Сидаев Петр Константинович
6 сем - зач.
7 сем - экз.
5-13, 5-14
sidaev314@yandex.ru

Credits: vk.com/id189228717

в нач. сем. – самая прост. из Д/з

Задача 1. Атомная система единиц:

$\hbar$, m, e — в СГС!

Д/з № 1: найти хар. знач. коорд, скорости (→ сравнить с g), ускорения, силы, энергии, давления, (→ сравнить р. Ридберга), момента, частоты (довести до цифры) + эл. поле E_z

$w = \frac{Ry}{\hbar}$ — граница ионизации атома водорода

$x \to$ радиус Бора

$E \to$ ридберг

$w = \frac{Ry}{\hbar}$

Д/з № 2:

m_e, e, c — в электр. системе единиц найти то же самое

ν (1)

ν (2)

$x = \frac{e^2}{mc^2}$

радиус того шарика, энергия покоя которого равна mc^2.

в СГС!

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$$

$$\lambda_0 - \lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)$$

③? Д/з №3 вывести „богатый" способ вывода $\Delta\lambda$ (4-х вектор) релятив.

$$\frac{\Lambda}{\alpha} = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot \frac{1}{137}$$

$$\alpha \to \frac{e^2}{\hbar c} \quad \frac{1}{137}$$

137,0...

$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ – бор. радиус

Жел. $u = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$

④? Д/з №3:

$$\mathcal{Y} = 6 \cdot T^4 = \int u \cdot d\omega$$

Пазам солнечной свет. Найти долю фотонов, которая способна

ионизировать атом гелия.

$2HeV$

$$u = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$T = 5600\,K$

$24eV = \hbar\omega_0$ ← энергия одного фотона

$$\left(\int_{\omega_0}^{\infty} \left[\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cdot d\omega \right] \right) \Big/ \left(\int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \, d\omega \right)$$

← часть, способная иониз. = число шт.

← все фотоны

получить число в Mathematica

Ядро: k m_n, p $R_я = 1.25 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}$

взять свинец Pb

Найти характерную энергию ядерных процессов $E_я$.

Д/з 4 порядка S отр. t

Сравнить действие S с t:

⑥ v 1)



⑦ v! 2)



Заряженный конд.
$q = 100\,e$
разряжается через резистор $R = 10$ Ом
Найти действие, сравнить t.
(<=> задачи о

⑧ v 3)



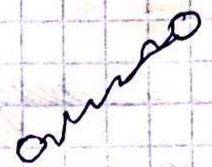
в магн. поле
$E = 1\,eV$
поле 10^4 гаусс
Найти действие,
Нужно брать заряд в СГСМ!



Если норм. крист. решетка, то теплоемкость 5

$c = 3R$ (Дюлонг - Пти)

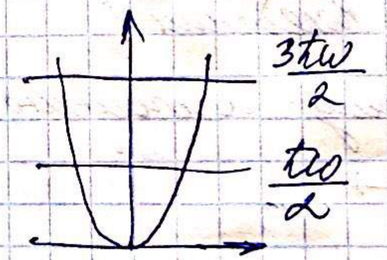
Вопрос: почему 5 степеней свободы?



Для двухатомного газа $c = \frac{5}{2} \cdot R$

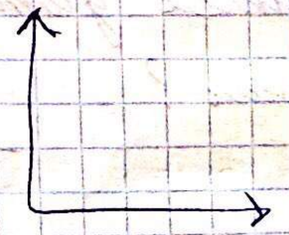
при низких T: $\frac{3}{2} t\omega$

при высоких T: колеб. тоже возбудилась и будет $\frac{3}{2} t\omega + \frac{3}{2} t\omega$



$T_{дебая}$ - температура, при кот. разморож. все степени свободы.

$$\boxed{T_D = \frac{t\omega_{max}}{K}}$$



Если взять макс. короткую длину волны:

одномерного , кот. соответствует

макс. частоте

$T_\Theta = 150\,K$ (для крист. кислорода)

$T_\Theta = 2200\,K$ (для алмаза)

⑨ V Д/З: 1) Найти ω колеб в молекуле O_2.
(это не будет в модели Дебая)
т.к. здесь будет 1 пруж. : oooooo
Оценить ω колеб.

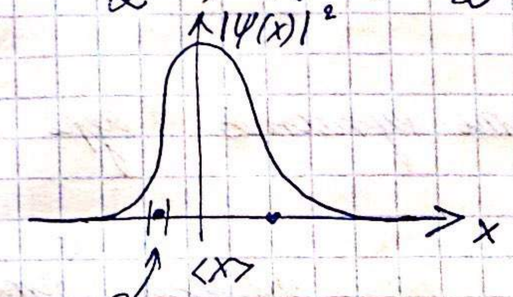
⑩ V 2) Пользуясь $T_\Theta = 2200\,K$ для алмаза найти амплитуду нулевых колебаний (
колеб, соотв. основному состоянию)
коэфф. жесткости → ....
к пружине

Д/З: ⑪ V Падает градинка в поле g. При каких массах градинок, понадобится учитывать квантовые эфф. в ее движении?

$\circ\underline{m}$

$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar$

$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}$



$D = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ связана с недетерминизмом квантовой механики

$D(x) \cdot D(p_x) \geq \frac{\hbar^2}{4}$

$\sqrt{Dx} = \Delta x$ $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Пример:

2 частицы с нулевым знач. импульса



$\delta p_1 \cdot \delta x_2 < \frac{\hbar}{2}$

система таких частиц: $\Delta x_2 \cdot \Delta p_2 \geq \frac{\hbar}{2}$

Д/З: 1) 

Найти E основного состояния из соотношения неопред.

V ⑫

Δx

$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$ $\frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2m\Delta}$

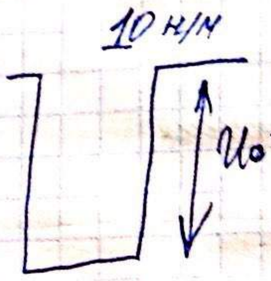
8 $+\frac{k\cdot\Delta x^2}{2}$

Найти минимум.

2/3: Я известен

Найти скорость нуклонов в ядре Ch

(13) 2/з



какая должна быть глубина чтобы частица не вылетала из нее

$\Delta x \cdot \Delta p = t$

$\Delta U_0 = \frac{\Delta p^2}{2m}$ $\quad \Delta x^2 \cdot \Delta p^2 = t^2$

$\Delta x^2 \cdot 2m U_0 = t^2$

(14) 2/з: дан нейтрон (n)

время жизни 611 с своб. нейтрона

С какой теоретич. max точностью можно найти массу δm_n =?

$\Delta E \cdot \Delta t \sim t$

$E = mc^2$

Теорема: $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$

Дисперсия $\boxed{\mathcal{D}A \cdot \mathcal{D}B \geq \frac{\langle C \rangle^2}{4}}$

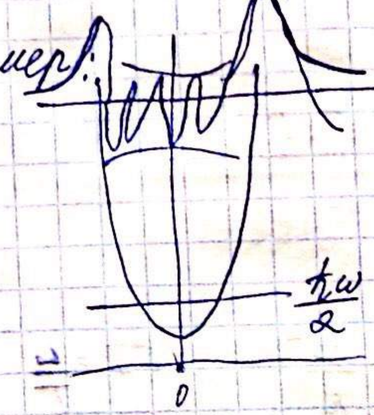
$\langle C \rangle$ в том же состоянии

$\frac{ML^2}{T}$ $\quad S = \frac{t}{2}$

$S \gg t$ классич

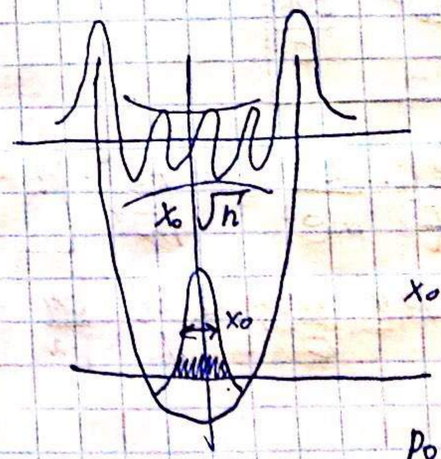
В каждом конкр. случае свой критерий классичности! ← "горб", т.к. точка поворота (там скорость маленькая)

Пример:



$S = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \gg t$

$S = \frac{t}{2}$



$x_0 = \frac{t}{\sqrt{km}}$

$p_0 = \frac{t}{\sqrt{km}}$

Домашняя работа №1.

1. $\hbar$, m, e

$[\hbar] = [S] = \frac{ML^2}{T}$

$[m] = M$

$[e] = \frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}}}{T}$

$\left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right] = \frac{M^2 L^4}{T^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{T^2}{M \cdot L^3} = L$

$$\boxed{x = a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}53\ \text{Å}}$$

$v = \left\{ e^2 = \frac{ML^3}{T^2},\ \hbar = \frac{ML^2}{T} \right\} = \frac{e^2}{\hbar}$, $[v] = \frac{L}{T}$

$$\boxed{v = \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{1{,}05 \cdot 10^{-27}} = 2{,}19 \cdot 10^8\ \frac{\text{см}}{\text{с}}}$$

$[a] = \frac{L}{T^2} = \frac{L}{T} \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow a = \frac{v^2}{x} = \frac{e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{me^2}{\hbar^2} = \frac{me^6}{\hbar^4}$

$a = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot (4{,}8)^6 \cdot 10^{-60}}{(1{,}05)^4 \cdot 10^{-27 \cdot 4}} = 9{,}16 \cdot 10^{24}\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \gg g$

$F = ma = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4}$, $F = 0{,}0083\ \text{эрг} \cdot \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$

$E = F \cdot x = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4} \cdot \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{me^4}{\hbar^2} = 2\text{Ry}$

$E = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^4}{(1{,}05)^2 \cdot 10^{-54}} = 4{,}38 \cdot 10^{-11}$ эрг $= \ldots \frac{2 \cdot \text{см}^2}{\text{с}^2}$

$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{x^2} = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4} \cdot \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^2 = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4} \cdot \frac{m^2 e^4}{\hbar^4} =$

