ММФ
(методические материалы)

БОГОЛЮБОВ Н.А.

Введение

В данном разделе мы рассмотрим основные уравнения математической физики, чтобы в дальнейшем перейти к постановке основных задач математической и изучению основных методов математической физики.

Итак, перечислим основные уравнения математической физики:

$$u_t(M,t) = a^2 \Delta u(M,t) + f(M,t) \ .$$

(уравнение теплопроводности, которое описывает распрстранение тепла, диффузию и движение вязкой жидкости) .

$$u_{tt}(M,t) = a^2 \Delta u(M,t) + f(M,t) \ .$$

(уравнение колебаний, которое описывает малые механические колебания струны, газа и твердого тела) .

$$\Delta u(M) = 0 \ .$$

(уравнение Лапласа, которое описывает стационарную теплопроводность, стационарную диффузию , стационарное течение идеальной жидкости и электростатику) .

$$\Delta u(M) + cu(M) = 0$$

(уравнение Гемгольца, которое описывает гармонические волны) ,

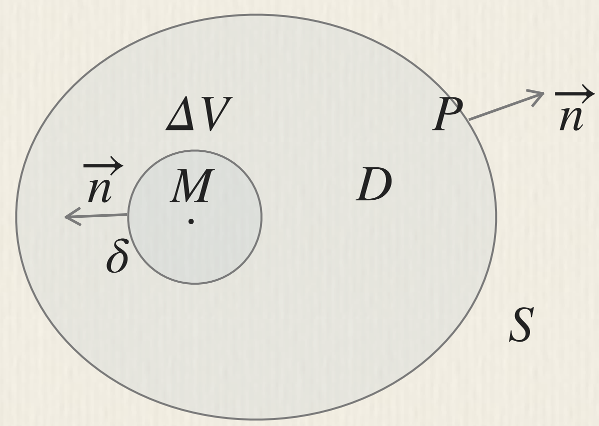
где u - неизвестная функция; a^2 - постоянные коэффициенты, коэффициент c и функция $f(M,t)$ - заданы, M - точка в пространтсве, на плоскости или на прямой, t - время.

Выведем *уравнение теплопроводности:*

Пусть трехмерная область D , ограниченная поверхностью S , заполнена веществом с удельной теплоемкостью $c(M)$, плотностью $\rho(M)$ и коэффициентом теплопроводности $k(M)$.

Пусть $u(M,t)$ - температура в точке M в момент времени t . Будем считать, что все наши рассматриваемые функции достаточно гладкие.

Возьмем подобласть ΔV , ограниченную поверхностью δ.



Запишем изменение внутренней энергии в области ΔV за время Δt :

$$\Delta Q = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\left[u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\right]\Delta V = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)d\tau\right]dV =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{dV} c(M)\rho(M)u_t(M,\tau)dV .$$

Теперь сформулируем <u>Закон Фурье:</u>

$\vec{\phi}(M,t) = -k(M)\nabla u(M,t)$ - поток тепла, который направлен от более нагретого участка к менее нагретому и пропорционален градиенту температуры).

Величина потока ϕ представляет собой количество тепла , протекающего через единичную площадку в единичный момент времени в направлении вектора $\vec{\phi}$.

По Закону Фурье : за время Δt через поверхность δ наружу вышло количество тепла:

$$\Delta Q_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_\sigma \left(\vec{\phi}(M,\tau), \vec{n}\right) dS = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} div\left(\vec{\phi}(M,\tau)\right) dV =$$

(по теореме Гаусса - Остраградского)

$$= -\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} div\left(k(M)\nabla u(M,\tau)\right) dV,$$

где $\vec{n}$ - единичная внешняя нормаль к поверхности δ .

Если в области ΔV есть внешние источники или поглотители тепла, то за время Δt они могут выделить количество тепла, равное:

$$\Delta Q_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau) dV$$, где $F(M,\tau)$ - удельная мощность источников тепла, которая характеризует количество тепла, выделяемое внешними источниками в единичном объеме в единицу времени.

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$\Delta Q = \Delta Q_2 - \Delta Q_1 .$$

Подставим ΔQ , ΔQ_2 и ΔQ_1 и получим:

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{dV} c(M)\rho(M) u_t(M,\tau) dV =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau) dV + \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} div\left(k(M)\nabla u(M,\tau)\right) dV$$

Переносим всё в левую часть :

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \Big[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - div\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\Big]dV = 0\ ,$$

и применяем формулу среднего значения:

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \Big[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - div\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\Big]dV =$$

$$= \Big[c\big(M^*\big)\rho\big(M^*\big)u_t\big(M^*,\tau^*\big) - F\big(M^*,\tau^*\big) - div\Big(k\big(M^*\big)\nabla u\big(M^*,\tau^*\big)\Big)\Big]\Delta t\Delta V = 0$$

где $M^* \in \Delta V,\quad t^* \in (t, t+\Delta t)$.

Будем стягивать область ΔV к некоторой фиксированной точке M (при этом $\Delta V \to 0$) и устремим $\Delta t \to 0$:

$$c(M)\rho(M)u_t(M,t) - F(M,\tau) - div\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big) = 0\ .$$

Пусть теперь $c = const,\quad \rho = const,\quad k = const$.

Тогда $div\big(k\nabla u\big) = kdiv(\nabla u) = k\Delta u$ и $u_t = \dfrac{k}{c\rho}\Delta u + \dfrac{F(M,t)}{c\rho}$.

Обозначим $\dfrac{k}{c\rho} = a^2$ *(коэффициент температуропроводности) ,*

а $\dfrac{F(M,t)}{c\rho} = f(M,t)$.

Подставляем и получаем *уравнение теплопроводности:*

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t)\ .$$

Замечания:

1) Полученное *уравнение теплопроводности* выполняется во всех внутренних точках M области D в любой момент времени t .

2) Если распределение температуры *стационарно* - температура в каждой точке не изменяется со временем ($u = u(M)$, $f = f(M)$) , то мы получаем *уравнение Пуассона :*

$$\Delta u = -\frac{f(M)}{a^2} \quad .$$

3) Если $f \equiv 0$, то мы получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad .$$

Для выделения единственного решения уравнения математической физики ставятся так называемые дополнительные условия, которые делятся на два типа: граничные условия и начальные условия .

Введем понятия граничных и начальных условий на примере уравнения теплопроводности:

Начальные условия: $u\big|_{t=0} = \varphi(M)$ - что означает, что задана температура в каждой точке области D в начальный момент времени $t = 0$.

Граничные условия, которые ставятся на границе S области D разделяются на три основных типа:

а) $u\big|_s = \mu(P, t)$ - граничные условия 1 рода или условие (задача) Дирихле, которое означает, что на границе поддерживается заданная температура , где P - точка поверхности S , а $\mu(P, t)$ - заданная функция .

б) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P, t)$ - граничные условия 2 рода или условие (задача) Неймана .

Физический смысл граничного условия Неймана:

Если мы умножим левую и правую часть нашего граничного условия на коэффициент $-k$, то мы получим:

$$\left(-k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Bigg|_S = -kv(P,t) \quad \Rightarrow \phi_n\Big|_S = -kv(P,t) \ ,$$

где $\phi_n = \left(\overrightarrow{\phi}, \overrightarrow{n}\right) = \left(-k\nabla u, \overrightarrow{n}\right) = -k\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - проекция вектора $\overrightarrow{\phi}$ на единичную нормаль $\overrightarrow{n}$ к поверхности S .

Следовательно , граничное условие *Неймана означает:* задан поток тепла через границу S .

Если , постановке задачи мы имеем дело с *однородным* граничным условием Неймана - это означает, что граница S *теплоизолирована.*

в) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + h(P)u\right)\Bigg|_S = \eta(P,t)$ - граничные условия 3 рода или условие (задача) Робена .

Ее физический смысл : описание процесса теплообмена с окружающей средой.

Если температура окружающей среды равна u_0 , то поток тепла с поверхности S (имеющий температуру u) в окружающую среду (в направлении внешней нормали) описывается законом Ньютона:

$\phi_0 = \alpha(u - u_0)$ где α - коэффициент теплообмена .

Так как ϕ_0 должен быть равен $\phi_n\Big|_S$ (будем пренебрегать дополнительными источниками тепла на границе S) , то:

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Bigg|_S = \alpha\left(u - u_0\right) .$$

Следовательно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{k}u\right)\Bigg|_S = \frac{\alpha}{k}u_0$$, - что и является граничным условием 3 рода ,

(условие Робена)

где:

$$h(P) = \frac{\alpha(P)}{k} \quad , \quad \eta(P,t) = \frac{\alpha(P)}{k}u_0(P,t) \quad .$$

Замечания:

1) Если $\alpha \to 0$, то мы получим *однородное* условие Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Bigg|_s = 0$ и это физически будет означать, что теплообмен будет отсутствовать.

2) Если $\alpha \to \infty$, то мы получим условие Дирихле $u\Big|_S = u_0$ и физически это будет означать, что мы имеем дело с идеальным тепловым контактом.

3) Важная особенность на которую следует обратить внимание: коэффициент $h(P) = \dfrac{\alpha}{k}$ в граничных условиях Робена *неотрицателен* .

Объединив выведенное уравнение математической физики и соответствующие ему граничные условия , мы ставим для рассматриваемого уравнения *начально - краевую задачу.*

Давайте поставим *начально - краевую задачу* для нашего уравнения теплопроводности в ограниченной области D :

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad M \in D, \quad t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(M), \quad M \in \overline{D}; \\ \& \ \text{соответствующее граничное условие на } S \,. \end{cases}$$

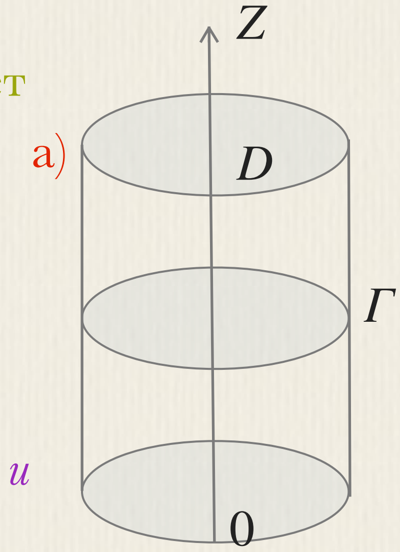
Основная задача: найти функцию $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$.

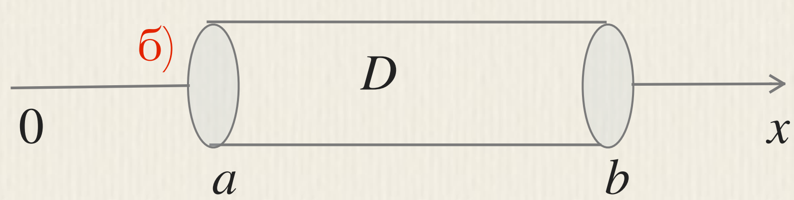
замечание: в стационарном случае - для уравнения Пуассона или Лапласа - начальное условие не ставится .

Запишем полученное уравнение теплопроводности в декартовых координатах:

$$u_t(x,y,z,t) = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in D\,.$$

а) Если область D имеет форму бесконечного цилиндра с осью $0z$ (*геометрия области не зависит от координаты* Z *и функция* f *, граничные и*





начальные условия не зависят от $Z \Rightarrow$ *то в силу симметрии и температура* u *не будет зависеть от* Z *.)*

Тогда мы получаем *двумерное уравнение теплопроводности :*

$u_t(x,y,t) = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t)$, $(x,y) \in \Gamma$ - *в поперечном сечении цилиндра.*

б) Если область D имеет форму тонкого стержня, параллельного оси $0x$ с теплоизолированной боковой поверхностью (*изменением температуры в поперечном сечении можно пренебречь)* , то уравнение теплопроводности будет одномерным:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \left(a, b\right) \ .$$

Итак, мы разобрали основные уравнения математической физики и основные вводные понятия курса методов математической физики.

Теперь мы переходим к основным главам данного методического пособия. В первой главе мы рассмотрим и поставим основные задачи математической физики, а уже со второй главы вплоть до конца данного пособия, мы перейдем непосредственно к методам решения рассматриваемых задач в физике.

Постановочные задачи. Вывод уравнений.

1.Колебания нагруженной струны. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о колебаниях, закрепленной на концах струны (0,l), в нескольких точках, которых $x = x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ помещены сосредоточенные массы M_i.

Условия в точке x_i можно получить двумя способами: если в точке $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ приложена сосредоточенная сила $F_i(t)$, то должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \\ ku_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -F_i \end{cases}$$

В данном случае под F_i следует понимать силу инерции. Подставим в формулу:

$$ku_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \Rightarrow M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0}$$

Возможен и другой вывод данного условия: распределим массу M_i на участке $\left(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon\right)$ с постоянной плотностью δ_i и воспользуемся уравнением колебаний для неоднородной струны:

$$(\rho + \delta_i)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}), x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon \quad (1)$$

где ρ- плотность струны.

Пусть $u_\varepsilon(x,t)$ - решение этого уравнения.

Интегрируем уравнение (1) по x в пределах от $x_i - \varepsilon$ до $x_i + \varepsilon$ и совершаем предельный переход $\varepsilon \to 0$:

$M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}$ для функции $u(x,t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t)$

Теперь мы можем полностью сформулировать нашу задачу:

Найти решение уравнения колебаний:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = l \end{cases}$$

условиям сопряжения в точках $x = x_i$:

$$\begin{cases} u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \\ M_i u_{tt} = k u_{xx} \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} \\ i = 1,2,..,n \end{cases}$$

и начальным условиям:

$$\left.\begin{matrix} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{matrix}\right\} \varphi(x) \text{ и } \psi(x) \text{ - заданные функции.}$$

2. Собственные колебания нагруженной струны.

Основная цель: исследование собственных частот и профилей стоячих волн для нагруженной струны.

Для этого мы должны найти решение поставленной в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

подставляем его в уравнение колебаний:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x})$$

и используя граничные условия :

$$\left.\begin{matrix} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{разделяем переменные:}$$

$$T'' + \lambda T = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(k\frac{dx}{dt}) + \lambda \rho x = (kx')' + \lambda \rho x = 0, \\ x(0) = 0, x(l) = 0 \end{cases}$$

условия сопряжения дают:

$$\begin{cases} X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \\ M_i X(x_i) T'' = kX' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} T \end{cases}$$

учтем $T'' + \lambda T = 0;$

и перепишем уравнение в виде:

$$kx' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -\lambda M_i X(x_i)$$

Таким образом, для функции X(x) получаем задачу на собственные значения:

(а): $\dfrac{d}{dx}(kx') + \lambda \rho x = 0, k(x) > 0, \rho(x) > 0,$

(б): $x(0) = 0,\ x(l) = 0,$

(в): $\begin{cases} x(x_i - 0) = x(x_i + 0) \ \ (i = 1,2,\ldots,N) \\ kx'(x_i + 0) - kx'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0 \end{cases}$

(краевая задача)

Отличительной чертой данной краевой задачи является то, что параметр λ входит не только в уравнение, но и в дополнительные условия.

На лекциях доказывается существование бесчисленного множества собственных значений и собственных функций; положительности собственных значений; теоремы разложимости. Данная краевая задача так же, как и задачи обычного типа, сводится к некоторому интегральному уравнению, которое в данном случае является нагруженным интегральным уравнением и эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса.

Выведем условие ортогональности собственных функций:

$X_1(x), X_2(x), \ldots,$

в данной задаче это условие будем называть условием ортогональности с нагрузкой.

Собственные функции для краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(kx') + \lambda \rho x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(l) = 0\,. \end{cases}$$

ортогональны с весом ρ на интервале $(0, l)$:

$$\int_0^l x_m(x) x_n(x) \rho(x) dx = 0,\ (\mathrm{m} \neq \mathrm{n})$$

Распределяя каждую массу M_i с постоянной плотностью δ_i на некотором интервале $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - малое число → мы перейдем к задаче о собственных колебаниях неоднородной струны с плотностью $\rho_\varepsilon(x)$.

Пусть $\lambda_{\varepsilon n}$ и $\left\{x_{\varepsilon n}(x)\right\}$ - собственные значения и собственные функции этой задачи, для которых должно выполняться условие ортогональности:

$$\int_0^l x_{\varepsilon m}(x) x_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x) dx = 0.$$

Выделяя в равенстве интегралы по участкам: $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ и

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^l x_m(x) x_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i x_m(x_i) x_n(x_i) = 0,\ (\mathrm{m} \neq \mathrm{n}) \to$ называется условием ортогональности с нагрузкой.

(Доказательство возможности осуществления такого перехода опускаем.)

Так же условие ортогональности можно получить формально из нашей полученной задачи на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}(kx') + \lambda \rho x = 0, k(x) > 0, \rho(x) > 0,$$

$$x(0) = 0,\ x(l) = 0,$$

$$\begin{cases} x(x_i - 0) = x(x_i + 0)\ \ (i = 1,2,\ldots,N) \\ kx'(x_i + 0) - kx'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0 \end{cases}$$

Итак, пусть : $x_m(x)$ и $x_n(x)$ - собственные функции задачи на собственные значения, соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(k\frac{dx_m}{dx}) + \lambda_m \rho x_m = 0 \ \Big|\ * x_n(x)\ (1) \\ \frac{d}{dx}(k\frac{dx_n}{dx}) + \lambda_n \rho x_n = 0 \ \Big|\ * x_m(x)\ (2) \end{cases}$$

Умножим уравнение (1) на $x_n(x)$ и уравнение (2) на $x_m(x)$ и вычтем одно из другого (из (1)-(2)); затем интегрируем последовательно по участкам: $(0, x_1); (x_1, x_2), \ldots, (x_N, l)$

сложим и получим:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l x_m(x)x_n\rho(x)dx - \sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d}{dx}\left[x_m k x_n{}' - x_n k x_m{}'\right]dx = 0\,.$$

Причем положим, что $x_0 = 0,\ x_{n+1} = l$.

Выполняя интегрирование в каждом из слагаемых суммы и объединяя члены, соответствующие подстановкам $x = x - 0$ и $x = x_i + 0$, получим сумму слагаемых следующего вида:

$$A_i = \left(x_m k x_n{}' - x_n k x_m{}'\right)_{x=x_i-0} - \left(x_m k x_n{}' - x_n k x_m{}'\right)_{x=x_i+0}$$

При этом подстановки при $x_i = 0$ и $x = l$ в силу граничных условий обращаются в ноль.

Для вычисления A_i воспользуемся условиями сопряжения:

$$\left.\begin{array}{l} x_\gamma(x_i - 0) = x_\gamma(x_i + 0) \\ k x_i{}'(x_i + 0) - k x_\gamma(x_i - 0) = -M_i\lambda_\gamma x_\gamma(x_i) \\ (\gamma = m, n) \end{array}\right\}(*)$$

Перепишем A_i в виде:

$$A_i = x_m(x_i)\left[k x_n{}'(x_i - 0) - k x_n{}'(x_i + 0)\right] - x_n(x_i)\left[k x_m{}'(x_i - 0) - k x_m{}'(x_i + 0)\right],$$

Используя (*) : $A_i = x_m(x_i)M_i\lambda_n x_n(x_i) - x_n(x_i)M_i\lambda_m x_m(x_i) = M_i x_m(x_i)x_n(x_i)(\lambda_n - \lambda_m)$.

Теперь мы можем переписать наше выражение:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l x_m(x)x_n(x)\rho(x)dx - \sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d}{dx}\left[x_m k x_n' - x_n k x_m'\right]dx = 0,$$

в виде:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\left\{\int_0^l x_m(x)x_n(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{n} M_i x_m(x_i)x_n(x_i)\right\} = 0,$$

если $\lambda_m \neq \lambda_n \Rightarrow$ возникает условие ортогональности с нагрузкой:

$$\int_0^l x_m(x)x_n(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{n} M_i x_m(x_i)x_n(x_i) = 0,\ (m \neq n).$$

Норма собственной функции $x_n(x)$ определяется:

$$\|x_n\|^2 = \int_0^l x_n^2(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N} M_i x_n^2(x_i).$$

Очевидно, что при разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n(x)$, коэффициенты определяются по формуле:

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x)x_n(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N} M_i f(x_i)x_n(x_i)}{\|x_n\|^2};$$ - задача с такими начальными условиями решается по обычной схеме метода разделения переменных.

Аналогично рассматривается задача о колебаниях стержня (или балки) при наличии сосредоточенных масс.

3. Крутильные колебания упругого цилиндра.

Условие задачи: Упругий цилиндр выводится из состояния покоя тем, что в момент времени t=0 его поперечные сечения получают малые повороты в своих плоскостях относительно оси цилиндра.

Поставить краевую задачу для определения углов поворота поперечных сечений цилиндра при t>0, рассмотреть случаи свободных, жестко закрепленных и упруго закрепленных концов.

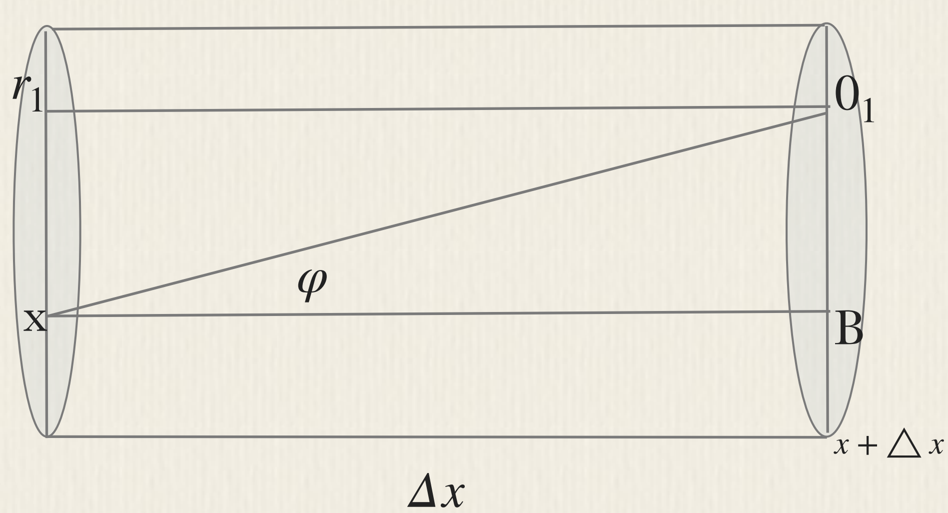
Решение:

Направим ось 0x по продольной оси инерции цилиндра и обозначим через $\theta(x,t)$ угол поворота поперечного сечения с абсциссой x. Пусть концы цилиндра определяются абсциссами $x = 0$ и $x = l$.

Напряжение сдвига τ на основании $AB \Big| \Big| 00_1$ определяется по закону Гука, как деформация сдвига:

$\tau = G * \varphi$, где G - модуль сдвига.

Очевидно: $\Delta\theta = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x,\ r\Delta\theta = \Delta x\varphi \Rightarrow \varphi = r * \dfrac{\partial\theta}{\partial x},$



Подсчитаем момент упругих сил М, приложенных к некоторому сечению x цилиндра:

$$M = \int\limits_s \tau r d\delta = \int\limits_s rG\varphi d\delta = G\int\limits_s r^2 \frac{\partial\theta}{\partial x} d\delta = G\frac{\partial\theta}{\partial x}\int\limits_s r^2 d\delta = GY\frac{\partial\theta}{\partial x};$$

где $Y = \int\limits_s r^2 d\delta$ - полярный геометрический момент инерции поперечного сечения цилиндра относительно точки, в которой ось цилиндра пересекает это поперечное сечение.

Запишем уравнение вращательного движения для элемента Δx цилиндра (произведение момента инерции на угловое ускорение равно сумме моментов сил, приложенных к телу относительно этой оси:

$\Delta x \cdot k \cdot \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = M(x+\Delta x, t) - M(x,t);$ где k - осевой момент инерции единицы длины стержня.

Далее используем формулу конечных приращений (формулу Лагранжа):

Пусть $f(x) \in C^{(1)}(a,b) \cap C[a,b]$,

Тогда $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, (подробнее Ильин, Позняк)

где $\xi \in (a,b)$,

Отсюда: $\Delta x \cdot k\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = G\cdot Y\left[\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\cdot(x+\Delta x,t) - \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)\right] = G\cdot Y\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\xi,t)\Delta x,$

где $\xi \in (x, x+\Delta x)$;

При $\Delta x \to 0,\ \xi \to x$ и получаем:

$$k\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = G\cdot Y\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2};\ \ x\in(0,l),\ t\in(0,T]$$

или:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2};\ \ x\in(0,l),\ t\in(0,+\infty),\ \text{где } a^2 = \frac{G\cdot Y}{K}.$$

Граничные условия:

1) Жестко закрепленные концы.

$\theta(0,t) = 0;\ \theta(l,t) = 0,\ t \in \left[0, +\infty\right],$

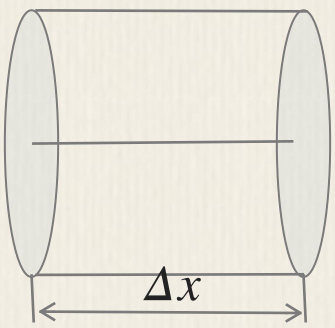
если концы стержня движутся по заданному закону, то граничные условия имеют вид:

$\begin{cases} \theta(0,t) = \mu_1(t); \\ \theta(0,t) = \mu_1(t)\,. \end{cases}$ $t \in \left[0, +\infty\right)$ - граничные условия 1 рода (задача Дирихле).

2)Свободные концы.

а) левый конец:

Запишем для элемента Δx закон движения и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:



$$\Delta x \cdot k \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \cdot Y \frac{\partial \theta}{\partial x}(\Delta x, t)\,.$$

При $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = 0\,.$$

б) Правый конец:

Аналогично получаем: $\Delta x \to 0 \ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0; \end{cases} t \in [0, +\infty) \to$$ граничные условия 2 рода (задача Неймана).

Эти условия могут быть и неоднородными:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \mu_1(t), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = \mu_2(t). \end{cases} t \in [0, +\infty).$$

3) Упруго закрепленные концы.

а) Левый конец:

Запишем для элемента Δx закон движения и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$\Delta x \cdot k \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\alpha_1 \theta(0, t) + G \cdot Y \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(\Delta x, t),$ где α_1 - коэффициент упругости.

$\Delta x \to 0$:

$$-\alpha_1 \theta(0, t) + G \cdot Y \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) - h_1 \theta(0, t) = 0, \ t \in [0, +\infty)$$ где $h_1 = \dfrac{\alpha_1}{G \cdot Y}$.

б) правый конец:

Запишем закон движения для элемента Δx , заключенного между сечениями $l \cdot \Delta x$ и l :

$$\Delta x \cdot k \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\alpha_2 \theta(l,t) - G \cdot Y \frac{\partial \theta}{\partial x}(l - \Delta x, t),$$ где α_2 - коэффициент упругости.

При $\Delta x \to 0$:

$$\begin{cases} \alpha_2 \cdot \theta(l,t) + G \cdot Y \frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) + h_2 \theta(l,t) = 0, \ t \in [0, +\infty) \end{cases} \quad \text{где } h_2 = \frac{\alpha_2}{G \cdot Y}.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) - h_1 \theta(0,t) = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) + h_2 \theta(l,t) = 0; \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$ - граничные условия 3 рода

(задача Робена).

Они могут быть неоднородными:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) - h_1 \theta(0,t) = \mu_1(t), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) + h_2 \theta(l,t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \theta(x,0) = f(x), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,0) = F(x), \end{cases} \quad x \in [0, l].$$

Итак, общая постановка нашей задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, x \in (0,l), t \in (0,+\infty); \\ \theta(x,0) = f(x); \\ \frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0) = F(x), \ \ x \in \left[0,l\right]; \\ \alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial x} - \beta_1\theta(0,t) = \mu_1(t), \\ \alpha_2\frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta_2\theta(l,t) = \mu_2(t); \ \ t \in \left[0,+\infty\right), \ \ \mathrm{a}^2 = \frac{G\cdot Y}{K}. \end{cases}$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ - получаем задачу Дирихле;

При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ - получаем задачу Неймана;

В общем случае получаем условия 3 рода (задача Робена).

При $\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = h_1, \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = h_2,\ \mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ - получаем задачу с упруго закрепленными концами.

4. Продольные колебания газа в трубке.

Условие задачи: заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа не деформируются и все частицы среды движутся параллельно оси цилиндра.

Поставить краевые задачи для определения: 1) плотности ρ;

2) потенциала φ скоростей газа; 3) давления p ; 4) скорости V; 5) смещения U частиц газа в случаях, когда концы трубки:

а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками;

б) открыты;

в) закрыты поршнями с приближенно малой массой, насаженными на пружины с коэффициентами жесткости ν и скользящими без трения внутри трубки.

Решение:

Итак:

$\rho(x,t)$ - плотность;

$p(x,t)$ - давление;

$\varphi(x,t)$ - потенциал скоростей;

$U(x,t)$ - смещение частиц газа.

Выведем основные уравнения гидродинамики (уравнения непрерывности и уравнения движения) в лагранжевых координатах.

Напомним, что в переменных Лагранжа, каждая физическая точка в течении всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой X (X - абсцисса в положении равновесия; x - переменная Лагранжа.)

Физическая точка , занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение X , в любой последующий момент времени находится в точке с координатой: $X = x + U(x,t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X, то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто используются также переменные Эйлера x, t; где x - геометрическая координата.

Если $U(x,t)$ - смещение точки с Эйлеровой координатой X, то лагранжева координата $x = X - U(x,t)$.

Пусть p_0 и ρ_0 - давление и плотность газа в невозмущенном состоянии;

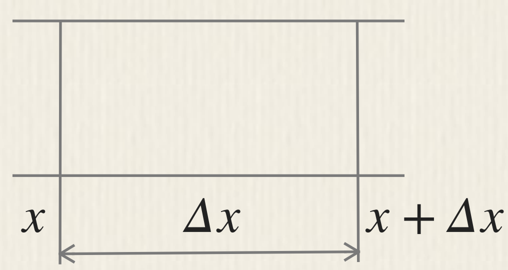
$\widetilde{p}(x,t) = p(x,t) - p_0$; $\widetilde{\rho}(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$ - возмущения давления и плотности.

1) Выведем уравнение неразрывности (непрерывности в форме Лагранжа):

Общая масса газа, заключенного между выделенными сечениями, не изменяется в течении времени.

Пусть M - масса газа, S - сечение трубки. Тогда в положении равновесия:

$M = S \cdot \Delta x \cdot \rho_0$



Рассмотрим момент времени t. Левое сечение займет положение: $x + U(x,t)$, а правое займет положение: $x + \Delta x + U(x + \Delta x, t)$.

Если x - переменная Лагранжа , а $\xi = x + U(x,t)$ - переменная Эйлера, то:

$$M = S \cdot \int\limits_{x+U(x,t)}^{x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)} \rho(x,t)d\xi = S \cdot \int\limits_{x+U(x,t)}^{x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)} \rho\big(\xi - U(x,t), t\big)d\xi =$$

формула Лагранжа

$$S \cdot \rho\Big(\xi^* - U\big(x^*, t\big), t\Big) \cdot \Delta x\left[1 + \frac{U(x+\Delta x,t) - U(x,t)}{\Delta x}\right];$$

где $\xi^* \in \big(x + U(x,t), x + \Delta x + U(x + \Delta x, t)\big)$;

а $x^{*'} = \xi^* - U\big(x^*, t\big) \in (x, x + \Delta x)$.

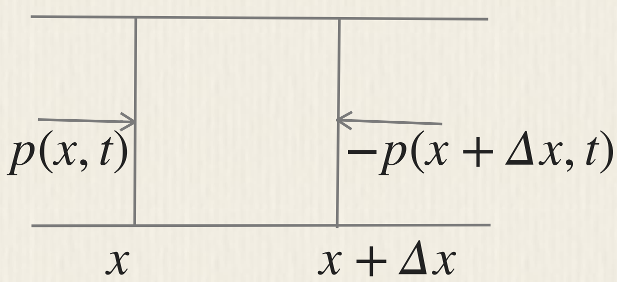
При $\Delta x \to 0$:

$$S \cdot \Delta x \cdot \rho_0 = S \cdot \rho\big(x^*, t\big)\Delta x \cdot \left[1 + \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x,t)}{\Delta x}\right];$$

$$\rho_0 = \rho(x,t)\big[1 + U_x(x,t)\big] \quad (1)$$

2) Для получения уравнения движения используют теорему об изменении количества движения.

Сила давления p - это проекция на ось x силы $\overrightarrow{p}$, с которой часть газа , лежащая правее выделенного сечения , действует на часть газа, лежащую левее.



Изменение количества движения, выделенного участка равно импульсу действующей силы:

$$S \cdot \int_x^{x+\Delta x} \Big\{\rho\big(\xi, t + \Delta t\big)U_t\big(\xi, t + \Delta t\big) - \rho\big(\xi, t\big) \cdot U_t\big(\xi, t\big)\Big\}d\xi = -S \int_t^{t+\Delta t} \{p(x + \Delta x, \tau) - p(x, \tau)$$

Применим формулу среднего значения:

$$S \cdot \Big\{\rho\big(x^*, t + \Delta t\big)U_t\big(x^*, t + \Delta t\big) - \rho\big(x^*, t\big)U_t\big(x^*, t\big)\Delta x\Big\} = -S\Big\{p\big(x + \Delta x, t^*\big) - p\big(x, t^*\big)\Big\}$$

$$x^* \in \big[x, x + \Delta x\big]; \quad t^* \in \big[t, t + \Delta t\big] .$$

Поделим на $\Delta x \cdot \Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}. \qquad (2)$$

3) к полученным уравнениям (1) и (2) нужно добавить уравнение газового состояния. Будем предполагать процесс адиабатическим. Напомним, что адиабатическим процессом называется термодинамический процесс, осуществляемый системой без теплообмена с внешними телами.

Уравнение адиабаты:

$$p = f(\rho), \text{где } f(\rho) = \frac{p_0}{{\rho_0}^k}\rho^k; \quad \text{где } k = \frac{c_p}{c_v} \text{ - показатель адиабаты.}$$

Итак, мы получили полную нелинейную систему уравнений для определения функций $\rho(x,t),\ p(x,t),\ U(x,t)$:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(x,t)\left[1 + U_x(x,t)\right], & (1) \\ \left(\rho U_t\right)_t = -p(x), & (2) \\ p = \dfrac{p_0}{{\rho_0}^k}\rho^k, \quad k = \dfrac{c_p}{c_v}. & (3) \end{cases}$$

Приведем линеаризацию полученной системы (т.е. отбросим квадраты, произведения, отношения велечин $U(x,t),\ \widetilde{p}(x,t),\ \widetilde{\rho}(x,t)$ и их производные:

(линеаризация - убираем нелинейные члены)

1) $\rho(x,t) = \rho_0 + \widetilde{\rho}(x,t), \qquad (1)$

$$\Rightarrow \rho_0 = \left(\rho_0 + \widetilde{\rho}\right)\left(1 + U_x\right) = \rho_0 + \widetilde{\rho} + \rho_0 U_x + \underbrace{\widetilde{\rho}U_x}_{\text{пренебрегаем}} \Rightarrow \widetilde{\rho}(x,t) + \rho_0 U_x(x,t) = 0$$

(1`)

2) $p(x,t) = p_0 + \widetilde{p}(x,t); \quad p_x(x,t) = \widetilde{p}_x(x,t);$

$\rho_t(x,t) = \widetilde{\rho}_t(x,t); \qquad \rho(x,t) = \rho_0 + \widetilde{\rho}(x,t)\,.$

(2) $\Rightarrow \rho_t U_t + \rho U_{tt} = -p_x \Rightarrow \underline{\widetilde{\rho}_t U_t} + \rho_0 U_{tt} + \underline{\widetilde{\rho} U_{tt}} = -\widetilde{p}_x \Rightarrow \rho_0 U_{tt}(x,t) = -\widetilde{p}_x(x,t)$

(2\`)

3) $\dfrac{\rho(x,t)}{\rho_0} = \dfrac{\rho_0 + \widetilde{\rho}(x,t)}{\rho_0} = 1 + \dfrac{\widetilde{\rho}(x,t)}{\rho_0},$

$\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^k = \left(1 + \dfrac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\right)^k \approx 1 + k\cdot\dfrac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\,.$

Здесь мы воспользуемся первыми двумя членами формулы бинома Ньютона:

$$(a+b)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k^n a^{k-n} b^k\,.$$

$$(3) \Rightarrow\ p = p_0 + \widetilde{p} = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \approx p_0\left(1 + k\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\right) = p_0 + k\frac{p_0}{\rho_0}\widetilde{\rho} \Rightarrow \widetilde{p}(x,t) = k\frac{p_0}{\rho_0}\widetilde{\rho}(x,t)\,.$$

Положим $a^2 = k\dfrac{p_0}{\rho_0}$; получим: $\widetilde{p}(x,t) = a^2\cdot\widetilde{\rho}(x,t)$ (3\`)

Итак, мы получаем линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}(x,t) + \rho_0 U_x(x,t) = 0; \\ \rho_0 U_{tt}(x,t) = -\widetilde{p}_x(x,t); \\ \widetilde{p}(x,t) = a^2\widetilde{\rho}(x,t), \end{cases} \qquad \text{где } a^2 = k\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\,.$$

Получим из системы $(1`)$ - $(3`)$ уравнения для ρ, p, φ, V, U:

1) уравнение для ρ :

$(1`)$ $\Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} = -\rho_0 U_{xtt};$ $(2`)$ $\Rightarrow \rho_0 U_{ttx} = -\widetilde{p}_{xx} \Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} = \widetilde{p}_{xx};$

$(3`)$ $\Rightarrow \widetilde{p}_{xx} = a^2 \widetilde{\rho}_{xx} \Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} = a^2 \widetilde{\rho}_{xx};$ $\mathrm{x} \in (0, l),\ t \in (0, \infty);$

так как: $\widetilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt}$ и $\widetilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx}$, то $\widetilde{\rho}_{tt} = a^2 \rho_{xx}$, $x \in (0, l),\ t \in (0, \infty)$.

2) уравнение для p:

$\widetilde{\rho}_{tt} = \widetilde{\rho}_{xx};$ $(3`)$ $\Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} = \dfrac{1}{a^2} \widetilde{\rho}_{tt} \Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} = a^2 \widetilde{\rho}_{xx},$ $\mathrm{x} \in (0, l),\ t \in (0, \infty);$

и $p_{tt} = a^2 p_{xx};$ $x \in (0, l), t \in (0, \infty)$.

3) уравнение для смещения частиц газа $U(x, t)$:

$(1`)$ $\Rightarrow \widetilde{\rho}_x = -\rho_0 U_{xx};$

$(2`), (3`)$ $\Rightarrow \rho_0 U_{tt} = -\widetilde{p}_x = -a^2 \widetilde{\rho}_x \Rightarrow -\dfrac{\rho_0}{a^2} U_{tt} = -\rho_0 U_{xx} \Rightarrow U_{tt} = a^2 U_{xx},$

$\mathrm{x} \in (0, l),\ t \in (0, \infty)$.

4) уравнение для скорости V:

так как $V = U_t$, то из $U_{tt} = a^2 U_{xx} \Rightarrow V_{tt} = a^2 V_{xx}$, $\mathrm{x} \in (0, l),\ \mathrm{t} \in (0, \infty)$.

5) уравнение для потенциала скоростей $\varphi(x, t)$:

так как $V = \varphi_x$, то из $V_{tt} = a^2 V_{xx} \Rightarrow \varphi_{ttx} = a^2 \varphi_{xxx} \Rightarrow \left(\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx}\right)_x = 0$

и так как $\varphi(x, t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то:

$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx} = 0$, т.е: $\varphi_{tt} = a^2 \varphi_{xx}$, $x \in (0, l),\ \mathrm{t} \in (0, \infty)$.

Рассмотрим граничные условия:

а) закрытые концы:

$\alpha): U(0,t)=0;\ \ U(l,t)=0,\ t\in[0,+\infty)$.

$\beta): U_t(0,t)=0;\ U_t(l,t)=0 \Rightarrow V(0,t)=0,\ V(l,t)=0,\ \ t\in[0,+\infty)$.

$\gamma)$: $U_{tt}(0,t)=0,\ \ U_{tt}(l,t)=0 \Rightarrow +$

$+(2`)\ \Rightarrow \tilde{p}_x(0,t)=-\rho_0 U_{tt}(0,t)=0;\ \tilde{p}_x(l,t)=-\rho_0 U_{tt}(l,t)=0$.

и так как $\tilde{p}_x=p_x$, то $p_x(0,t)=0;\ \ p_x(l,t)=0,\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

$\delta)\ \varphi_x=V \Rightarrow \varphi_x(0,t)=0,\ \varphi_x(l,t)=0;\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

$\varepsilon)\ (3`)\ \Rightarrow \tilde{\rho}_x=\dfrac{1}{a^2}\tilde{p}_x \Rightarrow$ (так как $\tilde{\rho}_x=\rho_x$) :
$\rho_x(0,t)=0,\ \ \rho_x(l,t)=0;\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

б) открытые концы:

$\alpha)\ p(0,t)=p_0;\ p(l,t)=p_0;\ \ \ t\in[0,+\infty)$, т.е. на концах нет возмущения давления: $\tilde{p}(0,t)=0;\ \tilde{p}(l,t)=0;\ \ \ \ t\in[0,+\infty)$.

$\beta)\ (3`)\ \Rightarrow \tilde{\rho}=\dfrac{1}{a^2}\tilde{p} \Rightarrow \tilde{\rho}(0,t)=0;\ \tilde{\rho}(l,t)=0;\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

$\gamma)$: $(1`)\ U_x=-\dfrac{1}{\rho_0}\tilde{\rho} \Rightarrow U_x(0,t)=0;\ \ U_x(l,t)=0;\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

$\delta)\ V=U_t \Rightarrow$ (смотрите γ): $V_x(0,t)=0;\ \ V_x(l,t)=0,\ \ \ t\in[0,+\infty)$.

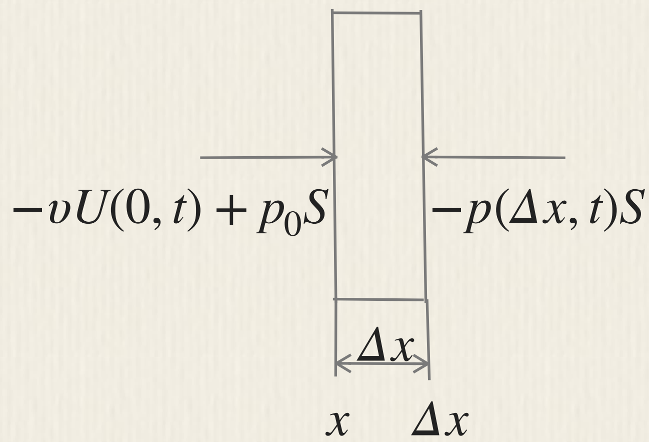
$\varepsilon)$ так как $\underbrace{U_t}_{V}=\varphi(x)$, то: $(2`)\ \Rightarrow \rho_0\varphi_{xt}+\tilde{p}_x=0 \Rightarrow (\rho_0\varphi_t+\tilde{p})x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_0\varphi_t+\tilde{p}=f(t)$ и так как $\varphi(x,t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то: $\rho_0\varphi_t=-\tilde{p}$ и тогда с учетом $\alpha)$: $\varphi_t(0,t)=0 \Rightarrow \varphi(0,t)=A$;

$\varphi_t(l,t) = 0;\ \ \varphi(l,t) = B$. Учитывая специфику φ можно положить $A = 0,\ B = 0 \Rightarrow \varphi(0,t) = 0,\ \varphi(l,t) = 0, \quad t \in [0, +\infty)$.

в) концы закрыты поршнями:

α) Левый конец: запишем закон изменения количества движения для элемента Δx:



$$S\int_0^{\Delta x} \Big\{\rho(\xi, t+\Delta t)U_t(\xi, t+\Delta t) - \rho(\xi,t)U_t(\xi,t)\Big\}d\xi = \int_t^{t+\Delta t} \{-\upsilon U(0,\tau) + p_0 S - p(\Delta x, \tau)S\}d\tau;$$

Применим формулу среднего значения и получим:

$$S\Big\{\rho(x^*, t+\Delta t)U_t(x^*, t+\Delta t) - \rho(x^*,t)U_t(x^*,t)\Big\}\Delta x = \Big\{-\upsilon U(0,t^*) + p_0 S - p(\Delta x, t^*)S\Big\}\Delta t,$$

$x^* \in [0; \Delta x],\ \ t^* \in [t, t+\Delta t]$.

Поделив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$S\Big(\rho(x^*,t)U_t(x^*,t)\Big)_t \cdot \Delta x = -\,\upsilon U(0,t) + p_0 S - \underbrace{p}_{p_0 + \widetilde{p}(\Delta x, t)}(\Delta x, t)S.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$0 = -\,\upsilon U(0,t) + p_0 S - p_0 S - \widetilde{p}(\upsilon,t)S \Rightarrow \widetilde{p}(0,t) + \frac{\upsilon}{S}U(0,t) = 0.$$

(1\`),(3\`) $\Rightarrow \widetilde{p}(0,t) = -\,a^2\rho_0 U_x(0,t)$, и т.к. $a^2 = k\dfrac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow$ то $a^2\rho_0 = k\rho_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\,kp_0 U_x(0,t) + \frac{\upsilon}{S}U(0,t) = 0.$$

$U_x(0,t) - hU(0,t) = 0;\ \ t \in [0, +\infty)$, где $h = \dfrac{\upsilon}{S \cdot k \cdot p_0}$.

Правый конец . Условие получается аналогично и имеет вид:

$$U_x(l,t) + hU(l,t) = 0, \quad t \in [0,+\infty), \text{ где } h = \frac{\upsilon}{S \cdot K \cdot p_0}.$$

β) т.к. $V = U_t$, то из α)

$$\Rightarrow V_x(0,t) - hV(0,t) = 0; \; V_x(l,t) + hV(l,t) = 0, \;\; t \in [0,+\infty).$$

γ) Из α) $\Rightarrow U_{xtt} - hU_{tt} = 0$. (1\`) $\Rightarrow U_{xtt} = -\dfrac{1}{\rho_0}\widetilde{\rho}_{tt}$;

(2\`) $\Rightarrow U_{tt} = -\dfrac{1}{\rho_0}\widetilde{p}_x \Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} - h\widetilde{p}_{xx} = 0$; (3\`) $\Rightarrow \widetilde{p} = a^2\widetilde{\rho} \Rightarrow \widetilde{\rho}_{tt} - a^2h\widetilde{\rho}_{xx} = 0$,

$$h^* = ha^2 = \frac{\upsilon}{S \cdot k \cdot p_0} \cdot \frac{k \cdot p_0}{\rho_0} = \frac{\upsilon}{S \cdot \rho_0};$$

т.к. $\widetilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt}, \;\; \widetilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx}$, то $\rho_{tt} - h^*\rho_{xx} = 0, \; x = 0, \;\; t \in (0,+\infty)$.

$h^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$; $\;\rho_{tt} + h^*\rho_{xx} = 0, \;\; x = l, \;\; \mathrm{t} \in [0,+\infty) \quad h^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$.

δ) Из γ) + (3\`) $\Rightarrow p_{tt} - h^*p_{xx} = 0, \;\; x = 0, \;\; t \in [0,+\infty); \quad h^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$.

$p_{tt} + h^*p_{xx} = 0, \;\; x = l, \quad t \in [0,+\infty); \;\; h^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$.

ε) так как $\rho_0\varphi_t = -\widetilde{p}$, то из δ) $\Rightarrow \left(\varphi_{tt} - h^*\varphi_{xx}\right)_t = 0, \;\; x = 0, \;\; t \in [0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_{tt} - h^*\varphi_{xx} = 0, \;\; x = 0, \;\; t \in [0,+\infty); \quad h^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$.

Аналогично: $\varphi_{tt} + h^*\varphi_{xx} = 0, \;\; x = l, \quad t \in [0,+\infty); \quad \mathrm{h}^* = \dfrac{\upsilon}{S \cdot \rho_0}$.

5. Вывод уравнений электрических колебаний в проводах.

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока i и напряжением v , которые являются функциями положения точки x и времени t. Применяя закон Ома к участку длиной dx, можно написать, что падение напряжения на элементе провода dx равняется сумме электродвижущих сил:

$-V_x dx = iRdx + i_t Ldx$; R - сопротивление, L - коэффициент самоиндукции (величины, рассчитанные на единицу длины).

