} dV_Q$$

сфера   шар

(172) Метод "спуска" Адамара. стр 346

Из ф-лы для больш числа пер получ ф-лу с меньшим числом пер.

$P = P(\xi,\eta)$ $M = M(x,y)$



$$d\sigma = \frac{dS_P}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$$

$$\frac{d\sigma}{at} = \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_{K_{at}^M} \frac{f\left(Q, t - \frac{r_{MQ}}{a}\right)}{r_{MQ}} dV_Q = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} d(a\tau) \int_{\Sigma_{a\tau}^M} \frac{f\left(Q, t - \frac{r_{MQ}}{a}\right)}{r_{MQ}} dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_{a\tau}^M} f(Q, t-\tau)\, r_{MQ}\, d\omega$$

973

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{U_M^{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+\int\limits_{U_M^{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right)+$$

круг

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\int\limits_{U_M^{a\tau}}\frac{f(\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$