$= \frac{m^4 e^{10}}{\hbar^8}$, $[p] = ML^{-1}T^{-2}$

$$\boxed{p = \frac{m^4 e^{10}}{\hbar^8}}$$

$p = \frac{(9{,}1 \cdot 10^{-28})^4 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^{10}}{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^8} = 3{,}0134 \cdot 10^{14} \approx 3 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} \gg p_0$

$M = |[\vec{r} \times \vec{F}]| = x \cdot F$ (момент силы) $[M] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$

$|\vec{L}| = |[\vec{r} \times \vec{p}]| = x \cdot mv = \frac{m \cdot \hbar^2}{me^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar} = \hbar$, $L = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ эрг·с

$E_z = \frac{F}{e} = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4 \cdot e} = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4}$, $\boxed{E_z = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4}}$

$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{2\text{Ry}}{\hbar} = \frac{me^4}{\hbar^3}$; $\boxed{\omega = \frac{me^4}{\hbar^3}}$

$\omega = \frac{me^4}{\hbar^3} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^4}{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^3} = 4{,}2 \cdot 10^{16}\ \frac{1}{\text{с}}$

$E_z = \frac{F}{e} = \frac{0{,}0083}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} = 1{,}73 \cdot 10^7 \left(\frac{2 \cdot \text{см}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}}\right)$

$p_0 = 10^5\ \text{Па} = 10^5\ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{10^5 \cdot 10^3 \text{г}}{10^2 \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2} = 10^6 \cdot \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2}$

2. m, e, c

$[m] = M$

$[e] = \frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}}}{T}$

$[C] = \frac{L}{T}$

$X = \left\{ e^2 = \frac{ML^3}{T^2}, \left[\frac{e^2}{mc^2}\right] = \frac{ML^3}{T^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{T^2}{L^2} = L \right\} = \frac{e^2}{mc^2}$

$\boxed{X = r_0 = \frac{e^2}{mc^2}}$, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см

$\boxed{V = C = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{с}}$

$[a] = \frac{L}{T^2} = \left(\frac{L}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{L} = \frac{V^2}{X} = \frac{V^2}{x} = \frac{c^2}{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)} = \frac{mc^4}{e^2}$

$\boxed{a = \frac{mc^4}{e^2}}$

$a = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^{10})^4}{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2} = 3{,}2 \cdot 10^{33} \frac{см}{с^2} \gg g$

$F = ma = m \cdot \frac{mc^4}{e^2} = \frac{m^2 c^4}{e^2}$, $\boxed{F = \frac{m^2 c^4}{e^2}}$

$F = 9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{33} = 2{,}9 \cdot 10^{6} \frac{г \cdot см}{с^2}$

$E = F \cdot \underbrace{x}_{r_0} = \frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \frac{e^2}{mc^2} = mc^2 \Rightarrow \boxed{E = mc^2}$

$E = 9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 81{,}9 \cdot 10^{-8} = 8{,}2 \cdot 10^{-7} \frac{г \cdot см^2}{с^2}$

$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{r_0^2} = \frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \left(\frac{mc^2}{e^2}\right)^2 = \frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \frac{m^2 c^4}{e^4} = \frac{m^4 c^8}{e^6}$

$\boxed{p = \frac{m^4 c^8}{e^6}}$ $\quad p = 37 \cdot 10^{31} \frac{г}{см \cdot с^2}$

$L = \frac{ML^2}{T} = m \cdot c \cdot r_0 = mc \cdot \frac{e^2}{mc^2} = \frac{e^2}{c}$

$L = 7{,}68 \cdot 10^{-30} \frac{г \cdot см^2}{с}$

$E_z = \frac{F}{e} = \frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{m^2 c^4}{e^3}$, $\boxed{E_z = \frac{m^2 c^4}{e^3}}$

$[\omega] = \frac{1}{c}$; $E_z = \frac{(9{,}1 \cdot 10^{-28})^2 \cdot (3 \cdot 10^{10})^4}{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^3} = 6{,}07 \cdot 10^{15}$ (ед. СГС)

$a = \omega^2 r$

$\omega = \left(\frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \frac{1}{m \cdot r_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m^2 c^4}{e^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1 \cdot mc^2}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{mc^3}{e^2}$

$\boxed{\omega = \frac{mc^3}{e^2}}$ $\quad \omega = 1{,}07 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{c} = 1{,}07 \cdot 10^{23} \, T^{-1}$

3. t ; m_p ; $R = 1{,}25 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ (радиус ядра)

$E_{яд}$ - ?

Для Pb: $R = 1.25 \cdot 10^{-13} \cdot (207{,}2)^{\frac{1}{3}}$ см $= 7{,}4 \cdot 10^{-13}$ см

$[t] = \frac{ML^2}{T}$

$[m_p] = M$

$[R] = L$

$[E] = ML^2 \cdot T^{-2}$, $E = F \cdot x = ma \cdot x$

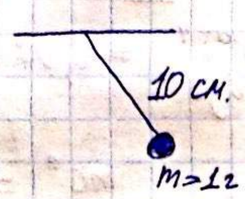
$[t^2] = \frac{M^2 \cdot L^4}{T^2}$

$\left[\frac{t^2}{m_p \cdot R^2}\right] = \frac{M^2 \cdot L^4}{T^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L^2} = ML^2T^{-2}$

$E_{эл} = \frac{t^2}{m_p \cdot R^2} = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^2}{1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot (7{,}4 \cdot 10^{-13})^2} =$

$= 1{,}21 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-6}$

4. а)



$[S] = \frac{ML^2}{T}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$S \approx \frac{ml^2}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1 \cdot 100}{6{,}28 \cdot \sqrt{1}} \approx 16 \gg t$

б)



$q = 100e = 4{,}8 \cdot 10^{-8}$

$R = 10\ Ом$

$1\ Ом = \frac{1}{8{,}99 \cdot 10^{11}}$ СГС

$[R] = Ом = \frac{B}{A} = \frac{\frac{W}{q}}{\frac{q}{t}} = \frac{W \cdot t}{q^2} = \frac{(L^2 \cdot MT^{-2}) \cdot T}{\left(\frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}}}{T}\right)^2} =$

$= \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-1} \cdot T^2}{ML^3} = \frac{T}{L}$

$[q] = \frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}}}{T}$

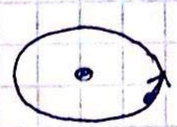
$[q^2] = \frac{ML^3}{T^2}$, $[S] = \frac{ML^2}{T}$

$[q^2 \cdot R] = \frac{ML^2}{T}$

$S = q^2 \cdot R = (4{,}8 \cdot 10^{-8})^2 \cdot \frac{10}{8{,}99 \cdot 10^{11}} = \frac{(4{,}8)^2 \cdot 10^{-15}}{8{,}99 \cdot 10^{11}} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-14}}{8{,}99 \cdot 10^{11}} = 2{,}56 \cdot 10^{-26} \sim$

$\sim t$

в)



$E = 1\ eV$

$B = 10^4\ Гс$

$S - ?$

$[E] = L^2MT^{-2}$

$M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-1}$

$1\ эрг = 10^{-7}\ Дж$

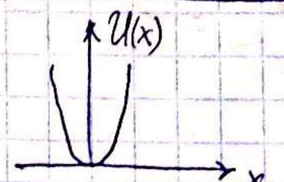
$\frac{mv^2}{r} = eBv \Rightarrow \frac{mv}{r} = eB$, $\frac{v}{r} = \frac{eB}{m}$ $\left[\frac{v}{r}\right] = \frac{1}{c} = T^{-1}$

$[S] = \frac{ML^2}{T} \Rightarrow S = E \cdot \frac{m}{eB}$, $S = \frac{(1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}) \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28}}{4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} = 3 \cdot 10^{34} \sim$

$L^2MT^{-2} \cdot T = \frac{ML^2}{T}$

$\sim t$

5.



$E_{осн.\ состояния} - ?$

$\Delta p \cdot \Delta x \sim t$, $\Delta p \sim \frac{t}{\Delta x}$

$E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{k \cdot \Delta x^2}{2} = \frac{t^2}{2m \cdot \Delta x^2} + \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}$

$\frac{2}{\partial(\Delta x)}\left(\frac{t^2}{2m(\Delta x)^2} + \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}\right) = \frac{-t^2}{m(\Delta x)^3} + k \cdot \Delta x = 0$

$k \cdot \Delta x = \frac{t^2}{m \cdot (\Delta x)^3}$, $(\Delta x)^2 = \frac{t}{\sqrt{km}}$

$E_{осн.} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\sqrt{km}}{\hbar} + \frac{k}{2} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{km}} = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} = \hbar\omega$

$\left(E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \right)$

6. $R_я$ известен

Характерная скорость нуклонов в ядре – ?

v_n = ?

$\Delta x = R_я$, $\Delta p = m \cdot v_n$, $R_я = 1{,}25 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ см

$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar$

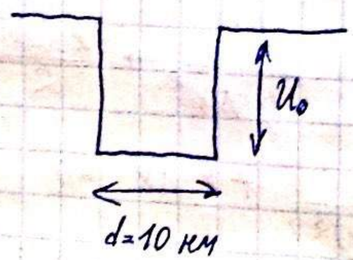
$m \cdot v_n \cdot R_я \sim \hbar$, $v_n \sim \frac{\hbar}{m \cdot R_я}$

$v_n \approx \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}}{1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}}$

$v_n(Pb) \approx \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}}{1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-13} \cdot (207{,}2)^{\frac{1}{3}}} =$

$= 8{,}5 \cdot 10^8 \frac{см}{с} \approx 0{,}1 \cdot 10^{10} \frac{см}{с}$ $\left(c = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{с}\right)$

7.