Количество электричества, протекающее на элемент провода dx за время dt:

$\left[i(x,t) - i\left(x + dx, t\right)\right]dt = -\, i_x dxdt$, - равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента dx, и количества, теряющегося впоследствии несовершенства изоляции:

$$c\left[v\left(x, t + dt\right) - v(x,t)\right]dx + Gdx \cdot vdt = \left(cv_t + Gv\right)dxdt;$$

c и G - коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Объединив все наши формулы, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} &i_x + cv_t + Gv = 0, \qquad (1)\\ &v_x + Li_t + R_i = 0. \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$ система телеграфных уравнений.

Чтобы получить уравнение определяющее функцию i продифференцируем (1) по x, а (2) по t, умножив его на c.

Произведя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - cLi_{tt} - cRi_t = 0.$$

Заменяя v_x его значением из уравнения (2), получаем уравнение для силы тока:

$i_{xx} = cLi_{tt} + (cR + GL)i_t + GR_i$.   Аналогично выглядит уравнение для напряжения: $v_{xx} = cLv_{tt} + (cR + GL)v_t + GR_v$.   (телеграфные уравнения).

Если можно пренебречь потерями через изоляцию, и если сопротивление очень мало ($G \approx R \approx 0$), то мы приходим к известному уравнению колебаний:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{Lc}}\right).$$

6. Колебания стержней. Собственные колебания камертона.

В курсе методов математической физики основное место отводится уравнениям второго порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней и пластин приводит к уравнениям более высокого порядка.

В качестве примера уравнения четвертого порядка, можно рассмотреть задачу *о собственных колебаниях камертона*, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого, прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски.

Определение формы и частоты колебаний камертона сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей.

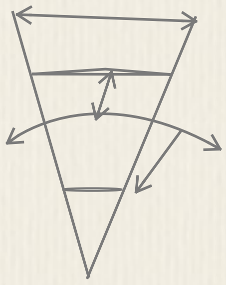
Приведем элементарный вывод уравнения *« поперечных колебаний стержня»:*

Рассмотрим прямоугольный стержень длины l $\left(0 \leq x \leq l\right)$, высотой h и шириной b.

Выделим элемент длины dx. После изгиба торцевые сечения выделенного элемента стержня, предполагаемые плоскими , образуют угол $d\varphi$. Если деформации малы, а длина оси стержня при изгибе не меняется $\left(dl = dx\right)$, то:

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x - \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

Слой материала, отстоящий от оси стержня $y = 0$ на расстояние η, изменяет свою длину на величину $\eta d\varphi$:



По закону Гука сила натяжения, действующая вдоль слоя равна:

$$dN = E \cdot b \cdot d\eta \cdot \eta \cdot \frac{d\varphi}{dx} = -E \cdot b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\eta d\eta;$$

E - модуль упругости материала стержня. Полный изгибающий момент сил, действующих в сечении x, равен:

$$M = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}J, \quad J = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{bh^3}{12}.$$ → момент инерции прямоугольного сечения относительно своей горизонтальной оси.

Обозначим через $M(x)$ - момент, действующий на правую часть стержня в каждом сечении. В сечении $x + dx$, очевидно, действует момент сил, равный $-\left(M + dM\right)$. Избыточный момент $-dM$ уравновешивается моментом тангенциальных сил: $dM = F \cdot dx$.

Отсюда, используя $M = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}J \Rightarrow F(x,t) = -EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$

(величина тангенциальной силы).

Приравняв действующую на элемент результирующую силу:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx = -EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}dx$$ *произведению массы элемента на ускорение:*

$\rho S\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx,$ где ρ - плотность стержня, S - площадь поперечного сечения (при этом мы пренебрегаем вращательным движением при изгибе), получаем *уравнение поперечных колебаний стержня:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad \left(a^2 = \frac{E \cdot J}{\rho \cdot S}\right).$$

Граничными условиями для заделанного конца $x = 0$ являются неподвижность стержня и горизонтальность касательной:

$$y\Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x}\Bigg|_{x=0} = 0.$$

На свободном конце должны равняться нулю *изгибающий момент:*

$$M = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\eta^2 d\eta = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}J \underline{= 0} \qquad (\alpha)$$

и тангенциальная сила должна равняться нулю:

$$F(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \underline{= 0.} \qquad (\beta)$$

Из (α) и (β) $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Bigg|_{x=l} = 0, \quad \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}\Bigg|_{x=l} = 0.$

Для того, чтобы полностью определить движение стержня нужно еще задать начальные условия:

$$y\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (0 \le x \le l).$$

начальное отклонение *начальная скорость*

Таким образом задача сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} & y\Big|_{x=0} = 0, \\ & \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \\ & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0, \\ & \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = 0, \end{aligned}\right\} \text{граничные условия}$$

$$\left.\begin{aligned} & y\Big|_{t=0} = f(x), \\ & \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (0 \le x \le l); \end{aligned}\right\} \text{начальные условия}$$

Данная задача решается стандартным методом разделения переменных, который мы обсудим в следующей главе.

7. Электромагнитные колебания в полых резонаторах.

В последние годы в радиотехнике получили широкое распространение *объемные резонаторы* (эндовибраторы), представляющие собой металические полости , заполненные диэлектриком, в частности воздухом. В эндовибраторах могут существовать стационарные электромагнитные поля (стоячие волны), называемые собственными электромагнитными колебаниями.

В радиотехнике ультракоротких волн применяются эндовибраторы весьма сложной формы. Общая проблема определения собственных колебаний эндовибраторов состоит в ее сложности, но для простейшей формы решение получается в явном виде. Так как стенки изготавливаются из хорошо проводящего металла, то при расчете собственных колебаний обычно предполагают, что стенки идеально проводящие.

Поправки на конечную проводимость можно получить, используя *граничные условия Леонтовича*. Будем предполагать, что стенки эндовибратора являются идеально проводящими и все велечины поля меняются во времени по закону e^{-iwt}.

Остановимся на некоторых вопросах этих колебательных систем (эндовбраторов).

а) Собственные колебания цилиндрического эндовибратора.

Проблема определения собственных электромагнитных колебаний состоит в нахождении нетривиальных решений уравнений Максвелла (*будем опускать множитель* e^{-iwt}) , то есть в определении собственных частот w , при которых система однородных уравнений Максвелла с однородными краевыми условиями имеет нетривиальные решения, а также самих нетривиальных решений.

В этом случае уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases} rotH = -ikE, \\ rotE = -ikH, \\ divE = 0, \\ divH = 0, \end{cases} \qquad k = \frac{w}{c}.$$

Внутри полости T, на поверхности Σ которой выполняются условия:

$E_t = 0$ или $\dfrac{\partial H_v}{\partial v} = 0$ можно показать, что эти условия эквивалентны.

Задача: провести расчет собственных колебаний для эндовибратора, представляющего «отрезок» цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченного двумя боковыми стенками: $z = \pm l$ (ось z параллельна образующей цилиндра).

Решение:

Как и в цилиндрическом волноводе, в рассматриваемом эндовибраторе возможны колебания и электрического $(H_z = 0)$ и магнитного типа $(E_z = 0)$.

Для волн электрического типа положим:

$$\begin{cases} E = -\, graddiv \prod + k^2 \prod; \\ H = -\, ikrot \prod; \end{cases} \Rightarrow$$

где $\prod = \prod \cdot i_z$ (i_z - единичный вектор, направленный по оси z) - поляризационный вектор - потенциал, у которого отлична от нуля лишь составляющая по оси $z \Rightarrow H_z = 0$.

Функция $\prod$ удовлетворяет волновому уравнению: $\Delta \prod + k^2 \prod = 0$.

Выберем на поверхности Σ локальную прямоугольную систему координат (s, v, i_z), где v - единичный вектор, направленный по нормали к поверхности, а

s - по касательной к контуру C, ограничивающему перпендикулярное сечение s цилиндрического эндовибратора.

В силу граничных условий $E_t = 0$ имеем:

$$\begin{cases} E_s \Big|_{\Sigma} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial s \partial z} \Big|_{\Sigma} = 0, \\ E_s \Big|_{\Sigma} = \left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Чтобы равенства были выполнены, потребуем: $\Pi\big|_{\Sigma} = 0$.

При $z = \pm l$ из $E_t = 0$ $\left(\dfrac{\partial H_v}{\partial v} = 0\right) \Rightarrow \begin{cases} E_s\big|_{z=\pm l} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial s \partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0. \\ E_v\big|_{z=\pm l} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0. \end{cases}$

Для их выполнения *достаточно:* $\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0;$ таким образом переходим к следующей краевой задаче:

Найти нетривиальные решения волнового уравнения:

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi\big|_{\Sigma} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0. \end{array}\right\}$$ однородные граничные условия

б) расчет электромагнитной энергии собственных колебаний.

Вычислим энергию электрического и магнитного полей в стоячей волне в цилиндрическом эндовибраторе.

Для волн электрического типа, мы положим:

$$\begin{cases} E = -\, grad div \Pi + k^2 \Pi, \\ H = -\, ikrot \Pi. \end{cases}$$

Зависимость E и H от времени по закону e^{-iwt} и взяв только действительную часть, мы получим:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\partial^2 \prod}{\partial z \partial x}\cos wt, \\ E_y = \dfrac{\partial^2 \prod}{\partial z \partial y}\cos wt, \\ E_z = \left(\dfrac{\partial^2 \prod}{\partial z^2} + k^2 \prod\right)\cos wt\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x = -\,k\dfrac{\partial \prod}{\partial y}\sin wt, \\ H_y = k\dfrac{\partial \prod}{\partial x}\sin wt, \\ H_z = 0\,. \end{cases}$$

Для вычисления энергии электрического и магнитного полей воспользуемся формулами:

$$\begin{cases} \varepsilon_{elect}(t) = \frac{c}{8\pi}\iiint\limits_T E^2 d\tau, \\ \varepsilon_{magn}(t) = \frac{c}{8\pi}\iiint\limits_T H^2 d\tau, \end{cases}$$ интегрирование ведется по объему Т эндовибратора.

Используя

$$\prod_{n,m}(H,z) = A_{n,m}\psi_n(H)f_m(z) \Rightarrow \varepsilon_{elect}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi}\cos^2 wt\left\{\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma \int\limits_{-l}^{l}\left[f'(z)^2 dz + \iint\limits_S \psi^2 d\delta \int\limits_{-l}^{l}\left(f'' + k^2 f\right)^2\right] dz\right\};$$

Вычисляя, получим:

$$\int\limits_{-l}^{l}\left[f'(z)\right]^2 dz = ff'\Big|_{-l}^{l} - \int\limits_{-l}^{l} ff'dz = \left(k^2 - \lambda\right)\int\limits_{-l}^{l} f^2 dz = k^2 - \lambda;$$

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(f'' + k^2 f\right)^2 dz = \lambda^2 \int\limits_{-l}^{l} f^2 dz = \lambda^2\,.$$

В силу нормировки f: $\int\limits_{-l}^{l} f^2 dz = 1$. Для вычисления интегралов по S воспользуемся первой формулой Грина , уравнением для функции ψ_n , граничными условиями и условием нормировки :

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \iint\limits_S \left(\nabla_2 \psi \right)^2 d\delta = - \iint\limits_S \psi \Delta_2 \psi d\delta + \int\limits_c \psi \frac{\partial \psi}{\partial v} dS =$$

$= \lambda \iint\limits_S \psi^2 d\delta = \lambda$; где ∇_2 - оператор «набла» в плоскости S , Δ_2 - двумерный оператор Лапласа.

В результате получим выражение для электрического поля:

$$\varepsilon_{elect}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 wt .$$

Для магнитного поля аналогично получим:

$$\varepsilon_{magn}(t) = \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \iint\limits_S \left(\nabla_2 \psi \right)^2 d\delta =$$

$$= - \iint\limits_S \psi \Delta_2 \psi d\delta + \int\limits_c \psi \frac{d\psi}{\partial v} dS = \lambda \iint\limits_S \psi^2 d\delta = \lambda;$$

получаем: $\varepsilon_{magn}(t) = \dfrac{A^2 ck^2}{8\pi} \lambda \sin^2 wt$.

Полная энергия энергия электромагнитного поля не меняется во времени и равна: $\varepsilon = \varepsilon_{elect}(t) + \varepsilon_{magn}(t) = \dfrac{A^2 ck^2}{8\pi} \cdot \lambda$.

Из формул энергии электрического и магнитного полей:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{elect}(t) &= \frac{A^2c}{8\pi}k^2\lambda\cos^2 wt,\\ \varepsilon_{magn}(t) &= \frac{A^2c}{8\pi}k^2\lambda\sin^2 wt\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ в стоячей волне происходит взаимное превращение электрической энергии в магнитную, причем:

$$\bar{\varepsilon}_{elect} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A^2ck^2}{8\pi}\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon$$ - средняя за период энергия электрического поля, которая равна средней энергии магнитного поля:

$$\bar{\varepsilon}_{magn} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A^2ck^2}{8\pi}\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

в) Возбуждение колебаний в эндовибраторе.

Для возбуждения поля в эндовибраторе внешним источником нужно ввести через щель в его оболочке элемент связи.

Таким элементом связи может быть либо виток, либо стержень, действующий, как маленькая антенна. Для того, чтобы элемент связи не возмущал поля в эндовибраторе, необходимо, чтобы его размеры были много меньше длины волны.

Возможны и другие способы возмущения:

пример: пучок электронов, пронизывающий полость эндовибратора через отверстия в его стенках.

Решение задачи о возбуждении эндовибратора антенной, помещенной внутрь, или, в предельном случае, элементарным диполем, требует учета конечной проводимости стенок, иначе *установившийся процесс невозможен.*

Учет конечной проводимости стенок может быть произведен с помощью *условий Леонтовича*.

Итак, рассмотрим задачу о возбуждении сферического эндовибратора диполем.

Условие задачи: пусть в центре сферы радиуса r_0 помещен диполь, колеблющийся с частотой w и амплитудой 1 и направленный вдоль оси z. Требуется найти поле внутри сферы, учитывая конечную проводимость стенок.

Решение:

В этом случае поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно выразить через функции u :

$$\begin{cases} E_r = \frac{i}{\rho\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right), \\ E_\theta = -\frac{i}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial\theta}\right), \\ H_\varphi = \frac{\partial u}{\partial\theta}. \end{cases}$$

остальные компоненты $E_\varphi, H_r, H_\theta = 0$.

Так как диполь направлен по оси z $(\theta = 0)$, то поля, очевидно, не должны зависеть от угла φ .

Функция u удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + u = 0,$$

где $\rho = kr$, причем u имеет при $\rho \to 0$ особенность вида:

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2} = \frac{ik^2e^{i\rho}}{\rho^2}.$$

На поверхности сферы $(\rho = \rho_0)$ должно выполняться условие Леонтовича:

$$E_\theta = aH_\varphi \quad a = \mu \cdot k \cdot d\sqrt{\frac{i}{2}}; \quad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\delta w}}$$

- эффективная глубина скин-слоя.

Из постановки задачи и условия Леонтовича следует граничное условие для функции u :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u) - i\rho_0 a u\right]_{\rho=\rho_0} = 0; \qquad (1)$$

$$\text{или}: \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} + (1 - i\rho_0 a)u\big|_{\rho=\rho_0} = 0 .$$

Решением $\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+u=0$ с особенностью при $\rho\to 0$ является функция :

$u = -k^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left(H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho)+c\cdot J_{\frac{3}{2}}(\rho)\right)\cdot P_1\cos\theta$, где $P_1(\cos\theta)$ - полином Лежандра первого порядка, $H^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ - функция Ханкеля первого рода,

$J_{\frac{3}{2}}$ -функция Бесселя ;

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,\ \ H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cdot e^{i\rho}\left(\frac{1}{i\rho}-1\right);$$

$$J_{\frac{3}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\sin\rho}{\rho}-\cos\rho\right).$$

Постоянная c определяется из граничного условия:

$$c=-e^{i\rho_0}\cdot\frac{1-\frac{1}{\rho_0^2}-\frac{i}{\rho_0}+a\left(\frac{1}{i\rho_0}-1\right)}{i\left[\frac{\cos\rho_0}{\rho_0}+\left(1-\frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0-ia\left(\frac{\sin\rho_0}{\rho_0}\right)-\cos\rho_0\right]};$$

полученное решение можно использовать для определения величины потерь в стенках.

Мощность, поглощаемая в стенках $Q=\frac{\mu wd}{16\pi}\int_0^\pi\left|H\varphi\right|^2 2\pi\rho_0^2\sin\theta d\theta$

вычисляется и равна:

$$Q=\frac{\mu wk^4d}{6}\cdot\frac{1}{\left|B-i^aA\right|^2};\ \ \text{где}\ \begin{cases}A=\frac{\sin\rho_0}{\rho_0}-\cos\rho_0;\\ B=\frac{\cos\rho_0}{\rho_0}+\left(1-\frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0.\end{cases}$$

Если диполь расположен не в центре сферы , то расчет полей сильно усложняется, однако решение может быть получено в виде рядов.

8. Скин - Эффект.

Переменный ток , в отличие от постоянного, не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет большую плотность у его поверхности. Это явление называют скин - эффектом.

Рассмотрим для простоты бесконечный, однородный , цилиндрический провод $(\mu = const,\ \delta = const)$, протекающий через сечение провода, известен.

Пренебрегая токами смещения , по сравнению с током проводимости (внутри проводников , например внутри металлов, плотность токов смещения ничтожна мала по сравнению с плотностью токов проводимости: $j_{cm} \ll j = \delta E$.

В нашем случае последнее условие эквивалентно требованию: $\varepsilon w \ll \delta$ и считая процесс установившимся, то есть зависящим от времени по закону e^{+iwt} , получим , сокращая на e^{iwt} , уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} div\vec{E} = 0, \\ div\vec{H} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\vec{H} = \frac{4\pi\delta}{c}\vec{E}, \\ rot\vec{E} = -ik\mu\vec{H}, \end{cases} \qquad k = \frac{w}{c}.$$

Вводим цилиндрическую $(r,\ \varphi,\ z)$ систему координат. Так, чтобы ось z совпадала с осью провода. Тогда в силу осевой симметрии тока , все велечины можно считать зависящими только от параметра r .

В нашем случае, если вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси z , то из уравнений $rot\vec{H} = \dfrac{4\pi\delta}{c}\vec{E},$ и $rot\vec{E} = -ik\mu\vec{H}$ следует:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot H_{\varphi}\right) = \frac{4\pi\delta}{c}E_z, \\ \frac{d}{dr}E_z = ik\mu H_{\varphi}. \end{cases}$$

Исключаем H_φ и находим:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) = i\frac{4\pi\delta\mu_k}{c}E_z.$$

Введем граничное условие на поверхности провода при $r = R$ и воспользуемся тем, что нам известен ток I_0 протекающий по цилиндру. Запишем первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$\oint\limits_c H_s ds = \frac{4\pi}{c}I_0,$ где c - контур, охватывающий провод, H_s - потенцтальная составляющая вектора $\vec{H}$ на контуре c. Если в качестве контура взять окружность $r = R$:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R)d\varphi = \frac{4\pi}{cR}I_0, \qquad \text{или: } H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{iR}.$$

Используя : $\frac{d}{dr}E_z = ik_\mu H\varphi,$ находим:

$$\left.\frac{dE_z}{dr}\right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} \cdot I_0.$$

Мы должны решить уравнение Бесселя:

$$E''_z(r) + \frac{1}{r}E'_z(r) + \left(\alpha \cdot \sqrt{-i}\right)^2 E_z(r) = 0, \qquad \left(\alpha^2 = \frac{4\pi\delta\mu w}{c^2}\right);$$

при граничном условии :

$$E'_z(R) = \frac{2ik\mu}{iR}I_0;$$

и условии ограниченности при $r = 0$:

$$\left|E_z(0)\right| < \infty.$$

Общее решение уравнения Бесселя:

$A \cdot J_0\left(\alpha \cdot r\sqrt{-i}\right) + BN_0\left(\alpha r\sqrt{-i}\right);$ где J_0 и N_0 - функции Бесселя 1 и 2 порядка.

A и B - постоянные, подлежащие определению. Функция N_0 имеет логарифмическую особенность при $r = 0$. Поэтому из условия ограниченности $\rightarrow B = 0 \Rightarrow E_z(r) = AJ_0\left(ar\sqrt{-i}\right)$.

Коэффициент A определим из граничного условия : $\left.\dfrac{dE}{dr}\right|_{r=R} = \dfrac{rik\mu}{iR} I_0$.

Для плотности тока $j = \delta E_z$ получим:

$$j(r) = \underbrace{\frac{I_0 \alpha \sqrt{-r}}{2\pi R J_1\left(\alpha R\sqrt{-i}\right)} \cdot J_0\left(\alpha r\sqrt{-i}\right)}_{x\sqrt{-i}=1-\frac{i}{\sqrt{r}}\cdot x}.$$

функции Бесселя
от комплексного аргумента

Обычно используются обозначения:

$$\begin{cases} J_0\left(x\sqrt{-i}\right) = ber_0 x + ibei_0 x. \\ J_1\left(x\sqrt{-i}\right) = ber_1 x + ibei_1 x. \end{cases}$$

Чтобы найти выражения для вещественных функций $ber\, x$ и $be_i x$, раскладывают функции Бесселя в ряд.

Например:

$$J_0\left(x\sqrt{-i}\right) = J_0\left(x\sqrt{i}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot (-1) \cdot i}{(1\,!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 \cdot (-1)}{(2\,!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 \cdot i}{(3\,!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4\,!)^2} - \ldots =$$

$$= \left\{1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2\,!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4\,!)^2} - \ldots\right\} + i\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1\,!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3\,!)^2} + \ldots\right\};$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} ber_0\, x = 1 - \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(2!)^4} - \dots, \\ bei_0\, x = \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \end{cases}$$

Можно убедиться, что аналогично:

$$ber_1\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} - \dots\right\}.$$

В приложениях также встречаются производные $ber'_0\, x$, $bei'_0\, x$:

$$J_1\left(x\sqrt{-i}\right) = \sqrt{-i}\left(bei'_0\, x - iber'_0\, x\right).$$

Используя введенные функции, выражение:

$$j(r) = \frac{I_0\alpha\sqrt{-i}}{2\pi R J_1\left(\alpha R\sqrt{-i}\right)} \cdot J_0\left(\alpha r - \sqrt{-i}\right),$$

можно записать в виде:

$$j(r) = \frac{I_0\alpha}{2\pi R} \cdot \frac{ber_0\alpha r + ibei_0\alpha r}{bei'_0\alpha R - iber'_0\alpha R},$$

или:

$$j(r) = \frac{I_o\alpha}{2\pi R}\left\{\frac{ber_0 bei'_0\alpha R - bei_0\alpha r ber'_0\alpha R}{\left(bei'_0\alpha R^2\right) + \left(ber'_0\alpha R\right)^2} + i\frac{\left(bei_0\alpha r bei'_0\alpha R + ber_0\alpha r ber'_0\alpha R\right)}{\left(bei'_0\alpha R\right)^2 + \left(ber'_0\alpha R\right)^2}\right\}.$$

Вычисляя абсолютную величину этого выражения, получим:

$$\left|j(r)\right| = \frac{I_0\alpha}{2\pi R}\cdot\sqrt{\frac{\left(ber_0\alpha r\right)^2+\left(bei_0\alpha r\right)^2}{\left(ber'_0\alpha R\right)^2+\left(bei'_0\alpha R\right)^2}}.$$

Величиной, характеризующей распределение тока по сечению является отношение:

$$\frac{\left|j(r)\right|}{\left|j(R)\right|} = \sqrt{\frac{\left(ber_0\alpha r\right)^2+\left(bei_0\alpha r\right)^2}{\left(ber_0\alpha R\right)^2+\left(bei_0\alpha R\right)^2}}.$$

9. Состыкованные стержни: задачи, приводящие к уравнениям с разрывными коэффициентами, и родственные им (кусочно-однородные среды, сосредоточенные факторы).

Если плотность распределения массы колеблющегося упругого тела или плотность распределения приложенных к нему сил резко меняется в окрестности некоторых точек пространства, то часто оказывается целесообразным считать, что в этих точках происходит разрыв этих плотностей, и , в частности, переходить к сосредоточенным массам или силам, если в окрестности упомянутых точек плотность массы, или плотность силы велика. Тогда при постановке краевых задач получаются дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами и разрывным вынуждающим членом. Если между точками разрыва коэффициенты уравнения остаются постоянными, то задача может быть сведена к уравнениям с постоянными коэффициентами и условиям сопряжения в точках разрыва. При этом мы имеем ввиду внутренние точки среды; если же сосредоточенные массы или силы рассматриваются в граничных точках колеблющейся среды, то это должно быть отражено граничными условиями.

Рассмотрим задачу: два полуограниченных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены торцами и составляют один неограниченный стержень(это означает, что если один из концов стержня столь удален от рассматриваемой области, то можно в рассматриваемой области и в течение рассматриваемого промежутка времени пренебрегать возмущениями, распространяющимися от этого конца , тогда стержень можно считать полуограниченным ($x_0 \leq x < +\infty$ или $-\infty < x \leq x_0$) ; если же оба конца стержня находятся в таком положении, то стержень можно считать неограниченным ($-\infty < x < \infty$). Это можно сказать о струне, о трубке, наполненной газом и т.д.)

Пусть $\rho_1,\ E_1$ - плотность массы и модуль упругости одного из них и $\rho_2,\ E_2$ - другого.

Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положений равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям стержня сообщены некоторые продольные смещения в скорости.

Решение:

Ось $0x$ направлена вдоль стержня. В состоянии равновесия плоскость соединения торцов полуограниченных стержней проходит через начало координат. $u_1(x,t)$ - продольные отклонения точек первого полуограниченного стержня, $u_2(x,t)$ - второго.

Для определения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ получаем краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \quad \text{при } 0 < t < +\infty,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad E_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad 0 < t < +\infty, \quad \textit{условия сопряжения}$$

$$u_1(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = F(x) \qquad -\infty < x < 0,$$

$$u_2(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = F(x) \qquad 0 < x < +\infty,$$

$$a_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{E_2}{\rho_2}. \quad a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S}, \quad a_2^2 = \frac{E_2 J}{\rho_2 S}.$$

Первое из условий сопряжения означает, что торцы полуограниченных стержней всё время остаются соединенными вместе, второе же может быть получено при $\Delta x \to 0$ из уравнения движения, выражающего второй закон Ньютона для элемента $(-\Delta x, \Delta x)$ составного стержня.

Теперь рассмотрим предыдущую задачу для случая поперечных колебаний составного неограниченного стержня.

Выберем ось $0x$ так же , как и в предыдущей задаче. Для определения поперечных отклонений точек стержня получаем краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0, \quad -\infty < x < 0 \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a_2^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}\right\} 0 < t < +\infty,$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad u_{1x}(0,t) = u_{2x}(0,t),$$
$$E_1 u_{1xx}(0,t) = E_2 u_{2xx}(0,t), \quad E_1 u_{1xxx}(0,t) = E_2 u_{2xxx}(0,t),$$

$$u_1(x,0) = f(x), \quad u_{1t}(x,0) = F(x), \quad -\infty < x < 0,$$
$$u_2(x,0) = f(x), \quad u_{2t}(x,0) = F(x), \quad 0 < x < +\infty, \qquad a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S},$$

10. Уравнения гидро- и газодинамики: уравнения малых акустических колебаний в сплошной среде.

Во многих задачах газодинамики можно не учитывать молекулярную структуру газа и рассматривать газ, как сплошную среду. Говоря о бесконечных малых элементах объема , мы подразумеваем, что что объем мал по сравнению с характерным размером системы, но содержит очень большое число молекул. Аналогично, когда говорят о движении частицы газа, то имеют ввиду не движение отдельной молекулы газа, а смещение элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в газодинамике , как точка.

Пусть газ движется со скоростью $v(M,t) = v\left(x,y,z,t\right)$, проекции которой на оси координат обозначим v_x, v_y, v_z. Заметим, что $v(M,t)$ есть скорость газа в данной точке $M\left(x,y,z\right)$ пространства в момент времени t, то есть относится к определенным точкам пространства , а не к определенным частицам газа, перемещающимся в пространстве.

Введем также плотность газа $\rho(M,t)$, давление $p(M,t)$ и плотность внешних действующих сил $F(M,t)$, рассчитанных на единицу массы.

При таком способе описания говорят, что задача рассматривается в координатах Эйлера.

Получим прежде всего уравнение движения газа. Обозначим через ΔV некоторый объем газа , ограниченный поверхностью ΔS . Равнодействующая сил давления , приложенных к поверхности ΔS , равна $-\int_{\Delta S} pnd\sigma$,

где n -единичный вектор внешней нормали и поверхности ΔS .

Для преобразования этого интеграла воспользуемся формулой Остроградского.(подробнее Ильин Позднняк «основы математического анализа).

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,x)\,d\sigma = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial x}dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos\left(n,y\right)\,d\sigma = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial y}dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,z)\,d\sigma = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial z}dV.$$

Поскольку $pn = ip\cos(nx) + jp\cos\left(ny\right) + kp\cos(nz)$, где i, j, k - единичные вектора ортонормированного базиса, умножая первую формулу на i , вторую на j, третью на k и складывая, получим:

$$\int_{\Delta S} pnd\sigma = \int_{\Delta V} gradpdV.$$

С учетом последней формулы уравнение движения для объема газа ΔV в интегральной форме имеет следующий вид:

$$\int_{\Delta V}\rho\frac{dv}{dt}dV = -\int_{\Delta V} gradpdV + \int_{\Delta V}\rho FdV,$$

вычисляя ускорение $\dfrac{dv}{dt}$ некоторой частицы газа, нужно учесть перемещение самой этой частицы. Траектории отдельных частиц газа определяются уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

откуда:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_x + \frac{\partial v}{\partial y}v_y + \frac{\partial v}{\partial z}v_z = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\,\nabla\,)\,v,$$

где оператор $v\,\nabla$ определяется следующим образом:

$$v\,\nabla = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Считая , что функции, входящие в уравнение движения для объема газа в интегральной форме, достаточно гладкими, проведем нашу стандартную процедуру: применим формулу среднего значения и переходя к пределу, стягивая объем ΔV в точку, получим, уравнение движения газа в форме Эйлера:

$$v_t + (v\,\nabla\,)\,v = -\frac{1}{\rho} gradp + F\,.$$

Выведем теперь уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения вещества. Пусть в выделенном объеме ΔV отсутствуют источники и стоки газа. Тогда изменение в единицу времени количества газа, заключенного внутри объема ΔV, равно потоку газа через границу:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V} \rho dv = -\int_{\Delta S} \rho v n d\sigma\,.$$

Преобразуя первую часть последней формулы по формуле Остраградского:

$$\int_{\Delta S} \rho v n d\sigma = \int_{\Delta V} div\left(\rho v\right) dV,$$

будем иметь:

$$\int_{\Delta V} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho v\right) \right\} dV = 0.$$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, получим уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho v\right) = 0.$$

К полученному уравнению движения газа и уравнению непрерывности необходимо добавить термодинамическое уравнение состояния, которое мы запишем в общем виде:

$p = C\left(\rho\right),$ где C - заданная функция.

В результате получается система пяти скалярных уравнений относительно пяти неизвестных функций v_x, v_y, v_z, p и ρ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\,\nabla\,)\,v = F - \frac{1}{\rho} grad p,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho v\right) = 0,$$

замкнутая система уравнений газодинамики.

$$p = C\left(\rho\right).$$

Колебательные движения в газе с малыми амплитудами называются звуковыми волнами. В каждой точке звуковой волны происходят поперечные сжатия и разрежения газа.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость v в ней мала, так что в уравнении $\frac{\partial v}{\partial t} + (v\,\nabla\,)\,v = F - \frac{1}{\rho} grad p$, можно пренебречь членами второго порядка вида $v_x \frac{\partial v_x}{\partial_x}$ и т.д. По той же причине относительные изменения плотности и давления газа также малы.

Положим $\bar{p}\,(M,t) = p_0\,(M) + \bar{p}$, $\bar{\rho}\,(M,t) = \rho_0\,(M) + \bar{\rho}$, где $p_0\,(M)$ и $\rho_0\,(M)$ - равновесные значения давления и плотности газа, а $\bar{p}\,(M,t)$ и $\bar{\rho}\,(M,t)$ - их изменения в звуковой волне, причем $\bar{p} < < p_0$, $\bar{\rho} < < \rho_0$.

Величина $\bar{p}\,(M,t)$ - называется *звуковым давлением.*

Пренебрегая в нашей системе членами второго порядка , получим линеаризованную систему уравнений. Функцию $C\left(\rho\right)$ разложим в ряд по степеням ρ и учтем члены первого порядка. В результате получим:

$$p_0 + \quad \bar{p} = C\left(\rho_0\right) + C'\left(\rho_0\right)\bar{\rho}, \quad \text{и так как } p_0 = C\left(\rho_0\right), \Rrightarrow \bar{p} = C'\left(\rho_0\right)\bar{\rho}.$$

Таким образом, замкнутая система малых акустических колебаний в сплошной среде имеет вид:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - grad\bar{p} + \rho_0 F,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + div\left(\rho_0 v\right) = 0,$$

$$\bar{p} = C'\left(\rho_0\right)\bar{\rho} \quad .$$

Получим теперь уравнение относительно функции $\bar{\rho}(M,t)$. Продифференцируем уравнение $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + div\left(\rho_0 v\right) = 0,$ по t и получим:

$$\bar{\rho}_{tt} + div\left(\rho_0 v_t\right) = 0$$

и подействуем оператором div на уравнение $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - grad\bar{p} + \rho_0 F,$ получим:

$$div\left(\rho_0 v_t\right) = - divgrad\bar{p} + div\left(\rho_0 F\right).$$

В линейном приближении из $\bar{p} = C'\left(\rho_0\right)\bar{\rho}$ получим:

$$grad\bar{p} \cong C'\left(\rho_0\right) grad\bar{\rho}.$$

Обозначим $k(M) = C'\left(\rho_0\right)$ и $f(M,t) = - div\left(\rho_0 F\right)$. Тогда из трех последних уравнений получим уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}(M,t)$:

$\bar{\rho}_{tt} + div\left(k(M)\, grad\bar{\rho}\right) + f(M,t)$ - уравнение колебаний в трехмерном случае.

(уравнение акустики)

В случае адиабатического процесса уравнения газового состояния имеет вид:

$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, где постоянная γ - показатель адиабаты $\gamma = \frac{c^p}{c^v}$;

c^p - теплоемкость при постоянном давлении; c^v - теплоемкость при постоянном объеме.

В линейном приближении будем иметь:

$$p = p_0 + \quad \bar{p} = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = p_0\left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{\gamma} \cong p_0\left(1 + \gamma\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right),$$

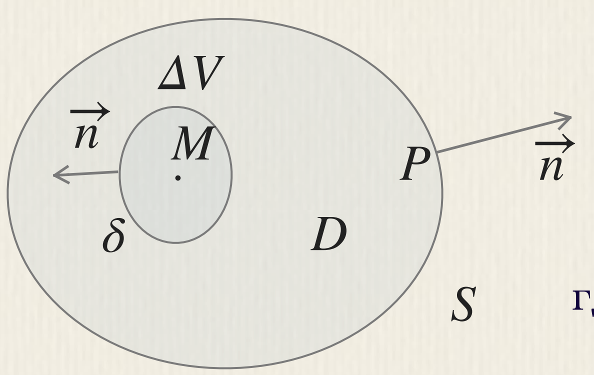
откуда:

$$\bar{p} = \gamma\frac{\rho}{\rho_0}\bar{\rho}\,;$$

и сравнивая $\bar{p} = C'\left(\rho_0\right)\bar{\rho}$ и $\bar{p} = \gamma\dfrac{\rho}{\rho_0}\bar{\rho}$ наконец получаем:

$$k\,(M) = \gamma\frac{p_0\,(M)}{\rho_0\,(M)}\,.$$

10. Уравнение диффузии.



Пусть $u(M,t)$ - концентрация вещества в точке M в момент времени t .

Запишем закон диффузии: $\vec{\phi}(M,t) = -\,d(M)\,\nabla u(M,t)$,

где $\vec{\phi}$ - поток вещества, $d(M)$ - коэффициент диффузии.

Тогда , изменение количества вещества в области ΔV за время Δt :

$$\Delta m = \int\limits_{\Delta V}\left[u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\right]dV = \int\limits_{\Delta V}\left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)d\tau\right]dV =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} u_t(M,\tau)d\tau dV\,.$$

Количество вещества, которое вышло через поверхность δ за время Δt за счет диффузии:

$$\Delta m_1 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_\delta \left(\vec{\phi}(M,t), \vec{n}\right) dS = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} div\left(\vec{\phi}(M,t)\right) dV =$$

$$= -\int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} div\left(d(M)\nabla u(M,t)\right) dV .$$

Если в области ΔV содержатся внешние источники (или поглотители тепла), то за время Δt они могут выделить количество вещества равное:

$$\Delta m_2 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} f(M,\tau) dV$$, где $f(M,\tau)$ - удельная мощность источников вещества, которая определяется количеством вещества, выделяемое внешними источниками в единичном объеме в единицу времени.

Запишем закон сохранения вещества:

$$\Delta m = \Delta m_2 - \Delta m_1,$$

Следовательно:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} u_t(M,\tau) dV = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} f(M,\tau) dV + \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{\Delta V} div\left(d(M)\nabla u(M,t)\right) dV .$$

Применяем формулу среднего значения и переходим к пределу устремив $\Delta V \to 0,\ \Delta t \to 0$:

$$u_t(M,t) = div\left(d(M)\nabla u(M,t)\right) + f(M,t) .$$

Если: $d = const \Rightarrow u_t = d\Delta u + f(M,t)$ - это означает, что *диффузия описывается тем же уравнением, что и теплопроводность.*

Замечания:

1) Стационарная диффузия $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ описывается уравнением Пуассона:

$$\Delta u = -\frac{f(M)}{d} .$$

2) При условии, что $f \equiv 0 \Rightarrow$ мы получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 .$$

3) Начальное условие:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(M)$$

(означает, что задана начальная концентрация) .

4) Граничные условия:

а) $$u\big|_S = \mu(P,t) ,$$

(означает, что на границе поддерживается заданная концентрация) .

б) $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P,t) .$$

(означает, что на границе задан поток вещества)

Мы рассмотрели ряд дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы различной природы. рассмотрим теперь постановку математической, дифференциальной модели на примере малых поперечных колебаний мембраны.

Метод разделения переменных.

1. Задача о свободных колебаниях однородной струны с неподвижно закрепленными концами.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях (то есть при отсутствии вынуждающей силы) однородной струны с неподвижно закрепленными концами:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in (0, l), t > 0,\ a^2 = \frac{T_0}{\rho_0} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), x \in [0, l], \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0\,. \end{cases}$$

Найдем сначала частные решения уравнения вида $u(x, t) = X(x)T(t)$, удовлетворяющие однородным граничным условиям. Подставляя решение искомого вида в уравнение, получаем:

$$X(x)T''(t) = a^2 X'' T(t) \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(t)}{X(t)}\,.$$

Так как левая часть полученного равенства зависит только от переменной t , а правая - только от переменной x , то равенство между ними возможно лишь в случае:

$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, где λ - константа (знак " $-$ " выбран исключительно из соображений удобства).

В результате, учитывая граничные условия, получаем:

а) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$ б) $T'' + \lambda a^2 T = 0$.

Задача а) представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения (задачу Штурма - Лиувилля) на отрезке $[0, l]$ с условиями Дирихле : необходимо найти все такие λ, при которых существуют нетривиальные (ненулевые) решения $X(x)$, а также сами эти решения.

Найдем решение задачи а) . Общее решение уравнения:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x .$$

Подставим его в граничные условия:

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow X(x) = B\sin\sqrt{\lambda}x, \Rightarrow X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n, \quad n = 1,2,\ldots, \; \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Не ограничивая общности, можно можно взять $B = 1$.

Тогда: $X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \quad n = 1,2,\ldots.$

Теперь, когда все числа λ_n найдены, вернемся к уравнению б) , которое необходимо решить для всех $n = 1,2,\ldots$:

$$T''_n + \lambda_n a^2 T_n = 0 .$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$T_n(t) = C_n\cos\dfrac{\pi n a t}{l} + D_n\sin\dfrac{\pi n a t}{l}$, где C_n и D_n - произвольные числа.

Итак, мы получили бесконечно много частных решений однородного уравнения колебаний, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле:

$$u_n(x,t) = \left(C_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\ .$$

Эти решения представляют собой стоячие волны (гармоники) :

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cos\left(w_n t - \delta_n\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где: $\alpha_n = \sqrt{C_n{}^2 + D_n{}^2,}\quad w_n = \dfrac{\pi n a}{l},\quad \tan\delta_n = \dfrac{C_n}{D_n}$,

причем: $w_n = \dfrac{\pi n}{l}\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}$ - циклическая частота колебаний n - ой гармоники , $\alpha_n \sin\dfrac{\pi n x}{l}$ - амплитуда колебаний точки с координатой x . Стоячая волна имеет пучности в точках, где $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ обращается в ± 1 , и узлы в точках , где $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ обращается в ноль.

Самый низкий тон, который может создавать струна , определяется самой низкой собственной частотой $w_1 = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}$ и называется *основным тоном*. Остальные тона, соответствующие более высоким частотам, называются *обертонами*. Какие гармоники возбуждаются - определяется начальными условиями.

Вернемся теперь к решению исходной начально - краевой задачи. Она линейна, поэтому к ней применим обобщенный принцип суперпозиции :

если L - линейный дифференциальный оператор, а u_n , $n = 1,2,3, \ldots$ - частные решения уравнения $L[u] = 0$, то есть $L\left[u_n\right] = 0$, $n = 1,2,3, \ldots$, то тогда $u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n$, где C_n - произвольные коэффициенты, является общим решением уравнения $L[u] = 0$, если ряд для u сходится и его можно почленно дифференцировать нужное количество раз.

Итак, если ряд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

сходится и является дважды непрерывно дифференцируемой по x и t функцией, то он является *общим решением однородного уравнения колебаний (в классическом смысле)*.

Пока формально подставим этот ряд в начальные условия и найдем коэффициенты C_n и D_n :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\pi n a}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} = \psi(x),$$

Воспользуемся *ортогональностью собственных функций задачи Штурма - Лиувилля:*

$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi m x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{l}{2}, & n = m\,. \end{cases}$$

Интеграл $\int_0^l X_n^2(x)dx = \|X_n\|^2$ определяет квадрат нормы собственной функции $X_n(x)$ задачи Штурма - Лиувилля на отрезке $[0, l]$.

Умножим правую и левую части равенства :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x),$$

на функцию $\sin\frac{\pi m x}{l}$ с некоторым фиксированным m и проинтегрируем результат по x в пределах от 0 до l . За счет ортогональности собственных функций от ряда в левой части равенства останется только слагаемое с $n = m$:

$$C_m \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx \Rightarrow C_m = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx = \hat{\varphi}_m .$$

Аналогично получаем для $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n x}{l} = \psi(x),$:

$$D_m = \frac{l}{\pi m a}\frac{2}{l}\psi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx = \frac{l}{\pi m a}\hat{\psi}_m .$$

Таким образом, формально в качестве решения нашей задачи мы получаем ряд Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{\varphi}_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + \frac{l}{\pi n a}\hat{\psi}_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l} .$$

Укажем, при каких условиях на начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ данный ряд является *классическим решением задачи.*

Для этого он должен быть равномерно сходящимся и дважды непрерывно дифференцируемым.

Из теории рядов Фурье известна следующая теорема:

Теорема: Пусть $F(x)$ - $2l$ - периодическая функция, непрерывно дифференцируемая до порядка k включительно и имеющая $(k+1)$ - ю кусочно - непрерывную производную.

Тогда сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left(\left|a_n\right| + \left|b_n\right|\right), \text{ где } a_n \text{ и } b_n \text{ - коэффициенты Фурье :}$$

$$F(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{\pi n x}{l} + b_n \cos\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Ряд, который мы получили :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{\varphi}_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + \frac{l}{\pi n a}\hat{\psi}_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

является *непрерывной функцией* , *если он сходится равномерно* , а для этого достаточно сходимости можарантного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\hat{\varphi}_n\right| + \frac{l}{\pi n a}\left|\hat{\psi}_n\right|\right).$$

Для двукратной дифференцируемости ряда достаточно сходимости числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\left|\hat{\varphi}_n\right| + n\left|\hat{\psi}_n\right|\right).$$

Замечания:

1) Для того, чтобы воспользоваться данной теоремой , функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нужно превратить в $2l$ - периодические. Пусть $\varphi(0) = \varphi\left(l\right) = 0$ и $\psi(0) = \psi\left(l\right) = 0$. Тогда их можно нечетным образом продолжить на отрезок $\left[-l,0\right]$, а затем достроить с помощью преобразования сдвига $2l$ - периодические функции , за которыми сохраним обозначения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

2) Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\left|\hat{\varphi}_n\right| + n\left|\hat{\psi}_n\right|\right)$ сходился достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была дважды непрерывно диффернцируема (поэтому исходная функция $\varphi(x)$, определенная на отрезке $\left[0, l\right]$, помимо нужной степени гладкости, должна удовлетворять условию $\varphi''(0) = \varphi''\left(l\right) = 0$, и имела третью кусочно - непрерывную производную вторую производную.

При меньшей гладкости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (для непрерывности $u(x,t)$ достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была кусочно непрерывно - диффернцируема , $\varphi(0) = \varphi\left(l\right) = 0$, а $\psi(x)$ ограничена, ряд :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{\varphi}_n \cos\frac{\pi nat}{l} + \frac{l}{\pi na}\hat{\psi}_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

представляет собой обобщенное решение задачи.

2. Задача Штурма - Лиувилля. Задача для уравнения Лапласа. Отрезок , прямоугольник, прямоугольный параллепипед.

а) Отрезок (одномерный случай) .

В одномерном случае рассмотрим общую схему нахождения собственных функций и собственных значений следующей задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho y = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - qy + \lambda\rho y = 0, \quad 0 < x < l, \\ P_1(y) = \alpha_1\frac{dy}{dx} - \beta_1 y\Big|_{x=0} = 0, \quad \text{граничные} \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \\ P_2(y) = \alpha_2\frac{dy}{dx} + \beta_2 y\Big|_{x=l} = 0 \quad \text{условия} \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$ фундаментальную систему решений уравнения $Ly + \lambda\rho y = \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - qy + \lambda\rho y = 0$. Фундаментальные решения y_1 и y_2 зависят от λ , как от параметра. Общее решение нашего уравнения можно записать в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) .$$

Подставляя общее решение в *граничные условия* :

$$C_1\left\{\alpha_1 y'_1(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda)\right\} + C_2\left\{\alpha_1 y'_2(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda)\right\} = 0 ,$$

$$C_1\left\{\alpha_2 y'_1(l,\lambda) + \beta_2 y_1(l,\lambda)\right\} + C_2\left\{\alpha_2 y'_2(l,\lambda) + \beta_2 y_2(l,\lambda)\right\} = 0 .$$

(однородная система линейных алгебраических уравнений C_1 и C_2) .

Данная система имеет нетривиальное (ненулевое решение) только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y'_1(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda) & \alpha_1 y'_2(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda) \\ \alpha_2 y'_1(l,\lambda) + \beta_2 y_1(l,\lambda) & \alpha_2 y'_2(l,\lambda) + \beta_2 y_2(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0 .$$

дисперсионное уравнение для поиска собственных значений

Пусть $\{\lambda_n\}$ - корни дисперсионного уравнения . Каждому λ_n соответствует нетривиальное (ненулевое) решение полученной ранее системы и следовательно ненулевое решение нашего исходного уравнения, представимое в виде: $y(x) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda)$.

Рассмотрим общий алгоритм поиска и построения собственных значений и собственных функций: пусть фундаментальная система нашего уравнения выбрана так, что на одном из концов отрезка , например при $x = 0$, функции $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$P_1(y_1)\Big|_{x=0} = 0\,, \quad P_1(y_2)\Big|_{x=0} = 1\,.$$

Тогда, подставляя общее решение нашего исходного уравнения в граничное условие, сразу находим, что $C_2 = 0$. Следовательно, собственная функция , если мы подставим последний результат в общий вид решения уравнения, примет вид:

$$y(x) = C_1 y_1(x,\lambda)\,.$$

Подстановка во второе граничное условие для $P_2(y)$ дает нам дисперсионное соотношение, нужное нам для поиска λ :

$$P_2(y_1) \equiv \alpha_2 \frac{dy_1}{dx}(x,\lambda) + \beta_2 y_1(x,\lambda)\Big|_{x=l} = 0\,.$$

Рассмотрим теперь частный случай: $Ly \equiv y''$.

