

Рассмотрение классических решений, то есть решений, имеющих все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющих уравнению, граничным и начальным условиям, накладывает существенные ограничения на исходные данные задачи. Вместе с тем при выводе основных дифференциальных уравнений было показано, что если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений, то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Такие решения называют обобщенными. В зависимости от рассматриваемых интегральных уравнений получают различные классы обобщенных решений.

Некоторые сведения об интеграле Лебега

Всякое подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль; объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, если множество точек Ω , на которых оно не выполняется, имеет меру нуль. Если f и g — измеримые функции, то $f + g, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g), |f|, f/g (g \neq 0)$ — измеримые функции. Класс таких функций $f(x)$ обозначают L^+ . Определение корректно, если интеграл Лебега функции $f \in L^+$ не зависит от выбора последовательности $\{f_k\}$. Можно показать (cite: 1, стр.18), что если $f \in L^+, f(x) \geq 0$ почти всюду и $\{f_k\}$ — последовательность, определяющая интеграл Лебега функции f , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} f_k(x) dx \geq 0$$

Пусть $\{g_j\}$ — некоторая другая последовательность, определяющая интеграл $\int_{\mathbb{R}_n} f dx$.

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k - g_j) = f - g_j \geq 0$ почти всюду, откуда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} (f_k - g_j) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} f_k dx - \int_{\mathbb{R}_n} g_j dx \geq 0,$$

то есть

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} g_j dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} f_k dx$$

Аналогичным образом получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} f_k dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} g_j dx$$

Таким образом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} f_k dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_n} g_j dx$$

Покажем, что определение корректно. Пусть функцию f можно также представить в виде $f = f'_1 - f'_2, f'_{1,2} \in L^+$. Тогда $f_1 - f_2 = f'_1 - f'_2$, и следовательно $f_1 + f'_2 = f'_1 + f_2$, причем $f_1 + f'_2 \in L^+, f'_1 + f_2 \in L^+$ и

$$\int_{\mathbb{R}_n} (f_1 + f_2) dx = \int_{\mathbb{R}_n} (f_1' + f_2') dx$$

Но тогда

$$\int_{\mathbb{R}_n} (f_1 - f_2) dx = \int_{\mathbb{R}_n} (f_1' - f_2') dx$$

что и требовалось доказать.

Если A — измеримое множество, то существует интеграл

$$\int_A dx = \int_{\mathbb{R}_n} \chi_A dx, \quad \#$$

называемый Лебеговой мерой множества A .

Комплекснозначная функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу, если f и f' интегрируемы по Лебегу. При этом

$$\int_{\mathbb{R}_n} f dx \equiv \int_{\mathbb{R}_n} f dx + i \int_{\mathbb{R}_n} f dx \quad \#$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A , то есть $f \in L(A)$, если $f \cdot \chi_A \in L$. Число

$$\int_{\mathbb{R}_n} f(x) \cdot \chi_A(x) dx = \int_A f(x) dx \quad \#$$

назовем интегралом Лебега функции f по множеству A .

Свойства интеграла Лебега. (Доказательства можно найти в книгах Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя cite: 3, глава II, а также Колмогорова А.Н. и Фомина С.В. cite: 2, глава V)

1. Если $f \in L$, $\int_{\mathbb{R}_n} |f(x)| dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду и обратно.

2. Если $f \in L$, то $|f| \in L$; если f измерима и $|f| \in L$, то $f \in L$. При этом

$$\left| \int_{\mathbb{R}_n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}_n} |f(x)| dx \quad \#$$

3. Если $g \in L$, f — измерима и $|f| \leq g$ почти всюду, то $f \in L$ и

$$\left| \int_{\mathbb{R}_n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}_n} g(x) dx \quad \#$$

4. Если $f, g \in L$, λ и μ — комплексные числа, то $\lambda f + \mu g \in L$ и

$$\int_{\mathbb{R}_n} \{\lambda f + \mu g\} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}_n} f dx + \mu \int_{\mathbb{R}_n} g dx \quad \#$$

5. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега: если $f \in L(G)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists G' \subset G$:

$$\int_{G'} |f(x)| dx < \varepsilon \quad \#$$

6. Теорема Лебега (предельный переход под знаком интеграла Лебега): 7. Теорема Б. Леви: 8. Замена переменных в интеграле Лебега: пусть $x = x(y) \in C^1(\bar{G}_1)$, то есть

$$x_k = x_k(y_1, \dots, y_n), k = 1, 2, \dots, n, x_k \in C^1(\bar{G}_1),$$

где $y \in \bar{G}_1$. Пусть при этом все значения x принадлежат области G , а преобразование

является взаимно однозначным: $G \ni G_1, D(x/y)$ — якобиан перехода. Для того, чтобы $f(x) \in L(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x(y)) \cdot D(x/y) \in L(G_1)$$

При этом

$$\int_G f(x) dx = \int_{G_1} f(x(y)) |D(x/y)| dy \quad \#$$

9. Теорема Фубини о перемене порядка интегрирования:

Основные функциональные пространства

В таком пространстве можно ввести естественную метрику: расстояние между элементами u и v определим как

$$\rho(u, v) = \|u - v\|$$

Сильную сходимость обозначают как $u_n \rightarrow u$.

Для любых $u, v \in H$ справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

В гильбертовом пространстве H кроме сильной сходимости рассматривают также слабую сходимость:

Для слабой сходимости принято обозначение $u_n \rightharpoonup u$.

Пусть Ω — некоторая область в евклидовом пространстве \mathbb{R}_n .

Элемент $L_p(\Omega)$ — это не одна какая-то функция, а целый класс функций, эквивалентных на Ω , то есть совпадающих почти всюду на Ω . Особую роль в приложениях играют пространства $L_1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \bar{g}(x) dx, \quad \#$$

где черта над функцией $g(x)$ означает комплексное сопряжение (это обозначение будет использоваться и далее по тексту, поэтому больше расшифровывать его не будем).

Будем обозначать множество всех непрерывных на Ω функций, имеющих на Ω непрерывные производные до порядка p включительно, как $C^p(\Omega)$, и множество всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на Ω , как $C^\infty(\Omega)$. Носителем функции $f(x)$ называют множество $\text{supp}(f)$, такое что $f(x) \equiv 0$, если x не принадлежит $\text{supp}(f)$.