$\overset{d}{\sim}$

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

$U_0 = \frac{\Delta p^2}{2m}$

$\Delta x^2 \cdot \Delta p^2 \sim \hbar^2$

$\Delta x^2 \cdot 2m \cdot U_0 \sim \hbar^2$

$d^2 \cdot 2m \cdot U_0 \sim \hbar^2$

$\boxed{U_0 \sim \frac{\hbar^2}{2m \cdot d^2}}$ – min, глубина ямы, необходимая чтобы частица не вылезала

8. (n) $\tau = 611 c$

$\Delta E \cdot \underset{\sim}{\Delta t} \sim \hbar$
τ

$E = mc^2$, $\delta m \cdot c^2 \cdot \tau \sim \hbar$

$\delta m \sim \frac{\hbar}{c^2 \tau} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{20} \cdot 611} = 2 \cdot 10^{-51}$ г

9. $T = 5778$ K

$24{,}47$ eV $= \hbar\omega_0$

$\omega_0 = \frac{24{,}47 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{\left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2\pi}\right)} = 3{,}64 \cdot 10^{16} \frac{рад}{с}$

$N = \frac{\int_{\omega_0}^{+\infty} \left[\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right] \cdot d\omega}{\int_0^{+\infty} \left[\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right] \cdot d\omega} = \frac{\int_0^{+\infty} \ldots - \int_0^{\omega_0} \ldots}{\int_0^{+\infty} \ldots}$

$= 1 - \frac{\int_0^{\omega_0} \ldots}{\int_0^{+\infty} \ldots} = 1 - \frac{I_2}{I_1}$

$$I_2 = \int_0^{t\omega_m} \frac{\omega^4}{e^{\frac{t\omega}{kT}} - 1} \, d\omega$$

$$\frac{t}{kT} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 2\pi \cdot 5778} = 1{,}32 \cdot 10^{-15}$$

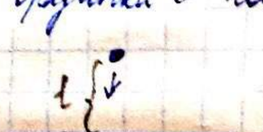
$I_1 = 1{,}045 \cdot 10^{15}$

$I_2 = 1{,}045 \cdot 10^{15}$

в СИ: $k_B = \dots \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$

в СГС: $k_B = \dots \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{с}$

10. Гранинка в поле g:



$$[S] = \frac{ML^2}{T}$$

$$[g] = \frac{см}{с^2} = \frac{L}{T^2}$$

$$S = m \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot l^{\frac{3}{2}}, \quad [S] = M \cdot \frac{L^{\frac{1}{2}}}{T} \cdot L^{\frac{3}{2}} = \frac{ML^2}{T}$$

При массе m, такой что: $S = m g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} \sim t$ приходится учитывать квантовые эффекты, т.е. при $m \sim \frac{t}{\sqrt{g l^3}}$.

11. а) Найти частоту колебаний в молекуле O_2.

б) Амплитуда x нулевых колебаний в алмазе

$$t\omega = k_B T_D, \quad \omega = \frac{k_B \cdot T_D}{t}$$

$$\frac{kx^2}{2} = t\omega \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2t\omega}{k}} = \left\{ \omega^2 = \frac{k}{m} \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2t\omega}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2t}{m\omega}} = \sqrt{\frac{2t^2}{m \cdot k_B \cdot T_D}} = t \sqrt{\frac{2}{m \cdot k_B T_D}}$$ для алмаза

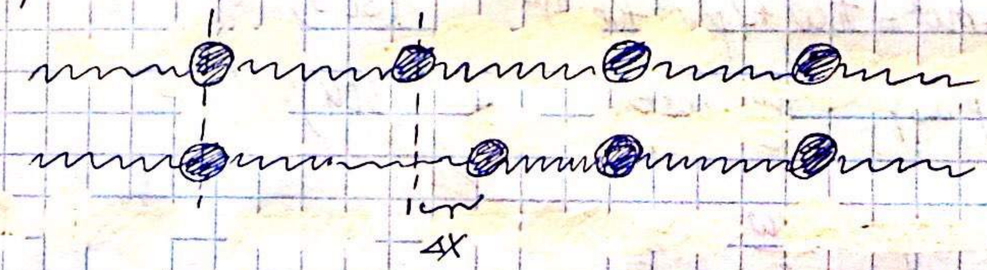
$$x = 1{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot \sqrt{\frac{2}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 2200 \cdot 12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}}} \approx 6 \cdot 10^{-10} см$$

(Алмаз)

У кислорода не будет в точности Дебай:

$$\omega_c = \frac{k_B \cdot T_D}{t}$$ для прост. кристалл. решеток

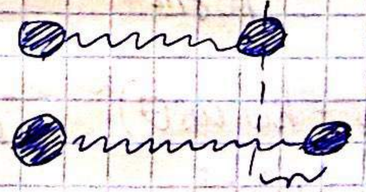
Ⅰ Кристалл



$$m\ddot{x} = -2k \cdot x \rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m} \cdot x = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Ⅱ Кислород O_2 – газ:



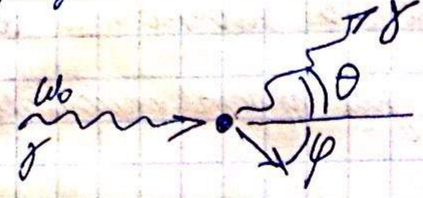
$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \rightarrow \omega_{O_2} = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = \frac{K_B \cdot T_D}{\hbar} \Rightarrow \omega_{02} = \frac{K_B \cdot T_D}{2\hbar} = \frac{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 150}{1{,}41 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-27}} \approx$$

$$\approx 1{,}4 \cdot 10^{13}$$

12. Вывод формулы Комптона.



$$\begin{cases} \hbar\omega_0 + mc^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} & (\text{ЗСЭ}) \\ \frac{\hbar\omega_0}{c} = p\cos\varphi + \frac{\hbar\omega}{c}\cdot\cos\theta & \leftarrow (\text{ЗСИ}) \\ 0 = p\sin\varphi - \frac{\hbar\omega}{c}\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$$(cp\sin\varphi)^2 = (\hbar\omega\cdot\sin\theta)^2$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(\hbar\omega\cdot\sin\theta)^2}{p^2c^2} = \frac{(\hbar\omega\cdot\sin\theta)^2}{p^2\cdot c^2} \quad (1)$$

$$\frac{(\hbar\omega_0 - \hbar\omega\cdot\cos\theta)^2}{p^2\cdot c^2} = \cos^2\varphi \quad (2)$$

(1)+(2) = 1

$$1 = \frac{(\hbar\omega_0 - \hbar\omega\cdot\cos\theta)^2 + (\hbar\omega\cdot\sin\theta)^2}{p^2\cdot c^2}$$

$$p^2\cdot c^2 = \hbar^2\cdot(\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_0\cdot\omega\cdot\cos\theta)$$

$$\hbar(\omega_0 - \omega) + mc^2 = \sqrt{\hbar^2(\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_0\cdot\omega\cdot\cos\theta) + (mc^2)^2}$$

$$\hbar^2(\omega_0-\omega)^2 + 2\hbar(\omega_0-\omega)\cdot mc^2 + (mc^2)^2 = \hbar^2(\omega_0^2+\omega^2-2\omega_0\omega\cos\theta) + (mc^2)^2$$

$$\hbar^2(\omega_0-\omega)^2 + 2\hbar(\omega_0-\omega)\cdot mc^2 = \hbar^2(\omega_0-\omega)^2 + 2\hbar^2\omega_0\omega - 2\hbar^2\omega_0\cdot\omega\cdot\cos\theta$$

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar}{mc^2}(\omega_0\cdot\omega - \omega_0\cdot\omega\cdot\cos\theta)$$

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar\omega_0\omega}{mc^2}\cdot(1-\cos\theta)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}, \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c\cdot(1-\cos\theta), \quad \lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

Семинар №2.

ВФ - столбец комплексных чисел

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ Пример: спин

$(|\psi\rangle)^+ = (a^* \quad b^*) = \langle\psi|$

$\langle\chi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$ (скалярное произвед)

$\langle\chi|\psi\rangle = (c^* \quad d^*)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ac^* + bd^*$

(1×2)(2×1)

1) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \iff |\psi\rangle = 0$
2) $\langle\psi|\chi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle^*$
3) Линейность по прав. аргументу:

$|\chi\rangle = C_1|\chi_1\rangle + C_2|\chi_2\rangle$

$\langle\psi|\chi\rangle = C_1\langle\psi|\chi_1\rangle + C_2\langle\chi|\psi_2\rangle$

$\langle\chi|\psi\rangle = C_1^*\langle\chi_1|\psi\rangle + C_2^*\langle\chi_2|\psi\rangle$

Далее: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\psi\rangle\langle\chi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot (c^* \quad d^*)$

[2×1] ×[1×2]

$\Rightarrow$ $|\psi\rangle\langle\chi|$ оператор

$\underbrace{(|\psi\rangle\langle\chi|)}|\xi\rangle = |\psi\rangle \cdot \langle\chi|\xi\rangle$

$|\psi\rangle\langle\chi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot (c^* \quad d^*) = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix}$

№1) Задача: $\hat{A} = \alpha(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|)$ (2/3)

Найти СЗ и норм. на 1 СВ ✓

Подмножества опр:

(1) $\hat{A}^+ = \hat{A}$ - эрмитовы операторы

№2) $\begin{pmatrix} p & q \\ q^* & r \end{pmatrix}$ $p, r \in \mathbb{R}e$ $q, q^* \in \mathbb{C}$ - общий вид матрицы эрмитова оператора в 2-ом простр. ✓

Найти СЗ и норм. на 1 СВ

(лучший способ - через матрицы Паули,

но здесь по-обычному)

а) <u>случай малых q :</u>
найти нулевой (0) и первый (1) порядок
в общих получ. ответах

б) <u>$q \to \infty$</u>
здесь лучше параметризовать $q = |q| \cdot e^{i\varphi}$

№3) Дано:

$$\begin{pmatrix} E_1 & V & 0 \\ V & E_2 & V \\ 0 & V & E_3 \end{pmatrix}$$

СВ находить не нужно

1) Найти СЗ, полагая V малыми
(приближ. решать кубическое уравнение)

2) Какое кол-во СЗ растет с ростом V,
а какое кол-во убывает с ростом V

3-4 случая

Ответ сущ. зависит от соотнош.
E_1, E_2, E_3

а) $E_i \neq E_j$

б) $E_1 = E_2 = E_3$

в) $E_1 = E_2 \neq E_3$

$E_1 \neq E_2 = E_3$

г) $E_1 = E_3 \neq E_2$

Решать куб. уравнение приближенно

② $\hat{P}^+ = \hat{P}$

$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \to \quad \hat{P}^n = \hat{P}, \; n \in \mathbb{N}$

Опер-р "Проектора"

$|\psi\rangle = 14|1\rangle - 22|2\rangle + 33|3\rangle$

$\hat{G} = |2\rangle\langle 2|$

Явный вид: $\hat{G} = |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\;1\;0) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}|\psi\rangle = \left(14\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 22\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 33\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \\ 33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = -22|2\rangle$$

(1×3) (3×3)

$G|1\rangle = |2\rangle \underbrace{\langle 2|1\rangle}_{=0} = 0$

$G|3\rangle = 0$

$G|2\rangle = |2\rangle$

Задачи на проекторы

(N4) а) $\hat{P}$ - проектор

+ доказать $(\hat{I} - \hat{P}) = \hat{P}'$

$(1 - P) = P'$

б) Доказать, что

$\underbrace{\langle P\rangle_{|\psi\rangle}}_{\text{среднее знач. оператора}} = \langle\psi|P|\psi\rangle \leq 1$

(сообр. через СЗ опер-а проект).