В этом случае, общее решение нашего исходного уравнения может быть записано в виде:

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x\,, \qquad (p \equiv 1)\,.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы :

$$\begin{cases} -C_1\beta_1 + C_2\alpha_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1\left\{-\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_2\cos\sqrt{\lambda}l\right\} + C_2\left\{\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_2\sin\sqrt{\lambda}l\right\} = 0\,. \end{cases}$$

Тогда дисперсионное уравнение примет вид:

$$\left(\alpha_1\alpha_2\lambda - \beta_1\beta_2\right)tg\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}\left(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\right) .$$

Легко убедиться, что полученное уравнение имеет бесконечное счетное множество корней $\left\{\lambda_n\right\}_1^{\infty}$. Для каждого корня λ_n находим ненулевое решение нашей системы:

$$C_1 = C\frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad C_2 = C\frac{\beta_1}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \;;$$

где C - произвольная постоянная, отличная от нуля $(C \neq 0)$.

Величина $N_n = \|y_n\| = \left\{\int_0^l y_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$ представляет собой норму собственной функции. Если постоянная выбрана так, что $N_n = 1$, то собственные функции $y_n(x)$ будут *ортонормированными* .

Итак, ненормированные собственные функции задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < l, \\ \alpha_1 y' - \beta_1 y\Big|_{x=0} = 0, \\ \alpha_2 y' + \beta_2 y\Big|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

можно записать в виде:

$$y_n(x) = \frac{\beta_1\sin\sqrt{\lambda_n}x + \alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \;;$$

при этом:

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1\right)\left(\lambda_n\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2\right)}{\left(\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)\left(\lambda_n\alpha_2^2 + \beta_2^2\right)}$$, где λ_n - корни

дисперсионного уравнения .

Формулу $y_n(x) = \dfrac{\beta_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$ для собственной функции можно привести к виду:

$y_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x + \delta_n\right)$, где величина δ_n определяется соотношениями :

$$\cos\delta_n = \frac{\beta_1}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad \sin\delta_n = \frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \ .$$

Дисперсионное уравнение имеет ненулевое решение $\lambda_0 = 0$. Ему будет соответствовать ненулевая функция $y_0(x)$, определяемая полученной нами формулой для собственной функции; если $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0 \Rightarrow$ сама функция $= 1$.

Значит, при $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \|y_0\|^2 = l$.

Выделим некоторые частные случаи:

1. Граничные условия :

$$y(0) = y(l) = 0 \ \left(\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1\right);$$

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1,2,\ldots,\infty \ .$$

2. Граничные условия :

$$y'(0) = y'(l) = 0 \ \left(\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0\right) ,$$

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}(1 + \delta_{n0}), \quad n = 0,1,\ldots,\infty \ .$$

замечание: в рассматриваемом случае существует нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv 1$.

3. Граничные условия :

$$y(0) = y'(l) = 0 \ \left(\alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \alpha_2 = 1\right) ,$$

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad \lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots,\infty \ .$$

4. Граничные условия :

$$y'(0) = y(l) = 0 \ \left(\beta_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_2 = \alpha_1 = 1\right) ,$$

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x, \quad \lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 0,1,\ldots,\infty \ .$$

5. Граничные условия :

$$y(0)=0, y'+h_2 y\Big|_{x=l}=0 \ \left(\alpha_1=0,\ \beta_1=1, \alpha_2=1, \beta_2=h_2\right),$$

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_2}{2\left(\lambda_n+h_2^2\right)}, \quad n=1,2,\ldots,\infty,$$

λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l=-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h_2}$.

6. Граничные условия :

$$y'(0)=0,\ y'(l)+h_2 y(l)=0 \ \left(\beta_1=0,\ \alpha_1=1, \alpha_2=1, \beta_2=h_2\right),$$

$$y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x, \qquad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_2}{2\left(\lambda_n+h_2^2\right)}, \quad n=1,2,\ldots,\infty,$$

λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l=\dfrac{h_2}{\lambda}$.

7. Граничные условия :

$$y'(0)-h_1 y(0)=0,\ y(l)=0 \ \left(\alpha_1=1,\ \beta_1=h_1, \alpha_2=0, \beta_2=1\right),$$

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\left(l-x\right), \qquad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_1}{2\left(\lambda_n+h_1^2\right)}, \quad n=1,2,\ldots,\infty,$$

λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l=-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h_1}$.

8. Граничные условия :

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ y'(l) = 0\ \ (\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = h_1, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0),$$

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}(l - x), \qquad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_1}{2(\lambda_n + h_1^2)}, \quad n = 1,2,\ldots,\infty\ ,$$

λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l = \dfrac{h_1}{\sqrt{\lambda}}$.

9. Граничные условия :

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ y'(l) + h_2 y(l) = 0\ \ (\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = h_1, \alpha_2 = 1, \beta_2 = h_2),$$

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + h_1^2}}\left(h_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\right),$$

$$\|y_n(x)\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n + h_1 h_2)}{(\lambda_n + h_1^2)(\lambda_n + h_2^2)}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}\dfrac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$.

замечание: в рассматриваемом случае собственную функцию можно записать также в виде:

$$y_n(x) = \frac{h_2 \sin\sqrt{\lambda_n(l - x)} + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}(l - x)}{\sqrt{\lambda_n + h_2^2}}\ ,$$

где λ_n - корни уравнения $\quad tg\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}\dfrac{h_1 - h_2}{\lambda + h_1 h_2}$.

б) Одномерный случай : периодические граничные условия.

Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля на отрезке $[0, l]$ с условием периодичности :

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < l \\ y(x) = y(x + l), \quad \forall x \in [0, l], \\ y(x) \neq 0. \end{cases}$$

(условия периодичности)

Условия периодичности можно заменить граничными условиями:

$$y(0) = y(l)\ ,\ y'(0) = y'(l)\ .$$

Тогда общее решение нашего уравнения будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} l + C_2 \sin\sqrt{\lambda} l\ .$$

Подставим его в условия периодичности :

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}(x + l) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(x + l) \equiv C_1 \sin\sqrt{\lambda} x + C_2 \cos\sqrt{\lambda} x\ .$$

Используя линейную независимость функций $\cos\sqrt{\lambda} x$ и $\sin\sqrt{\lambda} x$, мы получаем:

$$\begin{cases} C_1\left(\cos\sqrt{\lambda} l - 1\right) + C_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0, \\ -C_1 \sin\sqrt{\lambda} l + C_2\left(\cos\sqrt{\lambda} l - 1\right) = 0\,. \end{cases}$$

Полученная система имеет нетривиальное, т.е. ненулевое решение только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} l - 1 & \sin\sqrt{\lambda} l \\ \text{-}\sin\sqrt{\lambda} l & \cos\sqrt{\lambda} l - 1 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \text{или:} \quad \cos\sqrt{\lambda} l = 1$$

Отсюда находим собственные значения: $\lambda_n = \left(\dfrac{2\pi n}{l}\right)^2, \ \ n = 0,1,2, \ldots, \infty$

При найденных значениях λ_n наша система имеет два линейно независимых ненулевых решения:

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Далее мы просто подставляем выявленные линейно независимые ненулевые решения в общее решение и, тем самым , находим собственные функции:

$$y_n^{(1)}(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x \quad \text{и} \quad y_n^{(2)}(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \;.$$

замечание: Заметим, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция $y_0(x) \equiv 1$, в то время как все ненулевые собственные значения λ_n имеют ранг, равный двум.

Таким образом, поставленная в данном разделе задача с периодическими граничными условиями имеет следующие наборы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0,1,2,\ldots,\infty,$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = \begin{cases} \cos\frac{2\pi n}{l}x, \\ \sin\frac{2\pi n}{l}, \end{cases}$$

$$\|y_0\|^2 = l, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1,2,\ldots,\infty,$$

$$l = 2\pi: \;\; \lambda_n = n^2, \;\; y_n(x) = \begin{cases} \cos nx \\ \sin nx \end{cases}, \;\; y_0 = 1\,.$$

в) Прямоугольник .

Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ P_1(u) = \alpha_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u \Big|_{x=0} = 0, & P_2(u) = \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \Big|_{x=a} = 0, \\ P_3(u) = \alpha_3 \dfrac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u \Big|_{y=0} = 0, & P_4(u) = \alpha_4 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta_4 u \Big|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

где α_i, β_i - постоянные, причём $\left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0$.

Будем решать поставленную задачу *методом разделения переменных* , которому посвящена эта глава.

Сначала найдем ненулевые решения нашего уравнения , которые можно представить в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 .$$

Подставим наш вид решения в наше уравнение и разделим переменные:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu .$$

Следовательно, для функции $X(x)$ и $Y(y)$ мы получаем одномерные задачи Штурма - Лиувилля для отрезка:

$$1)\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \quad 0 < x < a, \\ P_1(X)\Big|_{x=0} = 0, \\ P_2(X)\Big|_{x=a} = 0, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \quad 0 < y < b, \\ P_3(Y)\Big|_{y=0} = 0, \\ P_4(Y)\Big|_{y=b} = 0, \end{cases} ,$$

где $\nu = \lambda - \mu$.

Решив каждую из этих задач, собственные функции нашей задачи будем искать в виде :

$$y_n(x) = \frac{\beta_1 \sin\sqrt{\lambda_n} x + \alpha_1 \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{\lambda_n \alpha_1^2 + \beta_1^2}} \ ;$$

а собственные значения λ вычислим по формуле $\lambda = \mu + \nu$.

Отсюда мы можем сделать следующий вывод: собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника равны произведению собственных функций по каждой переменной с соответствующими граничными условиями $u_{nm} = X_n(x)Y_m(y)$, а собственные значения равны сумме собственных значений одномерных задач $\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m$.

Рассмотрим собственные значения и собственные функции для задач Дирихле и Неймана:

1) Задача Дирихле : $u\big|_C = 0$, где C - контур прямоугольника :

$$u_{nm}(x, y) = \sin\frac{\pi n}{a}x\sin\frac{\pi m}{b}y,$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m = 1, 2, \ldots,$$

$$\|u_{nm}\|^2 = \left\|\sin\frac{\pi n}{a}x\right\|^2 \left\|\sin\frac{\pi m}{b}y\right\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

2) Задача Неймана : $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0$, где n - внешняя нормаль к контуру прямоугольника :

$$u_{nm}(x, y) = \cos\frac{\pi n}{a}x\cos\frac{\pi m}{b}y,$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m = 0, 1, 2 \ldots, \quad \|u_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \|Y_m\|^2 .$$

Пример: рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля для оператора

$$\begin{cases} Lu = \Delta u + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_C = 0, \end{cases}$$

где C - граница прямоугольника.

Решение:

Введем новую неизвестную функцию $\nu(x, y)$ через следующую замену:

$$u = e^{-\frac{1}{2}(b_1 x + b_2 y)} \nu(x, y).$$

Тогда для функции ν получаем задачу :

$$\begin{cases} \Delta\nu + \mu\nu = 0, \quad 0 < x < a, \; 0 < y < b, \\ \nu\big|_C = 0, \quad \nu \neq 0, \end{cases}$$

где введено обозначение : $\mu=\lambda+c-\dfrac{b_1^2 + b_2^2}{4}$, решение которой мы уже рассмотрели в данной главе.

Таким образом, искомые собственные значения и собственные функции нашей задачи имеют вид :

$$u_{nm}(x, y) = e^{-\frac{1}{2}\left(b_1(x) + b_2(y)\right)} \sin\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi m}{b} y, \quad \textit{собственные функции}$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - c + \frac{1}{4}\left(b_1^2 + b_2^2\right), \quad \textit{собственные значения}$$

причем при $c \leq 0 \quad n = 1,2,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots,$ а при $c > 0$ начальные значения n и m выбираются так , чтобы $\lambda_{nm} > 0$.

При граничных условиях второго и третьего рода решение строится аналогичным образом, только при замене следует преобразовать и само граничное условие.

г) Прямоугольный параллепипед .

Задача Штурма - Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольном параллелепипеде имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c, \\ P_1(u) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u \big|_{x=0} = 0,\ \ P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \big|_{x=a} = 0, \\ P_3(u) = \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u \big|_{y=0} = 0 \ \ P_4(u) = \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \big|_{x=b} = 0, \\ P_5(u) = \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} - \beta_5 u \big|_{z=0} = 0 \ \ P_6(u) = \alpha_6 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_6 u \big|_{x=c} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_i, \beta_i = const\ , \quad \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,6$$

Для прямоугольного параллелепипеда собственные функции и собственные значения имеют вид:

$u_{nmk}(x, y, z) = X_n(x)Y_m(y)Z_k(z),$ - собственные значения

$\lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \chi_k,$ - собственные функции

где $(X_n(x), \mu_n)$, $\left(Y_m(y), \nu_m\right)$, $(Z_k(z), \chi_k)$ - собственные функции и собственные значения соответствующих задач Штурма - Лиувилля по каждой переменной .

д) Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике.

Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике также могут быть решены *методом разделения переменных* .

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ u\big|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u\big|_{y=b} = \psi_2(y) . \end{cases}$$

Разобьем рассматриваемую задачу на две задачи, каждая из которых имеет однородные граничные условия по одно из переменных.

Пусть $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$, где u_1 и u_2 есть решения следующих задач в прямоугольнике :

$$1)\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ u_1\big|_{x=0} = u_1\big|_{x=a} = 0, \\ u_1\big|_{y=0} = \psi_1(x), \\ u_1\big|_{y=b} = \psi_2(x), \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \\ u_2\big|_{y=0} = u_2\big|_{y=b} = 0, \\ u_2\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \\ u_2\big|_{x=a} = \varphi_2(y) . \end{cases}$$

Полученные задачи будем в дальнейшем называть *стандартными* .

Рассмотрим стандартную задачу для функции $u_1(x,y)$. Построим сначала решение уравнения Лапласа, представимые в виде :

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$$

и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x :

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = 0 .$$

Подставляем граничные условия в решение уравнения Лапласа , разделяем переменные и получаем :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda .$$

Отсюда получаем отдельные уравнения для $X(x)$ и $Y(y)$. Так как по переменной x должны выполняться однородные граничные условия , для определения функции $X(x)$ имеем одномерную задачу Штурма - Лиувилля :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0, & X(x) \neq 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\underbrace{X = X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x}_{\textit{собственные функции}}, \quad \underbrace{\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}_{\textit{собственные значения}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Учитывая найденное значение λ_n для $X(x)$, из общего уравнения получаем для $Y(y)$:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0, \ \ 0 < y < b .$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$Y = C_1 e^{\frac{\pi n}{a}y} + C_2 e^{-\frac{\pi n}{a}y} .$$

Но такую запись неудобно использовать в дальнейшем. Гораздо удобнее ФСР $\{Y_1, Y_2\}$ выбрать так, чтобы функция Y_1 удовлетворяла однородному граничному условию при $y = 0$:

$$Y_1(0) = 0 ,$$

а функция $Y_2(y)$ - однородному граничному условию при $y = b$:

$$Y_2(b) = 0 .$$

Такими решениями являются :

$$Y_1(y) = sh\frac{\pi n}{a}y, \quad Y_2(y) = sh\frac{\pi n}{a}(b-y) .$$

Тогда общее решение нашего уравнения удобно записать в виде:

$$Y = C_1 sh\frac{\pi n}{a}y + C_2 sh\frac{\pi n}{a}(b-y) .$$

Тем самым, мы получили следующие системы частных решений уравнения Лапласа:

$$u_n(x,y) = \sin\sqrt{\lambda_n}x\, sh\sqrt{\lambda_n}y \qquad \text{и} \qquad u_n(x,y) = \sin\sqrt{\lambda_n}x sh\sqrt{\lambda_n}(b-y) .$$

Теперь решение нашей задачи для функции $u_1(x,y)$ запишем в виде разложения по этим частным решениям:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{sh\sqrt{\lambda_n}y}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{sh\sqrt{\lambda_n}(b-y)}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\sin\sqrt{\lambda_n}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\frac{sh\sqrt{\lambda_n}y}{sh\sqrt{\lambda_n}b} + B_n\frac{sh\sqrt{\lambda_n}(b-y)}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}x .$$

Подставим полученное решение в граничное условие при $y = 0$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\sqrt{\lambda_n}x = \psi_1(x) \ ,$$

откуда видно, что B_n есть коэффициенты Фурье функции $\psi_1(x)$ по системе собственных функций $\left\{\sin\frac{\pi n}{a}x\right\}_1^{\infty}$. Они вычисляются по формулам :

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{\pi n}{a}x dx \ .$$

Подставляя полученное решение в виде разложения по частным решениям в граничное условие при $y = b$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\lambda_n}x = \psi_2(x)\ ,$$

откуда легко можно выразить A_n :

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a \psi_2(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx\ .$$

Основная идея: решение *стандартной* задачи функции $u_1(x,y)$ строится в виде разложения по частным решениям уравнения Лапласа, коэффициенты которого определяются при подстановке этих решений в граничные условия.

По совершенно аналогичной схеме решается *стандартная* задача для функции $u_2(x,y)$.

Решение ее имеет следующий вид:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ C_n\frac{sh\sqrt{\lambda_n}x}{sh\sqrt{\lambda_n}a} + D_n\frac{sh\sqrt{\lambda_n}(a-x)}{sh\sqrt{\lambda_n}a}\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}y\ ,$$

где :

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2,\quad D_n = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\sqrt{\lambda_n}y\,dy,\quad C_n = \int_0^b \varphi_2(y)\sin\sqrt{\lambda_n}y\,dy\ .$$

Таким образом решение, поставленной нами ,в этом пункте, задачи имеет следующий вид:

$u = u_1(x,y) + u_2(x,y)$, где функции u_1 и u_2 нами определены в виде разложения по частным решениям .

Замечания:

1) Аналогично может быть решена краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике в прямоугольнике с другими граничными условиями.

2) Осторожность нужно проявлять при решении задачи Неймана , поскольку , при редукции ее к стандартным задачам может появиться задача, которая не имеет решения, в то время как решение исходной задачи существует. В этом случае исходную задачу заменой неизвестной функции можно свести к задаче для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями.

3) Характер сходимости полученных рядов:

Рассмотрим разложение , полученное для решения первой *стандартной* задачи :

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{sh\sqrt{\lambda_n}y}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{sh\sqrt{\lambda_n}(b-y)}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\sin sh\sqrt{\lambda_n}x \ ,$$

где $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$, а коэффициенты A_n и B_n определяются аналогичным образом, рассмотренным выше.

Если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ абсолютно интегрируемы на $(0, a)$, то коэффициенты A_n и B_n ограничены:

$$\left|A_n\right| \leq C\,, \qquad \left|B_n\right| \leq C \qquad \text{при всех } n\,.$$

Поэтому общий член первого ряда при $n \to \infty$ имеет следующий характер:

$$\left|A_n \frac{sh\sqrt{\lambda_n}y}{sh\sqrt{\lambda_n}b}\sin\sqrt{\lambda_n}x\right| \sim Ce^{-\frac{\pi n}{a}(b-y)} \quad .$$

Отсюда видно, что во внутренних точках прямоугольника ряд сходится экспоненциально . Более того, если $b \div a \gg 1$, при малых y (то есть вблизи основания прямоугольника $y = 0$) уже первый член ряда имеет порядок $\exp\left(\dfrac{-\pi b}{a}\right)$. Коэффициенты A_n определяются функцией $\psi_2(x)$, заданной на другой стороне $(y = b)$ прямоугольника . Следовательно , в этом случае влияние граничных условий , заданных при $y = b$, на решение при малых y невелико и при вычислении можно ограничиться одним-двумя членами ряда.

4) Похожий характер имеют и члены второго порядка, но они малы при $b \div a \gg 1$, когда y , близко к b .

5) При увеличении гладкости функций ψ_1 и ψ_2 сходимость рядов становится еще более быстрой.

e) Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллепипеде .

Общая краевая задача для уравнения Лапласа может быть разбита на три *стандартных* . *Стандартной* задачей в данном называется задача, в которой неоднородные граничные условия заданы на двух параллельных сторонах (основаниях) , а на остальной части поверхности (боковой поверхности) граничные условия нулевые.

Рассмотрим *стандартную* задачу :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < h, \\ u\big|_{z=0} = \varphi_1(x,y), \\ u\big|_{z=h} = \varphi_2(x,y), \\ P[u]\big|_{\substack{x=0,\, x=a \\ y=0,\, y=b}} = 0, \end{cases}$$

где $P[u]$ - оператор, соответствующий граничному условию третьего рода .

Для решения этой задачи сначала находим частные решения уравнения Лапласа, представимые в виде:

$$u(x,y,z) = v(x,y)Z(z) \neq 0 \ ,$$

заметим, что отделена та переменная, по которой заданны неоднородные граничные условия .

Подставляя вид решения в уравнение Лапласа и разделяя переменные , мы получаем:

$$\frac{\Delta_2 v}{v(x,y)} = -\frac{Z''}{Z(z)} = -\lambda .$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ P[v]_{\substack{x=0,\, x=a \\ y=0,\, y=b}} = 0, \quad v(x,y) \neq 0, \\ Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h . \end{cases}$$

задача Штурма - Лиувилля для прямоугольника.

Пусть $\left\{v_n(x,y)\right\}_1^{\infty}$ и $\left\{\lambda_n\right\}_1^{\infty}$ - её *собственные функции* и *собственные значения* .

Тогда общее решение уравнения удобно представить в следующем виде:

$$Z(z) = A\frac{sh\sqrt{\lambda}z}{sh\sqrt{\lambda}h} + B\frac{sh\sqrt{\lambda}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda}h}, \qquad \text{где } A, B = const \ .$$

Следовательно, частные решения уравнения Лапласа имеют вид:

$$u_n(x,y,z) = v_n(x,y)\left\{A\frac{sh\sqrt{\lambda}z}{sh\sqrt{\lambda}h} + B\frac{sh\sqrt{\lambda}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda}h}\right\} \quad .$$

Запишем решение нашей задачи в виде разложения по этим частным решениям :

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)\left\{A_n\frac{sh\sqrt{\lambda}z}{sh\sqrt{\lambda}h} + B_n\frac{sh\sqrt{\lambda}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda}h}\right\} \quad ,$$

коэффициенты A_n и B_n мы можем определить из граничных условий :

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a\int_0^b \varphi_2(x,y)v_n(x,y)\,dxdy\,, \qquad B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a\int_0^b \varphi_1(x,y)v_n(x,y)\,dxdy\,.$$

Замечания:

1) функции $Z(z)$ взяты в виде , удобном при решении задачи с граничными условиями Дирихле по переменной z . При граничных условиях по z другого типа , нужно соответственно выбирать ФСР исходного уравнения таким образом, чтобы наиболее удобным образом вычислить коэффициенты A_n и B_n

2) Совершенно аналогичным образом решаются две другие *стандартные* задачи с неоднородными граничными условиями по переменным x и y .

3) Полученные ряды имеют тот же характер сходимости, что и для решения рассматриваемой задачи в прямоугольнике.

Примеры:

1) условие задачи: найти распределение потенциала внутри куба с ребром a , одна грань которого $z = 0$ поддерживается под постоянным потенциалом U_0 , а остальные грани заземлены.

Решение:

Для потенциала u имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \;\; 0 < y < a, \quad 0 < z < a, \\ u\big|_{z=0} = U_0, \;\; u\big|_{z=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=a} = 0\,. \end{cases}$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_n k(x, y) \left\{ A_n k \frac{sh\sqrt{\lambda_n k} z}{sh\sqrt{\lambda_n k} a} + B_n k \frac{sh\sqrt{\lambda_n k}(a - z)}{sh\sqrt{\lambda_n k} a} \right\},$$

где $v_n k(x, y)$ - собственные функции квадрата с граничным условием Дирихле:

$$v_n k(x, y) = \sin\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi k}{a} y\,,$$

$$\lambda_{n,k} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n^2 + k^2), \quad n, k = 1,2, \ldots, \infty$$

Вычислим коэффициенты $A_n k$ и $B_n k$:

$$B_n k = \frac{1}{\left\| v_n k \right\|^2} \int_0^a \int_0^a U_0 \sin\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi k}{a} y dx dy =$$

$$= \frac{4U_0}{a^2} \int_0^a \sin\frac{\pi n}{a} x dx \int_0^a \sin\frac{\pi k}{a} y dy = \frac{4U_0}{\pi^2 n k}\left[1 - (-1)^n\right]\left[1 - (-1)^k\right],$$

$$A_{nk} = 0, \quad n, k = 1,2, \ldots, \infty\,.$$

Следовательно:

$$u = \frac{4U_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^k\right]}{nk}\frac{sh\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+k^2}(a-z)}{sh\pi\sqrt{n^2+k^2}}\times\sin\frac{\pi n}{a}x\sin\frac{\pi k}{a}y\ .$$

2) условие задачи: найти стационарное распределение температуры внутри параллелепипеда $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c$, у которого на грани $x = 0$ поддерживается температура , равная Ayz , грани $z = 0$ и $z = c$ находятся при нулевой температуре , а остальные грани теплоизолированы , $A = const$.

Решение:

Стационарная температура $u(x, y, z)$ определяется, как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c, \\ u\big|_{x=0} = Ayz, \quad u\big|_{z=0} = u\big|_{z=c} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0\,. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи следует искать в виде разложения по собственным функциям прямоугольника $0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c$, с граничными условиями :

$$\begin{cases} u\big|_{z=0} = u\big|_{z=c} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0\,. \end{cases} ,$$

которые имеют следующий вид:

$$v_{nm}(y, z) = \cos\frac{\pi n}{b}y\sin\frac{\pi m}{c}z, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots$$

По переменной x заданы граничные условия первого рода при $x = 0$ и второго рода при $x = a$.

Поэтому решение задачи можно записать в виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{b} y \sin\frac{\pi m}{c} z \left\{ A_{nm} \frac{sh\sqrt{\lambda_{nm}}x}{\sqrt{\lambda_{nm}} ch\sqrt{\lambda_{nm}}a} + B_{nm} \frac{ch\sqrt{\lambda_{nm}}(a-x)}{ch\sqrt{\lambda_{nm}}a} \right\},$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2 .$$

Так как $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, $A_{nm} = 0$ при всех n и m. Используя граничное условие при $x = 0$, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos\frac{\pi n}{b} y \sin\frac{\pi m}{c} z = A_{yz} .$$

Отсюда :

$$B_{nm} = \frac{1}{\left\| \cos\frac{\pi n}{b} y \right\|^2 \left\| \sin\frac{\pi m}{c} z \right\|^2} \int_0^b \int_0^c yz \cos\frac{\pi n}{b} y \sin\frac{\pi m}{c} z \, dy dz .$$

Так как :

$$\int_0^c z \sin\frac{\pi m}{c} z dz = \frac{c^2}{\pi m}(-1)^{m+1}, \qquad \int_0^b y \cos\frac{\pi n}{b} y dy = \begin{cases} \frac{b^2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right], & n \neq 0, \\ \frac{b^2}{2}, & n = 0, \end{cases}$$

$$\left\| \sin\frac{\pi m}{c} z \right\|^2 = \frac{c}{2}, \qquad \left\| \cos\frac{\pi n}{b} y \right\|^2 = \begin{cases} b, & n = 0, \\ \frac{b}{2}, & n \neq 0, \end{cases}$$

можно записать:

$$B_{0m} = \frac{bc}{\pi m}(-1)^{m+1}, \quad B_{nm} = \frac{4bc}{\pi^3 mn^2}(-1)^m\left[1-(-1)^n\right], \quad n \neq 0, \quad m = 1,2,\ldots,\infty .$$

Следовательно , стационарное распределение температуры имеет вид:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{bc}{\pi m}\frac{ch\frac{\pi m}{c}(a-x)}{ch\frac{\pi m}{c}a}\sin\frac{\pi m}{c}z +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[1-(-1)^n\right]\frac{4bc}{\pi^3 mn^2}\frac{ch\sqrt{\lambda_{nm}}(a-x)}{ch\sqrt{\lambda_{nm}}a}\cos\frac{\pi n}{b}y\sin\frac{\pi m}{c}z ,$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2 .$$

3) Условие задачи: найти стационарное распределение температуры внутри куба, две грани котрого при $z = 0$ и $z = a$ теплоизолированы, а на остальных поддерживается постоянная температура T_0 .

Решение:

Стационарная температура u является решением краевой задачи :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ в кубе,} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=a} = 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=a} = T_0 . \end{cases}$$

Так как при $z = 0$ и $z = a$ заданы однородные граничные условия второго рода:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=a} = 0,$$

а граничные условия на остальной части поверхности куба от z не зависят , то и решение самой задачи от z зависеть не будет:

$$u = u(x, y) \quad .$$

Поэтому трехмерная задача вырождается в двухмерную:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x, \quad y < a, \ \textit{(в квадрате)}, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=a} = T_0 . \end{cases}$$

которую уже можно легко решить стандартным методом *разделения переменных,* аналогично предыдущим двум задачам.

Очевидно, что $u \equiv T_0$. Следовательно, стационарная температура данного куба постоянная и равна T_0 .

Замечания:

1) решение данной задачи можно сразу выписать из *физических соображений* : на боковых гранях поддерживается постоянная температура T_0 , а две другие грани теплоизолированы. Значит, внутри куба будет сохраняться та же температура T_0 .

2) Необходимо всегда учитывать , что если непосредственная проверка показывает, что каким то образом *угаданная* или *построенная из физических соображений* функция, действительно, является решением поставленной задачи, то другого решения эта задача иметь не может в силу теоремы единственности.

3. Задача Штурма - Лиувилля . Задача для уравнения Лапласа : круг, цилиндр и их части.

а) Собственные функции круга.

Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля для круга K_a :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in K_a, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_C = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad u \neq 0 . \end{cases}$$

Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в центре круга K_a . Напомним, что оператор Лапласа в полярной системе координат равен:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad .$$

Собственную функцию будем искать в виде:

$$u(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi) \neq 0 .$$

Запишем исходное уравнение нашей системы в полярной системе координат, подставим в него наше решение и разделим переменные:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} = -\frac{\phi''}{\phi(\varphi)} = \nu \ .$$

Так как собственная функция должна быть периодической по φ

с периодом 2π , то для ϕ мы получаем задачу Штурма - Лиувилля :

$$\begin{cases} \phi'' + \nu\phi = 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ \phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi), \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\phi = \phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \nu = \nu_n = n^2, \quad n = 0,1,2,\ldots,\infty .$$

При каждом $\nu = n^2$ получаем задачу для $R(r)$:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda r^2 - n^2\right)R = 0, \quad 0 \le r \le a \ .$$

Функция R должна удовлетворять граничному условию :

$\alpha\dfrac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0,$ вытекающему из граничных условий поставленной задачи и естественному условию ограниченности при $r = 0$:

$|R(0)| < \infty$, так как $r = 0$ является особой точкой уравнения для $R(r)$.

Значит, для определения $R(r)$ получается задача Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - n^2\right)R = 0, \quad 0 < r < a, \\ \alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \ne 0 \,. \end{cases}$$

Уравнение $r^2R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - n^2\right)R = 0$ с помощью замены $x = r\sqrt{\lambda}$ приводится к уравнению Бесселя n - го порядка:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \,.$$

Общее решение нашего уравнения можно записать в виде:

$$R(r) = R_n(r) = C_1J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2N_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) .$$

Учитывая неограниченность функции $N_n\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ при $r \to 0$ и условие ограниченности мы можем определить, что $C_2 = 0$. Будем считать, $C_1 = 1$, так как собственная функция определяется с точностью до числового множителя , который определяется из условия нормировки . Поэтому собственная функция нашей задачи имеет следующий вид:

$$R_n(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) .$$

Подставляя собственную функцию в граничное условие , получаем дисперсионное уравнение для определения собственных значений λ :

$$\alpha\sqrt{\lambda}J_n{}'\left(\sqrt{\lambda}a\right)+\beta J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)=0\ ,$$

где $\mu_k^{(n)}$ - k - ый корень уравнения $\alpha\mu J_n{}'(\mu)+\beta a J_n(\mu)=0$, при фиксированном $n=0,1,2,\ldots.$

Таким образом , собственные функции круга имеют вид:

$$\begin{cases} u_{nk}(r,\varphi)=J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}\\ n=0,1,2,\ldots, \quad k=1,2,\ldots,\end{cases}$$

а собственные значения равны: $\lambda_k^{(n)}=\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$.

Найдем норму собственной функции:

$$\|u_{nk}\|^2=\int_0^a\int_0^{2\pi}u_{nk}^2(r,\varphi)rdrd\varphi=\|J_n\|^2\|\phi_n\|^2\ ,$$

Так как норма $\phi_n(\phi_n=\cos n\varphi$ или $\phi_n=\sin n\varphi)$ известна, остается найти $\|J_n\|$.

Чтобы найти $\|J_n\|$, вычислим интеграл $I=\int Z_\nu^2(x)xdx,$ где $Z_\nu(x)$ - произвольная цилиндрическая функция.

Вычисления:

$$I=\int Z_\nu^2(x)xdx=\int Z_\nu^2(x)xd\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}Z_\nu^2(x)-\int x^2Z_\nu(x)Z'_\nu(x)dx,$$

Используя уравнение Бесселя $x^2Z''_\nu+xZ'_\nu+\left(x^2-\nu^2\right)Z_\nu=0$,

находим: $x^2Z_\nu=-x^2Z''_\nu-xZ_\nu+\nu^2Z_\nu=-x\dfrac{x}{dx}\left(xZ'_\nu\right)+\nu^2Z_\nu$.

поэтому:

$$I = \frac{x^2}{2} Z_\nu^2(x) + \int x Z'_\nu \frac{d}{dx}\left(x Z'_\nu\right) dx - \nu^2 \int Z_\nu Z'_\nu dx = \frac{x^2}{2} Z_\nu{}^2 + \frac{x^2}{2} Z'_\nu{}^2 - \frac{\nu^2}{2} Z_\nu^2 \quad .$$

Таким образом мы получаем результат:

$$\int Z_\nu^2(x) x dx = \frac{x^2}{2} \left\{ Z'_\nu{}^2(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu{}^2(x) \right\} \quad .$$

Полученная формула позволяет вычислить квадрат нормы функции Бесселя для соответствующей краевой задачи :

$$\left\|J_n\right\|^2 = \int_0^a J_n{}^2\left(\sqrt{\lambda} r\right) r dr = \frac{1}{\lambda} \int_0^{a\sqrt{\lambda}} J_n^2(x) x dx =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ J'^2_n\left(a\sqrt{\lambda}\right) + \left(1 - \frac{n_2}{a^2 \lambda}\right) J_n^2\left(a\sqrt{\lambda}\right) \right\} .$$

*) Нахождение собственных значений для задачи Дирихле, Неймана и Робена.

1) Задача Дирихле.

Для задачи Дирихле $(\alpha = 0, \beta = 1)$ собственные значения определяются из уравнения :

$$J_n(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2 .$$

Следовательно:

$$\|J_n\|_1^2 = \frac{a^2}{2} J_n'^2\left(\mu_k^{(n)}\right) .$$

2) Задача Неймана $(\alpha = 1, \beta = 0)$ собственные значения определяются из уравнения :

$$\mu J'_n(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2 .$$

Следовательно:

$$\|J_n\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\left[\mu_k^{(n)}\right]^2}\right) J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right) .$$

3) Задача Робена $(\alpha = 1,\ \beta=h)$ собственные значения определяются из уравнения: $\mu J'_n(\mu) + ahJ_n(\mu) = 0$.

Следовательно:

$$\|J_n\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left\{J'^{2}_n\left(\mu_k^{(n)}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\left[\mu_k^{(n)}\right]^2}\right)J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)\right\} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{a^{2h^2} - n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right)J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right); \qquad (1)$$

$$\|J_n\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\mu_k^{(n)^2} - n^2}{a^2h^2}\right)J'^{2}_n\left(\mu_k^{(n)}\right). \qquad (2)$$

Замечания:

1) Формула (1) удобна для вычислений при малых $h(h \to 0)$, а формула (2) при больших $h(h \to \infty)$.

2)При $h \to 0$ мы переходим ко второй краевой задаче (задача Неймана).

При $h \to \infty$ мы переходим к первоей краевой задаче (задача Дирихле).

б) Собственные функции кругового сектора.

Пусть D - круговой сектор : $0 \le r < a, \quad 0 < \varphi < a$; C - граница области D .

Задача Штурма - Лиувилля имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в } D, \\ P(u) = \alpha_0 \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_0 u \Big|_{r=a} = 0, \quad \left|\alpha_0\right| + \left|\beta_0\right| \neq 0, \\ P_1(u) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} - \beta_1 u \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \left|\alpha_1\right| + \left|\beta_1\right| \neq 0, \\ P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_2 u \Big|_{\varphi=a} = 0, \quad \left|\alpha_2\right| + \left|\beta_2\right| \neq 0, \end{cases}$$

где n - единичная нормаль (внешняя) к C , $\alpha_0, \ \beta_0, \ \alpha_1, \ \beta_1, \ \alpha_2, \ \beta_2 = const$.

Представляя функцию u в виде:

$$u = R(r)\phi\left(\varphi\right),$$

подставляя ее в поставленную нами задачу и разделяя переменные, мы получаем две задачи: отдельно для радиальной части $R(r)$, и отдельно для угловой части $\phi\left(\varphi\right)$:

1) $$\begin{cases} r^2 R'' = rR' + \left(\lambda r^2 - \nu^2\right) R = 0, \quad 0 < r < a, \\ P(R) = \alpha_0 \frac{dR}{dr} + \beta_0 R \Big|_{r=a} = 0, \\ \left|R(0)\right| < \infty, \quad R(r) \neq 0. \end{cases}$$ (задача для радиальной части)

2) $$\begin{cases} \phi'' + \lambda \phi = 0, \quad 0 < \varphi < a, \\ P_1\left(\phi\right) = \alpha_1 \phi' - \beta_1 \phi \Big|_{\varphi=0} = 0, \\ P_2\left(\phi\right) = \alpha_2 \phi' + \beta_2 \phi \Big|_{\varphi=a} = 0, \\ \phi\left(\varphi\right) \neq 0. \end{cases}$$ (задача для угловой части)

Задача для угловой части есть не что иное, а задача Штурма - Лиувилля для отрезка . Ее собственные значения ν_n и собственные функции $\phi_n(\varphi)$ определяются точно также, как и вслучае периодических граничных условий.

В задаче для ее радиальной части, ограниченное решение нашего уравнение принимает следующий вид:

$$R(r) = R_n(r) = CJ_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

После подстановки ограниченного решения в наше граничное условие, мы получаем уравнение для определения собственного значения λ :

$$\alpha\sqrt{\lambda}J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}a\right) + \beta J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0 \ .$$

Тогда решение задачи для радиальной части можно записать в виде:

$$R(r) = R_n(r) = J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_k^{(\nu_n)}}{a}r\right), \quad \lambda = \lambda_k^{(\nu_n)} = \left(\frac{\mu_k^{(\nu_n)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_k^{(\nu_n)}$ - k -ый корень уравнения $\alpha\mu J_{\nu_n}(\mu) + \beta a J_{\nu_n}(\mu) = 0$ при фиксированном n .

Квадрат нормы функции $R_n(r)$ выражается соответствующей формулой в зависимости от типа кравевой задачи (Дирихле, Нейман , Робен) , в которых n нужно заменить на ν_n .

Тогда собственные функции задачи Штурма - Лиувилля для кругового сектора имеют вид:

$$u_{nk}(r,\varphi) = J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda_k^{(\nu_n)}}r\right)\phi_n(\varphi) \ ,$$

а собственные значения:

$$\lambda_k^{(\nu_n)} = \left(\frac{\mu_k^{(\nu_n)}}{a}\right)^2$$, где $\mu_k^{(\nu_n)}$ - корни исследуемого уравнения.

в) Собственные функции кругового кольца.

Основная цель : вычислить собственные функции кругового кольца.

Пусть D - круговое кольцо : $a < r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ P_1(u) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 u \Big|_{r=a} = 0, \\ P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \Big|_{r=a} = 0, \\ u \neq 0\,. \end{cases}$$

Представим решение в виде $u\left(r, \varphi\right) = R(r)\phi\left(\varphi\right)$, подставим в наше исходное уравнение, разделим переменные и получим задачу для *радиальной части* $R(r)$ *:*

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - \nu^2\right)R = 0, \quad 0 < r < b, \\ P_1(R) \equiv \alpha_1 R' - \beta_1 R \Big|_{r=a} = 0, \\ P_2(R) \equiv \alpha_2 R' + \beta_2 R \Big|_{r=b} = 0, \end{cases}$$

и задачу для *угловой части* $\phi\left(\varphi\right)$ *:*

$$\begin{cases} \phi'' + \nu\phi = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \phi\left(\varphi\right) \equiv \phi\left(\varphi + 2\pi\right) \ \text{\textit{при любом}}\ \varphi\,. \end{cases}$$

Собственные значения ν и собственные функции ϕ задачи для *угловой части* хорошо нам уже известны и равны соответственно:

$$\nu = \nu_n = n^2, \quad \phi = \phi_n\left(\varphi\right) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Общее решение уравнения для *радиальной части* при $\nu = n^2$ примет вид:

$$R(r) = C_1 J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2 N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right)\ .$$

Подставим полученное общее решение в граничные условия :

$$\begin{cases} C_1 P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right] + C_2 P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right] = 0, \\ C_2 P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right] + C_2 P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right] = 0, \end{cases}$$

где:

$$P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right] \equiv \alpha_1\sqrt{\lambda}J_n'\left(\sqrt{\lambda}a\right) - \beta_1 J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right),$$

$$P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right] \equiv \alpha_2\sqrt{\lambda}J_n'\left(\sqrt{\lambda}b\right) + \beta_2 J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right),$$

$P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]$ и $P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]$ определяются аналогично.

Полученная система относительно C_1 и C_2 имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]} = \frac{P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]} \quad .$$

Если данное условие выполняется, то из нашей полученной системы мы можем выразить C_2 :

$$C_2 = -C_1\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]} \quad .$$

Теперь подставим C_2 в нашу систему и выберем $\mathrm{C}_1 = P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]$. Тогда решение нашей задачи можно записать в виде:

$$R(r) = R_n(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right] - N_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right] \quad ;$$

а учитывая условие ненулевого решения, его можно переписать в виде:

$$R_n(r) = \frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\left\{J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right)P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right] - N_n\left(\sqrt{\lambda}r\right)P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]\right\} .$$

Значение $\lambda = \lambda_k^{(n)}$ определяется из условия ненулевого решения при каждом фиксированном $n = 0,1,\ldots.$

Вычислим квадрат нормы $R_n(r)$:

$$\|R_n\|^2 = \int_a^b R^2 r dr \ .$$

Для этого воспользуемся ранее полученной нами формулой:

$$\int_a^b Z_v^2\left(\sqrt{\lambda}r\right) r dr = \frac{r^2}{2}\left\{Z'^2_v\left(\sqrt{\lambda}r\right) + \left(1 - \frac{v^2}{\lambda r^2}\right)Z_v^2\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right\}\Bigg|_a^b ,$$

где $Z_v^2\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ - любое решение уравнения Бесселя :

$$r^2 Z''_v + rZ'_v + \left(\lambda r^2 - v^2\right)Z_v = 0 \ .$$

$$\|R_n\|^2 = \frac{r^2}{2}\left\{R'^2_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda r^2}\right)R_n^2\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right\}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left\{R'^2_n\left(\sqrt{\lambda}b\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda b^2}\right)R_n^2\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right\} -$$

$$-\frac{a^2}{2}\left\{R'^2_n\left(\sqrt{\lambda}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda a^2}\right)R_n^2\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right\} \ .$$

Так как :

$$R_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)=\left\{J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]-N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)P_2J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right\}\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}$$

$$=\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\left\{J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\left[\alpha_2\sqrt{\lambda}N'_n\sqrt{\lambda}b+\beta_2N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]-\right.$$

$$\left.-N_n\sqrt{\lambda}b\left[\alpha_2\sqrt{\lambda}J'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)+\beta_2J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\alpha_2\sqrt{\lambda}W[J_n,N_n]\Big|_{\sqrt{\lambda}b}=\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\alpha_2\frac{2}{\pi b}\quad,$$

$$R'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)=\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\left\{J'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]-N'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\left\{J'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\left[\alpha_2\sqrt{\lambda}N'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)+\beta_2N_n\left(\sqrt{\lambda b}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\left[\alpha_2\sqrt{\lambda}J'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)+\beta_2J_n\left(\sqrt{\lambda b}\right)\right]\right\}=$$

$$= -\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\beta_2 W[J_n, N_n]\Big|_{\sqrt{\lambda}b} = -\frac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\frac{2\beta_2}{\pi\sqrt{\lambda}b},$$

$$R_n\left(\sqrt{\lambda}a\right) = \alpha_1\frac{2}{\pi a}, \quad R'\left(\sqrt{\lambda}a\right) = -\beta_1\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a},$$

где $W\left[J_n, N_n\right]$ - якобиан функции $J_n(x)$ и $N_n(x)$, равный $\dfrac{2}{\pi x}$.

Получается , что :

$$\|R_n\|^2 = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{P_1\left[\left(J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right)\right]}{P_2\left[\left(J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right)\right]}\right\}^2\left[\frac{\beta_2^2}{\lambda} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda b^2}\right)\alpha_2^2\right] -$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\beta_1^2}{\lambda} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda a^2}\right)\alpha_1^2\right] .$$

Следовательно, собственные функции кругового кольца можно записать в виде:

$$u_{nk}(r,\varphi) = R_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}r}\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \quad k = 1,2,\ldots, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где $R_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}r}\right)$ мы уже определили ранее, а собственные значения $\lambda_k^{(n)}$ есть корни уравнения $\dfrac{P_1\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]} = \dfrac{P_1\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[N_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}$:

$$\|u_{nk}\|^2 = \|R_n\|^2\|\phi_n\|^2 .$$

Граничные условия 1,2,3 рода:

1) Дирихле : граничные условия 1 рода $\left(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_1 = -1, \beta_2 = 1\right)$:

$$u\big|_{r=a} = 0, \quad u\big|_{r=b} = 0 .$$

Тогда :

$$R_n = J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) N_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) - N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) J_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{J_n\left(\sqrt{\lambda} a\right)}{J_n\left(\sqrt{\lambda} b\right)} \left\{ J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) N_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) - N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) J_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) \right\} ,$$

где $\lambda = \lambda_k^{(n)}$ есть k -ый корень уравнения $\dfrac{J_n\left(\sqrt{\lambda} a\right)}{J_n\left(\sqrt{\lambda} b\right)} = \dfrac{N_n\left(\sqrt{\lambda} a\right)}{N_n\left(\sqrt{\lambda} b\right)}$,

$$\left\| R_n \right\|_1^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\lambda} \frac{J_n^{\,2}\left(\sqrt{\lambda} a\right) - J_n^{\,2}\left(\sqrt{\lambda} b\right)}{J_n^{\,2}\left(\sqrt{\lambda} b\right)} .$$

2) Нейман : граничные условия 2 рода $\left(\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0\right)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0 ,$$

$$R_n = \sqrt{\lambda} \left\{ J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) N'_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) - N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) J'_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) \right\} \equiv$$

$$\sqrt{\lambda} \frac{J'_n\left(\sqrt{\lambda} a\right)}{J'_n\left(\sqrt{\lambda} b\right)} \left\{ J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) N'_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) - N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) J'_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) \right\} ,$$

где $\lambda = \lambda_k^{(n)}$ - k - й корень уравнения :

$$\sqrt{\lambda} \left\{ J'_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) N'_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) - N'_n\left(\sqrt{\lambda} b\right) J'_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) \right\} = 0 ,$$

$$\left\|R_n\right\|_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{J'^2_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)}{J'^2_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)}\left(1-\frac{n^2}{\lambda b^2}\right)-\left(1-\frac{n^2}{\lambda a^2}\right)\right\}.$$

Замечания:

1) уравнение $\sqrt{\lambda}\left\{J'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)N'_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)-N'_n\left(\sqrt{\lambda}b\right)J'_n\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right\}=0$ имеет нулевой корень $\lambda=0$.

2) Написанные выражения для собственных функций справедливы при $\lambda\neq 0$

3) Нулевому собственному значению соответствует собственная функция, равная единице.