$\dot{C}^\infty(\Omega)$ — подмножество $C^\infty(\Omega)$, состоящее из функций с компактным носителем, который расположен строго внутри Ω .

Пусть область Ω является областью с "не слишком плохой границей", то есть принадлежит классу так называемых "строго липшицевых областей" cite: 6. К ним относятся, например, области с гладкой границей, а также звездные области (область Ω называется звездной, если уравнение ее границы $\partial\Omega$ можно задать с помощью непрерывной положительной функции $f(\theta)$, где θ — точка единичной сферы, в виде $x = x^0 + f(\theta)n_\theta$, где n_θ — единичный вектор, соответствующий точке θ).

Рассмотрим совокупность $C^l(\bar{\Omega})$ всех функций $f(x)$, имеющих в $\bar{\Omega}$ (то есть в

области Ω вместе с ее границей $\partial\Omega$) непрерывные производные по x_1, \dots, x_n до порядка l включительно и введем в $C^l(\bar{\Omega})$ норму

$$\|f\|_{W_m^l(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{k=0}^l \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|^m dx \right\}^{1/m} \quad \#$$

в которой $m \geq 1$, а $\sum_{(k)}$ есть суммирование всех возможных производных порядка k . Множество $C^l(\bar{\Omega})$ не является полным относительно указанной нормы. Рассмотрим в нем все возможные фундаментальные последовательности, в которых сходимость понимается как сходимость по норме (ref: normWml) и пополним $C^l(\bar{\Omega})$ пределами этих последовательностей. Такая процедура называется пополнением по норме.

Подпространство $W_m^l(\Omega)$ пространства $W_m^l(\Omega)$ получается замыканием по норме (ref: normWml) множества $C^\infty(\Omega)$.

Важный для приложений частный случай пространства $W_m^l(\Omega)$ – пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ получается пополнением множества всех непрерывных функций $f(x)$, имеющих в области Ω непрерывные частные производные 1-го порядка, по норме

$$\|f\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(|f(x)|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx \right\}^{1/2} \quad \#$$

Это пространство является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(f(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} \right) dx \quad \#$$

и играет важную роль при изучении краевых задач для уравнений второго порядка различных типов. В частности, его подпространство $W_2^1(\Omega)$ используется при исследовании задач Дирихле.

Обобщенные производные порядка k и их свойства.

Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}_n . Используя равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ u \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\} dx = 0; k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \quad \#$$

справедливое для любых двух бесконечно дифференцируемых в области Ω функций $u(x)$ и $v(x)$, где $v(x) \in C^\infty(\Omega)$, можно ввести понятие обобщенной производной функции $u(x)$, а именно: Обобщенные производные сохраняют много, но не все свойства обычных классических производных cite: 4, cite: 5 :

1. Пусть функции u_1 и u_2 имеют обобщенные производные вида $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в области Ω . Тогда

$$\frac{\partial^k (C_1 u_1 + C_2 u_2)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = C_1 \frac{\partial^k u_1}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + C_2 \frac{\partial^k u_2}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad \#$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

2. Пусть $v = \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}$ и $w = \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в области Ω . Тогда

$$w = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_1^{k_1+l_1} \dots \partial x_n^{k_n+l_n}} \quad \#$$

3. Обобщенная производная не зависит от порядка дифференцирования.

4. Для сохранения правила

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_i} = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} u_2 \quad \#$$

нужно потребовать, чтобы u_k и $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ ($k = 1, 2$) были квадратично интегрируемы в смысле Лебега по $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$.

5. Из существования обобщенных производных вида $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ не следует

существование производных более низкого порядка. Но если функция $u(x)$ имеет обобщенные производные k -го порядка всех видов, и p -е степени ($p > 1$) модулей самой функции $u(x)$ и этих производных интегрируемы (в смысле Лебега) по $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$, то u имеет все обобщенные производные порядка ниже k , принадлежащие $L_p(\Omega')$.

6. Обобщенные производные определяются с точностью до множества меры нуль и "привязаны" к области Ω . Их следует рассматривать не как одну функцию, а как целый класс эквивалентных функций, различающихся на множестве меры нуль. 7. Пусть функция u зависит от одной переменной $x \in [0, l]$ и является абсолютно непрерывной на $[0, l]$. Тогда она имеет почти всюду обычную производную $\frac{du}{dx}$, интегрируемую на $[0, l]$, причем

$$u(x) = u(x_1) + \int_{x_1}^x \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau; x_1, x_2 \in [0, l] \quad \#$$

Определенная таким образом производная $\frac{du}{dx}$ является обобщенной производной функции u на $[0, l]$. Верно утверждение: если $u \in L_1(0, l)$, имеет на $(0, l)$ обобщенную производную $\frac{du}{dx} \in L_1(0, l)$ (то есть $u \in W_1^1(0, l)$), то $u(x)$ эквивалентна абсолютно непрерывной на $[0, l]$ функции, для которой справедливо равенство (ref: gen_diff6).

8. Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$ и $\exists \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_1(\Omega)$. Тогда $u(x)$ абсолютно непрерывна по x_1 при почти всех значениях $x' \equiv (x_2, \dots, x_n)$.

9. Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и пусть $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ — невырожденная замена переменных в области $\bar{\Omega}$: y_i — непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции, обобщенные производные $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ ограничены, якобиан $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \geq C > 0$ в области $\bar{\Omega}$ и обратные функции $x = x(y)$ имеют те же свойства. Тогда $\tilde{u}(y) = u(x(y)) \in L_1(\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\Omega}$ — область изменения y , кроме того $\exists \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \in L_1(\tilde{\Omega})$, причем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x=x(y)} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \quad \#$$

Теорема остается справедливой, если $u_s \in L_p(\Omega)$ и обладают обобщенными производными указанного типа.

Примеры

Решение. По определению обобщенной производной первого порядка, должно выполняться равенство

$$\int_0^1 \left(u(x) \frac{dv}{dx} + w_1 v \right) dx = 0, \forall v \in \dot{C}^\infty[0, 1].$$

#

Так как при $x \in [0, 1/2)$ и $x \in (1/2, 1]$ функция $u(x)$ гладкая, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x) \frac{dv}{dx} dx &= \int_0^{1/2} u(x) \frac{dv}{dx} dx + \int_{1/2}^1 u(x) \frac{dv}{dx} dx = \\ &= u(1/2 - 0)v(1/2) - \int_0^{1/2} v(x) \frac{du}{dx} dx - u(1/2 + 0)v(1/2) - \int_{1/2}^1 v(x) \frac{du}{dx} dx = \\ &= - \int_0^1 v(x) \frac{du}{dx} dx - v(1/2)[u]_{x=1/2}, \end{aligned}$$

где $[u]_{x=1/2}$ — скачек функции $u(x)$ в точке разрыва $x = 1/2$. Так как в общем случае $v(1/2) \neq 0$, то такой функции w_1 , что выполняется равенство (ref: ex1) для любой $v \in \dot{C}^\infty[0, 1]$ не существует. Следовательно, функция $u(x)$ не имеет даже обобщенных производных.