в) $P_1 P_2 \dots P_N$ - проекторы

Док, что $P = \sum_1^N P_i$ <=>

$P_i \cdot P_{ij} = \delta_{ij} \cdot P_i$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \lambda_i$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i = \lambda_i^2 \Rightarrow \underline{\lambda = 0, 1}$

СЗ

$|\psi\rangle = \psi(x) = \sum_{n=1} C_n \cdot \psi_n(x)$

$\psi_n = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!}} \cdot H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \rightarrow \psi_n \in \mathbb{R}e$

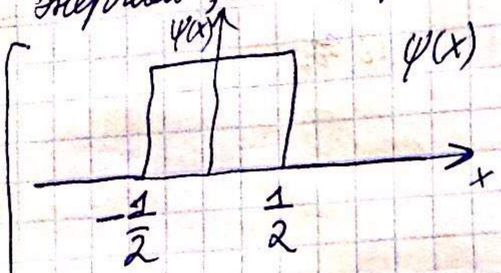
- базис (гарм. осциллятор)

=> $\forall$ ВФ м.б. разложена в ряд по этому базису.

$C_n = \langle \psi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \cdot \psi(x) \cdot dx$

$\psi(x) = \sum_{n=1} C_n \cdot \psi_n$, $P_{|\psi_n\rangle} = |C_n|^2$ -

вероятность обнаружить осц. в сост. с энергией, соотв. ψ_n.



$\psi(x)$ – нор. на единицу, квадратично инт.

№5 Д/з

До какого n_0 нужно довести ряд $\sum_n^{n_0} C_n \cdot \psi_n(x)$ чтобы фделитти $F \geq 0{,}9$

№6

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & tg^2\alpha \\ ctg^2\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

При каких α спектр оператора вырожден, т.е. при каких α : $\lambda_1 = \lambda_2$

$\alpha \in \mathbb{C}$! (их будет бесконн. много)

№7 три функции $1, x, x^2$

а) интервал $[-1, 1]$ (полиномы Лежандра)

б) $[0, 1]$

ортогонализовать и отнормировать на интервале а), б)

Нужно, чтобы из @ получ. ⓑ можно лин. преобр. сжать и сдвинуть, получ. Лежандра от сдвинутых арг.

№8 $U^+ = U^{-1}$ – унитарный оператор

При каких x, y этот оператор:

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4i \\ x & y \end{pmatrix}$$

будет а) эрм.

б) унитарным

+ для этого же:
$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8i \\ x & y \end{pmatrix}$$

Домашняя работа №2.

№1 $\hat{A} = \alpha(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|)$

$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\langle 1| = (1\ 0)$, $\langle 2| = (0\ 1)$

$$\hat{A} = \alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1) + i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1) - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0)\right) = \alpha\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha & \alpha i\\ -i\alpha & -\alpha\end{pmatrix}$$

$(\hat{A}-\lambda\hat{E})x=0$

$\det(\hat{A}-\lambda\hat{E})=0$

$\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \alpha i \\ -\alpha i & -\alpha-\lambda \end{pmatrix}\cdot X=0 \qquad -(\alpha-\lambda)(\alpha+\lambda)-\alpha^2=0$

$(\lambda-\alpha)\cdot(\lambda+\alpha)-\alpha^2=0$

$\lambda^2-2\alpha^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-\sqrt{2}\cdot\alpha,\ \lambda_2=\sqrt{2}\cdot\alpha$

1) $\lambda_1=-\sqrt{2}\cdot\alpha$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha+\sqrt{2}\alpha & \alpha i & 0 \\ -\alpha i & -\alpha+\sqrt{2}\alpha & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{1+\sqrt{2}} & 0 \\ -i & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} & 0 \\ -i & \sqrt{2}-1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 1 & -i(1-\sqrt{2}) & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad a=C_1 \qquad b=\frac{C_1}{i(1-\sqrt{2})}$$

$$X_1=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{i(1-\sqrt{2})} \end{pmatrix}=C_1'\cdot\begin{pmatrix} i(1-\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормировка $C_1^2\left(1+\left(i(1-\sqrt{2})\right)^2\right)=1$

$$C_1^2=\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})^2}$$

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt{2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2\sqrt{2}+2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}$$

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}\cdot\begin{pmatrix} i(1-\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2=\sqrt{2}\cdot\alpha$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha-\sqrt{2}\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & -\alpha-\sqrt{2}\alpha & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2} & i & 0 \\ -i & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{1-\sqrt{2}} & 0 \\ -i & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} & 0 \\ -i & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ -i & -(1+\sqrt{2}) & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$X_2=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} c=i\cdot(1+\sqrt{2})C_2 \\ d=C_2 \end{array}\Rightarrow X_2=C_2\begin{pmatrix} i(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2^2\cdot\left(1-(1+\sqrt{2})^2\right)=1$$

$$C_2^2\cdot\left(1-(1+2\sqrt{2}+2)\right)=1,\quad C_2=\frac{1}{\sqrt{(-1)\cdot(2\sqrt{2}+2)}}$$

$$X_2=\frac{1}{i\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\begin{pmatrix} i(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2}) \\ -i \end{pmatrix}$$

СВ (норм. на единицу): $X_1=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}\begin{pmatrix} i(1-\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}$

№2 $\begin{pmatrix} p & q \\ q^* & r \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ q^* & r-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(p-\lambda)(r-\lambda) - |q|^2 = 0$

$\lambda^2 + pr - \lambda(r+p) - |q|^2 = 0$

$\lambda^2 - \lambda(r+p) + (pr - |q|^2) = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{p+r}{2} \pm \sqrt{\frac{(p+r)^2 - 4(pr-|q|^2)}{4}} = \frac{p+r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2}$

1) $\lambda_1 = \frac{p+r}{2} - \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2}$

$\begin{pmatrix} \frac{p-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2} & q \\ q^* & -\frac{(p-r)}{2} + \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2} \end{pmatrix} X_1 = 0$

$\begin{pmatrix} \xi + \sqrt{\xi^2 + |q|^2} & q \\ q^* & -\xi + \sqrt{\xi^2 + |q|^2} \end{pmatrix} X_1 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{\xi + \sqrt{\xi^2+|q|^2}} \\ q^* & -\xi + \sqrt{\xi^2+|q|^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\text{//}- & \frac{q(-\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2})}{(-\xi+\sqrt{\dots})(\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2})} \\ -\text{//}- & -\text{//}- \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -\text{//}- & \frac{q(\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi)}{|q|^2} \\ -\text{//}- & -\text{//}- \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\xi+\sqrt{\dots}}{q^*} \\ q^* & -\xi+\sqrt{\dots} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 = 0$ 33

$X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $b = C_1$

$a = \frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*} \cdot C_1$

$X_1 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2} - \xi}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$

$C_1^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi}{q^*}\right)^2\right) = 1$; $C_1^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi}{q^*}\right)^2\right) = 1$

$C_1^2 = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{\dots}-\xi}{q^*}\right)^2\right)}$ $\Rightarrow$ $C_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi}{q^*}\right)^2}}$

$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\dots}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = \frac{p+r}{2} + \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2}$

$\begin{pmatrix} \frac{p-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2} & q \\ q^* & -\left(\frac{p-r}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p-r}{2}\right)^2 + |q|^2} \end{pmatrix} \cdot X_2 = 0$

$\begin{pmatrix} \xi - \sqrt{\xi^2+|q|^2} & q \\ q^* & -\xi - \sqrt{\xi^2+|q|^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{q \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2+|q|^2})}{(\xi - \sqrt{\dots})(\xi + \sqrt{\xi^2+|q|^2})} \\ -\text{//}- & -\text{//}- \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2})}{q^*} \\ -\ast & -\ast- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2})}{q^*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad d = C_2 \Big| \Rightarrow$$

$$c = C_2 \cdot \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*}\right)$$

$$\Rightarrow \chi_2 = C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*}\right)^2\right) = 1$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\xi+\sqrt{\xi^2+|q|^2}}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

а) случай малых q. Найти (0)-об и (1)-вый порядок приближения

$$\lambda_1 = \frac{p+\tau}{2} - \sqrt{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)^2+|q|^2} = \frac{p+\tau}{2} - \left(\frac{p-\tau}{2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{|q|^2}{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)^2}} =$$

$$\simeq \frac{p+\tau}{2} - \left(\frac{p-\tau}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{|q|^2}{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)^2\cdot 2}\right) = \tau - \frac{|q|^2}{2\cdot\left(\frac{p-\tau}{2}\right)} =$$

$$= \tau - \frac{|q|^2}{(p-\tau)}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)^2+|q|^2}-\xi}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\xi^2+|q|^2}-\xi}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\xi = \frac{p-\tau}{2}$

$$\sqrt{\xi^2+|q|^2} = \xi\cdot\sqrt{1+\frac{|q|^2}{\xi^2}} \simeq \xi\cdot\left(1+\frac{|q|^2}{2\cdot\xi^2}\right) =$$

$$= \xi + \frac{|q|^2}{2\xi} = \left(\frac{p-\tau}{2}\right) + \frac{|q|^2}{p-\tau}$$

$$\chi_1 \simeq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)+\frac{|q|^2}{p-\tau}-\left(\frac{p-\tau}{2}\right)}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{|q|^2}{(p-\tau)\,q^*} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{|q|^2}{(p-\tau)\cdot q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{q}{p-\tau} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{(p-\tau)^2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{q}{p-\tau} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{p+\tau}{2} + \left(\frac{p-\tau}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{|q|^2}{2\left(\frac{p-\tau}{2}\right)^2}\right) = p + \frac{|q|^2}{p-\tau}$$

$$\chi_2 \simeq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\left(\frac{p-\tau}{2}\right)+\frac{|q|^2}{p-\tau}+\frac{p-\tau}{2}}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p-\tau+\frac{|q|^2}{p-\tau}}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p-\tau+\frac{|q|^2}{p-\tau}}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(p-\tau)^2+|q|^2}{(p-\tau)\,q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