б) Собственные функции кругового кольцевого сектора .

Пусть D - круговой кольцевой сектор: $a < r < b, \quad 0 < \varphi < a$.

Тогда задача Штурма - Лиувилля будет иметь вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ P_1(u) \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 u \big|_{r=a} = 0, \\ P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \big|_{r=b} = 0, \\ P_3(u) = \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_3 u \big|_{\varphi=0} = 0, \\ P_4(u) = \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_4 u \big|_{\varphi=a} = 0, \\ u(r,\varphi) \neq 0, \quad \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0, \quad i = 1,2,3,4 . \end{cases}$$

Представим решение в следующем виде:

$$u = R(r)\phi(\varphi) \quad .$$

Разделим переменные и получим задачу Штурма - Лиувилля для отрезка $0 < \varphi < a$:

$$1) \quad \begin{cases} \phi'' + \nu\phi = 0, \\ P_3(\phi)\Big|_{\varphi=0} = 0, \ P_4(\phi)\Big|_{\varphi=a} = 0, \end{cases}$$

и задачу Штурма - Лиувилля на отрезке для оператора Бесселя :

$$2) \quad \begin{cases} r^2R'' + rR' + \left(\lambda r^2 - \nu\right)R = 0, \ \ a < r < b, \\ P_1(R)\Big|_{r=a} = 0, \ P_2(R)\Big|_{r=b} = 0, \end{cases} .$$

Значит, собственные функции кольцевого кругового сектора имеют вид:

$$u_{nk}(r,\varphi) = R_n\left(\sqrt{\lambda} r\right)\phi_n(\varphi) \ ,$$

где $R_n = J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda} r\right)P_1\left[N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda} a\right)\right] - N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda} r\right)P_1\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda} a\right)\right] \equiv$

$$\equiv \frac{P_1\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]}\left\{J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}r\right)P_2\left[N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]-N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}r\right)P_2\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]\right\},$$

$\phi_n(\varphi) = \dfrac{\beta_3 \sin\sqrt{\nu_n}\varphi + \alpha_3\sqrt{\nu_n}\cos\sqrt{\nu_n}\varphi}{\sqrt{\nu_n\alpha_3^2+\beta_3^2}}$, где ν_n - n - ый корень уравнения:

$(\alpha_3\alpha_4\nu - \beta_3\beta_4)tg\sqrt{\nu}\alpha = \sqrt{\nu}\left(\alpha_3\beta_4 + \beta_3\alpha_4\right)$, где $\lambda = \lambda_k^{(\nu_n)}$ - k - ый корень уравнения :

$$\frac{P_1\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]} = \frac{P_1\left[N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right]}{P_2\left[N_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}b\right)\right]} .$$

в) Собственные функции цилиндра .

Рассмотрим задачу Штурма - Лиувилля для прямого кругового цилиндра . введем цилиндрическую систему координат (r,φ,z) с началом в центре нижнего основания цилиндра и осью z , направленной вдоль оси цилиндра.

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta u = \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$, где Δ_2 - оператор Лапласа на плоскости.

Тогда задача Штурма - Лиувилля имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 < z < l, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \Big|_{r=a} = 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} - \beta_1 u \Big|_{z=0} = 0, \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 u \Big|_{z=l} = 0\,. \end{cases}$$

В рассматриваемом классе задач решение мы будем строить методом *разделения переменных* : отделяя переменную $z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad u(r,\varphi,z) = v(r,\varphi)Z(z)\ .$$

Подставляем наше решение в заявленное уравнение , записанное в цилиндрической системе координат и *разделив переменные* , получим:

$$\frac{\Delta_2 v + \lambda v}{v(r,\varphi)} \equiv -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \nu\ .$$

С учетом граничных условий нашей задачи мы получаем две отдельные задачи Штурма - Лиувилля. Одна из которых решается на отрезке(определение собственных функций и собственных значений на отрезке) , другая в круге (определение собственных функций и собственных значений в круге).

1) $$\begin{cases} Z'' + \nu Z = 0, \quad 0 < z < l, \\ \alpha_1 Z' - \beta_1 Z\big|_{z=0} = 0, \\ \alpha_2 Z' + \beta_2 Z\big|_{z=l} = 0, \\ Z(z) \neq 0\,. \end{cases}$$ *(задача Штурма - Лиувилля на отрезке)*

2) $$\begin{cases} \Delta_2 v + \chi v = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \alpha \frac{\partial v}{\partial r} + \beta v\big|_{r=a} = 0, \quad \chi = \lambda - \nu, \\ v(r,\varphi) \neq 0 \end{cases}$$ *(задача Штурма - Лиувилля в круге)*

Значит:

собственные функции цилиндра имеют следующий вид:

$$u_{nkm}(r,\varphi,z) = J_n\left(\sqrt{\chi_k^{(n)}}r\right)\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\} Z_m(z),$$

собственные значения цилиндра вычисляются по формуле :

$$\lambda_{nkm} = \chi_k^{(n)} + \nu_m,$$

где $\chi_k^{(n)}$ - собственные значения круга при соответствующих граничных условиях ,

$Z_m(z)$ и ν_m - собственные функции и собственные значения отрезка при соответствующих ему граничных условиях .

г) Собственные функции цилиндрического сектора.

Пусть D - сектор конечного кругового цилиндра :

$$0 \le r < a, \quad 0 < \varphi < a, \quad 0 < z < l \,.$$

Ему соответствует задача Штурма - Лиувилля , которая имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ P_2[u] = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \big|_{r=a} = 0, \\ P_3[u] = \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_3 u \big|_{\varphi=0} = 0 \\ P_4[u] = \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_4 u \big|_{\varphi=a} = 0, \\ P_5[u] = \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} - \beta_5 u \big|_{z=0} = 0 \\ P_6[u] = \alpha_6 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_6 u \big|_{z=l} = 0 \\ u(r, \varphi, z) \ne 0, \quad \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i \ne 0, \quad i = 2, \ldots, 6 \,.\right| \end{cases}$$

Решение ищем в следующем виде:

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \;.$$

Подставляем решение в нашу задачу , *разделяем переменные* и получаем две отдельные задачи Штурма - Лиувилля .

Для функции $Z(z)$ мы получаем задачу Штурма - Лиувилля на отрезке:

$$1) \quad \begin{cases} Z'' + \delta z = 0, \quad 0 < z < l, \\ P_5[Z]\Big|_{z=0} = 0, \;\; P_6[Z]\Big|_{z=l} = 0, \\ Z \neq 0, \end{cases}$$

для функции $v(r, \varphi)$ мы получаем задачу Штурма - Лиувилля для кругового сектора:

$$2) \quad \begin{cases} \Delta v + \chi v = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ P_2[v]\Big|_{r=a} = 0, \\ P_3[v]\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad P_4[v]\Big|_{\varphi=a} = 0, \\ v(r, \varphi) \neq 0, \end{cases}$$

где $\chi = \lambda - \delta$.

Собственные функции цилиндрического сектора имеют вид:

$$u_{nkm} = (r, \varphi, z) = R_{nk}(r, \varphi) Z_m(z) \quad ,$$

где $R_{nk}(r, \varphi)$ - собственные функции кругового сектора $0 < r < a$, $0 < \varphi < \alpha$,

$Z_m(z)$ - собственные функции отрезка $0 < z < l$,

Собственные значения :

$$\lambda_{nkm} = \chi_{nk} + \delta_m,$$

где χ_{nk} и δ_m - собственные значения кругового сектора и отрезка.

д) Частные решения уравнения Лапласа в полярной системе координат.

Введем полярную систему координат (r,φ) и построим *частные решения* уравнения Лапласа :

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \ ,$$

представимые в виде:

$$u(r,\varphi)=R(r)\phi(\varphi) \ .$$

Подставляем заявленный вид решения в наше уравнения и *разделяем переменные*:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)}\equiv-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=\lambda \ .$$

Получаем отдельно уравнения для *радиальной части* $R(r)$ и *угловой части* $\phi(\varphi)$.

Рассмотрим уравнение для *угловой части* $\phi(\varphi)$:

$$\phi''(\varphi)+\lambda\varphi=0 \ .$$

Будем считать, что переменная φ изменяется от 0 до 2π (случай, когда переменная φ изменяется в меньшей области $0\le\varphi<\alpha<2\pi$ соответствует решению уравнения Лапласа в секторе и будет рассмотрен отдельно) .

Если $0\le\varphi\le 2\pi$, то решение (в силу непрерывности) должно быть периодично по φ с периодом 2π . Значит, для определения функции $\phi(\varphi)$ мы получаем одномерную задачу Штурма - Лиувилля с условиями периодичности :

$$\begin{cases}\phi''+\lambda\phi=0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\\ \phi(\varphi+2\pi)\equiv\phi(\varphi) \quad \textit{при любом } \varphi,\\ \phi(\varphi)\ne 0.\end{cases}$$

Как мы уже знаем, решение этой задачи имеет вид:

$$\phi = \phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0,1,\ldots,\infty\,.$$

С учетом известных нам собственных значений λ из рассматриваемого уравнения Лапласа , мы получаем уравнение для *радиальной части :*

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0\,.$$

Это *уравнение Эйлера* и его общее решение можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} R = R_n(r) = C_1r^n + C_2r^{-n}, & n \neq 0, \\ R_0(r) = C_1 + C_2\ln r, & n = 0\,. \end{cases}$$

Значит, мы построили следующие *серии частных решений* уравнения Лапласа:

$$1)\quad u_n(r,\varphi) = r^n\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Эти решения ограничены при $r \to 0$ и неограничены на бесконечности.

Общее решение уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le a$ записывается в виде разложения по этим решениям:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\{A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\}\,.$$

$$2)\quad u_n(r,\varphi) = \frac{1}{r^n}\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0,1\ldots$$

Эти решения ограничены на бесконечности и неограничены при $r \to 0$. Они используются при решении уравнения Лапласа вне круга .

Общее решение уравнения Лапласа вне круга $(r \ge a)$, ограниченное на бесконечности , можно записать в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}\{A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\}.$$

3) Третья серия решений:

$$1,\ \ln r,\ r^n\begin{Bmatrix} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{Bmatrix}, \frac{1}{r^n}\begin{Bmatrix} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{Bmatrix}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

(используется при решении уравнения Лапласа в круговом кольце $a \le r \le b$)

неограничена при $r \to 0$, и при $r \to \infty$

e) Краевые задачи для уравнения Лапласа внутри круга.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа внутри круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < a, \\ P[u] \equiv \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \big|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0. \end{cases}$$

Решение рассматриваемой задачи наиболее рационально (для упрощения вычислений) записать в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{P[r^n]\big|_{r=a}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} \quad (\beta \ne 0) \ .$$

Подставляем наше решение в граничное условие и получаем:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} = f(\varphi) \ .$$

A_n и B_n - коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$ по системе тригонометрических функций $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$, которые вычисляются по формулам:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 0,1,2\dots$$

Решения 1,2,3 краевых задач для уравнения Лапласа в круге:

(задача Дирихле, Неймана и Робена)

1) Задача Дирихле ($u\big|_{r=a} = f(\varphi)$) :

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} \ .$$

2) Задача Неймана ($\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi)$) :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n a^{n-1}} \left\{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right\} + C \ ,$$

где C - произвольная константа .

замечание: решение внутренней задачи Неймана существует только при условии, что $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ (это условие необходимое и достаточное) и пореределяется с точностью до произвольной постоянной.

3) Задача Робена ($\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = f(\varphi), \quad h = const,$) :

$$u = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n + ah) a^{n-1}} \left\{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right\} \ .$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются тем же самым формулами, описанными выше.

О сходимости рядов: если граничная функция $f(\varphi)$ абсолютно интегрируема , то коэффициенты Фурье , по крайней мере, ограничены , и , как видно из структуры рассматриваемых рядов, эти ряды будут в любой внутренней точке круга ($r < a$) сходиться не хуже, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{r}{a}$. При увеличении гладкости функции $f(\varphi)$ сходимость указанных рядов улучшается.

ж) Краевые задачи для уравнения Лапласа вне круга.

Рассмотрим теперь внешнюю краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{вне круга} \quad (r > a), \\ P[u] \equiv \alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} - \beta u \Big|_{r=a} = f(\varphi), \\ u \text{ регулярна на } \infty . \end{cases}$$

замечание : в двумерном случае регулярность на бесконечности означает, что функция u имеет конечный предел при $r \to \infty$.

Наиболее удобно представить наше решение в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = -\frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{r^n}}{P\left[\frac{1}{r^n}\right]\Big|_{r=a}} \left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\} =$$

$$= -\frac{A_0}{2\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(\alpha n + \beta a) r^n} \left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\} \quad (\text{при } \beta \neq 0) \ .$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия и вычисляются по формулам:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

Решения 1,2,3 краевых задач для уравнения Лапласа в круге:

(задача Дирихле, Неймана и Робена)

1) Задача Дирихле ($u\big|_{r=a} = f(\varphi)$, $(\alpha = 0,\ \beta = -1)$) :

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\} \quad .$$

2) Задача Неймана ($\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi) \quad (\alpha = 1,\ \beta = 0)$) :

$$u = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} + C \ ,$$

где C - произвольная постоянная.

замечание: *на плоскости внешняя задача Неймана разрешима лишь при условии:*

$\int\limits_{C_a} f dl = a \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ *и ее решение определяется с точностью до постоянного слагаемого .*

3) Задача Робена ($\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} - hu\right|_{r=a} = f(\varphi), \quad (\alpha = 1, \quad \beta = h)$) :

$$u = -\frac{A_0}{2h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n + ah) r^n} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}$$

Коэффициенты A_n и B_n в рассмотренных разложениях являются коэффициентами Фурье функции $f(\varphi)$ и вычисляются по стандартным формулам, приведенными нами выше.

з) Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом кольце .

Рассмотрим решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри кругового кольца.

Выберем изначально первую краевую - *задачу Дирихле :*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в кольце } a < r < b, \\ u\big|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad u\big|_{r=b} = f_2(\varphi) \,. \end{cases}$$

При решении поставленной задачи наиболее удобно вместо *разложения по частным решениям* построить при каждом n систему фундаментальных решений $\left\{R_n^{(a)}(r), R_n^{(b)}(r)\right\}$ уравнения $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$ и удовлетворяющих граничным условиям :

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \quad R_n^{(b)}(b) = 0 \,.$$

Общее решение полученного уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &R = C_1 + C_2 \ln r && n = 0, \\ &R = C_1 r^n + C_2 r^{-n} && n \neq 0, \end{aligned}$$

мы подбираем коэффициенты C_1 и C_2 таким образом, чтобы построить нужные нам решения. Они определяются с точностью до числового множителя, и их можно взять , например, в виде:

$$R_0^{(a)}(r) = \ln\frac{r}{a}, \qquad R_0^{(b)}(r) = \ln\frac{b}{r},$$

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0 \,.$$

После построения функций $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$, мы получаем *систему частных решений для уравнения Лапласа:*

$$u_n^{(a)}(r,\varphi) = R_n^{(a)}(r)\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad u_n^{(b)}(r,\varphi) = R_n^{(b)}(r)\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix},$$

$$u_0^{(a)}(r,\varphi) = \ln\frac{r}{a}, \qquad\qquad u_0^{(b)}(r,\varphi) = \ln\frac{b}{r} \;.$$

Частные решения для уравнения Лапласа ограничены внутри кольца и удовлетворяют граничным условиям :

$$u_n^{(a)}\Big|_{r=a} = 0, \quad u_n^{(b)}\Big|_{r=b} = 0 \ .$$

и нужно учесть, что:

$$u_n^{(a)}\Big|_{r=b} \neq 0, \quad u_n^{(b)}\Big|_{r=a} \neq 0 \ .$$

Теперь мы можем записать решение нашей исходной краевой задачи в виде разложения по полученным нами *частным решениям :*

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2}\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{C_0}{2}\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\frac{b^n}{r^n}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right) +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{2n}-r^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\frac{a^n}{r^n}\left(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right) .$$

Подставляя полученное решение в граничное условие при $r = a$ и учитывая $u_n^{(a)}\Big|_{r=a} = 0, \quad u_n^{(b)}\Big|_{r=b} = 0$, получаем:

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right) = f_1(\varphi) \ .$$

Теперь мы можем вычислить коэффициенты C_n и D_n :

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \ .$$

Аналогично, подставляя решение в граничное условие при $r = b$, определяем коэффициенты A_n и B_n :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \ \ B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \ .$$

Замечания:

1) предварительно построив радиальные функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющие нужным однородным граничным условиям при $r = a$ и при $r = b$, нам удалось « развязать» граничные условия, заданные при $r = a$ и при $r = b$.

2) Решение других краевых задач для уравнения Лапласа внутри кольца строится аналогично.

3) При построении радиальных функций $R_n(r)$ для граничных условий второго рода следует иметь ввиду, что при $n = 0$ не существует двух линейно независимых решений исходного уравнения, одно из которых удовлетворяет условию $\left.\frac{dR_0^{(a)}}{dr}\right|_{r=a} = 0$, а другое - $\left.\frac{dR_0^{(b)}}{dr}\right|_{r=b} = 0$. Обоим этим случаям удовлетворяет одно и тоже решение $R_0(r) \equiv 1$.

4) При $n \neq 0$ нужную пару фундаментальных решений образуют функции

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} + a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{r^{2n} + b^{2n}}{r^n}, \quad (n \neq 0) .$$

Решение *задачи Неймана* внутри кольца :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi) \end{cases} .$$

Решение наиболее удобно записать в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = \frac{C_0}{2}\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)'}(b)}\left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)'}(a)}\left\{C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right\} + const ,$$

коэффициенты определяются из граничных условий; причем при $n \neq 0$ коэффициент $C_0 = \frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(\varphi)d\varphi = \frac{b}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_2(\varphi)d\varphi$; а const - произвольная постоянная.

Равенство коэффициента C_0 не содержит противоречия при произвольных функциях $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$, так как полностью соответствует условию разрешимости задачи Неймана:

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}dl = \int\limits_0^{2\pi}\left\{bf_2(\varphi) - af_1(\varphi)\right\}d\varphi = 0 \quad .$$

О сходимости полученных рядов: рассмотрим для примера полученный ряд:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2}\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{C_0}{2}\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\frac{b^n}{r^n}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{2n}-r^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\frac{a^n}{r^n}\left(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right) .$$

Так как, при $a < r < b$:

$$\left|\frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)}\right| = \frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\frac{b_n}{r^n} = \frac{1-\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\frac{a}{b}}\left(\frac{r}{b}\right)^n = \frac{b}{b-a}\left(\frac{r}{b}\right)^n$$

и $\left|\frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)}\right| = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}}\frac{a_n}{r^n} \le \left(\frac{a}{r}\right)^n$, ряды сходятся внутри кольца $a < r < b$ не хуже, чем геометрические прогрессии. При увеличении гладкости граничных функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ скорость сходимости увеличивается.

Примеры:

1. Внутри круга решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u\big|_{r=a} = \frac{\pi - \varphi}{2}. \end{cases}$$

Решение:

Запишем общее решение задачи Дирихле внутри круга :

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\} .$$

Определим коэффициенты A_n и B_n из граничного условия :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - \varphi}{2}\cos n\varphi d\varphi = 0 \ , \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - \varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{n} .$$

Отсюда :

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi .$$

2. Внутри кольца а $< r < b$ решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin 2\varphi, \quad u\big|_{r=b} = 1 + \cos\varphi . \end{cases}$$

Решение:

Радиальные решения, удовлетворяющие однородному граничному условию при $r = a$ имеют следующий вид:

$$R_0^{(a)}(r) = 1, \quad R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} + a^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

при $r = b$:

$$T_0^{(b)}(r) = \ln\frac{b}{r}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

Таким образом, мы можем записать решение поставленной задачи в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2}\frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)}\left\{A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right\} +$$

$$+\frac{C_0}{2}\frac{T_0^{(b)}(r)}{T_0^{(b)'}(a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n^{(b)}(r)}{T_n^{(b)'}(a)}\left\{C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right\} .$$

Подставляем в граничное условие при $r = a$ и получаем :

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right\} = \sin 2\varphi \quad .$$

Отсюда находим : $C_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \qquad D_2 = 1, \quad D_n = 0, \quad n \neq 2$.

Подставляем общий вид решения в граничное условие при $r = b$ и получаем:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right\} = 1 + \cos\varphi \ .$$

Следовательно:

$$A_0 = 2, \ \ A_1 = 1, \quad A_n = 0, \ \ n \neq 0{,}1, \quad B_n = 0, \ \ n = 1{,}2, \ldots$$

Таким образом, наш конечный результат :

$$u(r,\varphi) = 1 + \frac{R_1^{(a)}(r)}{R_1^{(a)}(b)}\cos\varphi + \frac{T_2^{(b)}(r)}{T_2^{(b)'}(a)}\sin 2\varphi =$$

$$= 1 + \frac{a}{r}\frac{r^2 + a^2}{b^2 + a^2}\cos\varphi - \frac{a^3}{2r^2}\frac{b^4 - r^4}{b^4 + a^4}\sin 2\varphi \ .$$

3. Для задачи Дирихле внутри круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

вывести формулу Пуассона:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\alpha) d\alpha}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \alpha)} \ .$$

Решение:

Как мы уже знаем, решение задачи Дирихле в круге можно записать в виде ряда:

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right\}, \ldots,$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются по стандартным и хорошо уже знакомым нами формулами:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha .$$

Подставив полученные значения коэффициентов в наше решение и поменяв порядок суммирования и интегрирования, мы получим:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\alpha) \right\} d\alpha .$$

Так как при $\frac{r}{a} < 1$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\alpha) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi-\alpha)} \quad ,$$

мы получаем итоговый результат:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)f(\alpha)d\alpha}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi-\alpha)} \quad .$$

Замечание: при непрерывной функции $f(\varphi)$ формула Пуассона дает классическое решение задачи Дирихле в круге.

4 . Построить интегральную формулу, аналогичную формуле Пуассона , для решения внутренней задачи Неймана для круга.

Решение:

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана для круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < a, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi) \,. \end{cases}$$

Будем считать что поставленная задача *разрешима* :

$$\int_C f dl = a \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0 \quad .$$

Тогда решение поставленной задачи можно записать в следующем виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n a^{n-1}} \left\{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right\} + const \quad ,$$

Коэффициенты определяются стандартными формулами:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \;\; B_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad .$$

Подставляем значения коэффициентов в ряд и меняем поярдок интегрирования и суммирования:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n a^{n-1}} \left(\cos n\alpha \cos n\varphi + \sin n\alpha \sin n\varphi \right) \right\} d\alpha + +const =$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\varphi - a) \right\} d\alpha + const \quad .$$

Так как при $|t| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \cos n\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\cos\beta + t^2}} \ ,$$

наше решение примет следующий вид:

$$u(r,\varphi) = -\int_{C_a} f(\alpha) \ln \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \alpha)}\, dl + const \ .$$

полученная формула определяет решение внутренней задачи Неймана для круга и она аналогична формуле Пуассона для задачи Дирихле внутри круга.

и) Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом секторе.

Рассмотрим краевую задачу внутри кругового сектора:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < a, \quad 0 < \varphi < a, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi), \\ P_3[u] \equiv \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_3 u\big|_{\varphi=0} = 0, \\ P_4[u] \equiv \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_4 u\big|_{\varphi=a} = 0 \\ \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \ne 0, \quad i = 3,4\,. \end{cases}$$

Найдем частные решения вида:

$$u(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi) \quad .$$

Подставлем решение в уравнение Лапласа и разделяем переменные. Получаем, для определения угловой части $\phi(\varphi)$, задачу Штурма - Лиувилля на отрезке $0 \le \varphi \le a$:

$$\begin{cases} \phi''(\varphi) + \lambda\varphi = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ P_3[\phi] \equiv \alpha_3\phi' - \beta_3\phi\Big|_{\varphi=0} = 0, \\ P_4[\phi] \equiv \alpha_4\phi' + \beta_4\phi\Big|_{\varphi=a} = 0\,. \end{cases}$$

и задачу Штурма - Лиувилля для определения радиальной части $R(r)$:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad \left|R(0)\right| < \infty \quad .$$

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения для радиальной части имеет вид:

$$R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}}, \quad C = const \quad .$$

Следовательно, семейство *частных решений* уравнения Лапласа , ограниченное при $r = 0$ имеет вид:

$$u_n(r,\varphi) = r^{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(\varphi), \quad n = 1,2,\ldots,$$

$\phi_n(\varphi)$ и $\lambda_n \geq 0$ - собственные функции и собственные значения полученной задачи Штурма - Лиувилля на отрезке $0 \leq \varphi \leq a$.

Тогда общее решение уравнения Лапласа внутри кругового сектора можно записать в виде:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} \phi_n(\varphi) \ ,$$

а коэффициенты C_n определяются из граничного условия :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(\varphi) = f(\varphi), \quad C_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^a f(\varphi) \phi_n(\varphi) d\varphi \ .$$

Если граничное условие при $r = a$ - граничное условие 3 рода :

$$P_2[u] \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0,$$

то общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{r\sqrt{\lambda_n}}{P_2\left[r\sqrt{\lambda_n}\right]\Big|_{r=a}} \phi_n(\varphi) \ .$$

В этом случае коэффициенты C_n будут определяться формулой :

$$C_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^a f(\varphi) \phi_n(\varphi) d\varphi \ .$$

замечание: при решении второй краевой задачи (Нейман) нужно учитывать, что она имеет решение не всегда и ее решение , если оно существует, не единственно.

к) Краевые задачи для уравнения Лапласа в кольцевом секторе.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора $\left(a \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le \alpha\right)$ с однородными граничными условиями на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 u \Big|_{r=a} = f_1(\varphi), \\ P_2[u] \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \Big|_{r=b} = f_2(\varphi), \\ P_3[u]\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad P_4[u]\Big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \ne 0, \quad i = 1,2,3,4\,. \end{cases}$$

Семейство *частных решений* уравнения Лапласа можно записать в виде:

$$u_n^{(a)}(r,\varphi) = R_n^{(a)}(r)\phi_n(\varphi), \;\; u_n^{(b)}(r,\varphi) = R_n^{(b)}(r)\phi_n(\varphi), \quad n = 1,2,\ldots,\infty,$$

где $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ - решения уравнения $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$, удовлетворяющие граничным условиям :

$$P_1\left[R_n^{(a)}\right] \equiv \alpha_1 \frac{dR_n^{(a)}}{dr} - \beta_1 R_n^{(a)}\Big|_{r=a} = 0,$$

$$P_2\left[R_n^{(b)}\right] \equiv \alpha_2 \frac{dR_n^{(b)}}{dr} + \beta_2 R_n^{(b)}\Big|_{r=b} = 0,$$

$\phi_n(\varphi)$ и λ_n - собственные функции и собственные значения нашей задачи.

Тогда общее решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} R &= C_1 r^{\sqrt{\lambda}} + C_2 r^{-\sqrt{\lambda}}, && \lambda \ne 0, \\ R &= C_1 + C_2 \ln r, && \lambda = 0\,. \end{aligned}$$

В качестве примера построим решения $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$ для задачи Дирихле , удовлетворяющие их граничным условиям .

Тогда наше решение будет представимо в следующем виде:

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2\sqrt{\lambda_n}} - a^{2\sqrt{\lambda_n}}}{r^{\sqrt{\lambda_n}}}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2\sqrt{\lambda_n}} - r^{2\sqrt{\lambda_n}}}{r^{\sqrt{\lambda_n}}}; \quad \lambda_n \neq 0,$$

$$R_0^{(a)}(r) = \ln\frac{r}{a}, \qquad R_0^{(b)}(r) = \ln\frac{b}{r}; \qquad \lambda_n = 0.$$

Следовательно ,общее решение уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора представимо в следующем виде:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2}\frac{R_0^{(a)}(r)}{P_2\left[R_0^{(a)}(b)\right]} + \frac{B_0}{2}\frac{R_0^{(b)}(r)}{P_1\left[R_0^{(b)}(a)\right]} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R_n^{(a)}(r)}{P_2\left[R_n^{(a)}(b)\right]}\phi_n(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{R_n^{(b)}(r)}{P_1\left[R_n^{(b)}(a)\right]}\phi_n(\varphi) \quad ,$$

при этом все $\lambda_n \neq 0$, то $A_0 = B_0 = 0$. Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничных условий :

$$A_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_0^{\alpha} f_2(\varphi)\phi_n(\varphi)d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\phi_n(\varphi)d\varphi.$$

замечание: когда граничные условия на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ неоднородные, для решения соответствующей задачи можно либо *сделать замену неизвестной функции* , либо *использовать функцию Грина.*

л) Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом цилиндре.

Рассмотрим задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра $\left(0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h\right)$ на примере задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ u\big|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \\ u\big|_{z=h} = f_2(r, \varphi), \end{cases}$$

Разобьем рассматриваемую задачу на две *стандартные* :

$$1) \begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ u\big|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \\ u\big|_{z=h} = f_2(r, \varphi), \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим каждую из полученных задач в отдельности:

1) Найдем *частные решения уравнения Лапласа* в виде:

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \ne 0,$$

удовлетворяющие однородному граничному условию :

$$u\big|_{r=a} = 0 \ .$$

Подставляем вид решения в уравнение Лапласа и разделяем переменные. Получаем:

$$\frac{\Delta_2 v}{v} \equiv -\frac{Z''}{Z} = -\lambda \ .$$

Получаем (*как и в случае параллелепипеда*) задачи для $v(r,\varphi)$ и $Z(z)$:

$$1)\begin{cases}\Delta_2 v+\lambda v=0, \quad 0\le r<a, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \\ v\big|_{r=a}=0, \quad v(r,\varphi)\ne 0,\end{cases}$$ *(задача Штурма - Лиувилля для круга).*

$$2)\ Z''+\lambda z=0, \quad 0\le z\le h.$$

Собственные функции задачи Штурма - Лиувилля для круга равны:

$$v=v_{nk}(r,\varphi)=J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

Собственные значения $\lambda_k^{(n)}$ - корни уравнения :

$$J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)=0, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad k=1,2,\ldots,\infty.$$

Общее решение уравнения наиболее удобное для решение задачи Дирихле по переменной z будет иметь следующий вид:

$$Z(z)=A\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}+B\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}.$$

Система частных решений будет иметь вид:

$$u_{nk}(r,\varphi,z)=v_{nk}(r,\varphi)\left\{A_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}+B_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}\right\}, \quad n=0,1,\ldots, \quad k=1,2,.,$$

Будем искать решение рассматриваемой задачи в виде разложения по *частным решениям:*

$$u(r,\varphi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\left\{\left[A_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}+\right.\right.$$

$$+B_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}\Bigg]\cos n\varphi+$$

$$+\left[C_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}+D_{nk}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}}h}\right]\sin n\varphi\Bigg\}\ .$$

Коэффициенты A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} , D_{nk} определяются из граничных условий :

$$A_{nk}=\frac{1}{\|J_n\|^2\|\cos n\varphi\|^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}f_2(r,\varphi)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi r dr d\varphi,$$

$$B_{nk}=\frac{1}{\|J_n\|^2\|\cos n\varphi\|^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}f_1(r,\varphi)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi r dr d\varphi,$$

$$C_{nk}=\frac{1}{\|J_n\|^2\|\sin n\varphi\|^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}f_2(r,\varphi)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi r dr d\varphi,$$

$$D_{nk}=\frac{1}{\|J_n\|^2\|\sin n\varphi\|^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}f_1(r,\varphi)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi r dr d\varphi,$$

Замечания:

1) Для задачи Дирихле все собственные значения $\lambda_k^{(n)}>0$. При решении задачи Неймана появляется собственное значение $\lambda=0$. Если $\lambda=0$, то уравнение $Z''+\lambda z=0$ примет вид $Z''=0$. Его общее решение выглядит следующим образом: $Z(z)=A+Bz$. Поэтому в системе *частных решений* для задачи Неймана удобно выделить решение: $u_0=A_0+B_0z$, соответствующее нулевому собственному значению.

2) Изложенный метод решения непосредственно переносится на краевую задачу внутри прямого цилиндра произвольного поперечного сечения, если на боковой поверхности такого цилиндра выполняется нулевое граничное условие (первого, второго и третьего рода).

3) Сходимость полученных рядов аналогична сходимости рядов, появляющихся при решении задач в прямоугольном параллелепипеде.

Рассмотрим вторую полученную нами *стандартную* задачу :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0\,. \end{cases}$$

Основная задача при ее решении - построить систему частных решений уравнения Лапласа, которые можно представить в следующем виде:

$$u(r,\varphi,z) = v(r,\varphi)Z(z) \neq 0\,,$$

которые будут удовлетворять граничному условию:

$$u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0\,.$$

Подставляем наше решение в уравнение Лапласа и разделяем переменные. И вновь мы получаем две задачи. Одна из которых уже прекрасно знакомая нам задача Штурма - Лиувилля для отрезка:

$$\begin{cases} Z'' + \lambda z = 0, \quad 0 < z < h, \\ Z(0) = Z(h) = 0, \quad Z(z) \neq 0; \end{cases}$$

и вторая задача:

$$\Delta_2 v - \lambda v = 0, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма - Лиувилля для отрезка имеют вид:

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \quad Z = Z_k(z) = \sin\frac{\pi k}{h}z, \quad k = 1,2,\ldots,\infty\,.$$

Частные решения рассматриваемого уравнения можно с помощью стандартного метода *разделения переменных :*

Пусть: $v(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi)$. Тогда подставляя решение в наше уравнение и разделяя переменные , мы получим:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\phi''}{\phi(\varphi)} = \nu \ .$$

Отсюда получаем задачу для определения угловой части $\phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} \phi'' + \nu\phi = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \phi(\varphi) \equiv \phi(\varphi + 2\pi)\,. \end{cases}$$ *задача Штурма - Лиувилля для отрезка с периодическими граничными условиями.*

А также получаем задачу для определения радиальной части $R(r)$:

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + \nu)R = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty\,. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции полученной задачи Штурма - Лиувилля для отрезка с периодическими граничными условиями равны:

$$\nu = \nu_n = n^2, \quad \phi = \phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0,1,\ldots,\infty\,.$$

Уравнение $r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + \nu)R = 0$ называется *уравнением Бесселя с чисто мнимым аргументом .*

Его общее решение имеет следующий вид:

$R(r) = C_1 I_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2 K_n\left(\sqrt{\lambda} r\right)$, где $I_n(x)$ - функция Инфельда, $K_n(x)$ - функция Макдональда.

Условие ограниченности дает нам $C_2 = 0$.

Таким образом, *система частных решений* имеет следующий вид:

$$u_{nk}(r,\varphi,z) = I_n\left(\sqrt{\lambda_k} r\right)\sin\sqrt{\lambda_k} z \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \quad n = 0,1,\dots, \quad k = 1,2,\dots,\infty .$$

Тогда решение рассматриваемой краевой задачи можно найти *в виде разложения по системе частных решений следующего вида:*

$$u(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_n\left(\sqrt{\lambda_k} r\right)}{I_n\left(\sqrt{\lambda_k} a\right)}\sin\sqrt{\lambda_k} z\left\{A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi\right\},$$

коэффициенты определяются из граничного условия следующим образом:

$$A_{nk} = \frac{1}{N_1^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h f(\varphi,z)\sin\frac{\pi k}{h} z\cos n\varphi\, dz\, d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{N_2^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h f(\varphi,z)\sin\frac{\pi k}{h} z\sin n\varphi\, dz\, d\varphi,$$

$$N_1 = \left\|\sin\frac{\pi k}{h} z\right\|\left\|\cos n\varphi\right\|, \ N_2 = \left\|\sin\frac{\pi k}{h} z\right\|\left\|\sin n\varphi\right\|,$$

следовательно : решение изначально поставленной задачи мы представили в виде суммы двух *стандартных задач:*

$u = u_1 + u_2$, где u_1 - решение первой стандартной задачи, а u_2 - второй соответственно.

Замечания:

1) Решение краевой задачи с другими граничными условиями проводится совершенно аналогичном образом. Однако, следует учитывать возможность появления *нулевого собственного значения* .

2) При решении задачи :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

внутри тора прямоугольного сечения изменится только радиальная функция $R(r)$: $R = R_{nk}(r) = C_{nk} I_n\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) + D_{nk} K_n\left(\sqrt{\lambda_k} r\right)$.

3) Если по переменной z на обоих концах отрезка $[0, h]$ ($z = 0$ и $z = h$) задано нулевое граничное условие второго рода ($\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$), а граничная функция на боковой поверхности цилиндра не зависит от переменной z , то и решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри цилиндра не будет зависеть от z . В этом случае задача *выраждается в краевую задачу для уравнения Лапласа на плоскости в области, представляющей поперечное сечение данного цилиндра.*

4) Рассмотрим краевую задачу с нулевыми граничными условиями второго рода по переменной z :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ в цилиндре } D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \\ u\big|_{r=a} = f(\varphi, z) \,. \end{cases}$$

Разделим переменные по переменной z и получим задачу Штурма - Лиувилля следующего вида:

$$\begin{cases} Z'' + \lambda z = 0, \ \ 0 < z < h, \\ Z'(0) = Z'(h) = 0, \\ Z(z) \neq 0, \end{cases}$$

решение полученной задачи имеет следующий вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \quad Z_k(z) = \cos\frac{\pi k}{h} z, \quad k = 0,1,2,\ldots,\infty \,.$$

Необходимо учесть: $\quad k = 0 \ \ \lambda_0 = 0, \ \ Z_0(z) = 1.$

Для функции $v(r, \varphi)$ получаем уравнение : $\quad \Delta_2 v - \lambda v = 0$.

При $\lambda_k \neq 0$ (т.е. при $k = 1,2,\ldots$) мы имеем следующие *частные решения, ограниченные при* $r = 0$:

$$I_n\left(\sqrt{\lambda_k} r\right)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0,1,2\ldots$$

При $k = 0 \ \ \lambda_0 = 0$ и уравнение $\Delta_2 v - \lambda v = 0$ переходит в уравнение Лапласа $\Delta_2 v = 0$, которое имеет следующие *частные решения* , ограниченные при $r = 0$:

$$r^n\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0,1,\ldots,\infty$$

Таким образом, *частные решения* уравнения Лапласа в цилиндре в виде:

$u = v(r,\varphi)Z(z)$, которые удовлетворяют однородному граничному условию второго рода: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,$ имеют следующий вид:

$$r^n \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0,1,2\ldots,\infty ,$$

и :

$$I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)\cos\frac{\pi k}{h} z \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots,\infty; \quad n = 0,1,2\ldots,\infty .$$

Поэтому решение рассматриваемой краевой задачи, можно представить в виде суммы двух рядов:

$$u(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{A_{0n}\cos n\varphi + B_{0n}\sin n\varphi\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi k}{h} a\right)}\cos\frac{\pi k}{h} z\left\{A_{kn}\cos n\varphi + B_{kn}\sin n\varphi\right\} ,$$

где коэффициенты A_{kn} и B_{kn} определяются из граничного условия и имеют следующий вид:

$$A_{kn} = \frac{1}{N_1^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h f(\varphi,z)\cos\frac{\pi k}{h} z\cos n\varphi\, dz\, d\varphi, \quad B_{kn} = \frac{1}{N_2^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h f(\varphi,z)\cos\frac{\pi k}{h} z\sin n\varphi\, dz\, d\varphi,$$

$$N_1 = \left\|\cos\frac{\pi k}{h} z\right\|\left\|\cos n\varphi\right\|, \quad N_2 = \left\|\cos\frac{\pi k}{h} z\right\|\left\|\sin n\varphi\right\|$$

Примеры:

1. Найти электростатический потенциал внутри кругового цилиндра радиуса a , основание которого $z = 0$ и $z = h$ заземлены , а на боковой поверхности поддерживается потенциал $\cos 2\varphi$.

Решение:

Для электростатического потенциала u имеем следующую краевую задачу внутри цилиндра :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0, \\ u\big|_{r=a} = \cos 2\varphi . \end{cases}$$

Общее решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} \sin\frac{\pi k}{h} z \left\{ A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi \right\} ,$$

Так как граничное условие содержит только $\cos 2\varphi$:

$A_{nk} = 0 \quad n \neq 2$

$B_{nk} = 0$ при всех n и k .

Таким образом решение будет представимо в следующем виде:

$$u = \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_2\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} A_{2k} \sin\frac{\pi k}{h} z .$$

Коэффициенты A_{2k} определяются из граничного условия:

$$A_{2k} = \frac{1}{\left\|\sin\frac{\pi k}{h}z\right\|^2}\int_0^h 1\cdot\sin\frac{\pi k}{h}z\,dz = \frac{2}{\pi k}\left\{1-(-1)^k\right\}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u = \frac{2}{\pi}\cos 2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\{1-(-1)^k\right\}}{k}\frac{I_2\left(\frac{\pi k}{h}r\right)}{I_2\left(\frac{\pi k}{h}a\right)}\sin\frac{\pi k}{h}z =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cos 2\varphi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{I_2\left(\frac{\pi(2m+1)r}{h}\right)}{I_2\left(\frac{\pi(2m+1)a}{h}\right)}\frac{\sin\frac{\pi(2m+1)z}{h}}{2m+1}.$$

2. Найти распределение потенциала внутри прямого кругового цилиндра радиуса a, на торцах которого задано нулевое электрическое поле, а на боковой поверхности поддерживается потенциал, равный $U_0 z$, $U_0 = const$.

Решение:

Электростатический потенциал u является решением следующей краевой задачи :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \\ \left.u\right|_{r=a} = U_0 z. \end{cases}$$

В этом случае решение от переменной φ не зависит и его можно записать в следующем виде:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\pi k}{h}r\right)}{I_0\left(\frac{\pi k}{h}a\right)}A_{k0}\cos\frac{\pi k}{h}z\ .$$

Коэффициенты A_{k0} определяются из граничного условия:

$$A_{k0}=\frac{1}{\left\|\cos\frac{\pi k}{h}z\right\|^2}\int_0^h U_0 z\cos\frac{\pi k}{h}z dz=$$

$$=\begin{cases} U_0\frac{h}{2}, \quad k=0 \\ -U_0\frac{2h}{\pi^2k^2}\left[1-(-1)^k\right], \quad k=1,2,\ldots,\infty \end{cases}$$

Следовательно, решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u=\frac{1}{2}U_0h-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2U_0h}{\pi^2k^2}\left[1-(-1)^k\right]\frac{I_0\left(\frac{\pi k}{h}r\right)}{I_0\left(\frac{\pi k}{h}a\right)}\cos\frac{\pi k}{h}z\quad .$$

3) Решить уравнение Лапласа внутри сектора кругового цилиндра $0\le r\le a,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le z\le h$ с граничными условиями :

$$u\big|_{r=a}=u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=u\big|_{z=0}=0\ ,$$

$$u\big|_{z=h}=r^4\sin4\varphi\ .$$

Решение:

Так как при $z=0$ задано нулевое граничное условие, то решение можно представить в следующем виде:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_{4n}\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}r\right)\frac{sh\sqrt{\lambda_k^{4n}}z}{sh\sqrt{\lambda_k^{4n}}h}A_{nk}\sin 4n\varphi$$, где $\sqrt{\lambda_k^{4n}}$ - корни уравнения:

$$J_{4n}\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}a\right)=0\ .$$

Необходимо учесть, что разложение решения проводится по собственным функциям задачи Дирихле для сектора с углом раствора $\alpha=\frac{\pi}{4}$, *которые выражаются следующим образом:*

$$J_{4n}\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}r\right)\sin 4n\varphi,\quad n=0,1,\ldots,\quad k=1,2,\ldots$$

Коэффициенты ряда определяются из граничного условия при $z=h$:

$$A_{nk}=\frac{1}{\left\|J_{4n}\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}r\right)\right\|^2\left\|\sin 4n\varphi\right\|^2}\otimes$$

$$\otimes\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^4J_{4n}\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}r\right)\sin 4\varphi\sin 4n\varphi\, r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{\delta_{n1}}{\frac{a^2}{2}\left(J'_4\right)^2\left(\sqrt{\lambda_k^{4n}}a\right)}\int_0^a r^5J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}r\right)dr=\delta_{n1}\frac{2a^3}{\sqrt{\lambda_k^4}}\frac{J_5\left(a\sqrt{\lambda_k^4}\right)}{\left(J'_4\right)^2\left(\sqrt{\lambda_k^4}a\right)}\ .$$

Таким образом:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a^3}{\sqrt{\lambda_k^4}}\frac{J_5\left(a\sqrt{\lambda_k^4}\right)}{\left(J'_4\right)^2\left(a\sqrt{\lambda_k^4}\right)}\frac{sh\sqrt{\lambda_k^4}z}{sh\sqrt{\lambda_k^4}h}J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}r\right)\sin 4\varphi\ .$$

4. Решить уравнение Лапласа внутри тора прямоугольного сечения : $a \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h$ с граничными условиями :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,$$

$$u\big|_{r=a} = 0, \quad u\big|_{r=b} = \cos 3\varphi .$$

Решение:

Граничные условия при $z = 0$ и $z = h$ являются однородными граничными условиями второго рода, а при $r = a$ и $r = b$ граничные функции не зависят от z .

Следовательно : рассматриваемая задача *вырождается* в краевую задачу для уравнения Лапласа внутри кольца $a \le r \le b$:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad a \le r \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ u\big|_{r=a} = 0, \quad u\big|_{r=b} = \cos 3\varphi . \end{cases}$$

Решение данной задачи можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{A_0}{2}\frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)}\left\{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right\},$$

где $R_0^{(a)}(r) = \ln\dfrac{r}{a}, \quad R_n^{(a)}(r) = \dfrac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}$.

Из граничных условий находим:

$B_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots,$

$A_n = 0, \quad n \ne 3,$

$A_3 = 1 .$

$$\Rightarrow u = \frac{b^3}{r^3}\frac{r^6 - a^6}{b^6 - a^6}\cos 3\varphi .$$

4. Задача Штурма - Лиувилля и уравнение Лапласа : шар и шаровой слой.

а) Собственные функции шара.

Построим собственные функции шара K_a . Введем сферическую систему координат (r, θ, φ), $\quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ с началом в центре шара.

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}u \ ,$$

где $\Delta_{\theta\varphi}u$ - сферический оператор Лапласа, который равен:

$$\Delta_{\theta\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \quad .$$

Задача Штурма - Лиувилля для шара будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in K_a, \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\big|_{r=a} = 0, \\ u \ne 0\,. \end{cases}$$

которую мы будем решать стандартным методом *разделения переменных* , отделяя ее радиальную переменную r :

$$u = R(r)v(\theta,\varphi) \ne 0 \ .$$

Подставляем наше решение в исходное уравнение, записанное в сферической системе координат и разделив переменные, мы получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi}v}{v(\theta\varphi)} = \mu \quad .$$

На собственные функции рассматриваемого уравнения мы должны наложить условия ограниченности в K_a и условия периодичности по φ с периодом 2π .

Тогда, задача Штурма - Лиувилля для функции v будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} v + \lambda v = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ v(\theta, \varphi) \equiv v(\theta, \varphi + 2\pi), \\ \left| v(0, \varphi) \right| < \infty, \quad \left| v(\pi, \varphi) \right| < \infty, \\ v(\theta, \varphi) \neq 0\,. \end{cases}$$

Собственные функции полученной задачи являются сферическими функциями следующего вида:

$$v = v_{nm}(\theta, \varphi) = Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_{(n)}^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

Собственные значения:

$$\mu = \mu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \infty, \quad m = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Для каждого $\mu = n(n+1)$ из полученного уравнения $\dfrac{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\dfrac{\Delta_{\theta\varphi} v}{v(\theta\varphi)} = \mu$, мы можем получить уравнение для *радиальной части* $R(r)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0\,.$$

Его решение должно удовлетворять граничному условию , при $r = a$:

$$\alpha \frac{dR}{dr} + \beta R \Big|_{r=a} = 0,$$

и условию ограниченности при $r = 0$: $\quad \left| R(0) \right| < \infty$.

Сделаем замену: $R = \dfrac{y(r)}{\sqrt{r}}$. Тогда задача для *радиальной части* будет сведена к очередной задаче Штурма - Лиувилля следующего вида:

$$\begin{cases} r^2y'' + ry' + \left[\lambda r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]y = 0, \\ \alpha y' + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right)y\Big|_{r=a} = 0, \\ \big|y(0)\big| < \infty\,. \end{cases}$$

Общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2 N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) \quad .$$

Если мы учтем поведение функций Неймана в нуле и условие ограниченности, то мы можем определить $C_2 = 0$.