Решение. Покажем сначала, что функция $u(x)$ интегрируема по указанной области:

$$\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^\varepsilon} dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho^\varepsilon} \rho d\rho < \infty,$$

так как $0 < \varepsilon < 1$. Здесь $x_1 = \rho \cos \varphi$ и $x_2 = \rho \sin \varphi$. Пусть $v(x)$ — произвольная функция из $\dot{C}^\infty(|x| < 1)$. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{\rho^\varepsilon} \left\{ \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^{1-\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho - \int_0^{2\pi} \rho^{-\varepsilon} d\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \rho^{1-\varepsilon} \cos \varphi v \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int_0^1 (1-\varepsilon) \rho^{-\varepsilon} \cos \varphi v d\rho \right\} - \int_0^{2\pi} \rho^{-\varepsilon} d\rho \left\{ \sin \varphi v \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \int_0^{2\pi} v \cos \varphi d\varphi \right\} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varepsilon \rho^{-\varepsilon} \cos \varphi v d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left\{ \varepsilon \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^{2+\varepsilon}} \right\} v \rho d\rho = \int_{|x| \leq 1} \left\{ \varepsilon \frac{x_1}{|x|^{2+\varepsilon}} \right\} v dx \end{aligned}$$

Таким образом $u_{x_1} = -\varepsilon \frac{x_1}{|x|^{2+\varepsilon}}$. Аналогичным образом можно показать, что $u_{x_2} = -\varepsilon \frac{x_2}{|x|^{2+\varepsilon}}$. При этом рассматриваемую функцию $u(x)$ нельзя сделать непрерывной (и даже ограниченной) с помощью ее преобразования на множестве меры нуль.

Теоремы вложения

Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства, обладающих тем свойством, что все элементы B_1 одновременно принадлежат и пространству B_2 , и выполняется неравенство

$$\|u\|_{B_2} \leq C \cdot \|u\|_{B_1}$$

для любого $u \in B_1$, где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда говорят, что пространство B_1 вкладывается (ограниченно) в пространство B_2 . Если же при этом всякое ограниченное в B_1 множество оказывается компактным в B_2 , то такое вложение пространства B_1 в B_2 называют компактным.

Для Соболевских пространств $W_m^l(\Omega)$ доказан достаточно широкий круг теорем вложения [4]: [7]. В данном пособии будут приведены только те из них, которые понадобятся при исследовании существования и единственности решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}_n . В пространстве $W_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int_{\Omega} u_x v_x dx \equiv \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx, \quad \#$$

порождающее норму, эквивалентную исходной. Очевидно, что $[u, u] \leq (u, u)_{W_2^1(\Omega)}$ для любого $u \in W_2^1(\Omega)$, поэтому для доказательства эквивалентности норм достаточно показать, что $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо *неравенство Пуанкаре - Фридрихса*

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_{\Omega}^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx \quad \#$$

где C_{Ω} — постоянная, которая зависит только от области Ω .

Доказательство. Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$. К этому элементу можно приблизиться по норме $W_2^1(\Omega)$ с помощью функций $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega)$. Если для u_m неравенство (ref: Puan1) справедливо, то, переходя в нем к пределу по норме $W_2^1(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$, получим соответствующее неравенство для $u \in W_2^1(\Omega)$. Эта процедура называется "замыканием по норме".

Пусть $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Заклучим область Ω в какой-либо параллелепипед $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, \dots, n\}$. Пусть l_1 — наименьшая из длин его сторон. Продолжим u нулем вне области Ω . Тогда

$$u(x_1, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1,$$

где $x' = \{x_2, \dots, x_n\} \in \Pi_1 = \{x' : 0 < x_i < l_i; i = 2, \dots, n\}$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} u^2 dx &= \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left\{ \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right\}^2 dx' \leq \int_0^{l_1} x_1 dx_1 \int_{\Pi_1} \left\{ \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 dy_1 \right\} dx' = \\ &= \frac{l_1^2}{2} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx, \quad \# \end{aligned}$$

откуда получаем $C_{\Omega}^2 = \frac{l_1^2}{2}$. При выводе (ref: Puan2) было использовано неравенство Коши-Буняковского для оценки внутреннего интеграла:

$$\left\{ \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right\}^2 dx' \leq \int_0^{x_1} dy_1 \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 dy_1$$

Для доказательства следующей ключевой теоремы потребуется *неравенство*

Пуанкаре: для любой $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Pi)$, $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, \dots, n\}$ справедливо

$$\int_{\Pi} u^2 dx \leq \frac{1}{|\Pi|} \left(\int_{\Pi} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \int_{\Pi} \sum_{k=1}^n l_k^2 u_{x_k}^2 dx, \quad \#$$

где $|\Pi|$ — объем параллелепипеда Π . Неравенство (ref: eq1) достаточно проверить для гладких функций $u \in C^1(\Pi)$. Пусть $y_i = x_i/l_i$, $\tilde{u}(y) = u(l_1 y_1, \dots, l_n y_n)$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\int_{\tilde{\Pi}} \tilde{u}^2 dy \leq \left(\int_{\tilde{\Pi}} \tilde{u} dy \right)^2 + \frac{n}{2} \int_{\tilde{\Pi}} \sum_{k=1}^n \tilde{u}_{y_k}^2 dy, \quad \#$$

где $\tilde{\Pi} = \{y : 0 < y_i < 1; i = 1, \dots, n\}$.