б) $q \to \infty$

$q = |q| \cdot e^{i\varphi}$, $q^* = |q| \cdot e^{-i\varphi}$

$$\lambda_1 = \frac{p+x}{2} - \sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + |q|^2} = \frac{p+x}{2} - |q| \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|^2}} =$$

$$= \frac{p+x}{2} - |q| \cdot \left(1 + \frac{2\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|^2}\right) = \frac{p+x}{2} - |q| - \frac{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 \cdot 2}{|q|}$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + |q|^2} - \left(\frac{p-x}{2}\right)}{q^*}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + |q|^2} - \left(\frac{p-x}{2}\right)}{q^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + |q|^2} = |q| \cdot \left(1 + \frac{2\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|^2}\right)$$

$$\sqrt{1 + \dots} = \sqrt{1 + \left(\frac{|q| \cdot \left(1 + \frac{2\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|^2}\right) - \left(\frac{p-x}{2}\right)}{|q| \cdot e^{-i\varphi}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(e^{-i\varphi}\left(1 + \frac{2\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|^2}\right) - \frac{\left(\frac{p-x}{2}\right)}{|q|} \cdot e^{i\varphi}\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{1 + \left(-2e^{-i\varphi}e^{i\varphi} \cdot \frac{\left(\frac{p-x}{2}\right)}{|q|}\right)} \approx \sqrt{1 - \frac{p-x}{|q|}} \approx 1 - \left(\frac{p-x}{2|q|}\right)$$

$$X_1 \approx \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{p-x}{2|q|}\right)\right)} \cdot \begin{pmatrix} |q| + \frac{2\left(\frac{p-x}{2}\right)^2}{|q|} - \left(\frac{p-x}{2}\right) \\ |q| \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\left(1 - \frac{p-x}{2|q|}\right)} \cdot \begin{pmatrix} \left(e^{+i\varphi} - \frac{p-x}{2|q|} \cdot e^{i\varphi}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{p+x}{2} + \sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + |q|^2} = \frac{p+x}{2} + |q| + \frac{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 \cdot 2}{|q|}$$

$$X_2 \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p-x}{2|q|}}} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\varphi} + \frac{p+x}{2|q|} \cdot e^{i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}$$

№4 а) $\hat{P}$ - проектор, т.е. $\hat{P} = \hat{P}^+$, $\hat{P}^2 = \hat{P}$

Док: $(\hat{I} - \hat{P}) = \hat{P}'$ - тоже проектор

Δ 1. $(I-P)^2|x\rangle = (I-P)\left((I-P)|x\rangle\right) = (I-P)\left(I|x\rangle - P|x\rangle\right) =$

$= II|x\rangle - PI|x\rangle - IP|x\rangle + \underbrace{P^2|x\rangle}_{= P|x\rangle} = I|x\rangle - 2P|x\rangle +$

$+ P|x\rangle = I|x\rangle - P|x\rangle = (I-P)|x\rangle$ $\boxed{(I-P)^2|x\rangle = (I-P)|x\rangle}$

2. $(I-P)^+|x\rangle = I^+|x\rangle - P^+|x\rangle = (I-P)|x\rangle$

$\boxed{(I-P)^+|x\rangle = (I-P)|x\rangle}$

Δ

б) $\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, $\hat{P}^2|\psi\rangle = \lambda(\underbrace{\hat{P}|\psi\rangle}_{\lambda|\psi\rangle}) = \lambda^2|\psi\rangle$

$\left.\begin{array}{l}\hat{P}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \\ \hat{P}^2|\psi\rangle = \hat{P}|\psi\rangle\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}\hat{P}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \\ \hat{P}|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda = 0, 1$

$\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \underset{\|0;1}{\lambda}\langle\psi|\psi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle$

$0 \leq \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle \leq \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1}$

$\boxed{0 \leq \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle \leq 1}$

в) $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_n$ - проекторы

Док., что $\hat{P} = \sum_{i=1}^{N}\hat{P}_i$ - тоже проектор, если

$P_i \cdot P_j = P_i \cdot \delta_{ij}$

Δ 1. $\hat{P}^2 = (\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \dots + \hat{P}_N)^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 + \dots +$

$+ \hat{P}_N^2 + (2\hat{P}_1\hat{P}_2 + 2\hat{P}_1\hat{P}_3 + \dots + 2\hat{P}_1\hat{P}_N) +$

$+ (2\hat{P}_2\hat{P}_3 + 2\hat{P}_2\hat{P}_4 + \dots + 2\hat{P}_2\hat{P}_N) +$

$+ \dots\dots + 2\hat{P}_{N-1}\hat{P}_N =$

$= \{P_i P_j = P_i \delta_{ij}\} = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \dots + \hat{P}_N^2 +$

$+ 0 = \sum_{i=1}^{N}\hat{P}_i^2 = \{\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i\} =$

$= \sum\hat{P}_i = \hat{P}$

$\boxed{\hat{P}^2 = \hat{P}}$

2. $\hat{P}^+ = \left(\sum_{i=1}^{N}\hat{P}_i\right)^+ = \underbrace{\hat{P}_1^+}_{\hat{P}_1} + \underbrace{\hat{P}_2^+}_{\hat{P}_2} + \dots + \underbrace{\hat{P}_N^+}_{\hat{P}_N} = \sum_{i=1}^{N}\hat{P}_i = \hat{P}$

$\hat{P}^+ = \hat{P}$

∎

(№6) При каких α $\lambda_1 = \lambda_2$ для $\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \operatorname{tg}^2\alpha \\ \operatorname{ctg}^2\alpha & \sin^2\alpha\end{pmatrix}$?

$\begin{vmatrix}\cos^2\alpha - \lambda & \operatorname{tg}^2\alpha \\ \operatorname{ctg}^2\alpha & \sin^2\alpha - \lambda\end{vmatrix} = 0$

$(\cos^2\alpha - \lambda)\cdot(\sin^2\alpha - \lambda) - 1 = 0$

$\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \left(\frac{(\sin 2\alpha)^2}{4} - 1\right) = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot\left(\frac{(\sin 2\alpha)^2}{4} - 1\right) =$

$= 1 - (\sin 2\alpha)^2 + 4 = 5 - \sin(2\alpha)^2 = 0$ ↖ даем $\lambda_1 = \lambda_2$

$\sin^2(2\alpha) = 5 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{C}$

1) $\sin 2\alpha = -\sqrt{5}$ 2) $\sin 2\alpha = \sqrt{5}$

1) $\sin 2\alpha = \frac{e^{i2\alpha} - e^{-i2\alpha}}{2i} = -\sqrt{5}$

$e^{i2\alpha} - e^{-i2\alpha} + 2\sqrt{5}i = 0$

$e^{i4\alpha} + i\cdot 2\sqrt{5}\cdot e^{i2\alpha} - 1 = 0$

$e^{i2\alpha} = x \Rightarrow x^2 + i\cdot 2\sqrt{5}x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-i2\sqrt{5} \pm \sqrt{-20+4}}{2} = \frac{-i2\sqrt{5} \pm 4i}{2} = i(-\sqrt{5} \pm 2)$

$e^{i2\alpha} = i(-\sqrt{5}\pm 2)$

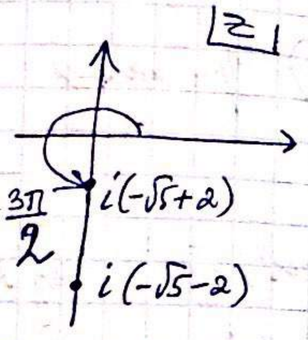
$i2\alpha = \operatorname{Ln}(i(-\sqrt{5}\pm 2))$

$\operatorname{Ln} z = \ln z + i(\varphi + 2\pi k)$, где $z = r\cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}$

$r = \sqrt{(-\sqrt{5}\pm 2)^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = \sqrt{(-\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}+2$

$\Rightarrow r_2 = \sqrt{(-\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}-2$



$i2\alpha_1 = \ln(\sqrt{5}+2) + i\cdot\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$

$\alpha_1 = -\frac{i}{2}\cdot\ln(\sqrt{5}+2) + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$

$\alpha_2 = \frac{-i}{2}\cdot\ln(\sqrt{5}-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$

2) $\sin 2\alpha = \sqrt{5}$

$e^{i2\alpha} - e^{-i2\alpha} - 2\sqrt{5}i = 0$

$e^{i4\alpha} - 2\sqrt{5}i\cdot e^{i2\alpha} - 1 = 0$

$e^{i2\alpha} = x$

$x^2 - 2\sqrt{5}i\cdot x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{5}i \pm \sqrt{-20+4}}{2} = i(\sqrt{5}\pm 2)$

$e^{i2\alpha} = i(\sqrt{5}\pm 2)$

$i\cdot 2\cdot\alpha_3 = \ln(\sqrt{5}+2) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$, $m\in Z$

$\alpha_3 = -\frac{i}{2}\ln(\sqrt{5}+2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

$\alpha_4 = -\frac{i}{2}\cdot\ln(\sqrt{5}-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi l\right)$, $l\in Z$

(№7) а) $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = x$, $\psi_2 = x^2$

1. $\varphi_0 = 1$

2. $e_{\varphi_0} = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$

$\|\varphi_0\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\varphi_0^2\,dx} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{e_{\varphi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

3. $\varphi_1 = \psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x\cdot\underbrace{e_{\varphi_0}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dx = x - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx}_{=0} = x$

$\|\varphi_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot 2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$e_{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x$, $\boxed{e_{\varphi_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x}$

4. $\varphi_2 = \psi_2 - e_{\varphi_0}\cdot\int_{-1}^{1} e_{\varphi_0}\cdot\psi_2\,dx - e_{\varphi_1}\int_{-1}^{1} e_{\varphi_1}\cdot\psi_2\,dx =$