Пусть $C_1 = 1$. Тогда дисперсионное уравнение для λ примет вид:

$$a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0 \quad .$$

Обозначим $\mu = a\sqrt{\lambda}$.

Тогда *радиальная функция* $R(r)$:

$$R(r) = R_{nk}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}r\right)}{\sqrt{r}}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где $\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ - k - ый корень уравнения :

$$\alpha\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) + \left(\beta a - \frac{\alpha}{2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0 \ , \quad \text{при фиксированном } n = 0,1,\ldots$$

Следовательно, собственная функция шара , имеет следующий вид:

$$u_{nkm}(r,v,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi);\quad n=0,1,\ldots,\ \ k=1,2,\ldots,$$

где $\mu_k^{n+\frac{1}{2}}$ - корни рассматриваемого уравнения.

Собственные значения шара равны:

$$\lambda_{nk}=\left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{a}\right)^2,$$ где $\mu_k^{n+\frac{1}{2}}$ - корни рассматриваемого уравнения.

Каждому собственному значению λ_{nk} *соответствуют* $2n+1$ *линейно независимых собственных функций* $\left(rang\lambda_{nk}=2n+1\right)$.

Вычислим норму собственных функций:

$$\left\|u_{nkm}\right\|^2=\int\limits_{K_a}u_{nkm}^2dV=\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\right\|^2\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2,$$

где $\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2=\pi\varepsilon_m\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$, а $\varepsilon_m=\begin{cases}2, & m=0,\\ 1, & m\neq 0.\end{cases}$

Теперь вычислим $\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\right\|^2=\int\limits_0^a J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)rdr=$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\left(J'_{n+\frac{1}{2}}\right)^2\left(a\sqrt{\lambda}\right)+\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{a^2\lambda}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(a\sqrt{\lambda}\right)\right\}.$$

Решения 1,2,3 краевых задач в шаре:

(задача Дирихле, Неймана и Робена)

1. Задача Дирихле $(\alpha = 0, \beta = 1)$:

Собственные значения определяются уравнением:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{a}\right)^2, \quad \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\right\|_1^2 = \frac{a^2}{2}\left(J'_{n+\frac{1}{2}}\right)^2\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) .$$

2. Задача Неймана $(\alpha = 1, \beta = 0)$:

Собственные значения определяются уравнением:

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - \frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0 ,$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\right\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n(n+1)}{\left[\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) .$$

3. Задача Робена $(\alpha = 1, \beta = h)$:

Собственные значения определяются уравнением:

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) + \left(ah - \frac{1}{2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{a}\right)^2$$

Выражение для квадрата нормы можно записать двумя способами:

$$1)\ \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \right\|_3^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 - \frac{n(n+1) + ah(1-ah)}{\left[\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2} \right\} J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) \quad ,$$

*(удобна при малых **h**)*

$$2)\ \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \right\|_3^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 + 4 \frac{\left[\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{(1-2ah)^2} \right\} \left(J'_{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

*(удобна при больших **h**)*

б) Собственные функции шарового слоя.

Задача Штурма - Лиувилля для шарового слоя $D \quad (a < r < b)$:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ P_1[u] = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 u \big|_{r=a} = 0, \\ P_2[u] = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \big|_{r=b} = 0, \\ u(r,\theta,\varphi) \neq 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1,2\,. \end{cases}$$

Представляем решение в виде:

$$u = R(r) v(\theta,\varphi)\ .$$

Подставляем его в исходное уравнение, разделяем переменные и получаем задачу Штурма - Лиувилля для *угловой* функции $v(\theta,\varphi)$ на сфере $r = a$:

1) $$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi} v + \chi v = 0 \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ |v|\Big|_{\substack{\theta=0\\ \theta=\pi}} < \infty, \\ v(\theta,\varphi) \equiv v(\theta,\varphi+2\pi), \\ v(\theta,\varphi) \ne 0. \end{cases}$$ *(угловая задача)*

2) $$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\chi}{r^2}\right)R = 0, \\ P_1[R] \equiv \alpha_1\frac{dR}{dr} - \beta_1 R\Big|_{r=a} = 0, \\ P_2[R] \equiv \alpha_2\frac{dR}{dr} + \beta_2 R\Big|_{r=b} = 0 \\ R(r) \ne 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \ne 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$ *(радиальная задача на отрезке)*

Собственные функции *угловой* задачи являются сферическими функциями:

$$v = v_{nm}(\theta,\varphi) = Y_{nm}(\theta,\varphi).$$

Собственные значения :

$$\chi = \chi_n = n(n+1), \quad n = 0,1,\ldots, \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

Тогда общее решение *радиальной* задачи при $\chi = n(n+1)$ примет вид:

$$R = C_1\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} + C_2\frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} \quad .$$

Подставляем общее решение в граничные условия и получаем следующую систему:

$$\begin{cases} C_1 p_1(\lambda,a) + C_2 q_1(\lambda,a) = 0, \\ C_1 p_2(\lambda,b) + C_2 q_2(\lambda,b) = 0, \end{cases}$$

где:

$$p_1(\lambda, a) = \alpha_1\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) - \left(\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right),$$

$$q_1(\lambda, a) = \alpha_1\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) - \left(\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2a}\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right),$$

$$p_2\left(\lambda, b\right) = \alpha_2\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right) + \left(\beta 2 - \frac{\alpha_2}{2b}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right),$$

$$q_2\left(\lambda, b\right) = \alpha_2\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right) + \left(\beta 2 - \frac{\alpha_2}{2b}\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}b\right),$$

Приравниваем к нулю определитель полученной системы и получаем дисперсионное уравнение для определения собственного значения λ :

$$\frac{p_1(\lambda, a)}{p_2\left(\lambda, b\right)} = \frac{q_1(\lambda, a)}{q_2\left(\lambda, b\right)}$$

Теперь мы можем выразить из нашей системы C_2 :

$$C_2 = -\,C_1\frac{p_1(\lambda, a)}{q_1(\lambda, a)} \quad .$$

Пусть $C_1 = q_1(\lambda, a)$, тогда согласно полученному общему решению , мы можем записать собственную функцию в следующем виде:

$$R = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}q_1(\lambda, a) - \frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}p_1(\lambda, a).$$

Также , мы можем учесть полученное дисперсионное уравнение и переписать собственную функцию в виде:

$$R = \frac{p_1(\lambda, a)}{p_2\left(\lambda, b\right)}\left\{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}q_2\left(\lambda, b\right) - \frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}p_2\left(\lambda, b\right)\right\} \quad .$$

Таким образом, собственные функции шарового слоя выражаются:

$$u_{nkm}(r,\theta,\varphi) = \underbrace{\left\{ \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} q_1(\lambda,a) - \frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} p_1(\lambda,a) \right\}}_{\textit{радиальная}} \underbrace{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}_{\textit{угловая}},$$

$$n = 0,1,\ldots, \quad m = 0,1,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где $\lambda = \lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ - k - ый корень рассматриваемого уравнения при каждом фиксированном n .

Теперь вычислим квадрат нормы:

$$\left\|u_{nkm}\right\|^2 = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{nk}^2(r) Y_n^{(m)^2}(\theta,\varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$

$$\int_a^b \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) q_1(\lambda,a) - N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) p_1(\lambda,a) \right\}^2 r dr \otimes$$

$$\otimes \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^{(m)^2}(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \; = \left\|R_{nk}\right\|^2 \left\|Y_n^{(m)}\right\|^2 .$$

Квадрат нормы *радиальной функции* R_{nk} вычисляется аналогично.

Ее окончательная формула имеет следующий вид:

$$\left\|R_{nk}\right\|^2 = \frac{2}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{p_1(\lambda,a)}{p_2(\lambda,b)} \right]^2 \left[\left(\beta_2 + \frac{\alpha_2}{2b}\right)^2 + \alpha_2^2 \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda b^2} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2a}\right)^2 + \alpha_1^2 \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda a^2} \right) \right] \right\}, \qquad \text{где } \lambda = \lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad .$$

в) Частные решения уравнения Лапласа в сферической системе координат.

Для построения решения решения краевой задачи для уравнения Лапласа *в шаре, вне шара и в шаровом слое,* необходимо получить специальные решения, которые мы будем называть *шаровыми функциями* .

Давайте сначала построим эти решения: введем сферическую систему координат (r,θ,φ) и найдем решения уравнения Лапласа в следующем виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)v(\theta,\varphi) \ .$$

Подставляем наше решение в уравнение Лапласа , разделяем переменные и получаем:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi}v}{v} = \lambda \ ,$$

где : $\Delta_{\theta\varphi}v = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$ - сферический оператор Лапласа .

Таким образом, мы получаем краевую задачу для определения *угловой части* $v(\theta,\varphi)$*:*

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi}v + \lambda v = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ v(\theta,\varphi) = v(\theta,\varphi + 2\pi), \\ \left| v(\theta,\varphi)\Big|_{\theta=0,\pi} \right| < \infty, \quad v \ne 0 \end{cases}$$

задача Штурма - Лиувилля для сферического оператора Лапласа.

и уравнение для *радиальной части* $R(r)$ *:*

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \ .$$

Рассмотрим *угловую задачу* . Она является задачей Штурма - Лиувилля для сферического оператора Лапласа.

Собственные значения и собственные функции рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad v = v_{nm} = P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{cases} \quad n = 0,1,..,\infty; \quad m = 0,1,..,n;$$

$P_n^{(m)}(x)$ - присоединенные функции Лежандра.

Общее решение *радиального уравнения* при $\lambda = n(n+1)$ выглядит следующим образом: $R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}$.

Следовательно, два семейства решений уравнения Лапласа построены:

1) $r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{cases}$ *ограничены при* $r = 0$

2) $\dfrac{1}{r^{n+1}} P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{cases}$ *ограничены при* $r \to \infty$

г) Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа внутри шара:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (0 < r < a), \\ P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_1 u \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \quad \left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0. \end{cases}$$

Так как решение ограниченно при $r = 0$, мы будем строить его в виде ряда по шаровым функциям:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^n}{P_1[r^n]\Big|_{r=a}} P_n^{(m)}(\cos\theta)\left\{A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\right\},$$

коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются из граничного условия :

$$A_{nm} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{N_2^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где $N_1 = \left\|P_n^{(m)}\right\| \left\|\cos m\varphi\right\|, \qquad N_2 = \left\|P_n^{(m)}\right\| \left\|\sin m\varphi\right\|,$

Замечания:

1) в случае задачи Неймана нужно учитывать, что решение существует только при выполнении условия:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$$ (*определяется с точностью до постоянного слагаемого)* .

2) Суммирование ряда начинается с $n = 1$. Коэффициент A_{00} остается произвольным.

3) Если граничное условие не зависит от угла φ :

$$P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_1 u \Big|_{r=a} = f(\theta) ,$$

то получаемое решение рассматриваемой краевой задачи не будет зависеть от φ (т.е. имеет осевую симметрию) и его можно представить в следующем виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{P_1[r^n]\Big|_{r=a}} A_n P_n(\cos\theta), \qquad (*)$$

коэффициент определяется как: $A_n = \dfrac{2n+1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta$.

(*) - разложение в виде данного ряда получается, если в ряде :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^n}{P_1[r^n]\Big|_{r=a}} P_n^{(m)}(\cos\theta) \left\{ A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi \right\},$$

учесть:

$$A_{n0} = A_n, \quad A_{nm} = B_{nm} = 0, \quad m \neq 0 .$$

д) Краевые задачи для уравнения Лапласа вне шара.

Рассмотрим внешнюю краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ (r > a), \ \ \text{- вне шара} \\ P_2[u] \equiv \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial r} - \beta_2 u \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \\ u \rightrightarrows 0 \ \ r \to \infty \end{cases}$$

Решаем поставленную задачу абсолютно анологично рассмотренному случаю в шаре:

решение ищем в виде ряда:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left\{ \frac{1}{P_2\left[\frac{1}{r^{n+1}}\right]\Big|_{r=a}} \right\} P_n^{(m)}(\cos\theta) \left\{ A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi \right\},$$

коэффициенты определяются из соответствующего граничного условия.

е) Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое.

При решении краевой задачи уравнения Лапласа внутри шарового слоя используется оба семейства решений:

1) $r^n P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$ 2) $\dfrac{1}{r^{n+1}} P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$

Наиболее удобно сначала построить из представленных семейств решений строить другие серии решений аналогично в случае решения уравнения Лапласа в круговом кольце.

Рассмотрим задачу Дирихле в шаровом слое:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad a < r < b, \\ u\big|_{r=a} = f_1(\theta, \varphi), \\ u\big|_{r=b} = f_2(\theta, \varphi) . \end{cases}$$

Построим решение уравнения $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ при $\lambda = n(n+1)$, удовлетворяющее однородному граничному условию при $r = a$.

Тогда нашем решением будет являться следующая функция:

$$R(r) = R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{r^{n+1}} \quad .$$

Аналогичным образом строится решение, удовлетворяющее однородному условию Дирихле при $r = b$:

$$R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}} \quad .$$

Итак, мы получаем семейство решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих однородному условию Дирихле :

1) $u_{nm}^{(a)}(r, \theta, \varphi) = R_n^{(a)}(r) P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$ при $r = a$

2) $u_{nm}^{(b)}(r, \theta, \varphi) = R_n^{(b)}(r) P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi . \end{cases}$ при $r = b$

Тогда решение рассматриваемой краевой задачи можно представить в виде разложения по полученным семействам решения:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} P_n^{(m)}(\cos\theta) \left\{ A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} P_n^{(m)}(\cos\theta) \left\{ C_{nm} \cos m\varphi + D_{nm} \sin m\varphi \right\} \quad .$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются из граничного условия при $r = b$, а коэффициенты C_{nm} и D_{nm} - из граничного условия при $r = a$.

При решении задачи с другими граничными условиями следует предварительно построить семейство решений, удовлетворяющих нужному однородному граничному условию при $r = a$ *и семейство решений, удовлетворяющих однородному граничному условию при* $r = b$.

Например:

решения, удовлетворяющие граничному условию $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ можно взять в виде:

$$T_n^{(a)}(r) = \frac{(n+1)r^{2n+1} + na^{2n+1}}{r^{n+1}}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Примеры:

1. Найти искажение однородного электрического поля E_0 при помещении в него идеально проводящего шара радиуса a .

Решение:

Электростатический потенциал u вне шара можно представить в виде:

$u = u_0 + v$, где u_0 - потенциал поля E_0 , v - потенциал, связанный с присутствием шара.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре шара и осью z , направленной вдоль поля E_0 :

$$u_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \ .$$

На границе шара при $r = a$ полное электростатическое поле $E = -\,grad u$ удовлетворяет следующему условию:

$$[n, E]\Big|_{r=a} = \left[e_r, E\right]\Big|_{r=a} = -\left[e_r, grad\left(u_0 + v\right)\right]\Big|_{r=a} = 0 \ .$$

Откуда следует:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_0 + v\right)\Big|_{r=a} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u_0 + v\right)\Big|_{r=a} = 0$$

$$\left(u_0 + v\right)\Big|_{r=a} = 0$$

(постоянная считается равной нулю, так как потенциал определен с точностью до константы) .

Получаем для функции v внешнюю задачу:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad (\text{ вне шара }) \\ v\big|_{r=a} = -u_0\big|_{r=a} = E_0 a\cos\theta, \quad v \rightrightarrows 0 \ \ r \to \infty\,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи не зависит от φ . Следовательно его можно записать в следующем виде:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \ \ .$$

Учитывая $\cos\theta \equiv P_1(\cos\theta)$ из граничного условия , мы получаем:

$$A_1 = E_0 a, \quad A_n = 0, \quad n \neq 1 \quad .$$

Значит:

$$v = E_0 \frac{a^3}{r^2} P_1 \cos(\theta) = E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \quad ,$$

тогда искажение электрического поля :

$$E = -\,grad v = E_0 \frac{a^3}{r^3}\left(2\cos\theta \cdot e_r + \sin\theta \cdot e_\theta\right) \ \ .$$

И потенциал полного поля вне шара равен:

$$u = u_0 + v = -\,E_0\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \ \ .$$

2. Найти электростатический потенциал внутри сферы , верхняя половина которой $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ заряжена до потенциала U_0 , нижняя $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi\right)$ заземлена. $U_0 = const$.

Решение:

Для потенциала u внутри сферы рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{внутри сферы} \\ u\big|_{r=a} = \begin{Bmatrix} U_0, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{Bmatrix} = f(\theta) \end{cases}$$

Решение не зависит от φ (т.е. имеет аксиальную симметрию) . Следовательно его можно представить в следующем виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n A_n P_n(\cos\theta) \ .$$

Коэффициенты A_n определяются из граничного условия :

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = U_0 \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx \quad .$$

Вычислим заявленный интеграл:

1) при четных $n \neq 0$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_n(x)dx = 0$,

2) при нечетных $n = 0$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx = \int_0^1 dx = 1$.

Пусть $n = 2k+1$. Возьмем формулу: $P_n(x) = \dfrac{1}{2n+1}\left\{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right\}$ и из нее получаем, что:

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x)dx = \frac{1}{4k+3}\int_0^1 \left\{P'_{2k+2}(x) - P'_{2k}(x)\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{4k+3}\left\{P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)\right\} \ .$$

Так как:

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)\,!}{2^{2k}(k!)^2} \ ,$$

то:

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x)dx = (-1)^k \frac{(2k)\,!}{2^{2k+1}(k+1)(k!)^2} \ .$$

Значит:

$$A_{2k} = 0, \ \ A_{2k+1} = (-1)^k \frac{4k+3}{k+1}\frac{(2k)\,!}{2^{2k+2}(k!)^2}U_0 \ .$$

Тогда общее решение примет следующий вид:

$$u = \frac{U_0}{2} + U_0\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4k+3}{k+1}\frac{(2k)\,!}{2^{2k+2}(k!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta) \ .$$

3. Определить электростатический потенциал внутри шаровой оболочки $a < r < b$, внешняя поверхность которой заземлена , а внутренняя заряжена до потенциала $U_0 \sin\theta \sin\varphi$.

Решение:

Потенциал u является решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа внутри *шаровой оболочки* :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad a < r < b, \\ u\big|_{r=a} = U_0 \sin\theta \sin\varphi, \\ u\big|_{r=b} = 0 . \end{cases}$$

Так как при $r = b$ мы имеем *нулевое* граничное условие , то решение мы можем представить в следующем виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} P_n^{(m)} \cos(\theta) \left\{ A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi \right\} ,$$

где $R_n^{(b)}(r) = \dfrac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}}$.

Так как $\sin\theta \sin\varphi \equiv P_1^{(1)}(\cos\theta) \sin\varphi$, то из граничных условий :

$$A_{nm} = 0 \quad \text{при всех } n, m$$

$$B_{11} = U_0, \quad B_{nm} = 0 \quad \text{при } n \neq 1, \ m \neq 1 \ .$$

Таким образом, окончательное решение примет вид:

$$u = U_0 \frac{R_1^{(b)}(r)}{R_1^{(b)}(a)} P_1^{(1)}(\cos\theta) \sin\varphi = U_0 \frac{a^2}{r^2} \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \sin\theta \sin\varphi \ .$$

4. Диэлектрический шар с диэлектрической постоянной ε_1 находится во внешнем однородном постоянном электрическом поле E_0 . Определить искажение внешнего поля , вызываемое шаром, если внешняя среда - однородный диэлектрик с диэлектрической постоянной ε_2 .

Решение:

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре шара и осью z , направленной вдоль электрического поля E_0 .

Пусть u_0 - потенциал , создающий внешнее поле E_0 :

$$E_0 = -\,grad u_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial z} \cdot e_z,$$
$$u_0 = -\,E_0 z = -\,E_0 r \cos\theta .$$

Обозначим через u_1 - *потенциал электрического поля внутри шара* ,

$u_0 + u_2$ - *потенциал вне шара* ,

где u_2 - *искажение внешнего поля , связанное с наличием диэлектрического шара.*

Функция u_1 гармонична в шаре , т.е :

$$\Delta u_1 = 0, \quad 0 \le r < a,$$

функция u_2 удовлетворяет уравнению лапласа вне шара:

$$\Delta u_2 = 0, \quad r > a,$$

На поверхности шара ($r = a$) должны выполняться *условия непрерывности* тангенциальных составляющих электрического поля и нормальных составляющих индукции $D = E\varepsilon$.

Так как:

$$E_1 = -\,grad u_1, \quad E_2 = E_0 - grad u_2,$$
$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1r}, \qquad D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2r},$$

обозначенные условия примут следующий вид:

$$u_1\Big|_{r=a} = u_0 + u_2\Big|_{r=a},$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r}\Bigg|_{r=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}\Bigg|_{r=a} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_0}{\partial r}\Bigg|_{r=a}.$$

Также необходимо учесть условие регулярности на бесконечности для функции u_2: $u_2 \underset{\to}{\overset{\to}{}} 0 \quad r \to \infty$.

Таким образом, обобщая полученное , мы получили задачу для определения потенциалов u_1 и u_2 :

$$\Delta u_1 = 0, \quad 0 \le r < a,$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad r > a,$$

$$u_1\Big|_{r=a} = u_0 + u_2\Big|_{r=a},$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r}\Bigg|_{r=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}\Bigg|_{r=a} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_0}{\partial r}\Bigg|_{r=a}.$$

граничные условия физически играют роль условий сопряжения на поверхности шара $(r = a)$

$$u_2 \underset{\to}{\overset{\to}{}} 0 \quad r \to \infty \ .$$

Далее нам нужно решить поставленную задачу.

Так как полученная задача имеет осевую симметрию $\Rightarrow$ функции u_1 и u_2 зависят только от переменных θ и φ .

Функция $u_1(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри шара и представима в виде:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$, где A_n - коэффициенты, которые мы и должны определить.

Функция $u_2(r,\theta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа вне шара , регулярна на бесконечности и представима в следующем виде:

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

Оба из записанных нами выражений учитывают осевую симметрию функций u_1 и u_2 . Коэффициенты A_n и C_n определяются при их подстановке в условия сопряжения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = -E_0 a\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n n a^{n-1} P_n(\cos\theta) = -\varepsilon_2 E_0 \cos\theta - \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{n+1}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta).$$

Приравняем коэффициенты в обеих частях равенств при полиномах $P_n(\cos\theta)$ одного порядка и впоследствии получим:

$$A_0 = C_0 \frac{1}{a},$$

$$A_1 a = -E_0 a + C_1 \frac{1}{a^2},$$

$$A_n a^n = C_n \frac{1}{a^{n+1}}, \quad n = 2,3,\ldots,$$

$$0 = -\varepsilon_2 C_0 \frac{1}{a^2},$$

$$\varepsilon_1 A_1 = -\varepsilon_2 E_0 - \varepsilon_2 C_1 \frac{2}{a^3},$$

$$\varepsilon_1 A_n n a^{n-1} = -\varepsilon_2 C_n \frac{n+1}{a^{n+2}}, \quad n = 2,3,\ldots$$

Отсюда:

$$C_0 = 0, \quad A_0 = 0, \ A_n = C_n = 0, \quad n = 2,3,\ldots$$

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \ C_1 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E_0$$

И таким образом:

$$u_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos\theta, \quad u_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta\,.$$

И искажение внешнего поля, вносимое диэлектрическим шаром, будет равно:

$$E_2 = -\,grad u_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \frac{a^3}{r^3} \cos\theta \left\{2\cos\theta \cdot e_r + \sin\theta \cdot e_\theta\right\}\ .$$

5. Колебание стержней. Собственные колебания камертона.

В прошлой главе, рассматривая собственные колебания камертона, мы получили следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \\ \left.\begin{aligned} & y\Big|_{x=0} = 0, \\ & \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \\ & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0, \\ & \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = 0, \end{aligned}\right\} \text{граничные условия} \\ \left.\begin{aligned} & y\Big|_{t=0} = f(x), \\ & \dfrac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \ \left(0 \le x \le l\right) \end{aligned}\right\} \text{начальные условия} \end{cases}$$

Будем решать полученную задачу методом *разделения переменных :*

представим решение в следующем виде:

$$y = Y(x)T(t) \,,$$

подставим его в полученное ранее (1 глава 6 пункт) полученное *уравнение поперечных колебаний стержня* и разделим переменные:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda \quad .$$

Тогда для *радиальной* функции $Y(x)$ получвем задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} Y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad Y\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{dY}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=l} = 0; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Общее решение будем искать в следующем виде:

$$Y(x) = Ach\sqrt[4]{\lambda}x + Bsh\sqrt[4]{\lambda}x + C\cos\sqrt[4]{\lambda}x + D\sin\sqrt[4]{\lambda}x \ .$$

Из выведенных ранее условий:

$$Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0 \Rightarrow C = -A,\ D = -B \Rightarrow Y(x) = A\left(ch\sqrt[4]{\lambda}x - \cos\sqrt[4]{\lambda}x\right) +$$

$$+B\left(sh\sqrt[4]{\lambda}x - \sin\sqrt[4]{\lambda}x\right).$$

Следовательно, условия $Y''\left(l\right) = 0$ и $Y'''\left(l\right) = 0$ дают :

$$A\left(ch\sqrt[4]{\lambda}l + \cos\sqrt[4]{\lambda}l\right) + B\left(ch\sqrt[4]{\lambda}l + \cos\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0 \ .$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения A и B , если определитель системы равен нулю.

Приравнивая определитель к нулю, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений:

$$sh^2\sqrt[4]{\lambda}l - \sin^2\sqrt[4]{\lambda}l = ch^2\sqrt[4]{\lambda}l\cos\sqrt[4]{\lambda}l + \cos^2\sqrt[4]{\lambda}l;$$

так как $ch^2x - sh^2x = 1$, то *трансцендентное уравнение* можно переписать в следующем виде:

$$ch\mu \cdot \cos\mu = -1 \quad \left(\mu = \sqrt[4]{\lambda}l\right) \ .$$

Его корни можно легко вычислить , например графически:

$$\mu_1 \approx 1{,}875, \quad \mu_2 \approx 4{,}694, \quad \mu_3 \approx 7{,}857,$$

. . . .

$$\mu_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)\ n > 3 \Rightarrow$$

⇒ данная формула дает значение μ_n с точностью до трех десятеричных знаков , начиная с $n = 3$ и с точностью до шестого знака.

Теперь рассмотрим *угловую часть* полученного уравнения:

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0 \ .$$

Возьмем частоты колебаний камертона . Данному уравнению удовлетворяют тригонометрические функции:

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t,$$

где частота $\nu_n = \dfrac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}\sqrt{\dfrac{EJ}{\rho S}} = \dfrac{\mu_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{\rho S}}$.

Частоты ν_n собственных колебаний относятся , как квадраты μ_n .

Так как : $\dfrac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \approx 6{,}267, \quad \dfrac{\mu_3^2}{\mu_1^2} \approx 17{,}548$;

то: *второй собственный тон выше основного тона более, чем на два с половиной октавы, то есть выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третье же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы*.

Физический смысл: При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент времени.

Однако, с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

Функция Грина.

1. Применение обобщенных функций для математического моделирования математических объектов.

Рассмотрим математическую постановку краевой задачи для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D \subset R^3, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \big|_s = f(P), \quad P \in S, \quad |\alpha| + |\beta| > 0, \end{cases}$$ S - граница области D .

Введем понятие функции Грина на примере задачи электростатики.

Тогда потенциал $\varphi(M)$ электростатического поля будет удовлетворять уравнению Пуассона:

$\Delta\varphi = -4\pi\rho(M), \quad M \in R^3,$ где $\rho(M)$ - объемная плотность заряда.

Согласно *принципу суперпозиции*:

потенциал системы точечных зарядов представим в следующем виде: $\varphi(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{r_{M_k M}}$, где $r_{M_k M} = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$ - расстояние между точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и точкой $M_k(x_k, y_k, z_k)$ в которой расположен заряд q_k .

В том случае, когда наш заряд распределен в некотором объеме V_0 с непрерывной плотностью $\rho(M)$, то суммирование меняется на интегрирование по данному объему: $\varphi(M) = \int\limits_{V_0} \frac{\rho(M')}{r_{M'M}} dV_{M'}$, где M' - обозначает что интегрирование ведется по координатам данной точки.

Замечание: если плотность $\rho(M)$ непрерывна вместе со своими первыми производными , то функция полученная из физических соображений функция $\varphi(M)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет и удовлетворяет уравнению Пуассона.

Впоследствии будем называть такие виды решений *классическими* .

Итак, приведем определение *классического решения:*

Функция u удовлетворяет уравнению $\Delta u = -F(M)$ в классическом смысле, если она дважды непрерывно дифференцируема и при подстановке в данное уравнение обращает его в верное равенство.

Замечания:

1) если рассматриваемая функция ограничена и интегрируема, но не является непрерывно дифференцируемой, то наша функция $\varphi(M)$ только один раз непрерывно дифференцируема. Тогда понятия *классического решения* недостаточно и мы будем строить обобщенные решения с помощью обобщенных функций о котором речь пойдет позже.

2) Описанный в данном разделе способ *получения решения задачи в виде суперпозиции вкладов от элементарных источников применим не только в электростатике. Его можно обобщить на все задачи рассматриваемого типа уравнений,если функции F и f удовлетворяют определенным условиям , речь о которых пойдет в следующих пунктах данной главы.*

2. Понятие обобщенной функции и точечного источника.

Для построения решений рассматриваемых задач, мы должны использовать аппарат функций Грина, которыми описывают поле точечного источника в области D с соответствующими граничными условиями.

Для начала введем понятие точечного источника в неограниченном пространстве:

пусть весь наш заряд равномерно распределен по шару $K(M_0, \varepsilon)$ с центром в M_0 и радиусом ε . Нам нужно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Для этого введем следующую функцию:

$$f_\varepsilon(M, M_0) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & M \in K(M_0, \varepsilon) \\ 0, & M \notin K(M_0, \varepsilon) \end{cases} .$$

Следовательно:

$$\int\limits_{R^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, dV_M = 1 \quad .$$

Теперь переходим к пределу:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(M, M_0) = \begin{cases} \infty, & M = M_0 \\ 0, & M \neq M_0 \end{cases} .$$

А интеграл от функции $f_\varepsilon(M, M_0)$ при каждом фиксированном ε остается равным единице:

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{R^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, dV_M \quad .$$

К тому же, для любой непрерывной функции $\psi(M)$ в точке M_0 предел

($\varepsilon \to 0$) от интеграла будет конечным и будет равен:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R^3} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dV_M = \psi(M_0) \quad .$$

Что означает, что : из непрерывности функции $\psi(M) \Rightarrow \forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0$ такое, что для любых точек M, M_0 из области определения функции $\psi(M)$, при выполнении условия ($0 < r_{MM_0} \le \varepsilon$) , справедливо неравенство:

$$\left|\psi(M) - \psi(M_0)\right| \le \delta \quad .$$

Теперь, если мы возьмем точку M внутри шара $K(M_0, \varepsilon)$ радиусом ε с центром в M_0 , то расстояние r_{MM_0} между M и M_0 не будет превосходить ε .

Следовательно:

$$\left| \int_{R^3} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dV_M - \psi(M_0) \right| =$$

$$= \left| \int_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\psi(M)dV_M - \psi(M_0) \underbrace{\int_{K(M_0,\varepsilon)} dV_M}_{=1} \right| =$$

$$= \left| \int_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\Big(\psi(M) - \psi(M_0)\Big)dV_M \right| \le$$

$$\le \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\psi(M)-\psi\left(M_0\right)\right| dV_M \le \sigma \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} dV_M = \delta,$$

а из этого следует:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{R^3} f_\varepsilon\left(M,M_0\right)\psi(M)dV_M = \psi\left(M_0\right) \; .$$

Интеграл $\int\limits_{R^3} f_\varepsilon\left(M,M_0\right)\psi(M)dV_M$ можно рассматривать, как результат действия функционала f_ε на функцию $\psi(M)$:

$$\langle f_\varepsilon,\psi\rangle = \int\limits_{R^3} f_\varepsilon\left(M,M_0\right)\psi(M)dV_M \; .$$

Тогда , из выше полученного выражения, мы получаем результат действия некоторого функционала на функцию ψ, который будем обозначать как $\delta\left(M,M_0\right)$:

$$\psi\left(M_0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f_\varepsilon,\psi\rangle \; .$$

Сформулируем определение для функции $\delta\left(M,M_0\right)$:

Функционал $\delta\left(M,M_0\right)$, действующий на любую непрерывную в точке M_0 функцию $\psi(M)$ по правилу:

$\langle\delta\left(M,M_0\right),\psi(M)\rangle = \psi\left(M_0\right)$, называют σ функцией Дирака.

Следовательно, плотность единичного точечного заряда, расположенного в точке M_0, можно определить, как $\delta\left(M,M_0\right)$.

Тогда плотность точечного заряда будет представлять собой функционал следующего вида:

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0) \quad .$$

Замечания:

1) Для вычисления полного заряда нужно подействовать функционалом на функцию $\psi(x)$ тождественно равную единице:

$$\langle \rho(M, M_0), 1 \rangle = q,$$

2) Если в области D распределен заряд с объемной плотностью $\rho(M)$, то полной заряд этой плотности будет равен:

$$Q = \int_D \rho(M) dV = \langle \rho(M), 1 \rangle \quad .$$

3) В декартовой системе координат функционалы $\delta(M, M_0)$ и $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$ действуют на любую непрерывную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функцию $\psi(M)$ одинаково , поэтому их можно считать равными.

В сферических координатах имеет место равенство:

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0} \delta(r - r_0)\sigma(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0) \quad .$$

В полярных координатах:

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0) \, .$$

Теперь введем понятие *обобщенной функции* .

Функционал $\delta\left(M, M_0\right)$, действующий на множестве непрерывных в точке M_0 функций является примером *обобщенных функций* .

Любая обобщенная функция представляет собой функционал.

Для того, чтобы ввести строгое определения пространства обобщенных функций , необходимо ввести само пространство *основных функций* $\psi(M)$, на котором действуют эти функционалы.

Для этого введем понятие *финитной функции в пространстве* R^n :

Ограниченная на R^n функция $\psi(M)$ называется финитной, если существует шар:

$$\left\{ M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \middle| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leq R \right\},$$

вне которого функция $\psi(M)$ всюду равна нулю.

Замыкание множества $\left\{ M \middle| \psi(M) \neq 0 \right\}$ называется *носителем функции* $\psi(M)$ и обозначается $\sup \psi$.

Замечание: $\psi(M) = 0$ находится вне $\sup \psi$. Множество $\sup \psi$ состоит из всех точек M , где $\psi(M) \neq 0$ и точек M , в любой окрестности которых найдется точка $M' : \psi(M') \neq 0$.

Введем следующие определения:

1) Будем называть совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых в R^n функций множеством основных функций $\mathfrak{I}\left(R^n\right)$.

Теперь определим сходимость в $\mathfrak{I}\left(R^n\right)$:

2) Функциональная последовательность $\left\{\psi_k(M)\right\}$ из $\mathfrak{I}\left(R^n\right)$ называется сходящейся к функции $\psi(M)$ из $\mathfrak{I}\left(R^n\right)$, если существует такой шар $U \subset R^n$, что $\sup \psi_k \subset U \quad \left(k = 1,2, \ldots\right)$, и для любой производной функции $\psi_k(M)$ будет выполнено:

$D^{\alpha}\psi_k(M) \underset{\to}{\to} D^{\alpha}\psi(M)$ при $k \to \infty$, где :

$D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \;\; \alpha_i = 0,1,2,\dots,$ включая случай $\alpha = 0$, что означает равномерное стремление самих функций $\psi_k(M)$ к функции $\psi(M)$ при $k \to \infty$.

Теперь мы можем ввести строгое определение *пространства основных функций:*

Линейное пространство $\mathfrak{I}\left(R^n\right)$ с введенным таким образом сходимостью называется *пространством основных функций.*

Теперь когда *пространство основных функций* задано, введем строгое понятие *обобщенной функции:*

Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал f, действующий на пространстве основных функций $\mathfrak{I}$:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{I} : \langle f, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \alpha\langle f, \psi_1\rangle + \beta\langle f, \psi_2\rangle;$

2) $\forall \left\{\psi_k\right\} \subset \mathfrak{I}, \;\; \psi_k \to \psi \in \mathfrak{I}$ (в смысле уже введенной нами сходимости) .

3) при $k \to \infty \quad \Rightarrow \langle f, \psi_k\rangle \to \langle f, \psi\rangle, \;\; k \to \infty$.

Введем операции сложения обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число над полем комплексных чисел:

$$\langle f + g, \psi\rangle = \langle f, \psi\rangle + \langle g, \psi\rangle, \quad \forall \psi \in \mathfrak{I},$$
$$\langle \lambda \cdot f, \psi\rangle = \bar{\lambda}\langle f, \psi\rangle, \quad \wedge \psi \in \mathfrak{I}.$$

(черта обозначает комплексное сопряжение) .

Множество всех обобщенных функций , определенных на $\mathfrak{I}$, с заданными на нем операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство $\mathfrak{I}'$.

Теперь обсудим сходимость обобщенных функций:

Последовательность обобщенных функций $f_n \in \mathfrak{I}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathfrak{I}'$, если :

$\langle f_n, \psi \rangle \to \langle f, \psi \rangle$ при $n \to \infty$ для любой функции $\psi \in \mathfrak{I}$.

Обобщенные функции делятся на регулярные и сингулярные:

Обобщенная функция f называется *регулярной* , если существует функция $F(M)$, интегрируемая на любом замкнутом ограниченном множестве , такая что:

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{R_n} \overline{F(M)} \psi(M) dV_M, \quad \forall \psi \in \mathfrak{I} .$$

Так как функция $\psi(M)$ финитна, то интегрирование ведется по ограниченной области $\sup \psi$.

Все другие обобщенные функции называются *сингулярными* .

Пример: δ - функция это *сингулярная* обобщенная функция.

Введем понятие производной обобщенной функции:

Пусть $F(M) \in C^{(1)}\left(R^n\right)$ и $\psi(M) \in \mathfrak{I}$.

В основе понятия производной обобщенной функции стоит формула, вытекающая из формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_{R_n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\psi dV = -\int\limits_{R_n} F\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dV\,.$$

Интегрирование по пространству R^n ведется при $-\infty < x_i < \infty$, $i = \overline{1,n}$ и все подстановки на бесконечности обращаются в ноль за счет финитности функции ψ . Поскольку интегралы можно понимать, как результат действия линейного непрерывного функционала на гладкую финитную функцию ψ , то полученное равенство можно переписать в следующем виде:

$\langle\dfrac{\partial F}{\partial x_i},\psi\rangle = -\langle f,\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle$, где f - обобщенная , порождаемая функцией $F(M)$.

Полученное равенство является определением производной обобщенной функции, как регулярной , так и сингулярной:

Функционал, действующий на любую функцию $\psi \in D$ по правилу:

$$\langle\frac{\partial F}{\partial x_i},\psi\rangle = -\langle f,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle$$

называется *производной* $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ *обобщенной функции* f *.*

Аналогично определяются производные любого порядка от обобщенных функций:

$D^\alpha f = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}\dots\partial^{\alpha_n}_{x_n}}f$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i = 0,1,2,\dots,$

обобщенной функции f называется функционал, действующий на любую функцию $\psi \in \mathfrak{I}$ по правилу:

$$\langle D^\alpha f,\ \psi\rangle = (-1)^\alpha \langle f,\ D^\alpha \psi\rangle$$

3. Потенциал поля точечного источника. Фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном и двухмерном случаях.

Пусть точечный заряд величины q помещен в точку M_0 неограниченного, однородного пространства R^3 .

Тогда плотность точечного заряда определяется следующим образом:

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0) \ .$$

Уравнение для потенциала поля заряда, записанное в виде:

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(M, M_0) \ ,$$

означает, что для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{I}$ справедливо следующее выражение:

$$\int_{R^3} \varphi(M, M_0)\Delta\psi dV_M = -4\pi q\psi(M_0) \ .$$

Можно показать, что полученному выражению удовлетворяет потенциал поля точечного заряда $\varphi(M, M_0) = \dfrac{q}{r_{MM_0}}$ во всем пространстве R^3 .

Для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ - пространство основных функций, найдется число $R > 0$, такое что $\sup \psi \subset K(M_0, R)$, где $K(M_0, R)$ - шар радиуса R с центром в точке M_0 .

Следовательно:

$$\int_{R^3} \varphi(M, M_0)\Delta\psi(M)dV_M = q \int_{K(M_0, R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M \ .$$

Используя третью формулу Грина, получим:

$$\int_{K(M_0, R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M =$$

$$= \int\limits_{\sum(M_0,R)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial \psi(P)}{\partial n_P} - \psi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}} \right) d\delta_P = 4\pi\psi(M_0),$$

где $\sum(M_0, R)$ - сфера радиуса R с центром в точке M_0, $\vec{n}_p$ - вектор внешней нормали к сфере в точке P.

Так как $\sup \psi \subset K(M_0, R)$, то финитная функция ψ вместе со всеми своими производными тождественно равна нулю на сфере $\sum(M_0, R)$, и поверхностный интеграл в последнем выражении обращается в ноль.

Следовательно:

$$\int\limits_{R^3} \frac{q}{r_{MM_0}} \Delta\psi(M) dV_M = -4\pi q\psi(M_0) \ .$$

Ч.Т.Д.

Теперь введем ряд определений:

1) *Фундаментальным решением оператора Лапласа* называется любая обобщенная функция, являющаяся решением уравнения:

$$\Delta\varphi = -\delta(M, M_0) \ .$$

Замечания:

1) *Фундаментальное решение* определяется с точностью до произвольного решения однородного уравнения $\Delta\varphi = 0$.

2) Если мы положим величину q в формуле $\varphi(M, M_0) = \dfrac{q}{r_{MM_0}}$ равную $\dfrac{1}{4\pi}$

$\Rightarrow$ то мы получим частное решение:

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} \ .$$

Следовательно, функция Грина:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}+v$$ - *фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае.*

v - произвольная гармоническая функция.

2) Функция $u(M)$ называется обобщенным решением уравнения $\Delta u=-F(M)$, если на удовлетворяет равенству:

$$\int\limits_{R^3} u(M)\Delta\psi(M)dV_M=-\int\limits_{R^3} F(M)\psi(M)dV$$ для любой функции $\psi(M)\in\mathfrak{J}$.

Понятие обобщенного решения шире понятия классического решения, так как функция $u(M)$ может быть недифференцируемой. Если же u удовлетворяет рассматриваемому уравнению в классическом смысле , то она удовлетворяет ему и в обобщенном!

Замечание: фундаментальное решение оператора Лапласа можно получить следующим образом. Так как фундаментальное решение не удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=-\delta(M,M_0)$ в смысле обобщенных функций, то в классическом смысле функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду , кроме точки M_0 .

Тогда функция φ имеет следующий вид:

$\varphi(M,M_0)=g(M,M_0)+v(M)$, где $g(M,M_0)$ - частное решение рассматриваемого уравнения, зависящее только от расстояния r_{MM_0} между точками M и M_0 и имеющее особенность при $r_{MM_0}\to 0$, а $v(M)$ - гармоническая функция.

Для того , чтобы найти $g(M,M_0)$, поместим начало координат в точку M_0 . В этой системе координат решение $g(M,M_0)=g\left(r_{MM_0}\right)=g(r)$ обладает радиальной симметрией.

Решая уравнение:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right) = 0,\ r > 0,$$ получим $\Rightarrow g(r) = \frac{A}{r} + B$, где A и B - произвольные постоянные.

Выбираем решение, имеющее особенность в начале координат:

$$g(r) = \frac{A}{r} .$$

Возвращаясь к исходным координатам, мы получаем:

$$g(M, M_0) = \frac{A}{r_{MM_0}} .$$

Остается найти нормировочный множитель A , так чтобы $g(M, M_0)$ удовлетворяла нашему уравнению.

Значит должно выполняться равенство:

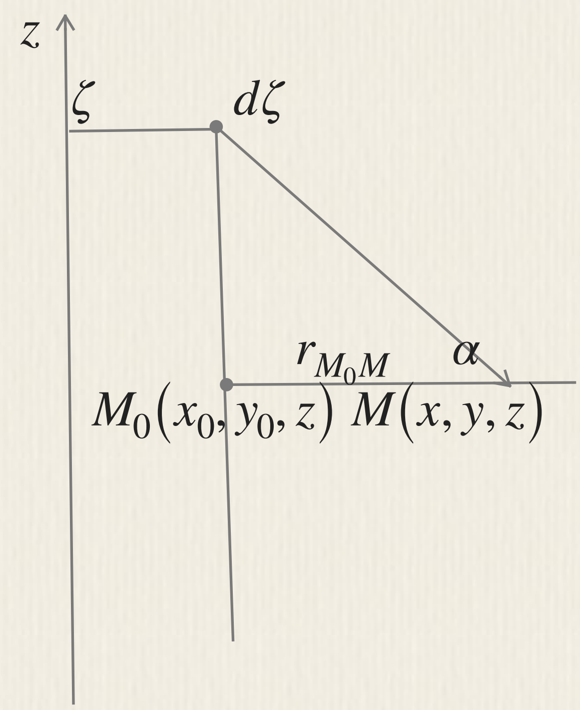
$$\int_{R^3} g(M, M_0)\Delta\psi(M)dV_M = -\psi(M_0) \ ,$$

Следовательно:

$$A\int_{R^3}\frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}}dV_M = -\psi(M_0) .$$

Сравнивая полученное выражение с третьей формулой Грина мы определяем $A = \frac{1}{4\pi}$.

Теперь перейдем к построению фундаментального решения оператора Лапласа в трехмерном случае. Найдем электростатический потенциал бесконечной тонкой заряженной нити, линейная плотность зарядов которой постоянна и равна e .



Выберем систему координат таким образом, чтобы ось $0z$ была параллельна нити.

Пусть нить проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Потенциал поля, создаваемого нитью в точке наблюдения $M(x, y, z)$, можно рассматривать как сумму потенциалов полей элементарных зарядов величины $ed\zeta$, имеющих координату $z = \zeta$, непрерывно распределенных вдоль нити.

Непосредственное вычисление потенциала поля бесконечной нити приводит к расходящемуся интегралу. Поэтому сначала найдем напряженность электростатического поля нити. Величина напряженности поля, создаваемого участком нити длины $d\zeta$, равна:

$dE = \dfrac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r^2{}_{M_0M}}$, где $r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}$ - расстояние от точки M до нити.

Радиальная составляющая напряженности поля в точке $M(x, y, z)$ имеет следующий вид:

$$dE_r = \frac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r^2{}_{M_0M}} \cdot \cos\alpha = \frac{er_{M_0M}d\zeta}{\left((z-\zeta)^2 + r^2{}_{M_0M}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

так как $\cos\alpha = \dfrac{r_{M_0M}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + r^2{}_{M_0M}}}$, а составляющая вдоль оси $0z$ равна:

$$dE_z = \frac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}} \cdot \sin\alpha = \frac{e(\zeta - z)d\zeta}{\left((z-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Бесконечная нить создает в точке $M(x, y, z)$ поле, напряженность которого не зависит от z , имеет следующий вид :

$$\vec{E}\left(r_{M_0M}\right) = E\left(r_{M_0M}\right) \cdot \frac{\vec{r}_{M_0M}}{r_{M_0M}} \quad .$$

В том, что z - компонента напряженности поля в любой точке M равна нулю, легко убедиться интегрируя полученное выражение вдоль прямой $-\infty < \zeta < +\infty$.

Используя *принцип суперпозиции* , мы можем выразить $E\left(r_{M_0M}\right)$ следующим образом:

$$E\left(r_{M_0M}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e r_{M_0M} d\zeta}{\left(r_{M_0M}^2 + (z-\zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

интеграл легко вычисляется при подстановки:

$$\frac{\zeta - z}{r_{M_0M}} = tg\alpha \quad \Rightarrow \frac{d\zeta}{r_{M_0M}} = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad E\left(r_{M_0M}\right) = \frac{e}{r_{M_0M}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = \frac{2e}{r_{M_0M}} \, .$$

Для вычисления потенциала нити следует учесть:

$$\vec{E}\left(r_{M_0M}\right) = -\nabla\varphi\left(r_{M_0M}\right) \Rightarrow E\left(r_{M_0M}\right) = -\frac{d\varphi}{dr_{M_0M}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi\left(M, M_0\right) = 2e\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + const \, .$$

Нужно Учесть : потенциал φ , создаваемый равномерно заряженной бесконечной нитью, не зависит от координаты z . Поэтому задачу можно рассматривать, как двумерную в любой плоскости, перпендикулярной нити.