Будем считать точку $y \in \tilde{\Pi}$ заданной и выберем произвольную точку $y' \in \tilde{\Pi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y') - \tilde{u}(y) &= \int_y^{y^{(1)}} \tilde{u}_{\tau_1}(\tau_1, y_2, \dots, y_n) d\tau_1 + \int_{y^{(1)}}^{y^{(2)}} \tilde{u}_{\tau_2}(y'_1, \tau_2, y_3, \dots, y_n) d\tau_2 + \dots \\ &\quad + \int_{y^{(n-1)}}^{y^{(n)}} \tilde{u}_{\tau_n}(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n-1}, \tau_n) d\tau_n, \end{aligned} \quad \#$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, $y^{(1)} = (y'_1, y_2, \dots, y_n)$, ..., $y^{(n-1)} = (y'_1, y'_2, \dots, y'_{n-1}, y_n)$, $y^{(n)} = y'$. Возведем обе части равенства (ref: eq3) в квадрат:

$$\tilde{u}^2(y') - 2\tilde{u}(y')\tilde{u}(y) + \tilde{u}^2(y) \leq n \left\{ \int_0^1 \tilde{u}_{\tau_1}^2 d\tau_1 + \dots + \int_0^1 \tilde{u}_{\tau_n}^2 d\tau_n \right\}$$

и проинтегрируем полученное равенство по $y \in \tilde{\Pi}$ и $y' \in \tilde{\Pi}$

$$2 \int_{\tilde{\Pi}} \tilde{u}^2 dy - 2 \left(\int_{\tilde{\Pi}} \tilde{u} dy \right)^2 \leq n \int_{\tilde{\Pi}} \sum_{k=1}^n \tilde{u}_{y_k}^2 dy,$$

откуда получаем (ref: eq2).

Доказательство. Продолжим все элементы $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ нулем вне Ω и рассмотрим их на параллелепипеде $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, \dots, n\}$, считая $\Omega \subset \Pi$. При этом мы

получим элементы $\overset{\circ}{W}_2^1(\Pi)$, нормы которых $\|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1(\Pi)}$ совпадают с $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ соответственно.

Разобьем Π на N^n элементарных параллелепипедов w_i со сторонами l_k/N , $k = 1, \dots, n$, и гранями, параллельными координатным плоскостям. Для любой $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(w_i)$ справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\int_{w_i} u^2 dx \leq \frac{1}{|w_i|} \left(\int_{w_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \int_{w_i} \sum_{k=1}^n \left(\frac{l_k}{N} \right)^2 u_{x_k}^2 dx$$

Следовательно

$$\int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Pi} u^2 dx = \sum_{i=1}^{N^n} \int_{w_i} u^2 dx \leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|w_i|} \left(\int_{w_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n l_k^2 u_{x_k}^2 dx \quad \#$$

Пусть $\{u^{(m)}\}$ — ограниченная последовательность в $W_2^1(\Omega)$, то есть $\|u^{(m)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C$, где C — некоторая положительная константа. Нужно показать, что из последовательности $\{u^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится сильно в пространстве $L_2(\Omega)$. Так как последовательность $\{u^{(m)}\}$ ограничена в $L_2(\Omega)$, то по теореме 2.9 она является слабо компактной. Не ограничивая общности, предположим, что вся последовательность $\{u^{(m)}\}$ слабо сходится в $L_2(\Omega)$. Тогда, применяя неравенство (ref: est_u), для любых $p, q > 0$ получим

$$\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u^{(p)} - u^{(q)})^2 dx \leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|w_i|} \left(\int_{w_i} (u^{(p)} - u^{(q)}) dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \max_k(l_k^2) \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \quad \#$$

Второе слагаемое в (ref: eq4) выбором N может быть сделано сколь угодно малым сразу для всех p и q . Первое слагаемое стремится к нулю при p и q , стремящихся к бесконечности, и фиксированном разбиении параллелепипеда Π за счет слабой сходимости последовательности $\{u^{(m)}\}$ в $L_2(\Pi)$, так как

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \int_{w_i} (u^{(p)} - u^{(q)}) dx = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} (u^{(p)} - u^{(q)}, 1)_{L_2(w_i)} = 0$$

Таким образом, $\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $p, q \rightarrow \infty$, то есть последовательность $\{u^{(m)}\}$ сходится в $L_2(\Pi)$, а значит и в $L_2(\Omega)$, что и требовалось доказать. ■

Пусть область Ω допускает продолжение элементов $W_2^1(\Omega)$ на какую-либо более широкую область $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ в смысле

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \leq C(\Omega, \tilde{\Omega}) \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} \quad \#$$

$$\|u_x\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \leq C'(\Omega, \tilde{\Omega}) \cdot \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \#$$

где константы C и C' зависят только от областей Ω и $\tilde{\Omega}$. Тогда такого вида продолжение возможно и на параллелепипед $\Pi \supset \tilde{\Omega}$. Очевидно, $W_2^1(\Pi)$ вкладывается компактно в $L_2(\Pi)$, поэтому для областей Ω , допускающих указанное продолжение (ref: expan1-ref: expan2), пространство $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega)$. (Такого вида продолжение элементов имеет место для строго липшицевых областей).

Обратимся теперь к вопросу о следах элементов $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ на поверхностях размерности $n - 1$. Пусть $u(x)$ — гладкая функция из $W_2^1(\Omega)$ и Γ — область гиперплоскости $x_1 = 0$. Обозначим $Q_\delta(\Gamma) = \{x : 0 < x_1 < \delta; x' = (x_2, \dots, x_n) \in \Gamma\}$, где $\delta > 0$ таково, что $Q_\delta(\Gamma) \in \Omega$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$u(x_1, x') - u(0, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau$$

откуда получаем

$$u^2(0, x') = \left\{ -u(x) + \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right\}^2$$

Проинтегрируем это равенство по $Q_\delta(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\delta(\Gamma)} u^2(0, x') dx &= \delta \int_\Gamma u^2(0, x') dx' = \int_{Q_\delta(\Gamma)} \left\{ -u(x) + \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right\}^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_{Q_\delta(\Gamma)} u^2 dx + 2 \int_\Gamma dx' \int_0^\delta \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right)^2 dx_1 \leq \\ &\leq 2 \|u\|_{L_2(Q_\delta(\Gamma))}^2 + 2 \int_\Gamma dx' \int_0^\delta \int_0^\delta \left(\frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} \right)^2 d\tau dx_1 = 2 \|u\|_{L_2(Q_\delta(\Gamma))}^2 + \delta^2 \int_{Q_\delta(\Gamma)} u_{x_1}^2 dx \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем неравенство

$$\|u(0, x')\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq \frac{2}{\delta} \|u\|_{L_2(Q_\delta(\Gamma))}^2 + \delta \|u\|_{W_2^1(Q_\delta(\Gamma))}^2 \quad \#$$

Это неравенство останется справедливым для любой $u \in W_2^1(Q_\delta(\Gamma))$. Для такой функции $u(x)$ можно построить последовательность гладких функций $\{u^{(m)}(x)\}$, которые сходятся к $u(x)$ по норме $W_2^1(Q_\delta(\Gamma))$. Отсюда и из неравенства (ref: tr_1) следует, что последовательность $\{u^{(m)}(0, x')\}$ будет сходить в $L_2(\Gamma)$. Функцию, определяемую на Γ как предел последовательности $\{u^{(m)}(0, x')\}$ по норме $L_2(\Gamma)$, естественно считать следом $u(x)$ на Γ . Определенный таким образом след элемента не зависит от выбора последовательности гладких функций, аппроксимирующих $u(x)$.