$= x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^2\,dx - \sqrt{\frac{3}{2}}x\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x\cdot x^2\,dx = x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} =$

$= x^2 - \frac{1}{3} = \frac{3x^2-1}{3}$ ← должно быть $\frac{3x^2-1}{2}$

$\|\varphi_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \varphi_2^2 \cdot dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\frac{9}{4}x^4 - 3x^2 + 1\right) dx} =$

$= \sqrt{\frac{2}{5}}$, $e_{\varphi_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)$

$e_{\varphi_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)$

б) $[0, 1]$

$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(2x-1)$

$\tilde{\varphi}_0 = 1$

$\tilde{\varphi}_1 = 2x-1$

$\tilde{\varphi}_2 = \left(\frac{3y^2-1}{2}\right)\Big|_{y=2x-1} = \frac{3(2x-1)^2-1}{2} =$

$= \frac{3 \cdot (4x^2 - 4x + 1) - 1}{2} = 6x^2 - 6x + 1$

Нормировка:

$\|\tilde{\varphi}_0\| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{\varphi}_0^2 \cdot dx} = 1$

$\|\tilde{\varphi}_1\| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{\varphi}_1^2 \cdot dx} = \sqrt{\int_0^1 (2x-1)^2 \cdot dx} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\|\tilde{\varphi}_2\| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{\varphi}_2^2 \cdot dx} = \sqrt{\int_0^1 (6x^2-6x+1)^2 \cdot dx} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\tilde{p}_0 = 1$

$\tilde{p}_1 = \sqrt{3} \cdot (2x-1)$

$\tilde{p}_2 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

№8 1. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4i \\ x & y \end{pmatrix}$

а) $A^+ = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0,3 & x^* \\ -0,4i & y^* \end{pmatrix}$

$A = A^+$, если $x = -0,4i$, $y \in Re$

б) $\boxed{U^+ = U^{-1}}$ - унитарная

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{y}{0,3y - 0,4ix} & (-1) \cdot \frac{0,4i}{0,3y - 0,4ix} \\ \frac{x}{0,3y - 0,4ix} \cdot (-1) & \frac{0,3}{0,3y - 0,4ix} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{10y \cdot (3y + 4ix)}{(3y - 4ix)(3y + 4ix)} & (-1) \frac{4i(3y + 4ix)}{(3y - 4ix) \cdot (3y + 4ix)} \\ \frac{10x \cdot (3y + 4ix)}{(3y - 4ix)(3y + 4ix)} \cdot (-1) & \frac{3(3y + 4ix)}{(3y - 4ix) \cdot (3y + 4ix)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{30y^2+40ixy}{16x^2+9y^2} & \frac{16x-12iy}{16x^2+9y^2} \\ \frac{-30xy-40ix^2}{16x^2+9y^2} & \frac{9y+12ix}{16x^2+9y^2} \end{pmatrix} =$$

$$= A^+ = \begin{pmatrix} 0,3 & x^* \\ -0,4i & y^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{10} = 0,3 = \frac{30y^2+40ixy}{16x^2+9y^2}$$

$$\frac{-4i}{10} = -0,4i = \frac{-30xy-40ix^2}{16x^2+9y^2}$$

$$-\frac{3}{4i} = \frac{30y^2+40ixy}{-30xy-40ix^2} = \frac{3y^2+4ixy}{-3xy-4ix^2}$$

$$90xy + 120ix^2 = 120iy^2 + 160\cdot(-1)xy$$

$$9xy + 12ix^2 = 12iy^2 - 16xy$$

$$12i\cdot x^2 + 25xy - 12iy^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-25y \pm \sqrt{(25y)^2 - 4\cdot 12i\cdot(-12iy^2)}}{24i} =$$

$$= \frac{-25y \pm \sqrt{(625-576)y^2}}{24i} =$$

$$= \frac{-25y \pm 7y}{24i}$$

$$x_1 = \frac{-32y}{24i} = -\frac{4y}{3i}$$

$$x_2 = \frac{-18y}{24i} = -\frac{3y}{4i}$$

при $x = -\frac{4y}{3i}$

при $x = -\frac{3y}{4i}$

$$\frac{3}{10} = \frac{30y^2+40ixy}{16x^2+9y^2}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{30y^2+40iy\cdot\left(-\frac{4y}{3i}\right)}{16\cdot\left(-\frac{4y}{3i}\right)^2+9y^2}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{30y^2-\frac{160}{3}y^2}{9y^2-\frac{16\cdot16}{9}y^2}$$

$$27y^2 - \frac{16\cdot16}{3}y^2 = 300y^2 - \frac{160\cdot10}{3}y^2$$

$$x^* = \frac{16x-12iy}{16x^2+9y^2} = \frac{16x-12i\cdot\frac{3ix}{-4}}{16x^2+9\cdot\left(\frac{3ix}{-4}\right)^2} = \frac{16x-9x}{16x^2-\frac{27}{16}x^2} =$$

$$= \frac{7x\cdot16}{229x^2} = \frac{112}{x\cdot229}$$

$$x^*\cdot x = \frac{112}{229}$$

$$\frac{x^*}{y^*} = -\frac{4}{3i} = \frac{16x - 12iy}{9y + 12ix}$$

$$-36y - 48ix = 48ix + 36y$$

$$-36y = 48ix$$

$$-\frac{3y}{4i} = x$$

при $x = -\frac{4y}{3i}$ или $x = -\frac{3y}{4i}$

№3 $\begin{pmatrix} E_1 & V & 0 \\ V & E_2 & V \\ 0 & V & E_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} E_1-\lambda & V & 0 \\ V & E_2-\lambda & V \\ 0 & V & E_3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Попр. диагонализовать

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{E_1-\lambda} & 0 \\ 1 & \frac{E_2-\lambda}{V} & 1 \\ 0 & V & E_3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{E_1-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{V}{(E_1-\lambda)} - \frac{(E_2-\lambda)}{V} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{(E_3-\lambda)}{V} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{E_1-\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1 \cdot V \cdot (E_1-\lambda)}{V^2-(E_1-\lambda)(E_2-\lambda)} \\ 0 & 1 & \left(\frac{E_3-\lambda}{V}\right) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{E_1-\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & -//- \\ 0 & 0 & \frac{(E_3-\lambda)}{V} + \frac{V(E_1-\lambda)}{V^2(E_1-\lambda)(E_2-\lambda)} \end{pmatrix}$$

....

$$\begin{vmatrix} E_1-\lambda & V & 0 \\ V & E_2-\lambda & V \\ 0 & V & E_3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

V мало

$$(E_1-\lambda)\cdot((E_2-\lambda)\cdot(E_3-\lambda) - V^2) + (-1)\cdot V\cdot(V(E_3-\lambda)) = 0$$

$$(E_1-\lambda)\cdot(E_2\cdot E_3 - \lambda E_3 - \lambda E_2 + \lambda^2 - V^2) - V^2 E_3 + V^2\lambda = 0$$

$$E_1\cdot E_2\cdot E_3 - \lambda E_2 E_3 - \lambda E_3\cdot E_1 + \lambda^2 E_3 - \lambda E_1\cdot E_2 +$$

$$+\lambda^2 E_2 + \lambda^2 E_1 - \lambda^3 - V^2 E_1 + \lambda V^2 - V^2 E_3 + V^2\lambda = 0$$

$$\alpha\cdot\lambda^3 + \underbrace{(-E_3-E_2-E_1)}_{b}\lambda^2 + \underbrace{((E_2\cdot E_3 + E_3\cdot E_1 + E_1\cdot E_2) - 2V^2)}_{c}\lambda -$$

$$\underbrace{- E_1 E_2 E_3 + V^2 E_1 + V^2 E_3}_{d} = 0 \qquad (*)$$

1) Найти СВ полагая V малым

2) а) $E_i \neq E_j$

б) $E_1 = E_2 = E_3 = E$

$$\lambda^3 - 3E\lambda^2 + (3E^2 - 2V^2)\lambda - E^3 + 2EV^2 = 0$$

в) $E_1 = E_2 \neq E_3$

$E_1 + E_2 = E_3$

г) $E_1 = E_3 \neq E_2$

1) V мало $\Rightarrow \lambda_1 = E_1 + \delta E_1$

$\lambda_2 = E_2 + \delta E_2$

$\lambda_3 = E_3 + \delta E_3$

Подст. $\lambda_1 = E_1 + \delta E_1$ в ур-е. Далее приближенно:

$$(E_1+\delta E_1)^3 - (E_1+E_2+E_3)(E_1+\delta E_1)^2 + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_1+\delta E_1) + V^2(E_1+E_3) - E_1E_2E_3 = 0 \approx$$

$$\approx \Big[E_1^3 + 3E_1^2\cdot\delta E_1 - (E_1+E_2+E_3)\cdot(E_1^2 + 2E_1\cdot\delta E_1) + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_1+\delta E_1) + V^2(E_1+E_3) - E_1E_2E_3 = 0 \Big]$$

$$\delta E_1 = \frac{E_1E_2E_3 - V^2(E_1+E_3) - E_1^3 + (E_1+E_2+E_3)E_1^2 + (2V^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_1E_3)E_1}{3E_1^2 - 2E_1(E_1+E_2+E_3) + E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2} =$$

$$= \frac{-V^2E_1 - V^2E_3 + E_2E_1^2 + E_3E_1^2 + 2V^2E_1 - E_1^2E_2 - E_1^2E_3}{\text{-//-}} =$$

$$= \frac{V^2E_1 - V^2E_3}{\text{...}} = \frac{V^2(E_1-E_3)}{E_1^2 - E_1E_2 - E_1E_3 + E_2E_3 - 2V^2}$$

$$\lambda_1 = E_1 + \delta E_1 = E_1 + \frac{V^2(E_1-E_3)}{E_1^2 - E_1E_2 - E_1E_3 + E_2E_3 - 2V^2}$$

Симметрично:

$\lambda_3 = E_3 + \delta E_3$

$$(E_3+\delta E_3)^2 - (E_1+E_2+E_3)(E_3+\delta E_3)^2 + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_3+\delta E_3) + V^2(E_1+E_3) - E_1E_2E_3 = 0$$

$$\approx E_3^3 + 3E_3^2\cdot\delta E_3 - (E_1+E_2+E_3)\cdot(E_3^2 + 2E_3\cdot\delta E_3) + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_3+\delta E_3) + V^2(E_1+E_3) - E_1E_2E_3 = 0$$

$$\delta E_3 = \frac{E_1E_2E_3 - V^2(E_1+E_3) - E_3^3 + (E_1+E_2+E_3)E_3^2 + (2V^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_1E_3)E_3}{3E_3^2 - 2E_3(E_1+E_2+E_3) + E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2} \approx$$

$$= \frac{V^2(E_3-E_1)}{E_3^2 - E_3E_1 - E_3E_2 + E_2E_3 - 2V^2}$$

$$\lambda_3 = E_3 + \delta E_3 = \frac{V^2(E_3-E_1)}{E_3^2 - E_3E_1 - E_3E_2 + E_2E_3 - 2V^2} + E_3$$

$$\delta E_2 = \frac{E_1E_2E_3 - V^2(E_1+E_3) - E_1^3 + (E_1+E_2+E_3)E_1^2 + (2V^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_1E_3)\cdot E_1}{3E_1^2 - 2E_1(E_1+E_2+E_3) + E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2} =$$

$$\lambda_2 = E_2 + \delta E_2$$

$$(E_2+\delta E_2)^3 - (E_1+E_2+E_3)\cdot(E_2+\delta E_2)^2 + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_2+\delta E_2) + V^2\cdot(E_1+E_3) - E_1\cdot E_2\cdot E_3 = 0$$

$$\approx$$

$$E_2^3 + 3E_2^2\cdot\delta E_2 - (E_1+E_2+E_3)\cdot(E_2^2 + 2E_2\cdot\delta E_2) + (E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)(E_2+\delta E_2) + V^2(E_1+E_3) - E_1E_2E_3 = 0$$

$$\delta E_2 = \frac{\cancel{E_1E_2E_3} - V^2(E_1+E_3) - \cancel{E_2^3} + \cancel{(E_1+E_2+E_3)\cdot E_2^2} + (2V^2 - \cancel{E_1E_2} - \cancel{E_2E_3} - \cancel{E_1E_3})\cdot E_2}{3E_2^2 - 2E_2(E_1+E_2+E_3) + (E_1\cdot E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2)}$$

$$= \frac{V^2\cdot(2E_2 - E_1 - E_3)}{E_2^2 - E_2E_1 - E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = E_2 + \delta E_2 = E_2 + \frac{V^2(2E_2 - E_1 - E_3)}{E_2^2 - E_2E_1 - E_2E_3 + E_1E_3 - 2V^2}}$$

2) a) $E_i \neq E_j \quad i,j = \overline{1,3}$

$$\lambda_1 = \frac{E_1^3 - E_1^2\cdot E_2 - E_1^2\cdot E_3 + E_1\cdot E_2E_3 - V^2E_1 - V^2E_3}{E_1^2 - E_1E_2 - E_1E_3 + E_2E_3 - 2V^2}$$

$V^2 < V^2(E_1+E_3)$

λ_1 с ростом V падает (слабо)

λ_3 с ростом V падает (слабо)

$$\lambda_2 = \frac{E_3^3 - E_2\cdot E_2^2 - E_3\cdot E_2^2 + E_1\cdot E_2\cdot E_3 - E_1\cdot V^2 - E_3\cdot V^2}{\ldots - 2V^2}$$

λ_2 с ростом V слабо падает

б) $E_1 = E_2 = E_3$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \text{const}$

в) $E_1 = E_2 \neq E_3$

$$\lambda_1 = \frac{E_1^3 - \cancel{E_1^3} - E_1^2E_3 + \cancel{E_1^2E_3} - V^2E_1 - V^2E_3}{\cancel{E_1^2} - \cancel{E_1^2} - E_1E_3 + E_1E_3 - 2V^2} =$$

$$= \frac{E_1+E_3}{2} \quad \text{не зав. от } V$$

λ_3 не зав от V

$$\lambda_2 = E_2 + \frac{V^2(E_1 - E_3)}{\cancel{E_1^2} - \cancel{E_1^2} - E_1E_3 + E_1E_3 - 2V^2} =$$

$$= E_2 + \frac{(E_1 - E_3)}{2} \quad \text{не зав. от } V$$

г) $E_1 = E_3 \neq E_2$

$\lambda_1 = E_1, \lambda_3 = E_3$ пост, от V не зависит

$$\lambda_2 = E_2 + \frac{V^2(2E_2 - 2E_1)}{E_2^2 - E_1\cdot E_2 - E_2E_1 + E_1^2 - 2V^2} = E_2 + \frac{V^2\cdot 2(E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 - 2V^2}$$

Семинар №3

$$= \begin{pmatrix} E_1-\lambda & V & 0 \\ V & E_2-\lambda & V \\ 0 & V & E_3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$= E$

$\lambda_1 = E_1 + \delta E$

$$\delta E = \left(\frac{E_1-E_2}{V^2}\right)^{-1} = \frac{V^2}{E_1-E_2}$$

$$\lambda_1 = E_1 + \frac{V^2}{E_1-E_2}$$

$$\lambda_3 = E_3 + \frac{V^2}{E_3-E_2}$$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = E_1+E_2+E_3$ (ц св-ва следов)

$$E_1+E_3+\lambda_2 = \frac{V^2}{E_1-E_2} + \frac{V^2}{E_3-E_2} + E$$

$$\lambda_2 = E_2 - \frac{V^2}{E_1-E_2} - \frac{V^2}{E_3-E_2}$$

$$\lambda_2 = E_2 + \frac{V^2}{E_2-E_1} + \frac{V^2}{E_2-E_3}$$

Если $E_1=E_2$, то $\lambda_{1,2} = E_1 \pm V$

Если спектр невырожден, то поправки $\sim V^2$.

Если вырожден, то $\pm V$.

Если атом водорода пом. в эл. поле (эфф. Штарка) - эфф. Штарка линеен (поправка к энергии $\sim E_z^1$)

В многоэл. атомах по другому.

$\overline{L=0}$ $\overline{L=1}$ -

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx} \cdot f(x)\,dx = \tilde{f}(k)$$

Док., что $\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^{-1}$

Унит. преобр. преобразует ВФ и операторы, сохраняет скалярное произведение

Т. Если лин. преобр. сохраняет скал. произв, то оно явл. унитарным.

△

$|\tilde{\psi}\rangle = \mathcal{U}^+|\psi\rangle$, $|\tilde{\chi}\rangle = \mathcal{U}^+|\chi\rangle$

$\langle\tilde{\chi}| = \langle\chi|(\mathcal{U}^+)^+ = \langle\tilde{\chi}|\mathcal{U}$

$\langle\tilde{\chi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\chi|\underbrace{\mathcal{U}\mathcal{U}^+}_{1}|\psi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle$ ⊄

Если $\langle \hat{x}\psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{x}\psi \rangle$, то опр. унитарный.

Док. унитарности Фурье-преобразования

$\Delta \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx} \cdot f(x)dx = \tilde{f}(k)$

?

$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx} \cdot g(x) \cdot dx = \tilde{g}(k)$

$\int f^*(x) \cdot g(x) \cdot dx = \int \tilde{f}^*(x) \cdot g(x) dx$ —

$\not\Delta$

№1 +

Док., что $\hat{T}\psi(x) = \psi(x-a)$ оператор трансляции тоже явл. унитарным.

Спектральное разложение эрмитова оператора.

$\hat{A}$ - эрмитов

Пусть мы реш. (решили) задачу на СЗ:

$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$

Матрица $\hat{A}$ в базисе из с. операторов:

$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ — спектральное разложение эрмитова оператора

$|a_1\rangle\langle a_1| = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ — проектор на a_1

$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = a_1|a_1\rangle\langle a_1| + a_2|a_2\rangle\langle a_2| + \dots$

$+ a_n|a_n\rangle\langle a_n| = \sum a_n \cdot \underbrace{P_{|a_n\rangle}}_{|a_n\rangle\langle a_n|}$

Замеч. 1, $\sum a_n \cdot P_{|a_n\rangle}$ справедливо в $\forall$ базисе!

т.е, $\hat{A} = \sum a_n|a_n\rangle\langle a_n| = \sum a_n \cdot P_{|a_n\rangle}$ в $\forall$ базисе

Найдем в каком-нибудь состоянии ср. знач.:

$\langle A \rangle = \sum_n a_n \cdot \langle P_{|a_n\rangle} \rangle$ (*)

Получ. что из коэфф. a_n, нет возм. предсказать, какое именно значение a_n получ. Предсказуема вероятность получ. a_n.

+ $\langle P_{|a_n\rangle} \rangle$ - вер. получить при измерении a_n (это более общее утвержд.)

$\langle\psi|P_{|a_n\rangle}|\psi\rangle$ - ф. знач. проектора

$\langle\psi|P_{|a_n\rangle}|\psi\rangle = \langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$

это менее общее утв., чем (*)

$P_{a_n} \equiv P_{|a_n\rangle}$

a_n — вер. получить a_n; $|a_n\rangle$ — вер. найти систему в состоянии a_n

$\langle A\rangle = \sum_n a_n |\langle a_n|\psi\rangle|^2$

Замеч. 2 | Спектр. разложение дает вопр.

опр. ф-ю от оператора, ф-я от опер опр. как разлож. в ряд Тейлора

Опр 1. $f(\hat{A}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot\hat{A}^1 + \frac{f''(0)}{2!}\hat{A}^2 + \dots$

↑ это непр. опр. т.к. ряды не всегда сходятся

Опр. 2 Прав. определение:

$f(\hat{A}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} + \frac{f''(0)}{2!}\begin{pmatrix} a_1^2 & & \\ & a_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} =$ ← можно расчет не только около 0

$= \begin{pmatrix} f(a_1) & & 0 \\ & f(a_2) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

$f(a_1)$ - разложения в ряд Тейлора для $f(a_1)$

Опр 1 : спр. чувства

Опр 2 : спр. всегда

$f(\hat{A}) = \sum_n f(a_n)\cdot\hat{P}_{|a_n\rangle} = \sum_n f(a_n)\cdot|a_n\rangle\langle a_n|$

годится $\forall$ функции с точн. опр. знач. в т. a_n.