Сечение нити этой плоскостью может рассматриваться, как точечный заряд в двумерном пространстве, потенциал которого дается уже полученной нами формулой:

$$\varphi\left(M, M_0\right) = 2e\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + const\ .$$

Так же, как и в трехмерном случае (используя третью формулу Грина) можно показать, что полученный потенциал $\varphi\left(M, M_0\right)$ удовлетворяет:

$$\Delta_M\varphi = -\,\delta\left(M, M_0\right)\ .$$

Тогда, *фундаментальным решением оператора Лапласа в двумерном случае является функция:*

$G\left(M, M_0\right) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{MM_0}} + v(M),$ где $v(M)$ - любая гармоническая на плоскости функция.

4. Функция Грина для задачи Дирихле и ее методы построения для соответствующей задачи.

Для начала поговорим о внутренних трехмерных задачах. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $D \subset R^3$, ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова S:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D, \\ u\big|_S = f(P), \quad P \in S. \end{cases}$$

Дадим строгое определение поверхности Ляпунова:

поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполнены следующие условия:

1) в каждой точке поверхности S существует нормаль (или касательная плоскость) ;

2) существует такое число d, что прямые, параллельные нормали в точке P поверхности S, пересекают не более одного раза часть поверхности S, лежащую внутри шара радиуса d с центром в точке P ;

3) угол γ между нормалями в двух разных точках, находящихся внутри одной окрестности Ляпунова, удовлетворяет следующему условию: $\gamma \leq Ar^{\delta}$ и $0 < \delta \leq 1$.

Теперь перечислим основные свойства поверхности Ляпунова:

1) если S - поверхность Ляпунова, то тогда справедливо $S \in C^1$ (обратное не верно) .

2) Если $S \in C^2$, то S является поверхностью Ляпунова с $\delta = 1$.

Теперь введем ряд определений для внутренних трехмерных задач:

1) классическим решением поставленной задачи, будем называть функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную в области $\overline{D}$, удовлетворяющую нашему уравнению $\Delta u = -F(M)$ в классическом смысле в области D и граничному условию $u|_S = f(P)$.

2) Будем считать, что если условия $F \in L_2(D) \cap C^{(1)}(D)$ и $f \in C(S)$ выполнены, то рассматриваемая задача будет иметь единственное решение.

Итак, давайте найдем это решение:

воспользуемся третьей формулой Грина:

$$\left(G(Q,M)\Delta_Q u(Q) - u(Q)\Delta_Q G(Q,M)\right)dV_Q =$$

$$= \int_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right)dS_P,$$

где $G(Q,M) = \dfrac{1}{4\pi r_{QM}} + v$ - фундаментальное решение оператора Лапласа.

Так как : $\Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M)$, то при его подстановке в исходное выражение получаем:

$$u(M) = \int_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right)dS_p -$$

$$-\int_D G(Q,M)\Delta u(Q)dV_Q .$$

На границе области $u\big|_S = f(P)$, а внутри области $\Delta u = -F(Q)$.

Следовательно:

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P +$$

$$+\int\limits_D F(Q)G(Q,M)\,dV_Q .$$

Таким образом, в правой части равенства остается только одно неизвестное слагаемое :

$$\int\limits_S G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dS_P,$$

содержащее производную искомого решения по нормали к границе, которое не выражается через входные данные задачи.

Фундаментальное решение оператора Лапласа $G(Q,M)$ определяется с точностью до произвольной гармонической функции v , поэтому можно выбрать ее такой, чтобы $G(P,M) = 0$ в любой точке $P \in S$.

Для этого функция $v = v(Q,M)$ должна быть решением соответствующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D, \\ v\big|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \ P \in S, \end{cases}$$

где производные берутся по координатам точки Q , а координаты точки M играют роль параметров.

Тогда в любой внутренней точке M области D :

$$u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q$$

(это выражение является классическим решением рассматриваемой задачи, если $F \in C^{(1)}(D)$ *и* $f \in C(S)$ *) .*

Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области D с замкнутой границей S ($\overline{D}$ - область D вместе с границей S) будем называть функцию :

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \ \ M \in D \,,$$

которая будет удовлетворять следующим условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$.

2) $G(P,M)\big|_{P\in S} = 0$ для каждой точки $M \in D$.

Следовательно , функция Грина $G(Q,M)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \ \ Q, \ \ M \in D, \\ G(P,M)\big|_S = 0, \ P \in S. \end{cases}$$

Теперь перечислим некоторые свойства функции Грина:

1) если граница S области D является поверхностью Ляпунова, то функция Грина задачи Дирихле существует и единственна.

Из постановки нашей задачи следует, что функция Грина оператора Лапласа $G(Q,M)$ определяется только областью D .

Тогда , с помощью функции Грина можно получить решения задач вида:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), & M \in D, \\ u\big|_S = f(P), & P \in S. \end{cases}$$

в квадратурах, используя интегральную форму.

Физический смысл функции Грина: пусть в точку M области D , ограниченной идеально проводящей заземленной поверхностью S , помещен точечный заряд $+q$. В соответствии с *принципом суперпозиции* потенциал φ электростатического поля внутри D складывается из потенциала поля точечного заряда:

$\varphi_0(Q,M) = \dfrac{q}{r_{QM}}$, и потенциала - $v(Q,M) = \displaystyle\int_S \frac{\delta(P,M)}{r_{PQ}} dS_P$ поля индуцированных на внутренней стороне поверхности S зарядов плотности $\delta(P,M)$, где $\displaystyle\int_S \delta(P,M)\, dS_p = -q$.

Поверхностная плотность распределения заряда $\delta(P,M)$ зависит от координат точки M расположения точечного заряда , однако интеграл по поверхности от этой функции представляет собой полный индуцированный заряд и от координат точки M уже не зависит.

Таким образом, внутри области D :

$$\varphi(Q,M) = \frac{q}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q,M \in D,$$

и так как $v(Q,M)$ - потенциал поля, порождаемого зарядами, распределенными на поверхности:

$$\Delta_Q v(Q,M) = 0, \quad Q,M \in D.$$

На поверхности S суммарный потенциал равен нулю , так как она заземлена.

Следовательно, мы приходим к физическому смыслу функции Грина: *функция Грина* $G(Q,M)$ *представляет собой потенциал поля , порождаемого в точке* Q *точечным зарядом величины* $\frac{1}{4\pi}$*, помещенным в точку* M *, если поверхность* S *заземлена.*

2) Функция Грина симметрична относительно перестановки точек Q и M:

$$G(Q,M) = G(M,Q) \,.$$

Симметричность функции Грина является отражением *физического принципа взаимности:* заряд , помещенный в точку M , создает в точке наблюдения Q поле с таким же потенциалом , который создал бы в точке M этот же заряд, если бы он был помещен в точку Q .

Значит, из всего выше сказанного, мы можем сделать вывод:

в формуле: $u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q$,

поверхностный потенциал *объемный потенциал*

зарядов , распределенных в области D *с объемной плотностью* $F(Q)$ *.*

поле $u(M)$ *- результат суперпозиции полей зарядов, распределенных в точках* Q *области* D *и в точках* P *на ее границе* S *.*

Потенциал $v(Q,M) = \int\limits_S \frac{\delta(P,M)}{r_{PQ}}dS_P$ называется *поверхностным потенциалом простого слоя.*

Теперь перейдем ко внешним трехмерным задачам:

пусть область D_e - внешняя область по отношению к ограниченной области D с замкнутой границей S , являющейся поверхностью Ляпунова.

Для того, чтобы решение краевой задачи для уравнения Пуассона или Лапласа во внешней области D_e было единственным, в постановке задачи помимо краевого условия следует добавить *условие на бесконечности*. Таким условием является требование регулярности решения на бесконечности.

Итак, в трехмерном случае функция $u(M)$ называется *регулярной на бесконечности,* если при достаточно большом $r \geq r_0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, выполнены неравенства:

$$|u| \le \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{r^2},$$ где $A > 0$ - некоторая постоянная.

Теперь дадим определение функции, *регулярной на бесконечности* :

Определение. Гармоническая в области D_e трехмерного пространства функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является *регулярной на бесконечности* .

Для *регулярных на бесконечности* функций в трехмерном случае во внешних областях всё так же справедливы формулы Грина.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \\ u\big|_S = f(P), \quad P \in S, \\ u \text{ регулярна на бесконечности} . \end{cases}$$

Классическим решением рассматриваемой задачи будем называть *регулярную на бесконечности* функцию, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e , непрерывную в области $\overline{D}_e$ б удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ и граничному условию рассматриваемой задачи $u\big|_S = f(P)$.

Существование и единственность решения: если функция $F(M)$ финитна и непрерывно дифференцируема в D_e , а функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S , то существует *единственное классическое решение рассматриваемой задачи.*

(решение получается аналогично решению внутренней задачи, уже нами рассмотренной) .

Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области D_e, внешней по отношению к ограниченной области D с замкнутой границей S будем называть функцию следующего вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \;\; Q \in \overline{D}_e, \;\; M \in D_e,$$

которая будет удовлетворять следующим условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in \overline{D}_e$, непрерывная на $\overline{D}_e$ для каждой точки $M \in D_e$;

2) $G(P,M)\big|_{P\in S} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$;

3) $G(Q,M)$, как функция аргумента $Q \in D_e$ *регулярна на бесконечности* для каждой точки $M \in D_e$.

Следовательно, решение рассматриваемой задачи может быть найдено по следующей формуле:

$$u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q.$$

(нормаль n_p *является внешней по отношению к области* D_e .

Функция Грина $G(Q,M)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,M \in D_e, \\ G(P,M)\big|_S = 0, \;\; P \in S, \\ G(Q,M)\underset{\to}{\overset{\to}{}}0 \quad \text{на бесконечности}. \end{cases}$$

Для того, чтобы построить функцию $G(Q,M)$, достаточно решить задачу для гармонического слагаемого $v(Q,M)$:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad Q, M \in D_e \\ v\big|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \; P \in S, \\ v \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.} \end{cases}$$

Рассмотрим основные методы построения функции Грина для задачи Дирихле.

a) Метод электростатических изображений.

Для ряда областей рассматриваемых задач весьма эффективным способом построения функции Грина задачи Дирихле является *электростатических (или зеркальных) отображений (изображений).*

Если рассматривать поставленную задачу в рамках электростатики, то однородные условия Дирихле означают, что область ограничена заземленной идеально проводящей поверхностью S.

Пусть в точке $M_0 \in D$ помещен точечный заряд величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$.

Расположим вне области D фиктивные электрические заряды таким образом, чтобы потенциал поля на границе S обращается в ноль.

Эти фиктивные заряды называются *электростатическими изображениями заряда* , помещенного в точку M_0.

Потенциал поля, порожденного зарядами, находящимися вне области , представляет собой гармоническую внутри области D функцию v , удовлетворяющую граничному условию:

$$v\big|_S = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, \quad P \in S.$$

Рассматриваемый способ построения функции Грина является универсальным для любых задач Дирихле для оператора Лапласа и не ограничивается задачами электростатики.

Рассмотрим ряд стандартных примеров, в которых мы сможем применить данный метод:

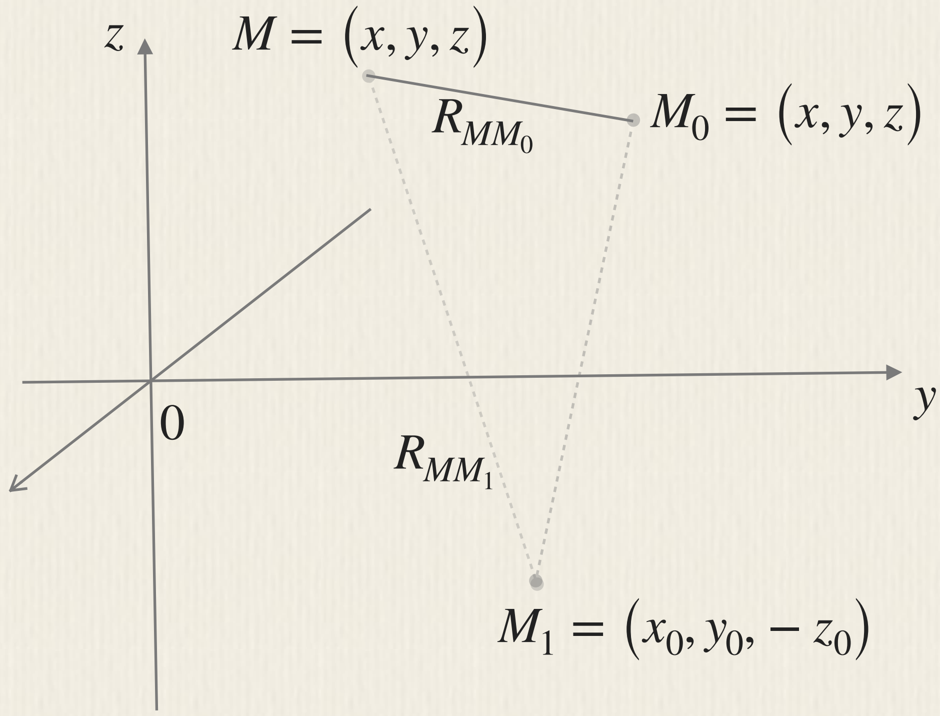
1) Найти потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q , помещенным в точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 > 0$, в вакууме в верхнем полупространстве над плоскостью $z = 0$, если эта плоскость представляет собой идеальный заземленный проводник.

Решение:

Потенциал $\varphi(M, M_0)$ в точке $M = (x, y, z)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M \varphi = -4\pi q \delta(M, M_0), \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \quad z \in (0, +\infty), \\ \varphi\big|_{z=0} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \\ \varphi \quad \text{регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

Поставленную задачу можно решать методом электростатических изображений: потенциал в точке M складывается из потенциала точечного заряда q , расположенного в точке M_0 , и потенциала фиктивного точечного заряда $-q$, помещенного в точку M_1 , симметричную M_0 относительно плоскости $z=0$:



$$M_1=(x_0,y_0,-z_0) \ .$$

Действительно, функция:

$$\varphi(M,M_0)=q\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right)=$$

$$=q\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)$$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_M\varphi=-4\pi q\delta(M,M_1) \ .$$

Функция $v=-\dfrac{q}{r_{MM_1}}$ является гармонической в верхнем полупространстве и удовлетворяет граничному условию:

$$v\big|_{z=0}=-\frac{1}{4\pi R_{pM_0}}, \ \ P=P(x,y,0) \ ,$$

так как $r_{PM_0}=r_{PM_1}$ для любой точки $P(x,y,0)$, принадлежащей плоскости $z=0$, и равномерно стремится к нулю на бесконечности.

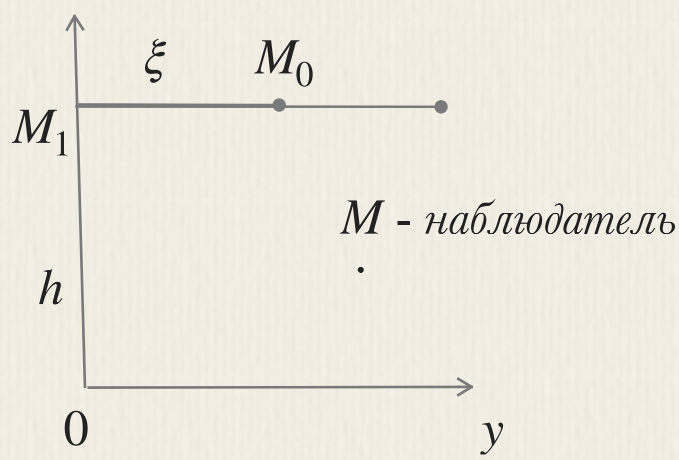
Если $q = \dfrac{1}{4\pi}$ - найденный потенциал представляет собой функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в верхнем полупространстве:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right).$$

2) Найти потенциал отрезка заряженной нити длины $2L$ с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью параллельно ей на расстоянии h от нее.

Решение:



Пусть M_0 - любая точка отрезка.

Тогда : $M_1M_0 = \xi$.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$: $x_0 = 0,\ \ y_0 = \xi,\ \ z_0 = h$.

Следовательно, потенциал поля:

$$\varphi(x,y,z) = e\int_0^{2L}\frac{d\xi}{\sqrt{x^2+(y-\xi)^2+(z-h)^2}} - e\int_0^{2L}\frac{d\xi}{\sqrt{x^2+(y-\xi)^2+(z+h)^2}} =$$

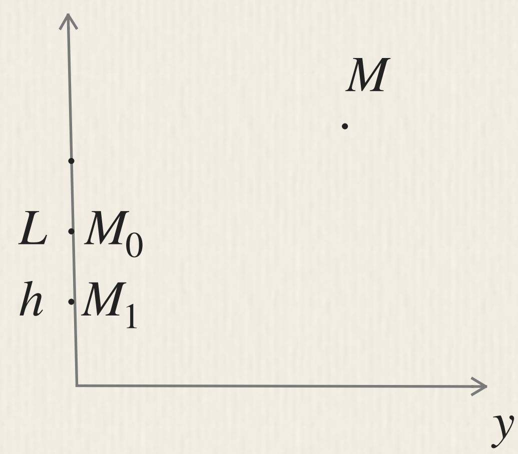
$$= e\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+(y-2L)^2+(z-h)^2}-2L-y}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}-y}\right)-e\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+(y-2L)^2+(z+h)^2}-2L-y}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}-y}\right)$$

3) Найти потенциал поля отрезка заряженной нити длины L с линейной плотностью e , помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью перпендикулярно ей. Ближайшая к плоскости точка отрезка удалена от нее на расстояние h .

Решение:

Пусть M_0 - любая точка отрезка , $MM_0 = \xi$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = h + \xi$.



Тогда потенциал поля можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x,y,z) = e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h-\xi)^2}} - e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h+\xi)^2}} =$$

$$= e\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z-h-L)^2}+h+L-z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}+h-z}\right)-$$

$$-e\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+h+L)^2}+h+L+z}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}+h+z}\right).$$

4) Найти потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ внутри « полуслоя» $0 \le z \le l$, $x \ge 0$, считая, что стенки идеально проводящие и имеют нулевой потенциал.

Решение:

Пусть заряд в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, тогда наблюдатель в точке $M(x,y,z)$

Получаем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q\delta(M,M_0), \quad x \ge 0,\ y \in R^2,\ z \in (0,l). \\ u\big|_{z=0} = u\big|_{z=l} = u\big|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

$$u = \frac{q}{r_{MM_0}} + v, \quad \Delta v = 0.$$

Ищем гармоническую функцию v методом электростатических отображений в $z=0$, $z=l$ и $x=0$:

1) Отобразим заряд q относительно $z=0$ $(x_0,y_0,-z_0)$:

$$u_0 = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0}\right), \text{ где } r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$r'_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \ .$$

Но полученный результат не будет удовлетворять условию $u\big|_{z=l} = 0$.

2) Отобразим реальный и фиктивный заряды относительно $z = l$ и $x = 0$, меняя знаки у отображений зарядов .

Будем последовательно повторять отображения в $z = 0$, $z = l$ и $x = 0$.

Получаем систему *многих зарядов* :

$$u = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0} - \frac{1}{r''_0} + \frac{1}{r'''_0}\right) + q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r'''_1}\right) + \ldots$$

Следовательно:

$$u = q\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} + \frac{1}{r''_n} - \frac{1}{r'''_n}\right),$$

где:

$$r_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \big(z-(2\ln+z_0)\big)^2} \ ,$$

$$r'_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \big(z-(2\ln-z_0)\big)^2}$$

$$r''_n = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \big(z-(2\ln+z_0)\big)^2}$$

$$r'''_n = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \big(z-(2\ln-z_0)\big)^2}$$

б) метод разделения переменных для нахождения функции Грина.

Для того , чтобы найти функцию Грина:

$$G(Q,M)=\frac{1}{4\pi r_{QM}}+v(Q,M)$$

внутренней или внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона в трехмерном случае, нужно решить следующую задачу:

$$\begin{cases}\Delta_Q v=0, \quad Q\in D,\\ v\big|_S=-\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P\in S\end{cases}$$

(в ограниченной области ***D*** *с границей* ***S*** *)*

или:

$$\begin{cases}\Delta_Q v=0, \quad Q\in D_e,\\ v\big|_S=-\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P\in S,\\ v\rightrightarrows 0 \quad \text{на бесконечности}\end{cases}$$

Обе из полученных задач решаются *методом разделения переменных,* который был уже нами рассмотрен в предыдущей главе 2.

Пример: получить выражение :

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

для функции Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в шаре радиуса a методом разделения переменных.

Решение:

Пусть заряд q помещен в точку M_0 внутри сферы .

Тогда потенциал будет иметь следующий вид:

$$\varphi(M, M_0) = \frac{q}{r_{MM_0}} + v(M, M_0) \quad ,$$

$v(M, M_0)$ - гармоническая функция координат точки M , которая является решением следующей системы:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi); \\ v\big|_{r=a} = -\left.\frac{q}{r_{pM_0}}\right|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta}} \end{cases} , \qquad M_0(r_0, 0, 0), \quad M(r_0, \theta, \varphi) \ .$$

Общее решение:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \ .$$

Коэффициент A_n определяется из граничных условий:

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta}} = -\frac{q}{r_0\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r_0}\right)\cos\theta}} =$$

$$= -\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

так как $r_0 < a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a^{2n+1} - a^{2n+1}}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n = -\frac{q}{a}a^{n+1}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n .$$

Следовательно:

$$v = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) .$$

в) Построение функции Грина с помощью преобразования Фурье.

Метод Фурье - метод построения решения дифференциальных уравнений в частных производных удобен в том случае, когда задача рассматривается в бесконечной цилиндрической области : $\Omega = \left\{ \left(x, y\right) \in D,\ \ z \in (-\infty, +\infty) \right\}$.

Решение рассматриваемой задачи можно искать в следующем виде:

$$u = u(M, z) ,$$

где M - точка в поперечном сечении D цилиндра.

Пусть решение $u(M,z)$ допускает преобразование Фурье по переменной z и существует его Фурье - образ:

$$\hat{u}(M,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(M,z)e^{-i\mu z}dz .$$

Тогда, применяя преобразование Фурье к уравнению и граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, для Фурье - образа $\hat{u}(M,\mu)$ получаем краевую задачу в поперечном сечении цилиндра.

Пример 1: найти потенциал поля точечного заряда величины q , помещенного в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри области, заполненной воздухом , ограниченной заземленной цилиндрической поверхностью сечения D .

Решение:

Итак, пусть: $\Omega = \left\{ (x,y) \in D, \;\; z \in (-\infty, +\infty) \right\}$, $\partial\Omega$ - боковая поверхность рассматриваемого цилиндра.

В отсутствии проводящей заземленной поверхности $\partial\Omega$, потенциал поля точечного заряда q , помещенного в точку M_0 , имеет следующий вид:

$$u_0 = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} .$$

Значит: $\quad u_0 \to 0, \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial z} \to 0$ при $z \to \pm\infty$.

При наличии проводящей поверхности $\partial\Omega$ мы так же должны учитывать поле наведенных зарядов. При удалении от точки M_0 это поле будет убывать, поэтому мы должны потребовать выполнение ряд условий аналогичных в рассмотренном случае при отсутствии проводящей заземленной поверхности.

Тогда мы можем записать математическую постановку нашей задачи в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad (x,y) \in D, \ -\infty < z < \infty, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \to 0, \ \ u_z \to 0; \ \ z \to \pm\infty. \end{cases}$$

Будем искать решение $u(x,y,z)$, которое допускает вместе со своими производными преобразование Фурье по переменной z .

Запишем преобразование Фурье по переменной z :

$$\hat{u}(x,y,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z) e^{-i\mu z} dz .$$

Применим преобразование Фурье к левой части рассматриваемого уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta u \cdot e^{-i\mu z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_2 u + u_{zz}) e^{-i\mu z} dz =$$

$$= \Delta_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\mu z} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{zz} e^{-i\mu z} dz .$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ue^{-i\mu z}dz = \hat{u}(x,y,\mu)$$, а Δ_2 - оператор Лапласа в поперечном сечении.

Теперь вычислим последний интеграл полученного выражения, используя условия на бесконечности для функции $u(x,y,z)$. Интегрировать будем два раза по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{zz}e^{-i\mu z}dz = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u_z e^{-i\mu z}\Bigg|_{z=-\infty}^{z=\infty}}_{=0} + \frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_z e^{-i\mu z}dz =$$

$$= \underbrace{\frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}}ue^{-i\mu z}\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty}}_{=0} - \mu^2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ue^{-i\mu z}dz}_{=\hat{u}(x,y,\mu)} .$$

Таким образом, применяя преобразование Фурье к нашему уравнению и граничному условию, для Фурье - образа мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_2\hat{u} - \mu^2\hat{u} = -2\sqrt{2\pi}qe^{-i\mu z_0}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \quad (x,y)\in D, \\ \hat{u}\Big|_L = 0, \end{cases}$$

где L - граница области D .

Решение полученной задачи удобно искать в виде разложения в ряд Фурье по системе нормированных на единицу собственных функций $v_n(x,y)$ задачи Штурма - Лиувилля :

$$\begin{cases} \Delta v_n + \lambda_n^2 v_n = 0, \quad (x,y)\in D, \\ v_n\Big|_L = 0 \end{cases}$$

в поперечном сечении D :

$$\hat{u}(x,y,\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu) v_n(x,y), \quad C_n(\mu) = \int_D \hat{u} v_n ds \ .$$

Умножая уравнение $\Delta v_n + \lambda_n^2 v_n = 0$ на $v_n(x,y)$, интегрируя по области D и применяя вторую формулу Грина , получим:

$$\int_D \Delta_2 \hat{u} v_n dS - \mu^2 \int_D \hat{u} v_n dS = -2\sqrt{2\pi} q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0),$$

где:

$$\int_D \Delta_2 \hat{u} v_n dS = \int_D \hat{u} \Delta_2 v_n dS = -\lambda_n^2 \int_D \hat{u} v_n dS = -\lambda_n^2 C_n(\mu) \ ,$$

$$\int_D \hat{u} v_n dS = C_n(\mu) \ .$$

Следовательно коэффициенты $C_n(\mu)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению:

$$-\lambda_n^2 C_n(\mu) - \mu^2 C_n(\mu) = -2\sqrt{2\pi} q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0) \ .$$

Значит:

$$C_n(\mu) = \frac{2\sqrt{2\pi} q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2} \ .$$

Тогда решение примет вид:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,y,\mu) e^{i\mu z} d\mu =$$

$$= 2q \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\mu z_0} v_n(x,y) v_n(x_0,y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2} e^{i\mu z} d\mu =$$

$$= 2q \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0,y_0) v_n(x,y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(z - z_0)}}{\lambda_n^2 + \mu^2} d\mu \,.$$

Интеграл в последнем выражении можно вычислить с помощью вычетов, применяя лемму Жордана и замыкая контур в верхней полуплоскости при $z - z_0 > 0$ *и в нижней полуплоскости при* $z - z_0 < 0$.

Таким образом , мы получим:

$$u(x,y,z) = 2\pi q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x_0,y_0) v_n(x,y)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |z - z_0|}$$, где $v_n(x,y)$ - собственный функции задачи Штурма - Лиувилля в поперечном сечении D .

Пример 2 . Найти потенциал поля точечного заряда величины q , помещенного внутри двугранного угла величины α , $\alpha \in (0; 2\pi)$. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.

Решение:

Будем строить решение рассматриваемой задачи с помощью преобразования Фурье. Тогда математическая постановка нашей задачи будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = -\frac{4\pi q}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\psi-\psi_0)\delta(z-z_0), \\ u\big|_{\psi=0} = u\big|_{\psi=a} = 0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 < r,\ r_0 < +\infty, \\ 0 < \psi,\ \psi_0 < a, \\ -\infty < z,\ z_0 < +\infty \end{pmatrix},$$

где: $$\Delta_3 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ .$$

Запишем преобразование Фурье по переменной z :

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(r,\psi,z)e^{-i\mu z}dz \, .$$

В пространстве Фурье - образов полученное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \psi^2} - \mu^2\hat{u} = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\psi-\psi_0)e^{-i\mu z_0} \, .$$

Решение полученного уравнения будем искать в виде разложения в ряд Фурье по системе функций с граничными условиями рассматриваемой задачи:

$$\{\Phi_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi\right\}, \ n = 1,2,\ldots$$

Тогда:

$$\hat{u}(r,\psi,\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi \, ,$$

$$R_n(r) = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \hat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi \, .$$

Умножим уравнение , полученное в пространстве Фурье - образов , на $\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi$ и проинтегрируем по переменной ψ от 0 до α :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\alpha \hat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\right)-\mu^2\int_0^\alpha \hat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi+$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_0^\alpha \frac{\partial^2\hat{u}(r,\psi,\mu)}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi=-\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}e^{-i\mu z_0}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 .$$

Отсюда мы получаем уравнение для *радиальной части:*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 R_n(r)-\mu^2 R_n(r)=$$

$$=-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\delta(r-r_0) .$$

Если мы учтем смысл обобщенных функций - $r^2\delta(r-r_0)=r_0^2\delta(r-r_0)$ и умножим полученное уравнение на r^2 , то получим:

$$r^2R''_n(r)+rR'_n(r)-\left[\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2+\mu^2r^2\right]R_n(r)=$$

$$=-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}r_0e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\delta(r-r_0) .$$

Следовательно, наша задача свелась *к построению Функции Грина уравнения Бесселя чисто мнимого аргумента.*

Потребуем выполнение дополнительных условий:

$$\left|R_n(0)\right|<\infty, \quad \left|R_n(r)\right|<\infty , \quad \text{при } r\to\infty .$$

Будем искать решение поставленной задачи с заявленными дополнительными условиями в следующем виде:

$$R_n(r) = \begin{cases} C_1 I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r < r_0, \\ C_2 K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r > r_0. \end{cases}$$

Функции $I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ и $K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ представляют собой решения однородного уравнения $r^2 R''_n(r) + rR'_n(r) - \left[\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 + \mu^2 r^2\right] R_n(r) =$

$= -\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} e^{-i\mu z_0} \sin\frac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \delta(r - r_0)$, ограниченные при $r = 0$ и при $r \to \infty$.

Потребуем выполнение следующих *условий сопряжения* при $r = r_0$:

$$\begin{cases} R_n(r_0 + 0) - R_n(r_0 - 0) = 0, \\ R'_n(r_0 + 0) - R'_n(r_0 - 0) = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin\frac{\pi n}{\alpha} \psi_0 e^{-i\mu z_0}. \end{cases}$$

Подставляя $R_n(r)$ в полученную систему , получаем выражения для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - C_1 I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = 0, \\ \mu C_2 K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - \mu C_1 I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin\frac{\pi n}{\alpha} \psi_0 e^{-i\mu z_0}. \end{cases}$$

И находим:

$$\begin{cases} C_2 = C_1 \frac{I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}{K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}, \\ C_1 \mu \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \right] = \\ = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin\frac{\pi n}{\alpha} \psi_0 e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0). \end{cases}$$

Необходимо учесть, что определитель Вронского функций Инфельда и Макдональда равен:

$$W\left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\right] =$$

$$= \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\right] = -\frac{1}{\mu r_0},$$

и получаем наши коэффициенты:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), \\ C_2 = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 e^{-i\mu z_0} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\,. \end{cases}$$

Следовательно:

$$R_n(r) = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 e^{-i\mu z_0} \begin{cases} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), & r < r_0, \\ I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r > r_0\,. \end{cases}$$

Теперь подставляем полученную *радиальную функцию* в исходное уравнение и получаем:

$$\hat{u}(r, \psi, \mu) =$$

$$= \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-i\mu z_0} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, & r < r_0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, & r > r_0\,. \end{cases}$$

Проведя обратное преобразование Фурье , мы получаем решение исходной задачи:

$$u(r, \psi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(r, \psi, \mu) e^{i\mu z} d\mu \quad .$$

5. Внутренние и внешние двумерные задачи и методы их решения.

Пусть D - область на плоскости, ограниченная достаточно гладкой замкнутой кривой L. Кривая L - в нашем случае будет являться поверхностью Ляпунова.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D, \\ u\big|_L = f(P), \quad P \in L. \end{cases}$$

Определение: классическим решением рассматриваемой задачи , будем называть функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D , непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ в области D и граничному условию $u\big|_L = f(P)$.

При $F \in L_2(D) \cap C^{(1)}(D)$ и $f \in C(L)$ наша задача имеет единственное классическое решение. Для его построения можно повторить все те же рассуждения, что и в трехмерном случае, взяв во второй формуле Грина фундаментальное решение оператора Лапласа на плоскости:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v\,,\ \ v \text{ - гармоническая функция.}$$

$$u(M) = \oint\limits_L \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P -$$

$$-\int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q)\,dS_Q =$$

$$= \oint\limits_L \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_p + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)\,dS_Q\,.$$

Как и в трехмерном случае, в полученном выражении можно убрать слагаемое, содержащее неизвестное значение $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}$ на границе L, если воспользоваться произвольностью гармонического слагаемого v и потребовать выполнения условия:

$$G(P,M)=0, \quad \forall P\in L.$$

Тогда:

$$u(M)=-\oint\limits_L f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dl_P+\int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q.$$

Теперь введем следующее <u>определение</u>: *функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа* в двумерном случае будем называть функцию :

$$G(Q,M)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}}+v(Q,M), \quad Q\in\overline{D}, \ M\in D,$$

удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q\in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M\in\overline{D}$;

2) $G(P,M)\big|_{P\in L}=0$ для каждой точки $M\in D$.

Для того, чтобы построить решение рассматриваемой двумерной задачи Дирихле достаточно найти такую функцию $v(Q,M)$:

$$\begin{cases} \Delta_Q v=0, \quad Q\in D, \\ v\big|_L=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM}}, \ P\in L. \end{cases}$$

Пусть D_e - дополнение некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ с гладкой замкнутой границей L до всей плоскости R^2. Также, как и в трехмерном случае, для того, чтобы краевая задача для уравнения Пуассона или Лапласа в области D_e имела единственное решение, следует потребовать регулярности решения на бесконечности.

Определение: функция $u(M)$ называется *регулярной на бесконечности* в двумерном случае, если она ограничена при $r \to \infty$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в двумерном случае ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \\ u\big|_L = f(P), \quad P \in L, \\ |u| < \infty. \end{cases}$$

Если функция F является финитной и непрерывно дифференцируемой, а функция f является непрерывной, то рассматриваемая задача имеет *единственное, классическое решение*.

замечание: так как в двумерном случае от функций требуется только ограниченность на бесконечности, формулы Грина во внешних областях остаются справедливыми лишь для *регулярных функций*, гармонических вне некоторой ограниченной области.

Так как функция $F(M)$ является финитной, то для решения рассматриваемой задачи справедливы формулы Грина.

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось строго внутри области D.

Применим третью формулу Грина для решения рассматриваемой задачи:

$$\Omega(M)u(M) - 2\pi u_\infty = \oint_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln\frac{1}{r_{PM}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} \right\} dl_P -$$

$$- \int_{D_e} \Delta u(Q) \ln\frac{1}{r_{QM}} dS_Q,$$

где :

$\Omega(M) = 2\pi$, если $M \in D_e$, $\Omega(M) = \pi$, если $M \in L$, $\Omega(M) = 0$, если $M \notin \overline{D}_e$.

Перепишем полученную формулу, взяв в качестве точки M начало координат, в следующем виде:

$$-2\pi u_\infty = \oint_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln\frac{1}{r_{OP}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{OP}} \right\} dl_p -$$

$$- \int_{D_e} \Delta u(Q) \ln\frac{1}{r_{OQ}} dS_Q,$$ так как точка O не принадлежит области $\overline{D}_e$.

Пусть M - произвольная точка области D_e . Тогда:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \left(\ln\frac{1}{r_{PM}} - \ln\frac{1}{r_{OP}} \right) - \right.$$

$$\left. -u(P)\frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln\frac{1}{r_{PM}} - \ln\frac{1}{r_{OP}} \right) \right\} dl_P -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_e}\Delta u(Q)\left(\ln\frac{1}{r_{QM}}-\ln\frac{1}{r_{OQ}}\right)dS_Q \ .$$

Значение $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}$ на границе области неизвестно. Применим стандартный прием для того, чтобы убрать слагаемое, содержащее это неизвестное значение.

Пусть v_2 - произвольная гармоническая в области D_e и регулярная на бесконечности функция.

Для решения $u(M)$ рассматриваемой задачи и функции v_2 справедлива вторая формула Грина в области D_e :

$$0=\oint\limits_L\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}v_2(P)-u(P)\frac{\partial v_2(P)}{\partial n_P}\right\}dl_P-\int\limits_{D_e}\Delta u(Q)v_2(Q)dS_Q .$$

Складывая оба равенства , получим:

$$u(M)=\oint\limits_L\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}G(P,M)-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}G(P,M)\right\}dl_P-$$

$$-\int\limits_{D_e}\Delta u(Q)G(Q,M)dS_Q,$$

где: $G(Q,M)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\ln\dfrac{1}{r_{QM}}-\ln\dfrac{1}{r_{OQ}}\right)+v_2$.

замечание: при построении функции $G(Q,M)$ вместо точки O можно выбрать любую точку строго внутри области D .

Определение: *Функцией Грина внешней задачи Дирихле для оператора Лапласа* в двумерном случае будем называть функцию:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}_e, \quad M \in D_e$$, удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная в $\overline{D}_e$ для каждой точки $M \in D_e$, имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;

2) $G(P,M)\big|_{P\in L} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$;

3) $G(Q,M)$ регулярна на бесконечности.

Следовательно, функция Грина $G(Q,M)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q \in D_e, \quad M \in D_e, \\ G(P,M)\big|_{P\in L} = 0, \quad P \in L, \\ \big|G(Q,M)\big| < \infty. \end{cases}$$

Так как функция Грина *регулярна на бесконечности*, то можно показать, что она симметрична относительно перестановки точки наблюдения Q и точки источника M.

Теперь перейдем к методам решения двухмерных задач:

а) Метод электростатических изображений.

Как и в рассмотренном нами трехмерном случае, в ряде областей при решении двухмерных задач, удобно использовать метод электростатических изображений.

Рассмотрим следующий пример1:

Найти функцию Грина задачи Дирихле вне круга радиуса a .

Решение:

Функция Грина является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \; r > a, \;\; r_0 > a, \\ G\big|_{r=a} = 0, \\ |G| < \infty \text{ при } r \to \infty . \end{cases}$$

Δ_M - оператор Лапласа, где производные берутся по координатам точки M , а r и r_0 - полярные радиусы точек M и M_0 .

Будем искать функцию $G(M, M_0)$ как:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0) \quad ,$$

где:

$$\begin{cases} \Delta_M v(M, M_0) = 0, \; r > a, \;\; r_0 > a, \\ G\big|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM_0}} . \end{cases}$$

Пусть $M_1\left(\dfrac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ - точка , сопряженная $M_0(r_0,\psi_0)$ относительно окружности радиуса a .

Функция $v=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{a}{r_0}\dfrac{1}{r_{MM_1}}$ является гармонической вне круга радиуса a и удовлетворяет нашей задаче.

Тогда решение нашей исходной задачи примет следующий вид:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\quad .$$

пример2: *Для любой непрерывной функции $f(\psi)$ построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в интегральной форме:*

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad r<a, \quad \psi\in[0,2\pi],\\ u|_{r=a}=f(\psi)\,.\end{cases}$$

Решение:

Найдем решение поставленной задачи с помощью формулы :

$u(M)=-\oint\limits_L f(P)\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dl_P+\int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q$, в которой функция Грина $G(M,M_0)$ определяется выражением :

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)\right),$$

$$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)} \ , \qquad r_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_0)} \ ,$$

$$r_1 = \frac{a^2}{r_0} \ .$$

Подсчитаем производную:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=a} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} - \right.$$

$$\left.\left. - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_0)}}\right)\right)\right|_{r=a} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} - \right.$$

$$\left.\left. - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2r_0^2}{a^2} + a^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}}\right)\right)\right|_{r=a} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos(\psi - \psi_0)} \ .$$

Подставляя найденное выражение в нашу формулу получаем, что решение в любой точке $M_0(r_0, \psi_0)$:

$$u(r_0, \psi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\psi - \psi_0)} f(\psi) d\psi$$

Полученная в задача формула называется *интеграл Пуассона .*

пример3: *найти потенциал поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда q , помещенной внутри двугранного угла величины $\frac{\pi}{n}$ параллельно ребру этого угла. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.*

Решение:

Сначала введем цилиндрическую систему координат. Направим ось Oz вдоль ребра двугранного угла, а полярную ось поместим на одной из его граней. Так как в условии нет явной зависимости от координаты z , то она может быть сведена к двумерной задаче в поперечном сечении угла.

Итак, пусть $M(r, \psi)$ - произвольная точка поперечного сечения угла,

$M_0(r_0, \psi_0)$ - точка сечения, определяющая положение нити.

Запишем математическую постановку задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta(M, M_0), \quad 0 < \psi_0 < \frac{\pi}{n}, \\ u\big|_{\psi=0} = u\big|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0\,. \end{cases}$$

Будем решать данную задачу методом электростатических изображений, используя для потенциала поля точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi(M) = 2q\ln\frac{1}{r_{MM_0}} \ .$$

Тогда для функции $u\left(M, M_0\right)$ мы получим:

$$u\left(M, M_0\right) = 2q\sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln\frac{1}{R^+_{MM_k}} - \ln\frac{1}{R^-_{MM_k}}\right) \ ,$$

где:

$$R^+_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right)} \ ,$$

$$R^-_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right)} \ .$$

Если мы положим $q = \dfrac{1}{4\pi}$, то получим функцию Грина задачи Дирихле в угле величины $\dfrac{\pi}{n}$ на плоскости.

пример4: *Найти потенциал поля внутри двугранного угла величины* $\dfrac{\pi}{2}$, *образованного координатными плоскостями* $x = 0$ *и* $y = 0$, *если грань* $x = 0$ *- идеально проводящая заземленная плоскость, а грань* $y = 0$ *- непроводящая плоскость , поддерживаемая при потенциале* $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$.

Решение:

В отличие от предыдущего примера, мы имеем дело с *однородным уравнением* (так как заряды внутри угла отсутствуют) и *неоднородные* граничные условия (так как одна из граней поддерживается при нулевом потенциале).

Как и в предыдущем случае, мы можем свести нашу задачу к двумерной в поперечном сечении:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0\,. \\ u\big|_{y=0} = \frac{1}{x^2 + a^2}, \\ |u| < \infty\,. \end{cases}$$

Ее решение можно построить с помощью функции Грина:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}} \right),$$

где $M(x, y)$ - точка наблюдения, $M_0(x_0, y_0)$ - точка источника, расположенные в поперечном сечении угла.

Тогда решение задачи будет иметь следующий вид:

$u(M_0) = \int\limits_0^\infty \left(u \frac{\partial G}{\partial y} \right)\Bigg|_{y=0} dx$ для любой точки M_0 внутри угла.

Так как:

$$\frac{\partial G}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = \frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \frac{1}{(x + x_0)^2 + y_0^2} \right),$$

получаем:

$$u(M_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\frac{dx}{x^2+a^2}=$$

$$=\frac{y_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{2Ax}{x^2+a^2}-A\left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}+\frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+B\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\right\}dx,$$

где:

$$A=\frac{2x_0}{4x_0^2a^2+\left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2},\quad B=\frac{x_0^2-y_0^2+a^2}{4x_0^2a^2+\left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}\quad.$$

Теперь вычисляем интеграл и находим:

$$u(M_0)=\frac{y_0}{\pi}\left\{A\ln\frac{x^2+a^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x+x_0)^2+y_0^2}}\right|_0^{+\infty}+$$

$$\left.+\frac{B}{y_0}\left(arctg\frac{x-x_0}{y_0}\right|_0^{+\infty}-arctg\frac{x+x_0}{y_0}\left|_0^{+\infty}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{Ay_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2}+2\frac{B}{\pi}arctg\frac{x_0}{y_0}=$$

$$=\frac{1}{4x_0^2a^2+\left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)}\left\{-\frac{2x_0y_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(x_0^2 - y_0^2 + a^2\right)arctg\frac{x_0}{y_0}\Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{4a^2r_0^2\cos^2\psi_0 + \left(r_0^2 - a^2\right)^2}\Bigg\{-\frac{r_0^2\sin2\psi_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{r_0^2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(r_0^2\cos2\psi_0 + a^2\right)\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right)\Bigg\}\ .$$

Последнее выражение представляет собой потенциал в полярных координатах.

б) *Метод разделения переменных.*

Метод разделения переменных для построения функции Грина задачи Дирихле в двумерной области D проводится аналогично трехмерному случаю.

Функция Грина будет иметь вид:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M)\ ,$$

где $Q \in D$ - точка истока , $M \in D$ - точка наблюдения, а функция v является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \ \ Q \in D, \\ v\big|_L = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM}}, \ \ P \in L\,. \end{cases}$$

Тогда общее решение уравнения Лапласа в полярной системе координат будет иметь следующий вид:

$$v(r,\psi) = C_0 + D_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\cos n\psi +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n r^n + F_n r^{-n}\right)\sin n\psi \, .$$

Коэффициенты C_n , D_n , E_n , F_n можно легко определить из граничного условия.

Разложим неоднородность в граничном условии в ряд Фурье по основной тригонометрической системе. Воспользуемся разложением в ряд фундаментального решения оператора Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n(\varphi-\varphi_0), & r > r_0, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n(\varphi-\varphi_0), & r < r_0 . \end{cases}$$

пример: *найти потенциал поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью с постоянной линейной плотностью заряда* ρ_0 *внутри цилиндрического слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными цилиндрами, поперечные сечения которых являются окружностями радиусов* a *и* b $(a < b)$. *Нить параллельна оси системы.*

Решение:

Задачу можно рассматривать, как плоскую в любом поперечном сечении цилиндрического слоя.

Пусть нить проходит через точку M_0 , лежащую в поперечном сечении.

Тогда наш потенциал имеет следующий вид:

$$\varphi(M, M_0) = 2\rho_0 \ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0) .$$

В выбранном нами поперечном сечении введем полярные координаты. Поместим начало координат на ось симметрии области, а полярную ось так, чтобы на ней лежала точка M_0 . Тогда точка M имеет координаты (r, ψ) , а точка M_0 - координаты $(r_0, 0)$.

Тогда задача для функции $v(M, M_0)$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (a, b), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ v\big|_{r=a} = -2\rho_0 \ln\frac{1}{r_{PM_0}}\Big|_{r=a} = 2\rho_0 \ln\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi}, \\ v\big|_{r=b} = -2\rho_0 \ln\frac{1}{r_{PM_0}}\Big|_{r=b} = 2\rho_0 \ln\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\psi}. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце можно записать в следующем виде:

$$v = A_0 \ln\frac{r}{a} + B_0 \ln\frac{b}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n} \cos n\psi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n} \cos n\psi .$$

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n находятся из граничных условий. Представим неоднородности в граничных условиях задачи в виде разложения в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\{\sin n\psi, \cos n\psi\}$:

$$2\rho_0 \ln\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi} =$$

$$= 2\rho_0 \frac{1}{2} \ln\left(r_0^2 \left(1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r_0}\right)\cos\psi \right)\right) =$$

$$= 2\rho_0 \ln r_0 - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$$

так как $r_0 > a \Rightarrow \ln\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\psi} = \ln b - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$

$r_0 < b$.

Следовательно:

$$v\big|_{r=a} = B_0 \ln\frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{b^{2n} - a^{2n}}{a^n} \cos n\psi =$$

$$= 2\rho_0 \ln r_0 - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n} .$$

и

$$v\big|_{r=b} = A_0 \ln\frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{b^{2n} - a^{2n}}{b^n} \cos n\psi =$$

$$= 2\rho_0 \ln b - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n} .$$

И получаем коэффициенты:

$$A_0 = 2\rho_0 \frac{\ln b}{\ln\frac{b}{a}}, \quad \mathrm{A}_n = -\frac{2\rho_0}{n} \frac{r_0^n}{b^{2n} - a^{2n}},$$

$$B_0 = 2\rho_0 \frac{\ln r_0}{\ln \frac{b}{a}}, \quad \mathrm{B}_n = -\frac{2\rho_0}{n}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{a_n}{b^{2n} - a^{2n}},$$

тогда наш потенциал имеет следующий вид:

$$\varphi(M, M_0) = 2\rho_0 \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} + 2\rho_0 \frac{\ln b \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \ln r_0 \ln\left(\frac{b}{r}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} -$$

$$-2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}}\right\}\cos n\psi .$$

Если мы положим $\rho_0 = \frac{1}{4\pi}$ и заменим угол ψ на $(\psi - \psi_0)$, мы получим функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в кольце:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\ln b \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \ln r_0 \ln\left(\frac{b}{r}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}}\right\}\cos n(\psi - \psi_0) .$$

в) *Использование конформных отображений для построения функции Грина оператора Лапласа.*

Дадим определение и сформулируем основные свойства *конформного отображения* .