Утверждения, доказанные для плоских кусков Γ , переносятся на случай, когда Γ есть область на гладкой гиперповерхности, в том числе и на гладкой части границы области Ω cite: 4:

Обобщенные решения уравнений эллиптического типа

Постановка краевых задач

Будем рассматривать уравнения следующего вида:

$$L[u] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x) u(x) \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \quad \#$$

в некоторой области Ω , где $a_{ij} = a_{ji}$ и при $\forall x \in \bar{\Omega}$ для этих коэффициентов имеет место свойство равномерной эллиптичности:

$$v \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_n,$$

где v и μ — некоторые положительные постоянные. Будем считать, что коэффициенты $a_i(x)$, $b_i(x)$, $a(x)$ — ограниченные в Ω функции. Функции a_{ij} , a_i , f_i , вообще говоря, не обязаны иметь даже обобщенные производные. Если они имеют производные, уравнение (ref: gen_eq1) можно записать в традиционной форме:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i u_{x_i} + \tilde{a} u = F \quad \#$$

$$\text{где } \tilde{a}_i = b_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + a_i, \tilde{a} = a + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, F = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}.$$

Будем рассматривать в области Ω следующие краевые задачи:

задачу Дирихле: $u|_S = \psi(p)$, $p \in S$, где S — граница области Ω ;

задачу Неймана: $\frac{\partial u}{\partial N}|_S = \psi(p)$, где $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}\hat{x}_i)$, \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к S , $\mathbf{n}\hat{x}_i$ — угол между \mathbf{n} и осью Ox_i ;

третью краевую задачу: $\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(p)u|_S = \psi(p)$.

Во всех этих задачах определению подлежит только функция u , все остальные функции, равно как и области, в которых должны выполняться уравнения, считаются заданными. Все перечисленные задачи можно свести к задачам с однородными граничными условиями ($\psi \equiv 0$). Действительно, если ввести новую неизвестную функцию $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая только краевому условию, то для v получится задача с соответствующим однородным краевым условием. При этом v должна быть решением уравнения

$$L[v] = \tilde{F} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i},$$

$$\text{где } \tilde{F} = f - \sum_{i=1}^n b_i \Phi_{x_i} - a\Phi \text{ и } \tilde{F}_i = f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Phi_{x_j} - a_i \Phi.$$

Обобщенные решения, принадлежащие пространству $W_2^1(\Omega)$

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} + a_i u \right) + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + a u = f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, x \in \Omega \\ u|_S = 0 \end{cases} \quad \#$$

Пусть $a_{ij} = a_{ji}$, $v\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu\xi^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}_n$, где $v, \mu = \text{const} > 0$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \mu_1, \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \leq \mu_1, \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \leq \mu_2, \mu_3 \leq a(x) \leq \mu_4.$$

Пусть f и f_i квадратично суммируемы по Ω :

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty, \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2} \right\|_{L_2(\Omega)} < \infty$$

Формально из тождества

$$-\int_{\Omega} \left(L[u] - f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \eta dx = 0, \forall \eta \in C^\infty(\Omega) \quad \#$$

с помощью однократного интегрирования по частям (применяя формулы Грина) получим

$$\mathcal{L}(u, \eta) \equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} \right) - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \eta - a u \eta \right) dx = \int_{\Omega} \left(-f \eta + \sum_{i=1}^n f_i \eta_{x_i} \right) dx \quad \#$$

Если коэффициенты a_{ij} , a_i имеют ограниченные обобщенные производные первого порядка, функции f_i имеют обобщенные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, а $u(x) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega')$, $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$, то обобщенное решение удовлетворяет уравнению в задаче (ref: prob1) почти всюду в Ω . Однако тождество (ref: prob3) имеет смысл и тогда, когда a_{ij} , a_i и f_i недифференцируемы, а относительно $u(x)$ известна лишь принадлежность $W_2^1(\Omega)$. Поэтому определение 5.1 действительно является расширением общепринятого понятия решения уравнения.

Исследование разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_2^1(\Omega)$ (три теоремы Фредгольма)

Введем в $W_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u, v] = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx \quad \#$$

В силу тех условий, что были наложены на функции $a_{ij}(x)$, норма $\|u\|_1 = \sqrt{[u, u]}$ эквивалентна норме $\|u_x\|_{L_2(\Omega)}$ и исходной норме $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$. Тождество (ref: prob3) можно записать в виде

$$[u, \eta] + l(u, \eta) = -(f, \eta)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)}, \quad \#$$

где

$$l(u, \eta) \equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n a_i u \eta_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \eta - a u \eta \right) dx \quad \#$$

Очевидно, что $l(u, \eta)$ является билинейной формой на $W_2^1(\Omega) \otimes W_2^1(\Omega)$. В самом деле

$$l(\alpha u_1 + \beta u_2, \eta) = \alpha l(u_1, \eta) + \beta l(u_2, \eta)$$

$$l(u, \alpha \eta_1 + \beta \eta_2) = \alpha l(u, \eta_1) + \beta l(u, \eta_2)$$

Оценим модуль $l(u, \eta)$

$$\begin{aligned} |l(u, \eta)| &\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \cdot |u| \cdot |\eta_{x_i}| + \sum_{i=1}^n |b_i| \cdot |u_{x_i}| \cdot |\eta| + |a| \cdot |u| \cdot |\eta| \right) dx \leq \\ &\leq \mu_1 \left(\int_{\Omega} |u| \sqrt{\sum_{i=1}^n |\eta_{x_i}|^2} dx + \int_{\Omega} |\eta| \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2} dx \right) + \max(|\mu_3|, |\mu_4|) \int_{\Omega} |u| \cdot |\eta| dx \leq \\ &\leq \mu_1 (\|u\|_{L_2(\Omega)} \|\eta_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)}) + \max(|\mu_3|, |\mu_4|) \|u\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \cdot \|u\|_1 \cdot \|\eta\|_1 \quad \# \end{aligned}$$

Если мы фиксируем произвольное $u \in W_2^1(\Omega)$ и будем рассматривать $l(u, \eta)$ для всех возможных $\eta \in W_2^1(\Omega)$, то получим не что иное, как линейный функционал над элементами η в пространстве $W_2^1(\Omega)$, причем в силу оценки (ref: estim1) этот функционал является ограниченным. В дальнейшем это позволит нам сформулировать обобщенную постановку задачи (ref: prob1) в виде операторного уравнения в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Приведем одну полезную теорему о свойствах линейных ограниченных функционалов над элементами гильбертовых пространств.

Доказательство. Пусть $M = \{u \in h : l(u) = 0\}$, тогда M — замкнутое линейное подпространство пространства h . Если $M = h$, то можно взять $w = 0$. Если $M \neq h$, то $\exists u_0 \in h : l(u_0) \neq 0$. Не ограничивая общности можем положить $l(u_0) = 1$. Этот элемент можно представить в виде $u_0 = v_0 + w_0$, где $v_0 \in M$, $w_0 \in M^\perp$ (ортогональное дополнение M). Тогда $(u_0, w_0) = \|w_0\|^2 \neq 0$, так как в случае $w_0 = 0$ $u_0 \in M$, то есть $l(u_0) = 0$, что невозможно.

Пусть u — произвольный элемент h , тогда $v = u - l(u)u_0 \in M$, так как $l(v) = l(u) - l(u) = 0$. Поэтому

$$0 = (v, w_0) = (u, w_0) - l(u)(u_0, w_0) \Rightarrow$$

$$l(u) = \frac{(u, w_0)}{\|w_0\|^2} \forall u \in h \Rightarrow w = w_0 \frac{1}{\|w_0\|^2}$$

Такой элемент w единственный, так как если $\exists \tilde{w} \neq w$, то

$$l(u) = (u, \tilde{w}) \Rightarrow (u, w - \tilde{w}) = 0 \forall u \in h \Rightarrow w - \tilde{w} = 0,$$

что невозможно. ■

Теорема Рисса позволяет сделать важный вывод об ограниченной билинейной форме $l(u, \eta)$:

существует линейный ограниченный оператор A , действующий в пространстве $W_2^1(\Omega)$, такой что

$$l(u, h) = [Au, \eta], \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

причем этот оператор A единственный.

В самом деле, если зафиксировать произвольное $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то по теореме Рисса найдется единственный элемент $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, такой что

$$l(u, \eta) = [v, \eta]$$

Так как u было выбрано произвольно, и для каждого u единственным образом определено свое v , то существует оператор A , ставящий элемент v в соответствие элементу u :

$$Au = v,$$

и этот оператор определен однозначно. Так как $l(u, \eta)$ — линейная по аргументу u форма, то

$$l(\alpha u_1 + \beta u_2, \eta) = [A(\alpha u_1 + \beta u_2), \eta] = \alpha l(u_1, \eta) + \beta l(u_2, \eta) =$$

$$= \alpha [Au_1, \eta] + \beta [Au_2, \eta] = [\alpha Au_1 + \beta Au_2, \eta],$$

то есть оператор A линейный. Покажем, что он ограниченный. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|[Au, \eta]| \leq \|Au\|_1 \cdot \|\eta\|_1$$

Следовательно, если $\|\eta\|_1 = 1$, то

$$\|Au\|_1 = \sup_{\|\eta\|_1=1} |[Au, \eta]| = \sup_{\|\eta\|_1=1} |l(u, \eta)| \leq C \|u\|_1$$

По определению нормы оператора

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_1=1} \|Au\|_1 \leq C$$

Сумма $(-f, \eta)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)}$ также определяет линейный функционал в

$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ над η , и в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $F \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$:

$$-(f, \eta)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)} = [F, \eta], \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

Таким образом, тождество (ref: prob4) эквивалентно тождеству

$$[u, \eta] + [Au, \eta] = [F, \eta], \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \quad \#$$

или же операторному уравнению

$$u + Au = F \quad \#$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Покажем, что A — вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Пусть $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$

— слабо сходящаяся к элементу $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ последовательность. Нужно показать, что последовательность $\{Au_k\}$ будет сходиться в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ сильно. Так как A — линейный ограниченный оператор, то последовательность $\{Au_k\}$ сходится слабо к Au :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [Au_k - Au, v] = \lim_{k \rightarrow \infty} [(u_k - u), A^*v] = 0 \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

Покажем, что последовательность $\{Au_k\}$ сходится сильно в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Оценим норму разности Au_k и Au_m , воспользовавшись неравенством (ref: estim1)

$$\begin{aligned} \|Au_k - Au_m\|_1^2 &= [A(u_k - u_m), A(u_k - u_m)] = l(u_k - u_m, A(u_k - u_m)) \leq \\ &\leq \mu_1 (\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)} \| (Au_k)_x - (Au_m)_x \|_{L_2} + \| (u_k)_x - (u_m)_x \|_{L_2(\Omega)} \|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)}) + \\ &\quad + \max(|\mu_3|, |\mu_4|) \|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)} \|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Так как пространство $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(\Omega)$, а последовательности $\{u_k\}$ и $\{Au_k\}$ слабо сходятся в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то $\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ и $\|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|Au_k - Au_m\|_1 \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$, то есть $\{Au_k\}$ — фундаментальная последовательность в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. В силу полноты пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ она сходится сильно, а это означает, что A является вполне непрерывным оператором.