Конформным отображением называется взаимно однозначное отображение области D комплексной области z на область $\widetilde{D}$ комплексной области w , если это отображение во всех точках $z \in D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Пусть функция $h(z)$ является однозначной и однолистной аналитческой функцией в области D и $h'(z) \neq 0$ при $z \in D$.

Тогда функция $h(z)$ производит *конформное отображение* области D на область $\widetilde{D}$ комплексной области w , представляющую собой область значений функции $w = h(z)$ при $z \in D$.

Итак, *конформное отображение* обладает следующими свойствами:

свойства сохранения углов и постоянства растяжений: угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0 , равен по абсолютной величине углу между их образами на плоскости w в точке $w_0 = h\left(z_0\right)$, а бесконечно малые линейные элементы $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ и $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ преобразуются подобным образом в бесконечно малые линейные элементы:

$$\Delta w_1 = w_1 - w_0 \ , \ \Delta w_2 = w_2 - w_0 \ .$$

И их коэффициент подобия равен:

$$\frac{\left|\Delta w_1\right|}{\left|\Delta z_1\right|} = \frac{\left|\Delta w_2\right|}{\left|\Delta z_2\right|} = \left|h'\left(z_0\right)\right|$$

(*при конформном отображении граница D переходит в границу области $\widetilde{D}$*) .

Любая гармоническая функция $u(z)$ при конформном отображении преобразуется в гармоническую функцию $U(w)$. Это свойство легко использовать при решении краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D, \\ u\big|_L = f(P), & P \in L, \end{cases} \qquad (\, L \text{ - граница области } D\,)\,.$$

Теперь найдем следующее *конформное отображение* , для значительного упрощения решения получаемой краевой задачи для уравнения Лапласа.

Итак, пусть рассматриваемое отображение осуществляется с помощью следующей функции:

$$w = h(z) = \xi\left(x, y\right) + i\eta\left(x, y\right) \text{, где } z = x + iy \text{, } w = \xi + i\eta \,.$$

Функция $h(z)$ задает невырожденную замену действительных переменных:

$$\begin{cases} x = x\left(\xi, \eta\right), \\ y = y\left(\xi, \eta\right). \end{cases}$$

Обратное преобразование осуществляется при помощи обратной замены соответственно:

$$\begin{cases} \xi = \xi\left(x, y\right), \\ \eta = \eta\left(x, y\right). \end{cases}$$

В свою очередь, оператор Лапласа преобразуется следующим образом:

$$\Delta_{xy} = \left|h'\right|^2 \Delta_{\xi\eta} \,.$$

Таким образом наша рассматриваемая задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} U = 0, & (\xi, \eta) \in \widetilde{D}, \\ U\big|_{\widetilde{L}} = g(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \widetilde{L}, \end{cases}$$

$$U(\xi, \eta) = u\Big(x(\xi, n), y(\xi, n)\Big), \quad g(\xi, \eta) = f\Big(x(\xi, n), y(\xi, n)\Big) \ .$$

Основная идея решения полученной задачи: нужно найти функцию $U(\xi, \eta)$, гармоническую в области $\widetilde{D}$. С помощью обратного преобразования мы получим выражение для функции $u(x, y)$, которая является решением рассматриваемой задачи.

Описанный нами метод наиболее актуален, когда область D является односвязной.

В нашем случае можно подобрать функцию $w = h(z)$ таким образом, чтобы конформно отобразить область D на внутренность единичного круга $|w| \leq 1$ с центром в начале координат.

При этом фиксированная внутренняя точка $M_0 \in D$ переходит в центр этого круга. Тогда значению $u(M_0)$ соответствует значение $U\big|_{r=0}$ функции $U(r, \theta)$, гармонической в круге $|w| \leq 1$:

$$\begin{cases} \Delta_{r,\theta} U = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ U\big|_{r=1} = g(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Используем формулу среднего значения для гармонической функции и получим:

$$U\Big|_{r=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta\,.$$

Так как :

$$1 - \frac{d}{dr}\left(\ln\frac{1}{r}\right)r\Bigg|_{r\neq 0}\,,$$

то:

$$U\Big|_{r=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot g(\theta)d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\left(\ln\frac{1}{r}\right)g(\theta)rd\theta\Bigg|_{r=1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\widetilde{n}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)g(\theta)rd\theta\Bigg|_{r=1} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\widetilde{n}}{\left|\widetilde{n}\right|},\nabla\ln\frac{1}{r}\right)g(\theta)rd\theta\Bigg|_{r=1}\,,$$

где $\widetilde{n}$ - вектор нормали к окружности.

Переход к переменным (x, y) проводится при помощи функции $z = h^{-1}(w)$, которая осуществляет комформное отображение единичного круга на область D . В результате замены переменных внешняя нормаль $\widetilde{n}$ к окружности преобразуется во внешнюю нормаль к границе L области D . Кроме того, имеет место соотношение подобия:

$$\frac{d\theta}{\left|\widetilde{n}\right|} = \frac{dl}{|n|}\,,$$ dl - бесконечно малый элемент кривой L

(отображение элемента $d\theta$) , n - отображение вектора нормали $\widetilde{n}$, перпендикулярного к элементу $d\theta$.

Снова переходя к переменным (x, y) получаем $u(M_0) = U\big|_{r=0}$:

$$u(M_0) = -\int_{L_1} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|h(z_0, z)\right|}\right)dl \quad .$$

Если функция $w = h(z_0, z)$ осуществляет комформное отображение области D_1 комплексной плоскости z на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, что заданная точка $z_0 \in D_1$ переходит в центр $w = 0$ этого круга, то функция:

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|h(z_0, z)\right|}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D_1 .

Пример: *найти потенциал поля бесконечной заряженной нити с постоянной линейной плотностью заряда* q *, помещенной внутри двугранного угла величины* α *параллельно ребру этого угла,* $\alpha \in (0; 2\pi)$ *. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости. (Для частного случая* $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ *данная задача уже была рассмотрена в рамках нашего курса и была решена методом электростатических отображений, который в данном случае неприменим: так как рано или поздно фиктивный заряд , полученный при отражении , попадает в рассматриваемую область , что приведет к наличию лишнего точечного источника).*

Решение:

Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Oz с ребром угла. Так как линейная плотность заряда q нити постоянна, то в задаче нет зависимости от переменной z , и она сводится к двумерной.

Рассмотрим произвольную плоскость, перпендикулярную ребру угла.

Пусть M_0 - точка пересечения нити с этой плоскостью, и $\left(r_0, \psi_0\right)$ - полярные координаты точки M_0 в рассматриваемой плоскости.

Область $D = \left\{ \left(r, \psi\right) : r > 0, 0 < \psi < \alpha \right\}$ в выбранной плоскости соответствует внутренней части двугранного угла.

Тогда задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta\left(M, M_0\right), \quad M, M_0 \in D, \\ u\big|_{\psi=0} = u\big|_{\psi=a} = 0 . \end{cases}$$

Введем комплексную область z : $|z| = r$ и $\arg z = \psi$.

Для решения поставленной задачи , нам нужно отобразить область D на внутренность круга единичного радиуса. Для этого преобразуем сектор в верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}, \zeta_0 = {z_0}^{\frac{\pi}{\alpha}}$, где z_0 соответствует точке M_0 .

Верхняя полуплоскость может быть отображена на круг с помощью дробно - линейной функции :

$w = f(\zeta) = \dfrac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0}$, где $\bar{\zeta}_0$ - комплексно сопряженное к ζ_0 , а точка $\zeta_0 = {z_0}^{\frac{\pi}{\alpha}}$ переходит в центр круга.

Тогда функция Грина будет иметь следующий вид:

$$u(z,z_0)=\frac{q}{2}\ln\frac{\left|z^{\frac{\pi}{\alpha}}-z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\right|}{\left|z^{\frac{\pi}{\alpha}}-\overline{z}_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\right|},$$

или:

$$u(r,\psi)=\frac{q}{2}\ln\frac{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\psi-\psi_0)}{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\psi+\psi_0)}.$$

Замечания:

1) Функция $\zeta=z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ является многозначной :

$$\zeta=z^{\frac{\pi}{\alpha}}=e^{\frac{\pi}{\alpha}Lnz}=e^{\frac{\pi}{\alpha}(\ln|z|+i\arg z+i2\pi k)},\ k\in z.$$

2) Чтобы с помощью данной функции построить *конформное отображение* нужно выбрать ветвь, соответствующую $k=0$.

3) Точка $z=0$ является точкой ветвления для функции $\zeta=z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, поэтому при $z=0$ конформность отображения нарушается. Но значение потенциала поля в этой точке известно из граничного условия: оно равно нулю, так как по условию грани угла заземлены.

г) *Построение функции Грина с помощью разложения в ряд Фурье.*

Метод разложения в ряд Фурье применяется и в двумерном случае. Он позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример: *построить функцию Грина для кольцевого сектора*

$$a \le r \le b, \quad 0 \le \psi \le a \ .$$

Решение:

Функция Грина $G(r, r_0, \psi, \psi_0)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta G = -\frac{4\pi}{r_0}\delta(r - r_0)\delta(\psi - \psi_0), \\ a < r, \ r_0 < b\ ; \quad 0 < \psi, \ \ \psi_0 < a, \\ G\Big|_{\psi=0} = G\Big|_{\psi=a} = 0, \\ G\Big|_{r=a} = G\Big|_{r=b} = 0\,. \end{cases}$$

Будем искать функцию $G(r, r_0, \psi, \psi_0)$ в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций $v_n(\psi) = \sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi, \ \ n = 1,2,\dots,$ отрезка $[0, \alpha]$:

$$G(r, r_0, \psi, \psi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r, r_0, \psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi \ .$$

Коэффициенты A_n Фурье разложения определим по следующим формулам:

$$A_n(r,r_0,\psi_0)=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}G(r,r_0,\psi,\psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\ ,\ \ n=1,2,\ldots,.$$

Теперь получим уравнения для коэффициентов разложения. Умножим наше уравнение на $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi$ и проинтегрируем левую и правую части полученного равенства по отрезку $[0,\alpha]$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}G(r,r_0,\psi,\psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi=-\frac{8\pi\delta(r-r_0)}{\alpha r_0}\int_0^{\alpha}\delta(\psi-\psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\quad .$$

Два раза интегрируя по частям второе слагаемое в левой части с учетом наших граничных условий, мы получаем уравнения для функций $A_n(r,r_0,\psi_0)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n}{dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2A_n=-\frac{8\pi r}{r_0\alpha}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0,\ \ n=1,2,\ldots$$

Запишем краевые условия для полученного нами уравнения:

$$A_n\Big|_{r=a}=A_n\Big|_{r=b}=0\ .$$

Будем строить решение нашей краевой задачи на отрезке $[a,b]$ с помощью функции Грина.

Функцию Грина самосопряженного оператора $L[y] = \frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dy}{dr}\right)$ следует искать в следующем виде:

$$g(r,s) = \frac{1}{p(s)W(s)}\begin{cases} y_1(r)y_2(s), & a \le r \le s, \\ y_2(r)y_1(s), & s \le r \le b, \end{cases}$$

где $y_1(r)$, $y_2(r)$ - решения однородного уравнения $L[y] = 0$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y_1(a) = 0, \quad y_2(b) = 0 ,$$

а $W(s)$ - определитель Вронского функций $y_1(r)$ и $y_2(r)$, взятый в точке s .

Решения однородного уравнения $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 y = 0$,

удовлетворяющие краевым условиям имеют следующий вид:

$$y_1(r) = r^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), \quad y_2(r) = r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) .$$

Следовательно:

$$p(s)W(s) = sW[y_1(s), y_2(s)] = -\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) .$$

Для функции $g(r,s)$ получаем:

$$g(r,s) = \left[-\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\right]^{-1} \times$$

$$
\times\begin{cases}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & a\le r\le s,\\ \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{s}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & \mathrm{s}\le r\le b\,.\end{cases}
$$

Тогда функция $A_n(r, r_0, \psi_0)$ может быть представлена через функцию $g(r, s)$ в виде:

$$
A_n(r, r_0, \psi_0)=\int_a^b g(r,s)\left(-\frac{8\pi}{\alpha}\right)\frac{s}{r_0}\delta(s-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 ds\quad .
$$

Подставляем в $g(r, s)$ и получаем:

$$
A_n(r, r_0, \psi_0)=
$$

$$
=\begin{cases}4\cdot\dfrac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & a\le r\le r_0,\\ 4\cdot\dfrac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & r_0\le r\le b\,.\end{cases}
$$

Итак, решение заявленной задачи получено в виде ряда Фурье в следующем виде:

$$G\left(r, r_0, \psi, \psi_0\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1 - \left(\frac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \times \\ \times \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, \quad r \le r_0, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \\ \times \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, \quad r_0 \le r. \end{cases}$$

Полученные ряды сходятся абсолютно при $r \ne r_0$ и $r = r_0$.

6. Функции Грина задач Неймана : внутренние и внешние трехмерные задачи.

Краевые задачи для оператора Лапласа с граничным условием Неймана возникают, например, при расчете стационарного распределения температуры в некоторой области. Если известен тепловой поток через границу этой области, то мы приходим к задаче с неоднородным условием Неймана. Если поток тепла через границу отсутствует, (то есть граница теплоизолирована), то граничное условие Неймана оказывается однородным.

Рассмотрим вначале *внутренние* трехмерные задачи.

Итак, пусть D - область , ограниченная достаточно гладкой поверхностью S в пространстве R^3 . Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), \quad P \in S, \end{cases}$$

где n - единичная внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S .

В отличие от задачи Дирихле, вторая краевая задача разрешима только при выполнении следующего условия:

$$-\int_D F(M)\,dV = \oint_S f(P)\,dS\,.$$

Итак, пусть решение задачи $u(M)$ существует. Применим первую формулу Грина к решению u и функции $v = 1$:

$$\int\limits_D v\Delta u dV = \oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_D \nabla v\cdot\nabla u dV\,,$$

в итоге получим:

$$\int\limits_D \Delta u dV = \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS\,.$$

Следовательно условие $-\int\limits_D F(M)dV = \oint\limits_S f(P)dS$ является *необходимым условием разрешимости* задачи.

Физический смысл условия разрешимости: если функция u представляет собой потенциал электростатического поля, то:

$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS$ - *полный поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность* S,

$\int\limits_D \Delta u dV$ - *полный заряд, находящийся внутри области* D.

$\int\limits_D \Delta u dV = \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS$ - *означает выполнение теоремы Остраградского - Гаусса*.

Теперь сформулируем определение *классического решения* поставленной задачи:

классическим решением рассматриваемой задачи будем называть функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в области $\widetilde{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ в области D и соответствующему ему граничному условию.

Если граница S области D является поверхностью Ляпунова, функция $F(M)$ - непрерывно дифференцируемой, а функция $f(P)$ непрерывна , то рассматриваемая задача имеет *классическое решение* , которое определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Чтобы получить выражение для решения поставленной задачи, воспользуемся следующей формулой:

$$u(M) = \oint_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P -$$

$$- \int_D G(Q,M)\Delta u(Q)\,dV_Q \ .$$

$G(Q,M)$ - *фундаметальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае в трехмерном случае, которое представляет собой сумму двух слагаемых:*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v \ ,$$

где v *- гармоническая функция в области* D .

Подставляя в выражение для $u(M)$ значения $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$ и $\Delta u(Q) = -F(Q)$, мы получим:

$$u(M) = \oint_S \left(G(P,M)f(P) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P +$$

$$+ \int_D G(Q,M)F(Q)\,dV_Q \,.$$

$$\oint_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P = \oint_S u(P)\left(\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{4\pi r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dS_P,$$ значение

которого неизвестно, так как в задаче на границе S задано лишь $\frac{\partial u}{\partial n}(P)$, $P \in S$, а значение самой функции $u(P)$ не определено .

Решение внутренней трехмерной задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной , поэтому можно подобрать функцию v таким образом, чтобы

$$\oint_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P = \oint_S u(P)\left(\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{4\pi r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dS_P$$

было равно константе.

Возьмем в качестве функции v решение следующей задачи :

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad Q \in D, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n_P}\right|_S = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}} + C, \quad P \in S. \end{cases}$$

Константа C в краевом условии поставленной задачи выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости , которое в этом случае , принимает следующий вид:

$$\oint_S \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}} + C\right)dS_P = 0,$$

откуда следует:

$$C \cdot S_0 = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}}\right)dS_P,$$

где S_0 - площадь поверхности S .

Интеграл в последнем выражении можно посчитать, используя третью формулу Грина , записанную для функции $u \equiv 1$:

$$1 = -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM}} dS_P \;.$$

Отсюда определяем константу C :

$$C = -\frac{1}{S_0} \;.$$

Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$;

2) $\left. \dfrac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) \right|_{P \in S} = -\dfrac{1}{S_0}$ для каждой точки $M \in D$.

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в трехмерном случае представляет собой решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D, \\ \left. \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right|_S = -\frac{1}{S_0}, \quad P \in S, \; M \in D. \end{cases}$$

Функция Грина задачи Неймана определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q , но зависящего от координат точки M.

Это слагаемое можно выбрать так, чтобы функция Грина была симметричной. Для этого достаточно потребовать выполнение дополнительного условия:

$\oint\limits_S G(P,M)dS_P = 0$, однозначно определяющего функцию Грина $G\left(Q,M\right)$.

Тогда решение рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

$$u(M) = \oint\limits_S G(P,M)f(P)dS_P + \int\limits_D G\left(Q,M\right)F\left(Q\right)dv_Q + A_0 ,$$

где A_0 - произвольная постоянная.

Теперь перейдем к внешним трехмерным задачам Неймана.

При постановке внешних задач Неймана, как и в случае внешней задачи Дирихле , нам потребуется поставить дополнительное условие: регулярность решения на бесконечности.

Итак, пусть D_e - дополнение ограниченной области D с границей S до всего пространства R^3 . Тогда математическая постановка задачи будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), \quad P \in S, \end{cases}$$

n - единичная внешняя по отношению к области D_e нормаль к поверхности S, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Классическим решением поставленной нами задачи будем называть регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}_e$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ в области D_e и соответствующему ему граничному условию.

Если S - поверхность Ляпунова, то рассматриваемая нами задача имеет единственное классическое решение для любой непрерывной на поверхности S функции $f(P)$ и любой финитной непрерывно-дифференцируемой функции $F(M)$.

Таким образом, в отличие от случая внутренней трехмерной задачи Неймана, для внешней трехмерной задачи дополнительное условие разрешимости не требуется. Для регулярных на бесконечности функций во внешних областях справедливы формулы Грина. Поэтому решение нашей задачи можно построить, используя следующую формулу:

$$u(M) = \oint_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P -$$

$$- \int_{D_e} G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q ,$$

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v$$, v - произвольная, регулярная на бесконечности, гармоническая функция.

Замечание: в отличие от внутренних задач Неймана, при построении решения внешних задач в трехмерном случае, можно потребовать, чтобы производная $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}$ обращалась в ноль на границе S, так как не требуется никаких условий разрешимости нашей задачи.

Функцией Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию следующего вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}_e, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) $v(Q,M)$ - регулярная на бесконечности, гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D}_e$ для каждой точки $M \in D_e$;

2) $\left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_{P\in S} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$.

Функция Грина $G(Q,M)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, \quad M \in D_e, \\ \left.\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_{P\in S} = 0, \qquad P \in S, \ M \in D_e, \\ G(Q,M) \rightrightarrows 0 \ \text{на бесконечности}. \end{cases}$$

Функция $G(Q,M)$ симметрична относительно перестановки точек Qи M.

Тогда решение нашей задачи можно представить в следующем виде:

$$u(M) = \oint\limits_S G(P,M) f(P) dS_P + \int\limits_{D_e} G\big(Q,M\big) F\big(Q\big) dV_Q \quad .$$

7. Внутренние и внешние двухмерные задачи Неймана.

Пусть D - ограниченная область с достаточно гладкой границей L в двумерном пространстве R^2 .

Рассмотрим задачу Неймана следующего вида:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_L = f(P), \quad P \in L. \end{cases}$$

Как и в трехмерном случае, полученная краевая задача разрешима только при выполнении следующего условия:

$$-\int_D F(M)dS = \oint_L f(P)dl \ .$$

Класическим решением рассматриваемой задачи будем называть функцию $u(M)$ дважды непрерывно дифференцируемую в области D , непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ в области D и соответствующему ему граничному условию.

Если граница L области D является кривой Ляпунова, функция $f(P)$ является непрерывной, а функция $F(M)$ непрерывно дифференцируемой , то при выполнении условия разрешимости решение поставленной задачи существует, но не единственно и определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Как и в трехмерном случае, справедливо следующее соотношение:

$$u(M) = \oint_L \left(G(P,M) f(P) - u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P +$$

$$+ \int_D G(Q,M) F(Q) dS_Q \,.$$

$G(Q,M)$ - *фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае:*

$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MQ}} + v$, v - гармоническая в области S функция.

$\oint_L u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dl_P = \oint_L u(P) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P} \right) dl_P$ - значение данного слагаемого неизвестно, так как на границе L задано лишь $\frac{\partial u}{\partial n}$, а значение $u(P)$ не задано.

Подберем функцию v таким образом, чтобы выражение :

$$u(M) = \oint_L \left(G(P,M) f(P) - u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P +$$

$$+ \int_D G(Q,M) F(Q) dS_Q$$ - *было равно константе!*

В качестве $v(Q,M)$ возьмем решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n_P} \right|_L = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} + C, \quad P \in L. \end{cases}$$

Константа C выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости, которое в нашем случае имеет следующий вид:

$$\oint_L \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} + C \right) dl_P = 0 \,,$$

Отсюда:

$$C \cdot L_0 = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P, \quad L_0 \text{ - длина кривой } L\,.$$

Интеграл в правой части можно посчитать, используя третью формулу Грина , записанную для функции $u \equiv 1$:

$$1 = -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P\ .$$

Откуда окончательно получаем:

$$C = -\frac{1}{L_0}\ .$$

Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию следующего вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \ \ M \in D,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$;

2) $\left. \frac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) \right|_{P \in L} = -\frac{1}{L_0}$ для каждой точки $M \in D$.

Тогда функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в двумерном случае представляет собой решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \ \ Q, M \in D, \\ \left. \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right|_L = -\frac{1}{L_0}, \quad P \in L,\ M \in D\,. \end{cases}$$

Функция Грина задачи Неймана определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q , но зависящего от координат точки M. Это слагаемое можно выбрать таким образом, чтобы функция Грина была симметричной. Достаточно потребовать выполнения следующего дополнительного условия:

$\oint\limits_L G(P,M)dl_P = 0$, однозначно определяющего функцию Грина $G\left(Q,M\right)$.

Итак, решение рассматриваемой нами задачи можно записать в следующем виде:

$$u(M) = \oint\limits_L G(P,M)f(P)dl_P + \int\limits_D G\left(Q,M\right)F\left(Q\right)dS_Q + A_0\,,$$

A_0 - произвольная постоянная.

Теперь перейдем к внешним двумерным задачам Неймана.

Итак, пусть D_e - дополнение некоторой ограниченной области $\overline{D}$ с гладкой границей L до всей плоскости R^2 .

Тогда внешняя задача Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D_e \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_L = f(P), \quad P \in L, \\ \left|u\right| < \infty, \end{cases}$$

n - внешняя по отношению к области D_e нормаль к границе L .

Классическим решением поставленной задачи будем называть регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e , непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}_e$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению $\Delta u = -F(M)$ в области D_e и соответствующему ему граничному условию.

Если кривая L является кривой Ляпунова , функция $F(M)$ является финитной и непрерывно дифференцируемой , а функция $f(P)$ непрерывной, то рассматриваемая задача имеет *классическое решение* только при выполнении следующего условия разрешимости:

$$\oint_L f(P)dl_P = -\int_{D_e} F(M)dS_M \ .$$

Условие разрешимости получается из второй формулы Грина для неограниченной области D_e :

$$\int_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)dS = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dl \ ,$$

записанной для решения u и регулярной на бесконечности в двумерном случае функции $v = 1$.

Замечание: провести подобные рассуждения в случае внешних трехмерных задач Неймана нельзя, так как формулы Грина во внешнях областях справедливы только для регулярных на бесконечности функций, к которым функция $v \equiv 1$ в трехмерном случае не относится.

Классическое решение внешней двумерной задачи Неймана не единственно, и определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Итак, пусть условие разрешимости выполнено. Построим решение поставленной задачи в интегральном виде. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось внутри области D. Рассмотрим функцию следующего вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QO}} + v_2 \ ,$$

v_2 - гармоническая в области D_e , регулярная на бесконечности функция.

Функция $G(Q,M)$ представляет собой регулярное на бесконечности фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), & Q,M \in D_e, \\ \left| G(Q,M) \right| < \infty, \ \ r_{QM} \to \infty, & M \in D_e . \end{cases}$$

Пусть носитель функции $F(M)$ принадлежит ограниченной области $D_0 \subset D_e \subset R^2$.

Тогда вне области D_0 решение $u(M)$ является гармонической функцией , следовательно в любой точке $M \in D_e$ для него справедлива следующая формула:

$$u(M) = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(P,M) - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) \right\} dl_P -$$

$$- \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) G(Q,M) dS_Q \ .$$

Подставляя в последнее выражение правые части уравнения и краевого условия рассматриваемой задачи, мы получим:

$$u(M) = \oint\limits_L \left(f(P)G(P,M) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P +$$

$$+\int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dS_Q .$$

Слагаемое : $\oint\limits_L u(P)\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dl_P$ - неизвестно .

Так как решение внешней двумерной задачи Неймана для оператора Лапласа определяется с точностью до аддитивной постоянной, мы можем подобрать функцию v_2 для $G(Q,M)$ таким образом, чтобы это неизвестное слагаемое было равно константе.

Если мы положим:

$\left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = C = const$, то интеграл в неизвестном слагаемом обращается в константу.

Постоянную C мы можем определить из условия разрешимости задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,M \in D_e, \\ \left|G(Q,M)\right| < \infty, \ r_{QM} \to \infty, \quad M \in D_e, \\ \left.\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = C, \end{cases}$$

которое, в свою очередь, принимает следующий вид:

$$\oint\limits_L C dl_P = -1 .$$

Отсюда определяем постоянную:

$C = -\dfrac{1}{L_0}$, где L_0 - длина контура L .

Следовательно, для произвольной точки $M \in D_e$, мы имеем:

$$u(M) = \oint\limits_L G(P,M) f(P) dl_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M) F(Q) dV_Q + A_0 \ ,$$

где A_0 - произвольная постоянная.

Итак, функцией Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию следующего вида:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}_e, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q,M)$ - гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D}_e$ для каждой точки $M \in D_e$ и имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;

2) $\left. \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right|_{P \in L} = -\dfrac{1}{L_0}$ для каждой точки $M \in D_e$, где L_0 - длина кривой L;

3) $G(Q,M)$ регулярна на бесконечности.

Таким образом, функция $G(Q,M)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, \qquad M \in D_e, \\ \left. \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right|_L = -\frac{1}{L_0}, \qquad P \in L, \ M \in D_e, \\ \left| G(Q,M) \right| < \infty, \ r_{QM} \to \infty, \quad M \in D_e. \end{cases}$$

Функция Грина $G(Q, M)$ определена с точностью до слагаемого, не зависящего от точки Q. Как и в случае внутренних двумерных задач, функция Грина будет симметрична относительно перестановки точек M и Q, если дополнительно потребовать выполнение следующего условия:

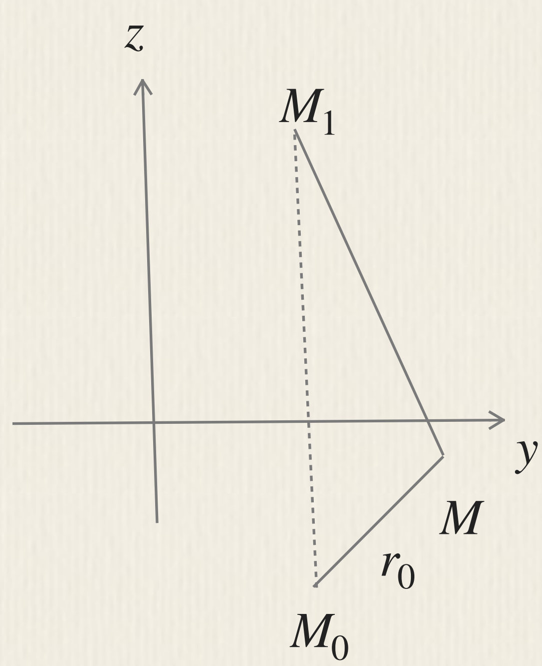
$$\oint_L G(P, M) dl_P = 0,$$ однозначно определяющего функцию Грина $G(Q, M)$.

8. Примеры решения задач Неймана и методы их построения.

Пример 1: *найти распределение температуры в нижнем полупространстве, создаваемое точечным источником, помещенным в точку* $(1,2,-3)$ *, если плоскость* $z=0$ *теплоизолирована.*

Решение:

Будем решать методом *зеркальных отображений* .



$u(x,y,z)$ - распределение температуры , которое является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -q\delta(M,M_0), \quad x,y \in (-\infty,\infty), \quad z \in (-\infty,0), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Ее решение представимо в следующем виде:

$$u = \frac{q}{r_{MM_0}} + v(M,M_0)$$, где $v(M,M_0)$ - гармоническая функция.

Отобразим источник относительно плоскости $z=0$ не меняя его знак.

Получаем функцию двух источников:

$$u_1 = q\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_1}\right) \quad ,$$

где:

$$r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \, ,$$

$$r'_1 = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + \left(z+z_0\right)^2} \ .$$

Эта функция удовлетворяет граничному условию при $z = 0$.

Следовательно:

$$u_1 = q\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + \left(y-2\right)^2 + (z+3)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + \left(y-2\right)^2 + (z-3)^2}}\right) \ .$$

Пример 2: *Найти функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа вне шара радиуса* a .

Решение:

Будем решать заданную задачу *методом разделения переменных.*

Направим ось z через точку источника M_0 : $M_0\left(r_0, 0, 0\right)$;

наблюдатель - $M\left(r, \theta, \psi\right)$.

$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}$ - расстояние между точками M и M_0 .

Тогда функция Грина будет выглядеть следующим образом:

$$G\left(M, M_0\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} + v \ ,$$

где v - гармоническая функция, которая является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (a;\infty), \quad \theta \in (0;\pi), \quad \psi \in \left[0;2\pi\right]; \\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta}} + \left.\frac{1}{4\pi a^2}\right|_{r=a}; \\ \left.\left|v\right|\right|_{r=0} < \infty . \end{cases}$$

Так как $r_0 > a$ и выражение:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta}}$$

нас интересует при $r = a$, то , не ограничивая общности, можно рассмотреть сначала это выражение при $a \le r < r_0$, а потом положить $r = a$.

Итак, при $r < r_0$:

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\theta}} =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) .$$

Тогда выражение для правой части граничного условия:

$$\frac{1}{4\pi a^2} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta}} =$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^2}n\frac{r^{n-1}}{r_0^n}P_n(\cos\theta) =$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{r^{n-3}}{r_0^n}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{a^{n-3}}{r_0^n}P_n(\cos\theta) .$$

Тогда решение можем представить в следующем виде:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{na^{n-1}}P_n(\cos\theta) \ .$$

Подставляем решение в наше граничное условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{a^{n-3}}{r_0^n}P_n(\cos\theta) \ ,$$

Отсюда выражаем A_n :

$$A_n = \frac{1}{4\pi a^2} n \left(\frac{a}{r_0}\right)^n, \quad n = 1,2,\ldots$$

Таким образом:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi a} n \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{r^n}{na^{n-1}} P_n(\cos\theta) \ ,$$

где A_0 - произвольная постоянная.

Следовательно построенная функция Грина будет выглядеть следующим образом:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{r^n}{a^{n-1}} P_n(\cos\theta) \ .$$

Пример 3: *С помощью функции Грина для круга запишите решение задачи Неймана в квадратурах:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \in (0,a), \quad \varphi \in [0,2\pi], \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi), \\ \left.|u|\right|_{r=0} < \infty . \end{cases}$$

Решение:

Итак, найдем функцию Грина для круга. Направим ось z через точку источника M_0 .

Тогда :

$$G(r,\psi,r_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v(r,\psi) ,$$

где v - гармоническая функция, которая является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < r < a, \quad \psi \in [0;2\pi], \\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln\left.\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\right|_{r=a} , \\ |v| < \infty . \end{cases}$$

Тогда функция Грина примет следующий вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + \ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) + A_0 .$$

Запишем решение нашей задачи с помощью функции Грина:

$$u(r_0, \varphi_0) = \int_0^{2\pi} G(a, \varphi, r_0, \varphi_0) a f(\varphi) d\varphi + C ,$$

так как для любой точки P на окружности :

$$r_{PM_1} = \frac{a}{r_0} r_{PM_0} , \quad r_{PM_0} = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\varphi} .$$

M_0 и M_1 - точки, сопряженные относительно окружности радиуса a и следовательно:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{PM_0}} + \ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{PM_1}}\right)$$

и ее решение будет выглядеть следующим образом:

$$u(r_0, \varphi_0) = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi} f(\varphi)\left(\ln\frac{1}{r_{PM_0}} + \ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{PM_1}}\right) d\varphi .$$

ГЛАВА 4

Начально-краевые задачи

1. *Задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области с однородными граничными условиями.*

Рассмотрим начально - краевую задачу с однородными граничными условиями следующего вида:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad M \in D, \ \ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(M), \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_S = 0, \ \ |\alpha| + |\beta| \neq 0, \ \ \alpha, \beta = const. \end{cases}$$

Представим решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M),$$

коэффициенты $u_n(t)$ являются решениями задачи Коши:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + a^2 \lambda_n u_n = f_n(t), \quad t > 0, \quad u_n(0) = \varphi_n, \quad n = 1,2,\ldots,\infty;$$

где $\{v_n(M)\}_1^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ - *собственные функции и собственные значения задачи Штурма - Лиувилля для оператора Лапласа.*

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_D f(M,t) v_n(M) dV,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_D \varphi(M) v_n(M) dV.$$

Решение задачи Коши для $u_n(t)$ можно представить в следующем виде:

$$u_n(t) = \int\limits_0^t K_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau + \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t} \quad ,$$

$K_n(t-\tau) = e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}$ - импульсная функция Коши.

Следовательно, решение начально - краевой задачи с однородными граничными условиями можно записать в следующем виде:

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau .$$

решение однородного уравнения с однородным граничным и заданным начальным условием.

решение неоднородного уравнения с дополнительными условиями.

Примеры:

1) *Решить задачу для уравнения теплопроводности на отрезке* $0 \le x \le l$ *:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = x(l-x)\,. \end{cases}$$

Решение:

Так как мы имеем дело с граничными условиями первого рода *Дирихле* , то наше решение мы можем представить в виде разложения по собственным функциям отрезка с соответствующими граничными условиями, которые имеют следующий вид:

$$v_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty \ .$$

Так как рассматриваемое уравнение однородное, то решение нашнй задачи можно записать в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx =$$

$$= 2\{1-(-1)^n\} = \begin{cases} 0, & n = 2k+2, \\ 4, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Следовательно:

$$u(x,t) = 4\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(2k+1)^2 t} \sin\frac{\pi(2k+1)}{l}x\,.$$

Полученный нами ряд тем быстрее сходится, чем больше t *, откуда следует, что при достаточно больших* t *можно ограничиться несколькими первыми членами ряда. Очевидно, что скорость сходимости ряда зависит от скорости нарастания собственных значений с увеличением индекса, то есть от размеров рассматриваемой области. Данное утверждение справедливо и для более сложных рядов, дающих решение уравнения теплопроводности.*

2) Решить задачу для уравнения теплопроводности внутри круга $0 \le r \le r_0$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \\ u\big|_{r=r_0} = 0, \;\; u\big|_{t=0} = r^2 \cos 2\varphi\,. \end{cases}$$

Решение:

Так как уравнение, входящее в постановку нашей задачи - *однородное* , решение можно записать в следующем виде:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(r,\varphi),$$

$$v_n(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r\right)\begin{cases}\cos n\varphi, \\ \sin n\varphi,\end{cases} \;\; k = 1,2,\dots,\;\; n = 0,1,\dots,$$

собственные функции круга (Дирихле).

Тогда решение можно записать в следующем виде:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k^{(n)} t} \left\{ A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi \right\} J_n \left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r \right) \; .$$

Коэффициенты A_{nk} и B_{nk} определяются из начального условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r \right) \left\{ A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi \right\} = r^2 \cos 2\varphi .$$

Отсюда:

$$\begin{array}{llll} B_{nk} = 0 & \text{при всех} & n = 0,1,\ldots, & k = 1,2,\ldots,\infty, \\ A_{nk} = 0 & \text{при} & n \neq 2, & k = 1,2,\ldots,\infty, \end{array}$$

$$A_{2k} = \frac{1}{\left\| J_2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r \right) \right\|^2} \int_0^{r_0} J_2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r \right) r^3 dr = \frac{2 r_0}{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}} \frac{J_3 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r_0 \right)}{J_2'^2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r_0 \right)} \; .$$

Следовательно:

$$u = 2 r_0 \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_3 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r_0 \right)}{\sqrt{\lambda_k^{(2)}} J_2'^2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r_0 \right)} J_2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}} r \right) \; .$$

3) Решить задачу для неоднородного уравнения внутри круга $0 \le r \le r_0$ *:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + At, \\ u\big|_{r=r_0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad A = const. \end{cases}$$

Решение:

Уравнение теплопроводности решается внутри круга с однородными условиями Дирихле. Следовательно, разложение нужно вести по собственным функциям задачи Дирихле для круга, которые имеют следующий вид:

$$v_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi, \\ \sin n\varphi,\end{cases} \quad n = 0,1,\ldots,\infty, \quad k = 1,2,\ldots,$$

$\lambda_k^{(n)}$ являются корнями уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r_0\right) = 0$.

Начальное условие нулевое, правая часть уравнения At не зависит от угла φ. Таким образом, решение тоже не зависит от угла φ и его можно представить в следующем виде:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$u_k(t)$ - есть решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{du_k}{dt} + a^2 \lambda_k^{(0)} u_k = Atf_k, \quad t > 0, \\ u_k\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$f_k = \frac{1}{\left\| J_0\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r \right\|^2}\int_0^{r_0} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right) r dr = \frac{2}{r_0\sqrt{\lambda_k^{(0)}}}\frac{1}{J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r_0\right)} .$$

Тогда решение рассматриваемой задачи для $u_k(t)$ имеет следующий вид:

$$u_k(t) = \frac{Af_k}{a^2\lambda_k^{(0)}}\left(t - \frac{1}{a^2\lambda_k^{(0)}}\right) + \frac{Af_k}{\left(a^2\lambda_k^{(0)}\right)^2}e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t} .$$

Значит:

$$u = \frac{2A}{a^2 r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_k^{(0)}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{ t + \frac{e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t} - 1}{a^2\lambda_k^{(0)}} \right\}\frac{J_0\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r}{J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r_0\right)} .$$

4) *Решить задачу об остывании шара радиуса* r_0 *, на границе которого поддерживается нулевая температура , а в начальный момент распределение температуры в шаре равно* $Ar\sin\theta\sin\varphi, \quad (A = const)$.

Решение:

Пусть $u(r,\theta,\varphi,t)$ - температура в точке (r,θ,φ) в момент времени t .

Тогда процесс остывания шара описывается начальной краевой задачей следующего вида:

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{в шаре} \quad 0 \le r < r_0, \quad t > 0,$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = Ar\sin\theta\sin\varphi\,.$$

Так как собственные функции задачи Дирихле для шара имеют следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\, r\right) P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} k = 1,2,\ldots,\infty, \\ n = 0,1,2,\ldots,\infty, \\ m = 0,1,\ldots,n\,. \end{pmatrix}$$

$\lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ - корень уравнения $\quad J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\, r_0\right) = 0,$

и наше решение примет следующий вид (*в виде тройного ряда*) :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e^{-a^2 \lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} t} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\, r\right)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\theta) \times$$

$$\times \left\{ A_{knm}\cos m\varphi + B_{knm}\sin m\varphi \right\} \quad .$$

Коэффициенты A_{knm} и B_{knm} определяются из начального условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\, r\right)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\theta) \times$$

$$\times \left\{ A_{knm}\cos m\varphi + B_{knm}\sin m\varphi \right\} = Ar\sin\theta\sin n\varphi\,.$$

Так как $\sin\theta\sin n\varphi = P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi$, то мы сразу получаем:

$$A_{knm} = 0 \quad \text{при всех } k, n, m \ ;$$

$$B_{knm} = 0 \quad \text{при всех } k\,,\ n \neq 1, \quad m \neq 1,$$

а для определения коэффициента B_{k11} $\left(k = 1,2,\ldots\right)$ мы получаем следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r\right) B_{k11} = Ar,$$

$$B_{k11} = \frac{A}{\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r\right)\right\|^2} \int_0^{r_0} J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r\right) r^{\frac{5}{2}} dr =$$

$$2A\sqrt{\frac{r_0}{\lambda_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}} \frac{J_{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r_0\right)}{\left[J'_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r_0\right)\right]^2}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Значит:

$$u = 2A\sqrt{r_0}P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2\lambda_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}t}}{\sqrt{\lambda_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}} \frac{J_{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r_0\right)}{\left[J'_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r_0\right)\right]^2} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r\right) \quad .$$

Так как начальное условие имеет следующий вид:

$$u\big|_{t=0} = Ar\sin\theta\sin\varphi = ArP_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi,$$

(*начальное условие уже разложено по сферическим функциям*)

то решение поставленной задачи можно сразу искать в виде разложения следующего вида:

$$u = P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi\sum_{k=1}^{\infty} B_{k11}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}r\right) ,$$

коэффициенты которого определяются из начального условия.

5) *Найти температуру прямого однородного бесконечного стержня прямоугольного сечения, внутри которого имеются равномерно распределенные тепловые источники постоянной мощности. Боковая поверхность стержня теплоизолирована , а начальная температура равна нулю.*

Решение:

Итак, пусть $u(x,y,t)$ - температура в точке (x,y) в момент времени t (*в силу однородности стержня зависимости от продольной координаты z нет).*

Для функции u получаем следующую начально - краевую задачу в прямоугольнике $0 \le x \le l_1,\ \ 0 \le y \le l_2$:

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + q, \ \ 0 \le x \le l_1, \ \ 0 \le y \le l_2 \ \ (q = const), \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l_1} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=l_2} = 0 . \end{cases}$$

Решение полученной задачи строится в виде ряда по собственным функциям задачи Неймана для прямоугольника, которые имеют следующий вид:

$$1, \quad \cos\frac{\pi n}{l_1}x\cos\frac{\pi m}{l_2}y, \quad n, m = 1,2,\ldots,\infty \;.$$

Таким образом, мы выделили собственную функцию равную единице, значение которой соответствует нулевому собственному значению.

Остальные собственные значения равны:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, \quad n, m = 1,2,\ldots$$

Тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u\left(x, y, t\right) = u_{00}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t)\cos\frac{\pi n}{l_1}x\cos\frac{\pi m}{l_2}y \,,$$

где $u_{nm}(t)$ $(n, m = 0,1,\ldots)$ - есть решение задачи Коши :

$$\frac{du_{nm}}{dt} + a^2\lambda_{nm}u_{nm} = f_{nm}, \quad u_{nm}\Big|_{t=0} = 0,$$

где:

$$f_{nm} = q\frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\cos\frac{\pi n}{l_1}x\cos\frac{\pi m}{l_2}y\,dxdy = q\delta_{n0}\delta_{m0} =$$

$$= \begin{cases} q, & n = 0,\ m = 0, \\ 0, & n \neq 0,\ m \neq 0\,. \end{cases}$$

Значит, отличной от нуля будет только функция $u_{00}(t)$, которая является решением следующей задачи:

$$\frac{du_{00}}{dt} = q, \quad u_{00}(0) = 0 \quad \left(\lambda_{00} = 0\right) \quad .$$

Отсюда:

$$u_{00}(t) = qt \; .$$

Следовательно, распределение температуры не зависит от координат x и y и имеет следующий вид:

$$u\left(x, y, t\right) = qt \; .$$

Замечания:

1) *Решение (т.е. температура стержня) нарастает по времени. Этого следовало ожидать из физических соображений, поскольку источники постоянной мощности действуют в области с теплоизолированной границей , отвода тепла из которой нет. Это и приводит к неограниченному росту температуры со временем.*

2) *Рассматриваемую задачу можно было решить быстрее и проще, если учесть следующие соображения. Граничные условия - это однородные условия второго рода, а правая часть уравнения от пространственных координат не зависит. Следовательно, возникает предположение, что и само решение* u *не будет зависеть от координат* x *и* y *:* $u = u(t)$ *. Тогда для* $u(t)$ *сразу получается задача:*

$$\begin{cases} u_t = q, \\ u\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

решение которой $u = qt$ *. Таким образом, найденно решение исходной задачи, зависящее только от* t *. В силу теоремы единственности другого решения исходной задачи нет.*

2. *Задачи для уравнения колебаний в ограниченной области с однородными граничными условиями.*

Итак, рассмотрим начально - краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t). \quad (M,t) \in Q_\infty, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(M), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(M), \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\big|_S = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \ \alpha, \beta = const. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи можно представить в следующем виде:

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M),$$

коэффициенты $u_n(t)$ которого являются решениями задачи Коши :

$$\begin{cases} u''_n + a^2 \lambda_n u_n = f_n(t), \quad t > 0, \\ u_n(0) = \varphi_n, \ u_n'(0) = \psi_n, \quad n = 1,2,\dots, \end{cases}$$

где $\{v_n(M)\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ - *собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма - Лиувилля для оператора Лапласа:*

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D f(Q,t) v_n(Q) dV, \quad \varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \varphi(Q) v_n(Q) dV,$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \psi(Q) v_n(Q) dV, \quad n = 1,2,\dots,$$

коэффициенты Фурье разложения функций $f(M,t)$, $\varphi(M)$, $\psi(M)$ *по системе собственных функций* $\{v_n(M)\}_1^\infty$

Тогда квадрат нормы собственной функции можно выразить следующим образом:

$$\|v_n\|^2 = \int_D v_n^2(Q)\,dV \quad .$$

Таким образом решение задачи Коши для функции $u_n(t)$ можно записать в следующем виде:

$$u_n(t) = \int_0^t K_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau + \varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n} t,$$

$K_n(t-\tau) = \dfrac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)$ - *импульсная функция.*

Следовательно, решение начально - краевой задачи для уравнения колебаний в случае однородных граничных условий записывается следующим образом:

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n} t \right) v_n(M) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau) d\tau \, ,$$

где:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t\right)v_n(M)$$ - *решение начально - краевой задачи для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными и однородными граничными условиями;*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)d\tau$$ - *решение начально - краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными и однородным граничным условиями.*

Тогда , пусть функция $f(M,t)$ имеет вид $\tilde{f}(M)\begin{Bmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{Bmatrix}$.

Физически это соответствует процессу колебаний объема D под действием периодической силы, распределенной с плотностью $\rho(M)\tilde{f}(M)\begin{Bmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{Bmatrix}$.

Допустим, что сопротивление отсутствует : в начальный момент тело находилось в состоянии покоя и его граница остается неподвижной в процессе колебаний.