Таким образом, для уравнения (ref: prob6), а значит и для (ref: prob1), справедлива первая теорема Фредгольма cite: 9:

Чтобы более подробно разобраться в вопросе разрешимости задачи (ref: prob1), рассмотрим семейство уравнений

$$L[u] = \lambda u + f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, x \in \Omega \quad \#$$

с комплексным параметром λ и граничными условиями

$$u|_{x \in S} = 0 \quad \#$$

Решение теперь является, вообще говоря, комплекснозначной функцией

$$u(x) = u'(x) + iu''(x)$$

Обобщенное решение задачи (ref: fam_eq-ref: bound_cond1) из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ определим как элемент пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \bar{\eta}) &\equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} + a_i u \bar{\eta}_{x_i} \right) - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar{\eta} - a u \bar{\eta} \right) dx = \# \\ &= -\lambda \int_{\Omega} u \bar{\eta} dx + \int_{\Omega} \left(-f \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n f_i \bar{\eta}_{x_i} \right) dx \end{aligned}$$

при любом $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Рассуждая также, как и выше, в случае вещественного $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, приходим к операторному уравнению

$$u + Au = \lambda Bu + F \quad \#$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Здесь

$$[Au, \eta] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n a_i u \bar{\eta}_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar{\eta} - a u \bar{\eta} \right) dx \quad \#$$

$$[Bu, \eta] = - \int_{\Omega} u \bar{\eta} dx \quad \#$$

$$[F, \eta] = \int_{\Omega} \left(-f \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n f_i \bar{\eta}_{x_i} \right) dx \quad \#$$

для любого $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Также, как и в предыдущем случае, можно показать, что A и B — линейные вполне непрерывные операторы. Кроме того $[Bu, \eta] = [u, B\eta]$ при $\forall u, \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $[Bu, u] < 0$ при $\forall u \neq 0$.

Запишем уравнение (ref: prob8) в виде

$$u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0) Bu + F \quad \#$$

Можно показать, что при достаточно большом вещественном λ_0 оператор

$$D = (E + A - \lambda_0 B)$$

таков, что

$$|[Dv, v]| \geq c_1 \|v\|_1^2, \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

где $c_1 > 0$. В самом деле

$$\begin{aligned} |[Dv, v]| &= \left| \|v\|_1^2 + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n a_i v \bar{v}_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} \bar{v} - a |v|^2 \right) dx + \lambda_0 \int_{\Omega} |u|^2 dx \right| \geq \\ &\geq (\lambda_0 - 1 - 2\mu_1 - \max\{|\mu_3|, |\mu_4|\}) \cdot \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

то есть достаточно взять $\lambda_0 > 1 + 2\mu_1 + \max\{|\mu_3|, |\mu_4|\}$. При таком λ_0 оператор D имеет ограниченный обратный. Но тогда (при таком λ_0) уравнение (ref: prob9) можно переписать в виде

$$u = (\lambda - \lambda_0) D^{-1} Bu + D^{-1} F \quad \#$$

Оператор $D^{-1}B$ является вполне непрерывным как произведение ограниченного и вполне непрерывного операторов. Поэтому для (ref: prob10), а значит и исходной задачи (ref: fam_eq-ref: bound_cond1), справедливы три теоремы Фредгольма cite: 9, которые в данном случае приобретают вид:

Рассмотрим подробнее уравнение (ref: eq_adj). Пусть $w = (D^*)^{-1}v$, тогда

$$D^*w = (\lambda - \lambda_0)Bw \Leftrightarrow$$

$$\mathfrak{L}^*(w, \bar{\eta}) \equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} + a_i w_{x_i} \bar{\eta} \right) - \sum_{i=1}^n b_i w \bar{\eta}_{x_i} - a w \bar{\eta} \right) dx = -\lambda \int_{\Omega} w \bar{\eta} dx$$

при любом $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Таким образом, $\bar{\lambda}_k$ является спектральным значением сопряженной задачи:

$$\begin{cases} L^*[w] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_{x_j} - b_i w \right) - \sum_{i=1}^n a_i w_{x_i} + a w = \lambda w, x \in \Omega \\ w = 0, x \in S \end{cases} \quad \#$$

Переходим к третьей теореме Фредгольма. Для уравнения (ref: prob10) она дает необходимое и достаточное условие разрешимости для спектральных значений λ . Если $\lambda = \lambda_k$, то задача (ref: prob10) разрешима для тех и только тех свободных членов $D^{-1}F$, которые ортогональны всем решениям v_k задачи (ref: eq_adj), соответствующим $\lambda = \bar{\lambda}_k$, то есть при условии

$$[D^{-1}F, v_k] = 0 \Leftrightarrow [F, (D^*)^{-1}v_k] = [F, w_k] = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left(-f \bar{w}_k + \sum_{i=1}^n f_i (\bar{w}_k)_{x_i} \right) dx = 0$$

где w_k — все обобщенные решения из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ задачи (ref: spec_adj), соответствующие $\lambda = \bar{\lambda}_k$.

Задача Дирихле для оператора Лапласа

Исследуем задачу Дирихле для оператора Лапласа как частный случай рассмотренной выше задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f, x \in \Omega \\ u|_S = 0 \end{cases} \quad \#$$

Нужно найти такую $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, которая для любого $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{L}(u, \eta) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i} \eta_{x_i} dx = - \int_{\Omega} f \eta dx$$

В данном случае спектральная задача (ref: spec) принимает вид

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i} \eta_{x_i} dx = -\lambda \int_{\Omega} u \eta dx, \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

Предположим, что решение этой спектральной задачи нам известно. Так как тождество должно выполняться для любой функции η , возьмем ее равной функции u :

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx = -\lambda \int_{\Omega} u^2 dx$$

По определению собственной функции $u \neq 0$ почти всюду, следовательно

$$-\lambda = \frac{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} \geq 0$$

Так как $u \in W_2^1(\Omega)$, то u не может почти всюду равняться отличной от нуля константе, а это означает, что все спектральные значения λ_k строго меньше нуля. Поэтому $\lambda = 0$, соответствующее исходной задаче Дирихле для оператора Лапласа, не совпадает ни с одним из спектральных значений, и задача (ref: Laplas1) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ при любой $f \in L_2(\Omega)$.

Если граница S области Ω является достаточно гладкой (является поверхностью Ляпунова), а функция f непрерывна вместе с первыми производными, то обобщенное решение будет также и классическим решением задачи (ref: Laplas1).

Вторая и третья краевые задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L[u] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a(x)u = \lambda u + f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u \Big|_S = 0 \end{cases} \quad \#$$

где $\sigma = \sigma(s)$ — заданная функция на поверхности S , $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \cos(nx_i)$ — производная по конормали, $\cos(nx_i)$ — косинус угла между единичной внешней по отношению к Ω нормалью n к поверхности S и осью Ox_i .

Пусть для коэффициентов оператора L , а также функции f выполнены те же условия, что и в пункте 5.2, и кроме того $|\sigma(s)| \leq \mu_5$, где μ_5 — некоторое положительное число. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность. Тогда для нее справедлива теорема 4.4, из которой следует, что элементы $W_2^1(\Omega)$ имеют следы на S , принадлежащие $L_2(S)$, и $W_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(S)$. В самом деле, пусть $\{u_k\}$ — слабо сходящаяся в $W_2^1(\Omega)$ к элементу $u \in W_2^1(\Omega)$ последовательность. Тогда найдется такое число $M > 0$, что $\|u_k\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M$ для всех k . Применяя формулу (ref: path1), получим

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_{L_2(S)}^2 &\leq C_1 \left(\frac{1}{\delta} \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \delta \|u_k - u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{C_1}{\delta} \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4\delta C_1 M^2 \end{aligned}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{8C_1 M^2}$. Тогда

$$\|u_k - u\|_{L_2(S)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C_1}{\delta} \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Так как $W_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(\Omega)$, то последовательность $\{u_k\}$ сходится в $L_2(\Omega)$ сильно, а это означает, что найдется такое k_0 , что для всех $k > k_0$ будет выполнено неравенство $\|u_k - u\|_{L_2(\Omega)}^2 < \frac{\varepsilon \delta}{2C_1}$, откуда следует, что при всех таких k

$$\|u_k - u\|_{L_2(S)}^2 < \varepsilon$$

Следовательно, $\{u_k\}$ сходится сильно в $L_2(S)$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи (ref: laplas2_3) в пространстве $W_2^1(\Omega)$, причем λ и u будем считать комплексными. Формально умножим уравнение в

задаче (ref: laplas2_3) на произвольную функцию $\bar{\eta} \in W_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем результат по Ω , учитывая граничные условия:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar{\eta} + (\lambda - a) u \bar{\eta} \right) dx + \int_S \sigma u \bar{\eta} ds = - \int_{\Omega} f \bar{\eta} dx \quad \#$$

Это соотношение имеет смысл для любых u и η из $W_2^1(\Omega)$, так как для рассматриваемой нами области Ω эти функции имеют следы на S , принадлежащие пространству $L_2(S)$. Если же функция u , удовлетворяющая тождеству (ref: slab_23) для любой $\eta \in W_2^1(\Omega)$ и коэффициенты оператора L достаточно гладкие, то $u(x)$ удовлетворяет также и тождеству

$$- \int_{\Omega} L[u] \bar{\eta} dx + \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u \right) \bar{\eta} ds = - \int_{\Omega} f \bar{\eta} dx$$

и, следовательно, в силу произвольности η , удовлетворяет исходной задаче в классическом смысле.

Далее можно повторить все те же рассуждения, которые были проведены при исследовании задачи Дирихле, но теперь для пространства $W_2^1(\Omega)$. Введем в $W_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} + u \bar{v} \right) dx$$

Порождаемая этим скалярным произведением норма эквивалентна исходной норме пространства $W_2^1(\Omega)$ в силу условий, наложенных на коэффициенты a_{ij} . Тождество (ref: slab_23) можно преобразовать к виду

$$[u, \eta] + [Au, \eta] - \lambda[Bu, \eta] + [Cu, \eta] = [F, \eta],$$

где операторы A , B и C определяются своими линейными по первому аргументу и косо-линейными по второму аргументу формами

$$[Au, \eta] = - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar{\eta} + (a + 1) u \bar{\eta} \right) dx \quad \#$$

$$[Bu, \eta] = - \int_{\Omega} u \bar{\eta} dx \quad \#$$

$$[Cu, \eta] = \int_S \sigma u \bar{\eta} ds \quad \#$$

а элемент F пространства $W_2^1(\Omega)$ определяется равенством

$$[F, \eta] = - \int_{\Omega} f \bar{\eta} dx \quad \#$$

Используя компактность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $L_2(S)$, можно показать, что операторы A , B и C вполне непрерывны. Таким образом, мы приходим к операторному уравнению в пространстве $W_2^1(\Omega)$:

$$u + Au - \lambda Bu + Cu = F,$$

для которого, как и для рассмотренного в случае задачи Дирихле, справедливы три теоремы Фредгольма.

Задача Неймана для уравнения Лапласа

Исследуем задачу Неймана для оператора Лапласа в качестве примера.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \varphi(p), p \in S \end{cases} \quad \#$$

Сформулируем обобщенную постановку задачи: нужно найти такую функцию $u \in W_2^1(\Omega)$, которая для любой $\eta \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} u_x \bar{\eta}_x dx = - \int_{\Omega} f \bar{\eta} dx + \int_S \varphi \bar{\eta} ds$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу

$$\int_{\Omega} u_x \bar{\eta}_x dx = -\lambda \int_{\Omega} u \bar{\eta} dx, \forall \eta \in W_2^1(\Omega) \quad \#$$

В данном случае она совпадает со спектральной задачей для сопряженного оператора. Очевидно, что $\lambda = 0$ является собственным значением, которому соответствует собственная функция, равная константе. Поэтому исходная задача разрешима только в том случае, когда выполнено условие

$$[F, w_0] = - \int_{\Omega} f \bar{w}_0 dx + \int_S \varphi \bar{w}_0 ds = 0$$

где w_0 — собственная функция спектральной задачи для сопряженного оператора. Так как $w_0 = const$, то условие разрешимости задачи приобретает вид

$$\int_S \varphi ds = 0$$

Если оно выполнено, то задача (ref: Neuman1) имеет обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$, определенное с точностью до аддитивной константы.

Если поверхность S является поверхностью Ляпунова, функция $f(x)$ непрерывна вместе с первыми производными, а $\varphi(p)$ непрерывна на S , то полученное обобщенное решение будет классическим.

- 1 *В.С. Владимиров* Уравнения математической физики. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981 г.
- 2 *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976 г.
- 3 *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь* Лекции по функциональному анализу. -М.Мир, 1979 г.
- 4 *О.А. Ладыженская* Краевые задачи математической физики. -М.: Наука, 1973 г.
- 5 *С.Л. Соболев* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд.-во ЛГУ, 1950 г.
- 7 *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.: "Наука", 1967 г.
- 6 *Morrey C.B.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- 8 *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen.// Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.
- 9 *В.Т. Волков, А.Г. Ягола* Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. Учебное пособие — М.:КДУ, 2008.