Тогда начально - краевая задача, моделирующая процесс таких колебаний , ставится следующим образом (будем рассматривать случай синусоидальной зависимости от времени) :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + \tilde{f}(M)\sin\omega t, \quad (M,t)\in Q_\infty, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_S = 0. \end{cases}$$

Решение полученной задачи при $\varphi_n = \psi_n = 0$ будет выглядеть следующим образом:

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M) \ ,$$

где:

$$u_n(t) = \tilde{f}_n \int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin\omega\tau d\tau,$$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D f(Q) v_n(Q) dV.$$

Отсюда следует, что если $f_{n0} = 0$, то $u_{n0}(t) \equiv 0$. Следовательно, если $\tilde{f}(M)$ ортогональна к собственной функции $v_{n0}(M)$, то гармоника номера $n0$ в объеме D не возбуждается, какова бы ни была частота внешней силы.

Введем следующее обозначение: $\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$. Величины ω_n являются собственными частотами области D .

Теперь вычислим $u_n(t)$:

$$u_n(t) = \frac{1}{2\omega_n} \tilde{f}_n \int_0^t \left\{ \cos\left(\omega_n t - (\omega_n + \omega)\tau\right) - \cos\left(\omega_n t + (\omega - \omega_n)\tau\right) \right\} d\tau \ .$$

Если $\omega \neq \omega_n \Rightarrow \qquad u_n(t) = \dfrac{\tilde{f}_n}{\omega_n} \dfrac{\omega_n \sin\omega t - \omega \sin\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2}$.

$$\omega = \omega_n \Rightarrow \qquad u_n(t) = -\frac{\tilde{f}_n}{2\omega_n} t\cos\omega_n t \ .$$

Следовательно, коэффициент $u_{n0}(t)$ номера $n0$ будет неограниченно нарастать со временем (линейно по t) только в случае , когда $\omega = \omega_{n0}$ и $f_{n0} \neq 0$. *В этом случае наступает явление резонанса.*

Тогда решение рассматриваемой задачи будет иметь следующий вид:

а) если $w \neq w_n$ при всех $n = 1,2,\ldots,$ то :

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n}{w_n} \frac{w_n \sin wt - w \sin w_n t}{w_n^2 - w^2} v_n(M) \quad ,$$

б) если $w = w_n$:

$$u(M,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n}{w_n} \frac{w_n \sin wt - w \sin w_n t}{w_n^2 - w^2} v_n(M) - \frac{\tilde{f}_{n0}}{2w_{n0}} t \cos w_{n0} t \, v_{n0}(M)$$

Для наступления резонанса (т.е. неограниченного нарастания колебаний со временем под действием внешней периодической силы $\tilde{f}(M)\sin wt$ *) необходимо выполнение следующих условий:*

$$\text{1) } w = w_{n_0} = a\sqrt{\lambda_{n0}}\,, \qquad \text{2) } \tilde{f}_{n0} \neq 0 \ .$$

Примеры:

1 . *Решить начально - краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке* $0 \le x \le l$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \;\; u_t\Big|_{t=0} = \sin\frac{2\pi}{l}x, \;\; u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0\,. \end{cases}$$

Решение:

В данном случае граничными условиями являются однородные граничные условия Дирихле. Следовательно, собственными функциями в разложении в ряд будут собственные функции отрезка с граничными условиями Дирихле:

$$v_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 1,2,\ldots,$$

с квадратом нормы :

$$\|v_n\|^2 = \frac{l}{2} \;.$$

Тогда собственные значения имеют следующий вид:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \;\; n = 1,2,\ldots.$$

Тогда общее решение рассматриваемой начально - краевой задачи на отрезке $\left[0, l\right]$ с однородными граничными условиями Дирихле для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями будет иметь следующий вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{\pi a n}{l}t + \psi_n \frac{l}{\pi a n}\sin\frac{\pi a n}{l}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_0^t \frac{l}{\pi a n}\sin\frac{\pi a n}{l}(t-\tau) f_n(\tau)d\tau,$$

где:

$$f_n(\tau) = \tfrac{2}{l}\int_0^l f\left(\xi, t\right)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,$$

$$\varphi_n = \tfrac{2}{l}\int_0^l \varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,$$

$$\psi_n = \tfrac{2}{l}\int_0^l \psi\left(\xi\right)\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi\,.$$

Так как первое начальное условие - однородное , $\varphi_n = 0$, а из однородности $\Rightarrow$ $f_n(t) \equiv 0$. В результате мы получим:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \frac{l}{\pi a n}\sin\frac{\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2\,. \end{cases}$$

Следовательно:

$$u(x,t) = \frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x \quad .$$

Решение задачи представляется в виде одного члена ряда. Это связано с тем, что в качестве второго начального условия выбрана собственная функция : $\psi(x) = v_2(x) = \sin\dfrac{2\pi x}{l}$ *, поэтому в силу ортогональности системы собственных функций все коэффициенты* ψ_n *, кроме коэффициента* ψ_2 *, равны нулю.*

2. *Решить начально - краевую задачу для неоднородного уравнения колебаний на отрезке* $0 \leq x \leq l$ *:*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0\,. \end{cases}$$

Решение:

В силу однородности начальных условий $\varphi_n = 0$, $\psi_n = 0$, собственными функциями и собственными значениями являются собственные функции и собственные значения задачи Дирихле на отрезке:

$$v_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad \|v_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_0^t \frac{l}{\pi a n}\sin\frac{\pi a n}{l}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau\ ,$$

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi =$$

$$= \frac{2A}{l}e^{-\tau}\int_0^l \sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi = Ae^{-\tau}\delta_{1n} = \begin{cases} Ae^{-\tau}, & n = 1, \\ 0\quad, & n \neq 1\,. \end{cases}$$

Таким образом:

$$u(x,t) = \frac{Al}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^t e^{-\tau}\sin\frac{\pi a}{l}(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{A}{1+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}\left\{e^{-t} - \cos\frac{\pi a t}{l} + \frac{l}{\pi a}\cos\frac{\pi a t}{l}\right\}\sin\frac{\pi x}{l}\ .$$

Решение представляется одним членом ряда с $n = 1$. *Это объясняется тем, что зависимость от координаты* x *в неоднородности уравнения задается собственной функцией* $v_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$.

3. *Найти процесс колебаний однородной ненагруженной струны длины l с закрепленными концами, если начальная скорость струны равна нулю, а начальное отклонение имеет следующий вид:*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{hx}{x_0}, & 0\le x\le x_0,\\[2mm] \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0\le x\le l.\end{cases}$$

Решение:

Итак, пусть в положении равновесия струна расположена вдоль оси x между точками $x=0$ и $x=l$. Так как, по условию струна однородная, то ее линейная плотность постоянна: $\rho(x)=\rho_0$, а в силу того, что рассматриваются малые колебания, постоянным остается натяжение T_0.

Начально - краевая задача, описывающая процесс колебаний свободной струны с закрепленными концами, ставится следующим образом:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=0,\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0.\end{cases}$$

Решение полученной задачи в следующем виде:

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{x_0}\frac{h}{x_0}x\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx+\frac{2}{l}\int_{x_0}^{l}\frac{h(l-x)}{l-x_0}\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=$$

$$= \frac{2hl}{\pi^2 n^2 (l - x_0) x_0} \sin\frac{\pi n}{l} x_0, \quad n = 1,2,\ldots$$

где $\psi_n = 0$, $f_n(\tau) = 0$, $v_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l} x$, $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $\|v_n\|^2 = \frac{l}{2}$.

Следовательно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\omega_n t \sin\frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi n}{l} x_0 \sin\frac{\pi n}{l} x \cos\omega_n t,$$

где $\omega_n = \frac{\pi a n}{l}$ - *собственные частоты струны.*

Необходимо заметить: в выражении для $u(x,t)$ исчезают слагаемые, для которых $\sin\frac{\pi n}{l} x_0 = 0$, т.е. отсутствуют обертоны, для которых точка $x = x_0$ является узлом.

Энергия струны равна сумме энергий гармоник. Вычислим энергию n - ой гармоники:

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \right\} dx,$$

$$u_n(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi n x_0}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} \cos\omega_n t.$$

Энергия n - ой гармоники струны состоит из двух слагаемых: кинетической энергии:

$$E_n^{kin} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho_0 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx \ ,$$

и потенциальной энергии:

$$E_n^{pot} = \frac{1}{2}\int_0^l T_0 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx \ .$$

В процессе колебаний струны происходит постоянная перекачка энергии из потенциальной в кинетическую, причем сумма потенциальной и кинетической энергий остается постоянной. Когда кинетическая энергия n - ой гармоники достигает максимального значения (струна проходит положение равновесия) , ее потенциальная энергия обращается в ноль, и наоборот, когда потенциальная энергия n - ой гармоники достигает максимального значения (струна находится в одном из крайних положений) , ее кинетическая энергия обращается в ноль.

Следовательно:

$$E_n = \max_{(t)}\left(E_n{}^{kin}\right) = \frac{2h^2 l^4}{\pi^4 n^4 x_0^2 \left(l - x_0\right)^2} \sin^2 \frac{\pi n x_0}{l} \times$$

$$\times \int_0^l \rho_0 \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \max_{(t)}\left(\cos^2 \omega_n t\right) \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx =$$

$$= Mh^2 \frac{a^2 l^2}{\pi^2 n^2 x_0^2 \left(l - x_0\right)^2} \sin^2 \frac{\pi n x_0}{l} \quad , \quad M = \rho_0 l \ \text{ - масса струны.}$$

Следовательно, энергия обертонов , для которых выполнено: $\dfrac{\pi n x_0}{l} = 0$, равна нулю.

4. *Решить задачу о малых поперечных колебаниях круглой мембраны U^{r_0} радиуса r_0 с закрепленным краем, если начальное отклонение точек мембраны задано функцией* $u_0(r,\varphi) = A\dfrac{r}{r_0}\cos\varphi$, *где A - некоторая постоянная , а начальные скорости равны нулю.*

Решение:

Начально - краевая задача, описывающая процесс колебаний мембраны имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad M \in U^{r_0}, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = A\dfrac{r}{r_0}\cos\varphi, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{r=r_0} = 0\,. \end{cases}$$

U^{r_0} - круг радиуса r_0 , C^{r_0} - окружность радиуса r_0 .

Будем искать решение в виде разложения по собственным функциям задачи Дирихле для круга U^{r_0} .

Тогда собственные функции и собственные значения будут иметь следующий вид:

$$v_{kn}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi, \\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2,$$

$\mu_k^{(n)}$ - корень номера k уравнения $J_n(\mu) = 0$.

Квадрат нормы собственных функций равен:

$$\left\|v_{kn}\right\|^2 = \frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J'_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0\,. \end{cases}$$

Тогда формула для общего решения начально - краевой задачи в круге для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями Дирихле будет выглядеть следующим образом:

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\Phi_{kn}^{(c)}\cos n\varphi+\Phi_{kn}^{(s)}\sin n\varphi\right)\cos a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}t+\right.$$

$$\left.+\frac{\Psi_{kn}^{(c)}\cos n\varphi+\Psi_{kn}^{(s)}\sin n\varphi}{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\sin a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}t\right\}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\int_0^t\frac{\sin a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\left(f_{kn}^{(c)}\cos n\varphi+f_{kn}^{(s)}\sin n\varphi\right)d\tau\,.$$

Теперь определим коэффициенты:

$$f_{kn}^{\left\{\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\right\}}(t)=\frac{1}{\|v_{kn}\|^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi,t)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\}rdrd\varphi,$$

$$\Phi_{kn}^{\left\{\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\right\}}=\frac{1}{\|v_{kn}\|^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Phi(r,\varphi)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\}rdrd\varphi,$$

$$\Psi_{kn}^{\left\{\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\right\}}=\frac{1}{\|v_{kn}\|^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Psi(r,\varphi)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\}rdrd\varphi\,.$$

(индексы c *и* s *соответствуют коэффициентам разложения по косинусам и синусам) .*

Так как, в нашем случае, $f(M,t)\equiv 0$ и $\Psi(M)\equiv 0$, то :

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi_{kn}^{(c)}\cos n\varphi+\Phi_{kn}^{(s)}\sin n\varphi\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cos a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}t\ .$$

Снова определим коэффициенты:

$$\Phi_{k1}^{(c)}=\frac{2A}{r_0}\frac{J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}{\left[J'_1\left(\mu_k^{(1)}\right)\right]^2},\ \ \Phi_{kn}^{(c)}=0\ \text{ при }\ n\neq 1,\ \Phi_{kn}^{(s)}\equiv 0\quad .$$

Подставим коэффициенты в разложение решения и получим конечный результат:

$$u\left(r,\varphi,t\right)=\frac{2A\cos\varphi}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}{\left[J'_1\left(\mu_k^{(1)}\right)\right]^2}J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)\cos a\sqrt{\lambda_k^{(1)}}t,$$

$\mu_k^{(1)}$ $\left(\ k=1,2,\ldots.\ \right)$ - корни уравнения :

$$J_1\left(\mu\right)=0,\ \ \lambda_k^{(1)}=\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}\right)^2\ .$$

3. *Уравнения теплопроводности и колебаний в ограниченной области с неоднородными граничными условиями.*

Рассмотрим начально - краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородным граничным условием :

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\big|_S = \mu(P,t)\big|_{P \in S}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0 . \end{cases}$$

Общая схема решения такого вида задач состоит в следующем. Вместо функции $u(M,t)$, вводится новая неизвестная функция $v(M,t)$ следующем соотношением:

$$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t),$$

где $w(M,t)$ выбрана таким образом, что она удовлетворяет заданному граничному условию:

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\big|_S = \mu(P,t)\big|_{P \in S} .$$

Для функции $v(M,t)$ мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v + f(M,t), \quad M \in D, \quad t > 0, \\ v\big|_{t=0} = -\,w\big|_{t=0}, \\ \alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\big|_S = 0, \end{cases}$$

где $f(M,t) = a^2 \Delta w - w_t$.

Следовательно, основным набором функции $w(M,t)$, которая должна быть достаточно гладкой и удовлетворять заданному граничному условию. Этими требованиями функция $w(M,t)$ определяется неоднозначно.

Появившейся свободой выбора $w(M,t)$ следует распоряжаться так, чтобы полученная задача для $v(M,t)$ оказалась возможно более простой.

Чаще всего функцию $w(M,t)$ выбирают *гармонической* по пространственной переменной , то есть , как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ \alpha \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w \Big|_S = \mu \Big|_S, \end{cases}$$

в которой переменная t рассматривается, как параметр. При таком выборе функции w следует проявлять осторожность при решении задачи с граничным условием Неймана, так как рассматриваемая задача может не иметь решения. Тогда функцию w следует выбирать как то иначе.

Примеры:

1. *Решить уравнение теплопроводности на отрезке* $0 \le x \le l$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = A, \quad u\big|_{x=l} = B, \quad A, B = const\,. \end{cases}$$

Решение:

В рассматриваемом случае функцию w наиболее удобно выбрать , как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} w_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \\ w\big|_{x=0} = A, \quad w\big|_{x=l} = B\,. \end{cases}$$

Функция w зависит только от x и имеет следующий вид:

$$w = w(x) = \frac{B-A}{l}x + A \quad .$$

Пусть $u = v + w$.

Тогда для функции $v(x,t)$ мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v\big|_{t=0} = -\,w(x) = -\frac{B-A}{l}x - A, \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l} = 0\,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи имеет следующий вид:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где:

$$c_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \left(\frac{B-A}{l}x + A\right)\sin\frac{\pi n}{l}x dx = \frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n B - A\right], \quad n = 1,2,\dots$$

Таким образом:

$$u(x,t) = \frac{B-A}{l}x + A - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A-(-1)^n B}{n}e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x \ .$$

2. *Найти процесс нагревания однородного бесконечного прямого кругового стержня радиуса* r_0, *на поверхности которого поддерживается температура* $T_0 \cos\varphi \sin wt$. *Начальная температура стержня нулевая.*

Решение:

Пусть u - температура стержня. Функция u будет зависеть только от r, φ, t и для нее получается начально - краевая задача для уравнения теплопроводности в круге:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 \le r < r_0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u\big|_{r=r_0} = T_0 \cos\varphi \sin wt, \quad T_0 = const. \end{cases}$$

Пусть $u(M,t) = v(M,t) + w(M)\sin wt$, а функцию $w(M)$ выберем как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 \le r < r_0, \\ w\big|_{r=r_0} = T_0 \cos\varphi \,. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$w = T_0 \frac{r}{r_0} \cos\varphi \ .$$

Для функции $v(r, \varphi, t)$ получается следующая задача:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v - T_0 w \frac{r}{r_0} \cos\varphi \cos wt, \\ v\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{r=r_0} = 0 \,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи, учитывая структуру правой части уравнения, можно записать в следующем виде:

$$v = \cos\varphi \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(t) J_1\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) ,$$

где λ_k - корень уравнения $J_1\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right) = 0, \quad k = 1,2,\ldots$

Функция $u_k(t)$ - есть решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{du_k}{dt} + a^2 \lambda_k u_k = -\frac{T_0 w}{r_0} f_k \cos wt, \\ u_k\big|_{t=0} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,\infty, \end{cases}$$

где:

$$f_k = \frac{1}{\left\| J_1\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) \right\|^2} \int_0^{r_0} J_1\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) r^2 dr = \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{J_2\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right)}{J'^2_1\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right)},$$

$k = 1,2,\ldots,\infty$.

Решая задачу Коши, получим:

$$u_k(t) = -\frac{T_0 w f_k}{r_0\left(a^4\lambda_k^2 + w^2\right)}\left\{a_2\lambda_k \cos wt + w\sin wt - a^{2\lambda_k e^{-a^2\lambda_k t}}\right\} .$$

Значит:

$$u = T_0\frac{r}{r_0}\cos\varphi \sin wt -$$

$$-\frac{T_0 w}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k\left\{a^2\lambda_k \cos wt + w\sin wt - a^2\lambda_k e^{-a^2\lambda_k t}\right\}}{a^4\lambda_k^2 + w^2}J_1\left(\sqrt{\lambda_k}r\right)\cos\varphi .$$

3. *Найти распределение температуры в однородном бесконечном прямом круговом цилиндре радиуса r_0, на поверхности которого задан постоянный тепловой поток. Начальная температура равна нулю.*

Решение:

Для температуры u получается начально - краевая задача внутри круга с неоднородным граничным условием Неймана:

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, \quad 0 \le r < r_0, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = q = const . \end{cases}$$

В этом случае функцию w нельзя выбрать как решение уравнения Лапласа в круге с граничным условием:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=r_0} = q,$$

так как такая задача решения не имеет. Выберем функцию w в следующем виде:

$$w = \frac{r^2}{2r_0}q \ , \qquad \left(\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=r_0} = q\right) \ ,$$

и сделаем следующую замену :

$$u = v + \frac{r^2}{2r_0}q \ .$$

Тогда для функции $v(r, \varphi, t)$ получается следующая начально - краевая задача:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v + \frac{2a^2}{r_0}q, \quad 0 \le r < r_0, \quad t > 0, \\ v\big|_{t=0} = -\frac{r^2}{2r_0}q, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0\,. \end{cases}$$

Решением полученной задачи мы будем строить в виде разложения в ряд по собственным функциям задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге, которые имеют следующий вид:

$$1, \quad J'_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{cases}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad n = 0,1,\ldots,$$

где $\lambda_k^{(n)}$ - k - ый корень уравнения $J'_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r_0\right) = 0$, причем нклнвому корню $\lambda_0^{(n)} = 0$ соответствует собственная функция, равная 1 .

Так как правая часть уравнения и начальное условие не зависят от угла φ , в разложении будут присутствовать только собственные функции, также не зависящие от φ:

$$1, \quad J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right), \qquad k = 1,2,\ldots \quad \left(\lambda_0^{(0)} = 0\right).$$

Следовательно, решение нашей задачи мы можем записать в следующем виде:

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right) + A_0(t),$$

где $A_k(t)$ определяются при каждом $k = 0,1,2,\ldots$, как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dA_k}{dt} + a^2 \lambda_k^{(0)} A_k = f_k, \quad t > 0, \\ A_k\Big|_{t=0} = \varphi_k, \end{cases}$$

где:

$$f_0 = \frac{2a^2 q}{r_0}, \quad f_k = \frac{2a^2 q}{r_0} \frac{1}{\left\|J_0\right\|^2} \int_0^{r_0} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right) r dr,$$

$$\varphi_0 = -\frac{q}{2r_0} \frac{1}{\left\|1\right\|^2} \int_0^{r_0} r^3 dr, \quad \varphi_k = -\frac{q}{2r_0} \frac{1}{\left\|J_0\right\|^2} \int_0^{r_0} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right) r^3 dr.$$

Найдем f_k и φ_k :

$$f_k = \frac{2a^2 q}{r_0} \frac{1}{\left\|J_0\right\|^2} \int_0^{r_0} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right) r dr = 0,$$ в силу ортогональности

собственных функций, соответствующих различным собственным значениям,

$$\varphi_0 = -\frac{qr_0}{4}\ , \quad \text{так как} \quad \|1\|^2 = \int_0^{r_0} r dr = \frac{r_0^2}{2}\ .$$

Для расчета интеграла, входящего в формулу для определения φ_k, воспользуемся следующим соотношением:

$$\int x^3 J_0(x) dx = 2x^2 J_0(x) + x^3 J_1(x) - 4x J_1(x)\,.$$

Таким образом, получим:

$$\int_0^{r_0} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r}\right) r^3 dr = \frac{2r_0^2}{\lambda_k^{(0)}} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r_0}\right), \quad k \neq 0,$$

так как :

$$J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r_0}\right) = 0\,.$$

и:

$$\|J_0\|^2 = \frac{r_0^2}{2} J_0^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r_0}\right)\ ,$$

мы получим:

$$\varphi_k = -\frac{2q}{r_0 \lambda_k^{(0)} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)} r_0}\right)}, \quad k \neq 0\,.$$

Следовательно, коэффициент $A_0(t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{dt} = \dfrac{2a^2q}{r_0} \quad \left(\lambda_0^{(0)} = 0\right), \quad t > 0, \\ A_0\Big|_{t=0} = -\dfrac{qr_0}{4}. \end{cases}$$

и соответственно равен:

$$A_0(t) = \frac{2a^2qt}{r_0} - \frac{qr_0}{4} \quad .$$

Остальные коэффициенты $A_k(t)$, $k \neq 0$, являются решением задачи вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dA_k}{dt} + a^2\lambda_k^{(0)}A_k = 0, \quad t > 0, \\ A_k\Big|_{t=0} = -\dfrac{2q}{r_0\lambda_k^{(0)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r_0}\right)}. \end{cases}$$

И соответственно равны:

$$A_k(t) = -\frac{2q}{r_0\lambda_k^{(0)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r_0}\right)}e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t} \quad .$$

Таким образом:

$$v = \frac{2a^2qt}{r_0} - \frac{qr_0}{4} - \frac{2q}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t}}{\lambda_k^{(0)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r_0}\right)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r}\right).$$

И тогда решение нашей исходной задачи примет следующий вид:

$$u = w + v = qr_0\left\{\frac{2a^2t}{r_0^2} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2r^2}{r_0^2}\right)\right\} -$$

$$-\frac{2q}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t}}{\lambda_k^{(0)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r_0}\right)}J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}r}\right) \quad .$$

3. *Уравнения теплопроводности на бесконечной прямой и в неограниченном пространстве. Фундаментальные решения.*

Рассмотрим начальную задачу на бесконечной прямой R^1 для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Введем обозначения $\Omega \equiv R^1 \times (0, +\infty)$, $\overline{\Omega} \equiv R^1 \times [0, +\infty)$. Тогда начальная задача будет ставиться следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^1. \end{cases}$$

Классическим решением поставленной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой называется функция $u(x, t)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{\Omega}$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго порядка по x в открытой области Ω, удовлетворяющая в Ω уравнению теплопроводности и при $t \to 0$ начальному условию.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена в R^1, а функция $f(x, t)$ непрерывна по совокупности аргументов и ограничена в $\overline{\Omega}$, то наша задача имеет *единственное классическое решение* .

В случае менее гладких функций $\varphi(x)$ и $f(x, t)$, рассматриваемая задача может иметь обобщенное решение.

Для решения начальной задачи удобно использовать метод *интегрального преобразования Фурье* .

Рассмотрим (в качестве примера) задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой и запишем для ее решения формулу Пуассона.

Тогда для решения нашей задачи применим преобразование Фурье с ядром $e^{-i\lambda x}$. Обозначим через $U(\lambda,t)$, $F(\lambda,t)$ и $\Phi(\lambda)$ образы Фурье функций $u(x,t)$, $f(x,t)$, и $\varphi(x)$ соответственно:

$$U(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(\xi,t)e^{-i\xi t}d\xi,$$

$$F(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)e^{-i\xi t}d\xi,$$

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-i\xi t}d\xi.$$

Будем считать, что выполняются условия существования интеграла Фурье (это заведомо выполнимо для *классического решения* соответствующей задачи) и что функция $u(x,t)$ и ее частные производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$. Предположим также, что интеграл для $U(\lambda,t)$ можно дифференцировать по переменной t под знаком интеграла.

Умножим уравнение теплопроводности и начальное условие на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. Проинтегрировав затем полученный в правой части интеграл дважды по частям и учитывая, что постановки на $\pm\infty$ обратятся в ноль, получим следующую задачу Коши в пространстве образов:

$$\begin{cases} U_t+a^2\lambda^2U=F, \quad t>0, \\ U\big|_{t=0}=\Phi(\lambda). \end{cases}$$

Решение полученной задачи записывается с помощью импульсной функции в следующем виде:

$$U(\lambda,t)=\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}F(\lambda,\tau)d\tau+\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Теперь подставим выражения для образов Фурье $F(\lambda,t)$ и $\Phi(\lambda)$ и вернемся к оригиналу, используя формулу обратного преобразования Фурье.

Меняя порядок интегрирования , мы получим:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)}d\lambda\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda\right\}\varphi(\xi)d\xi.$$

Теперь обозначим :

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda\ .$$

И используя интеграл :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2+i\lambda\beta}d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}\ ,$$

получим:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.*

Таким образом, решение поставленной нами задачи представимо в следующем виде:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi\ .$$

Следует отметить, что в силу линейности нашей исходной задачи, записанное нами решение представляет сумму двух задач.

Функция :

$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$ - *решение начальной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием* $(\varphi(x)\equiv 0)$ *,*

$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ - *решение задачи для однородного уравнения теплопроводности* $(f(x,t)\equiv 0)$ *с неоднородным начальным условием. Данный интеграл называется интегралом Пуассона.*

Примеры:

1. *Решить задачу об остывании однородного бесконечного стержня, если тепловой режим определяется кусочно - постоянной начальной функцией следующего вида:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x < 0, \\ T_2, & x > 0. \end{cases}$$

Начальной задачей, описывающей процесс остывания стержня, является задача для однородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Решение:

Итак, воспользуемся формулой $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi$ и сделаем замену $z = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz + \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz =$$

$$\frac{T_1+T_2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz \ .$$

Учтем интеграл Пуассона :

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ ,$$

и введем функцию ошибок:

$$\Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{w} e^{-z^2}dz \, .$$

Очевидно:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(+\infty) = 1 \, .$$

Легко заметить, что функция $\Phi(w)$ нечетная:

$$\Phi(-w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-w} e^{-z^2}dz =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-w} e^{-z^2}d(-z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{w} e^{-s^2}ds = -\,\Phi(w) \ .$$

Отсюда $\Phi(-\infty) = -\,1$.

С помощью функции ошибок Φ отвечает задачи можно записать в виде:

$$u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Следует отметить, что начальная функция $\varphi(x)$ не является непрерывной, а претерпевает разрыв в точке $x = 0$. Вэтом случае решение задачи Коши, представимое интегралом Пуассона , уже не будет *классическим* , а имеет особую точку $x = 0$. Проанализируем поведение решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в особой точке.

Итак, пусть $x > 0$. Тогда , переходя е пределу при $t \to 0$, получим , что $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \to +\infty, \ \Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to 1$ и $\lim_{t\to 0, x>0} u(x,t) = T_2$.

Теперь, пусть $x < 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \to -\infty, \quad \Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to -1$,

$\lim_{t\to 0, x<0} u = T_1$.

Перейдем к пределу сначала при $x \to 0$, а затем при $t \to 0$.

В результате получим :

$$\lim_{t\to 0, x\to 0} u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} .$$

Следовательно, значение решения задачи Коши в особой точке $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ зависит *от способа перехода к пределу:*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0+0}} u = T_2, \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0-0}} u = T_1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}} u = \frac{T_1+T_2}{2}.$$

Если рассмотреть одновременный переход к пределу при $x \to 0$, $t \to 0$ вдоль кривой $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} = w, \quad$ где $w \in R^1$, то :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}} u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_1-T_2}{2}\Phi(w), \quad \frac{x}{2a\sqrt{t}} = w .$$

При $w \in R^1$ мы получим любое значение , заключенное в пределах от T_1 до T_2, так как : $-1 \le \Phi(w) \le 1$.

Так же можно показать, что если функция $\varphi(x)$ - кусочно - непрерывная и ограниченная на прямой $x \in R^1$ функция с конечным числом точек разрыва, то полученная нами формула определяет решение однородного уравнения теплопроводности при $x \in R^1,\ t \in (0, T]$, ограниченное при $t \in [0, T]$ и непрерывно примыкающее к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности.

2. *Решить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:*

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = e^{-x^2}\sin x\,. \end{cases}$$

Решение:

Итак, воспользуемся формулой $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ при $a = \dfrac{1}{2}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{t}} e^{-\xi^2} \sin\xi d\xi\,.$$

Для выполнения интеграла в правой части формулы рассмотрим следующий интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{t} - \xi^2 + i\xi} d\xi \,.$$

Тогда мы получим:

$$\frac{(x-\xi)^2}{t} + \xi^2 - i\xi = \left\{ \sqrt{\frac{1+t}{t}}\xi - \frac{2x+it}{2\sqrt{t(t+1)}} \right\}^2 + \frac{t^2 - i4xt + 4x^2t}{4t(1+t)},$$

Откуда , при обозначении:

$$s = \sqrt{\frac{1+t}{t}}\xi - \frac{2x+it}{2\sqrt{t(t+1)}},$$

мы получим:

$$I = \sqrt{\frac{t}{t+1}} e^{-\frac{t^2 - i4xt + 4x^2t}{4t(1+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi t}{1+t}} e^{-\frac{t^2 - i4xt + 4x^2t}{4t(1+t)}} .$$

Тогда:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{Im} I = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}} \sin\frac{x}{1+t} .$$

В отличие от предыдущей задачи , начальная функция $\varphi(x) = e^{-x^2}\sin x$ *является непрерывной всюду на бесконечной прямой* R^1 *. Полученная в конечном результате формула , представляет собой классическое решение задачи , непрерывно примыкающее к начальной функции:*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}}{\sqrt{1+t}} \sin\frac{x}{1+t} = e^{-x^2}\sin x \,.$$

3. *Найти процесс изменения температуры однородного бесконечного стержня с равномерно распределенными источниками, мощность которых изменяется во времени по закону* $f(t) = \sin t$. *Начальная температура стержня равна* $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

Решение:

Процесс изменения температуры стержня описывается следующей начальной задачей:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \sin t, \quad x \in R^1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

Запишем ее решение в следующем виде , используя полученную ранее формулу $u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi) d\xi$:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) \sin\tau d\xi d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) e^{-\xi^2} d\xi ,$$

где $G(x,\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ - *фундаментальное решение уравнения теплопроводности.*

Вычислим интеграл:

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} - \xi^2} d\xi .$$

Так как :

$$\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}+\xi^2=\left[\sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}\xi-\frac{x}{\sqrt{4a^2t\left(1+4a^2t\right)}}\right]^2+\frac{x^2}{1+4a^2t},$$

мы получаем:

$$I_1=\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\left[\sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}\xi-\frac{x}{\sqrt{4a^2t\left(1+4a^2t\right)}}\right]^2\right\}d\xi=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\sqrt{\frac{4a^2t}{1+4a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{\sqrt{1+4a^2t}}\ ,\ \text{где } s=\sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}\xi-\frac{x}{\sqrt{4a^2t\left(1+4a^2t\right)}}\ .$$

Теперь вычислим второй интеграл:

$$I_2=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\sin\tau d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=1-\cos t\,.$$

И мы окончательно получаем:

$$u(x,t) = 1 - \cos t + \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{\sqrt{1+4a^2t}}.$$

4. *Решить задачу Коши для уравнения гиперболического типа на бесконечной прямой:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad x \in R^1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

где $h \geq 0$ *- некоторая постоянная.*

Решение:

Сделаем замену функции:

$$u(x,t) = e^{-ht} v(x,t) .$$

Тогда:

$$u_t = -hu + e^{-ht} v_t ,$$

и для функции $v(x,t)$ получается следующая задача Коши :

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) . \end{cases}$$

Решение полученной задачи записывается с помощью следующей формулы:

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \ ,$$

в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi \ .$$

4. *Задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.*

Рассмотрим начально - краевую задачу на полубесконечной прямой $\overline{R}^{+} \equiv \{0 \le x < +\infty\}$ для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Введем обозначения : $\overline{\Omega}_{+} \equiv \overline{R}^{+} \times [0; +\infty)$, $\Omega_{+} \equiv R^{+} \times (0; +\infty)$, где $R^{+} \equiv \{0 < x < +\infty\}$. Начально - краевая задача с граничными условиями первого, второго и третьего рода ставится следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{+}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{R}^{+}, \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta u\big|_{x=0} = \mu(t), \quad t \ge 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0 . \end{cases}$$

Классическим решением поставленной начально - краевой задачи называется функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с первыми производными по x в замкнутой области $\overline{\Omega}_{+}$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго порядка по x в открытой области Ω_{+} , удовлетворяющая в Ω_{+} уравнению теплопроводности , начальному и граничному условиям.

Следует заметить, что в случае граничных условий первого рода $(\alpha = 0,\ \beta = 1)$ непрерывной дифференцируемости $u(x,t)$ по x в замкнутой области $\overline{\Omega}_{+}$ не требуется, достаточно непрерывности $u(x,t)$ в $\overline{\Omega}_{+}$.

Классическое решение рассматриваемой задачи может существовать лишь при выполнении условия согласования начального и граничного условий:

$$\alpha\varphi'(0) + \beta\varphi(0) = \mu(0) .$$

В силу линейности задачи, можно провести ее редукцию и представить решение $u(x,t)$ задачи в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) ,$$

$u_1(x,t)$ - *решение задачи для неоднородного уравнения с неоднородным начальным и однородным граничным условиями ,*

$u_2(x,t)$ - *решение задачи для однородного уравнения с однородным начальным и неоднородным граничным условиями.*

Одним из методов решения начально - краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой в случае однородных граничных условий является метод *продолжения начальных данных .*

Одним из самых эффективных методов решения начально - краевых задач для уравнения теплопроводности на полупрямой является является метод *интегрального преобразования Фурье* .

а) Задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с однородными граничными условиями.

Начально - краевая задача для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с однородным граничным условием может быть решена с помощью интегрального преобразования Фурье с соответствующим образом подобранном ядром, аналогично тому , как это делается в случае неоднородного граничного условия.

Тем не менее, в случае линейного однородного граничного условия общего вида более физически наглядным является метод *продолжения начального условия*, при использовании которого мы используем следующую лемму:

Пусть функция $\widetilde{\varphi}(x)$ *определена на бесконечной прямой* R^1 *, имеет на ней ограниченные производные до* N *- го порядка включительно , и линейная комбинация:*

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \widetilde{\varphi}^{(k)}(x) \text{ , где } a_k = const,\ k = 0,1,\ldots, \text{ нечетна}$$

относительно точки $x = 0$.

Тогда функция :

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \widetilde{\varphi}(\xi) d\xi ,$$

удовлетворяет условию:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0 .$$

Сформулированная лемма позволяет указать следующий способ решения начально - краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием и однородным линейным граничным условием общего вида:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in \overline{R}^+, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0 . \end{cases}$$

Продолжим функцию $\varphi(x)$, заданную при $x \in \overline{R}^+$, на всю действительную ось x , построив функцию $\widetilde{\varphi}(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x) \text{ при } x \in \overline{R}^+ ,$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \widetilde{\varphi}^{(k)}(x) \equiv -\sum_{k=0}^{N} a_k \varphi^{(k)}(s)\bigg|_{s=-x} \quad \text{при } \; x \in \overline{R}^-$$

и непрерывна вместе с производными до N - го порядка включительно на всей оси.

Теперь решим задачу Коши на бесконечной прямой:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega, \\ U(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in \overline{R}^1. \end{cases}$$

Согласно сформулированной нами лемме, функция $U(x,t)$ удовлетворяет граничному условию при $x = 0$ и следовательно при $x \in \overline{R}^+$ $u(x,t) = U(x,t)$, то есть решение поставленной задачи при $x \in \overline{R}^+$ является решением задачи для $u(x,t)$.

Приведем примеры применения метода *продолжения для решения начально - краевых задач для уравнений параболического типа.*

1. *Рассмотрим начально - краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой для однородного граничного условия Дирихле:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x,t \in \overline{R}^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

Применим сформулированную нами ниже лемму.

Получим: $a_0 = 1, \ a_k = 0, \ k = 1,2,\ldots,N$.

Таким образом, функции $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\phi(x)$ совпадают и согласно лемме функцию $\varphi(x)$ нужно продолжить нечетным образом .

Положим:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда решение поставленной задачи можно записать с помощью интеграла Пуассона:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x,\xi,t\right)\widetilde{\varphi}\left(\xi\right)d\xi,$$

где $G\left(x,\xi,t\right)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t}}$ - *фундаментальное решение.*

Теперь запишем решение через функцию $\varphi(x)$:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x,\xi,t\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi-\int_{-\infty}^{0}G\left(x,\xi,t\right)\varphi\left(-\xi\right)d\xi\,.$$

Сделаем во втором интеграле в правой части формулы замену ξ на $-\xi$ и получим:

$$u(x,t)=\int_{0}^{\infty}\left\{G\left(x,\xi,t\right)-G\left(x,-\xi,t\right)\right\}\varphi\left(\xi\right)d\xi=\int_{0}^{\infty}G_1\left(x,\xi,t\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi\,.$$

Тогда функция :

$$G_1\left(x,\xi,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t}}-e^{-}\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4a^2t}\right\}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Из полученных формул следует, что решение нашей задачи имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\left\{e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t}}-e^{-}\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4a^2t}\right\}\varphi\left(\xi\right)d\xi\,.$$

интеграл Пуассона

Функция , определенная интегралом Пуассона , удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности при $x \in \overline{R}^{+}$, $t > 0$, ограниченна в области $x \in \overline{R}^{+},\ t \geq 0$ и в случае ограниченной кусочно - непрерывной функции $\varphi(x)$ непрерывно примыкает при $t \to 0$ к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности . Это имеет место и в случае соглосования начальных и граничных условий: $\varphi(0) \neq 0$.

При этом граничное условие $u(0,t) = 0$ выполняется при $t > 0$.

Физический смысл функции $G(x,\xi,t)$: Функция $G_1(x,\xi,t)$ дает значение температуры в точке x полубесконечного стержня в момент $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ в точке $x = \xi > 0$ мгновенно выделяется количество тепла, равное $c\rho \cong \rho$, а граничное сечение $x = 0$ все время поддерживается при нулевой температуре, для чего точку $x = -\xi$ нужно поместить в мгновенный точечный отрицательный источник.

2. *Рассмотрим начально - краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой для однородного граничного условия Неймана:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x, t \in R^{+}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 . \end{cases}$$

Применим сформулированную нами лемму. Тогда мы имеем :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_k = 0,\ \ k = 2,3,\ldots,N .$$

Таким образом, $\Phi(x) = \widetilde{\varphi}'(x)$ и , согласно нашей лемме, функцию $\varphi'(x)$ следует продолжить нечетным образом. Так как производная четной функции есть нечетная функция, следовательно, функцию $\varphi(x)$ нужно продолжить четно.

Пусть:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Тогда решение поставленной задачи можно записать в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi\,.$$

Запишем решение через функцию $\varphi(x)$:

$$u(x,t) = \int_{0}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int_{0}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(-\xi)d\xi\,.$$

Сделаем во втором интеграле в правой части формулы замену ξ на $-\xi$ и в результате получим:

$$u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \left\{ G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) \right\}\varphi(\xi)d\xi = \int_{0}^{\infty} G_2(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi\,.$$

Функция :

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\}$$

является функцией Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Следовательно, решение нашей задачи принимает следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

(интеграл Пуассона)

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x\in\overline{R}^+$ и выполнены условия согласования $\varphi'(0)=0$, получеенная формула определяет *классическое решение* поставленной нами задачи.

В случае, когда данные условия не выполнены, функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности при $x\in R^+$, $t>0$, ограничена при $x\in\overline{R}^+$, $t\geq 0$ и непрерывно примыкает при $t\to 0$ к функции $\varphi(x)$ только в точках ее непрерывности. Если не выполнены условия согласования, граничное условие выполняется только при $t>0$.

б) *Задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с неоднородными граничными условиями.*

Теперь рассмотрим применение метода *интегрального преобразования Фурье* к решению начально - краевых задач для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с неоднородным граничным условием.

1. Начально - краевая задача для однородного уравнения теплопроводности на полупрямой с граничным условием первого рода:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x\in R^+, \quad t>0,\\ u(x,0)=0, & x\in\overline{R}^+,\\ u(0,t)=\mu(t), & t\geq 0\,.\end{cases}$$

Будем считать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x,t)$ и ее частные производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Воспользуемся синус- преобразованием Фурье с ядром $\sin\lambda x$. Обозначим образ Фурье функции $u(x,t)$ через $U(\lambda,t)$:

$$U(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(\xi,t)\sin\lambda\xi d\xi .$$

Предположим, что выполнены условия возможности дифференцирования для $U(\lambda,t)$ по t под знаком интеграла.

Умножим уравнение нашей задачи на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_t(x,t)\sin\lambda x dx = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{xx}(x,t)\sin\lambda x dx .$$

Проинтегрируем интеграл в правой части два раза по частям, учитывая граничное условие при $x = 0$:

$$\int_0^\infty u_{xx}\sin\lambda x dx = \lambda u(0,t) - \lambda^2 U(\lambda,t) = \lambda\mu(t) - \lambda^2 U(\lambda,t) \quad .$$

Учитывая начальное условие, получаем следующую начальную задачу в пространстве образов:

$$U_t + a^2\lambda^2 U = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\lambda\mu(t), \quad t > 0, \quad U(\lambda,0) = 0 .$$

Тогда решение поставленной задачи можно записать с помощью импульсной функции:

$$U(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\lambda\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$$

Для возвращения к оригиналу $u(x,t)$ используем формулу обратного синус - преобразования Фурье:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} U(\lambda,t)\sin\lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi}a^2\int_0^t\int_0^{\infty} \lambda e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\sin\lambda x\mu(\tau)d\lambda d\tau \ .$$

Проинтегрируем внутренний интеграл по частям:

$$\int_0^{\infty} a^2\lambda e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\sin\lambda x d\lambda = -\frac{e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}}{2(t-\tau)}\sin\lambda x\Big|_0^{\infty} +$$

$$+\frac{x}{2(t-\tau)}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cos\lambda x d\lambda \ ,$$

и учтем:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cos\lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} .$$

В результате получим:

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau .$$

Перепишем решение задачи в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t-\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

где:

$$W(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \ ,$$

интеграл Дюамеля .

является решением вспомогательной начально - краевой задачи:

$$\begin{cases} W_t = a^2 W_{xx}, & x \in R^+, \quad t > 0, \\ W(x,0) = 0, & W(0,t) = 1 \,. \end{cases}$$

Данный пример является частным случаем общего метода решения данного класса линейных начально - краевых задач , который называется *принцип Дюамеля.*

Рассмотрим общую схему данного метода:

Итак, пусть требуется построить решение следующей начально краевой задачи:

$$\begin{cases} P_t\big[u(x,t)\big] = L_x\big[u(x,t)\big], & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,0) = 0, & n = 0,1,\ldots,m-1, \\ u(0,t) = \mu(t), & N\Big[u\big(l,t\big)\Big] = 0, \end{cases}$$

где P_t - линейный дифференциальный оператор, содержащий частные производные по t до порядка m , L_x - линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменной x .

Решение будем искать на отрезке $\big[0,l\big]$, включая и случай $l = +\infty$. Граничное условие при $x = l$ обеспечивает единственность решения задачи, N - оператор граничного условия.

Согласно *принципу Дюамеля* , решением поставленной задачи является интеграл Дюамеля :

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t-\tau)\mu(\tau)d\tau \ ,$$

где $W(x,t)$ - *решение исходной начально - краевой задачи для частного граничного условия* $\mu(t) = 1$:

$$\begin{cases} P_t[W] = L_x[W], \ \ 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^n W}{\partial t^n}(x,0) = 0, \quad n = 0,1,\ldots,m-1, \\ W(0,t) = 1, \quad N\Big[W\big(l,t\big)\Big] = 0\,. \end{cases}$$

Можно легко проверить , что данное предположение справедливо:

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x, t-\tau) \equiv -\frac{\partial W}{\partial \tau}(x, t-\tau) \ .$$

Вычислим наш интеграл по частям и воспользуемся существованием производной функции $\mu(t)$:

$$u(x,t) = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t-\tau)\mu(t)d\tau =$$

$$= -W(x, t-\tau)\mu(t)\Big|_0^t + \int_0^t W(x, t-\tau)\mu'(t)d\tau =$$

$$= \mu(0)W(x,t) + \int_0^t W(x, t-\tau)\mu'(t)d\tau$$

Подстановка на верхнем пределе равна нулю с учетом начального условия $W(x,0) = 0$.

После дифференцирования, мы получим:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \mu(0)\frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \int_0^t \frac{\partial^n W(x, t-\tau)}{\partial t^n}\mu'(t)d\tau, \quad n = 0,1,2,\ldots, m \ .$$

Следовательно:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \mu(0)\frac{\partial^k W}{\partial x^k} + \int_0^t \frac{\partial^k W(x, t-\tau)}{\partial x^k}\mu'(t)d\tau, \quad k = 1,2,\ldots$$

Таким образом: *из линейности уравнения следует- интеграл Дюамеля удовлетворяет исходному однородному уравнению при* $0 < x < l, \quad t > 0$.

Значит нулевые начальные условия и однородные граничные условия выполняются автоматически и нам нужно только показать, что выполняется неоднородное граничное условие при $x = 0$.

Так как , мы имеем граничное условие :

$$W(0, t) = 1 \ ,$$

то:

$$u(0, t) = \mu(0)W(0, t) + \int_0^t W(0, t-\tau)\mu'(t)d\tau =$$

$$= \mu(0) + \int_0^t \mu'(t)d\tau = \mu(t) \, .$$

в) примеры решения задач:

1. Рассмотреть процесс остывания полубесконечного стержня , начальная температура которого постоянная, а конец поддерживается при нулевой температуре.

Решение:

Процесс остывания стержня описывается начально - краевой задачей следующего вида:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in R^+,\ t > 0, \\ u(x,0) = U_0, \quad u(0,t) = 0\,. \end{cases}$$

Воспользуемся интегралом Пуассона :

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi\,.$$

Положив $\varphi(t) = U_0 \equiv const$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} U_0 d\xi = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ I_1 - I_2 \right\},$$

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad I_2 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi\,.$$

Сделаем замену в интеграле I_1 :

$$s = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}\,.$$

Тогда:

$$I_1 = \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} ds - \int\limits_0^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$$

$\Phi(\omega)$ - функция ошибок .

Далее, мы делаем аналогичную замену для второго интеграла I_2 :

$$s = \frac{\xi + x}{2a\sqrt{t}}$$

и преобразовываем наш интеграл в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) .$$

Подставляем оба интеграла в наше решение и получаем ответ:

$$u(x, t) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) .$$

2. Решить задачу об остывании полубесконечного стержня, если тепловой поток через конец $x = 0$ *равен нулю , а начальная температура определяется кусочно - постоянной функцией :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

Решение:

Запишем начально - краевую задачу , моделирующую процесс остывания стержня:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in R^+, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_x(0,t) = 0\,. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{l} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} d\xi = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ I_1 + I_2 \right\},$$

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad I_2 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{l} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi\,.$$

Как и в предыдущей задаче, делаем замену для интеграла I_1 :

$$s = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} \;\; ,$$

И для I_2 :

$$s = \frac{\xi + x}{2a\sqrt{t}}\,.$$

Тогда :

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\},$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\Phi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\},$$

и подставив интегральные выражения в наше решение, мы получаем ответ:

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left\{\Phi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} \;.$$

Без названия

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusm
incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim venia
nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo co

Связанные термины глоссария

Перетяните сюда связанные термины

Указатель Найти термин