(№2) Вычислить:

$e^{\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}\cdot t} = ?\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

(решать через спектральное разложение)

$e^{\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}t}$ — есть - полное реш. задач. динамики системы с 2-мя сост. с гамильтонианом $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}$

(№3) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Найти ф. знач. $\hat{A}$ в сост. ψ и дисп. в этом сост. двумя способами:

1) $\left.\begin{matrix} \langle\psi|A|\psi\rangle \\ \langle\psi|A^2|\psi\rangle \end{matrix}\right| \Rightarrow$ дисперсия

2) через спектр. разложение

ск. $\underbrace{a_1, a_2}_{СЗ}$, затем $\underbrace{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle}_{СВ}$

затем вер.

$\langle a\rangle = a_1 |\langle\alpha_1|\psi\rangle|^2 + a_2 |\langle\alpha_2|\psi\rangle|^2$

$\langle a^2\rangle = a_1^2 |\langle\alpha_1|\psi\rangle|^2 + a_2^2 |\langle\alpha_2|\psi\rangle|^2$

Метод ран.: $A|\psi\rangle$

затем

$\langle\psi|A$

$A|\psi\rangle = |\chi\rangle$

$\langle\chi| = \langle\psi|A^+ = \langle\psi|A$

$\langle\chi|\chi\rangle = \underbrace{\langle\psi|A}\cdot\underbrace{A|\psi\rangle}$

перемн. 2-х столбцов

$U = e^{i\alpha\hat{A}}$, $\alpha \in Re$

$\hat{A}$ - какой-то эрмитов оператор

$\left(e^{i\alpha\hat{A}}\right)^+ = e^{-i\alpha\hat{A}^+} = e^{-i\alpha\hat{A}} = U^{-1}$, $U^+ = U^{-1}$

Рецепт постр. унитарных операторов:

$U = e^{i\alpha\hat{A}}$

(№4) Док., что $U = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 - \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 + i\varphi}$ - унитарный оператор, реализ. преобр. Галилея (делает сдвиг в н-ве на x_0, делает сдвиг по скорости таким, что импульс меняется на p_0)

$U^+\hat{x}U$ сдв. на x_0

$U^+\hat{p}U$ сдв. на p_0

Зам. Не подставл. $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, а пользуемся, что $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$;

В трехмерии $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \cdot \delta_{ij}$

Квантовомех. обобщен. момент импульса

$$\vec{l} = \frac{1}{\hbar}[\vec{x} \times \vec{p}]$$

Вычислить $\underbrace{e^{i l_1 \varphi}}_{U^+}$ { 1) x_1, 2) p_1, 3) l_1 } $\underbrace{e^{-i l_1 \varphi}}_{U}$

{ 1) x_2, 2) p_2, 3) l_2 }

{ 1) x_3, 2) p_3, 3) l_3 }

$e^{i l_1 \varphi} \cdot x_3 \cdot e^{-i l_1 \varphi}$

Вич. = не ост. в форме беск. ряда

Формула Бейкера - Хаусдорфа здесь нужна:

$$e^A \cdot B \cdot e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A[A,B]] + \frac{1}{3!}[A[A[AB]]] + \dots$$

Док-во формулы:

Δ $F(x) = e^{xA} \cdot B \cdot e^{-xA}$

$F(0) = B$

Пользуясь опр. через ряд Тейлора доказать, что: $\frac{d}{dx} e^{xA} = A \cdot e^{xA} = e^{xA} \cdot A$ (№6) +

(чтоб док., нужно разложить e^{xA} в ряд)

$$F'(x) = \underline{e^{xA} \cdot A} \cdot B \cdot e^{-xA} + e^{xA} \cdot B \underline{(-A) \cdot e^{-xA}} =$$

$$= e^{xA}[A,B]e^{-xA}$$

$F'(0) = [A,B]$

$F''(0) = [A,[A,B]]$

. . . . . .

$F(x) = e^{xA} \cdot B \cdot e^{-xA} = F(0) + \frac{x^1}{1!} \cdot F'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot F''(0) + \dots =$

$= B + \frac{x^1}{1!}[A,B] + \frac{x^2}{2!}[A[AB]] + \dots$ (*)

(№7) ∎

Замечание реш. задачу про поворотах нужно написать до реш. все коммутаторы $[l_i, x_j]$, $[l_i, p_j]$, $[l_i, l_j]$ – соотн. таблицы. Потом уже

исп. ф-у (*). Ряд сверн. в тригонам. функцию.

Домашняя работа №3.

(№1) $\hat{T}\psi(x) = \psi(x-a)$ - оператор трансляции.

Доказать: $\hat{T}$ - унитарной

$\Delta\ \hat{T}\psi(x) = \psi(x-a) = \tilde{\psi}$

$T\chi(x) = \chi(x-a) = \tilde{\chi}$

$\langle\psi|\chi\rangle = \int \psi^*(x)\cdot\chi(x)\,dx$

$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\chi}\rangle = \int \tilde{\psi}^*(x)\cdot\tilde{\chi}(x)\,dx = \int \psi^*(x-a)\cdot\chi(x-a)\cdot dx =$

$= \int \psi^*(x-a)\cdot\chi(x-a)\cdot d(x-a) = \int \psi^*(\xi)\cdot\chi(\xi)\cdot d\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\langle\psi|\chi\rangle = \langle\tilde{\psi}|\tilde{\chi}\rangle$, т.е. данное преобразование сохраняет скалярное произведение $\Rightarrow$ $\hat{T}$-унитарный оператор.

(№2) $e^{\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2\end{pmatrix}t} = ?$

$$\begin{vmatrix} E_1-\lambda & V \\ V & E_2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$(E_1-\lambda)(E_2-\lambda) - V^2 = 0$

$\lambda^2 - \lambda(E_1+E_2) - V^2 + E_1E_2 = 0$

$\mathcal{D} = (E_1+E_2)^2 - 4(E_1E_2 - V^2)$

$= (E_1-E_2)^2 + 4V^2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(E_1+E_2) \pm \sqrt{(E_1-E_2)^2+4V^2}}{2}$$

$f(\hat{A}) = \sum_n f(a_n)\cdot|a_n\rangle\langle a_n|$

$f(\hat{A}) = e^{\frac{i}{\hbar}At} = f(\lambda_1)\cdot|a_1\rangle\langle a_1| + f(\lambda_2)\cdot|a_2\rangle\langle a_2| =$

$= f(\lambda_1)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + f(\lambda_2)\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} =$

$= e^{\frac{i}{\hbar}\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + e^{\frac{i}{\hbar}\lambda_2 t}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E_1+E_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2+V^2}\right)t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t\,i}{\hbar}\left(\frac{E_1+E_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2+V^2}\right)}\end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)\cdot t}\cdot\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2+V^2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2+V^2}t}\end{pmatrix} =$$

$=$

№3 $\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$

а) $\hat{A}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+2b \\ 2a+9b \end{pmatrix}$

$\langle\psi|\hat{A} = (a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = (6a+2b \quad 2a+9b)$

$\langle\psi|A^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\hat{A}|\psi\rangle = (6a+2b \quad 2a+9b) \cdot \begin{pmatrix} 6a+2b \\ 2a+9b \end{pmatrix} =$

$= (6a+2b)^2 + (2a+9b)^2 = 36a^2 + 24ab + 4b^2 + 4a^2 + 36ab +$

$+ 81b^2 = 40a^2 + 60ab + 85b^2$

$\langle\psi|A|\psi\rangle = (a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} 6a+2b \\ 2a+9b \end{pmatrix} = a \cdot (6a+2b) +$

$+ b \cdot (2a+9b) = 6a^2 + 2ab + 2ab + 9b^2 =$

$= 6a^2 + 4ab + 9b^2$

$(\langle\psi|A|\psi\rangle)^2 = (6a^2 + 4ab + 9b^2)^2 = 36a^4 + 16a^2b^2 +$

$+ 81b^4 + 48a^3b + 72ab^3 + 108a^2b^2$

$\mathcal{D} = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = 40a^2 + 60ab + 85b^2 - 36a^4 -$

$- 16a^2b^2 - 81b^4 - 48a^3b - 72ab^3 - 108a^2b^2$

б) $\langle A\rangle = a_1 |\langle a_1|\psi\rangle|^2 + a_2 |\langle a_2|\psi\rangle|^2$

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$

$54 - 6\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \mathcal{D} = \sqrt{225 - 4 \cdot 50} = \sqrt{25} = 5$

$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm 5}{2} \rightarrow \lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = 10$

$a_1 = 5, \; a_2 = 10$

1. $a_1 = 5 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\alpha_1 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Нормировка; $C_1^2 \cdot (4+1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $a_2 = 10 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\alpha_2 = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\langle A\rangle = 5 \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2 \quad 1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2 + 10 \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1 \quad 2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2 =$

$= |b-2a|^2 + 2|a+2b|^2 = b^2 - 4ab + 4a^2 + 2a^2 + 8ab +$

$+ 8b^2 = 6a^2 + 4ab + 9b^2$

$\langle A^2\rangle = a_1^2 |\langle a_1|\psi\rangle|^2 + a_2^2 |\langle a_2|\psi\rangle|^2$

$\langle A^2\rangle = 25 \cdot \left|\frac{1}{\sqrt5}\cdot(-2\ \ 1)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^2 + 100 \cdot \left|\frac{1}{\sqrt5}\cdot(1\ \ 2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^2 =$

$= 5\cdot|b-2a|^2 + 20\cdot|a+2b|^2 = 5(b^2 - 4ab + 4a^2) +$

$+ 20(a^2 + 4ab + 4b^2) = 5b^2 - 20ab + 20a^2 +$

$+20a^2 + 80ab + 80b^2 = 40a^2 + 85b^2 + 60ab$

$D = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = 40a^2 + 85b^2 + 60ab -$

$- 36a^4 - 16a^2b^2 - 81b^4 - 48a^3b - 72ab^3 - 108a^2b^2$

(N5) $\frac{d}{dx}(e^{x\hat A})$ -? производ. по $\hat A$?

$f(\hat A) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot\hat A^1 + \frac{f''(0)}{2!}\cdot\hat A^2 + \dots$

$\exp(x\hat A) = \hat{\mathbb{I}} + \frac{x\cdot\hat A}{1} + \frac{x^2}{2!}\cdot\hat A^2 + \dots = \hat{\mathbb{I}} + x\hat A + \frac{x^2}{2!}\hat A^2 + \dots =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\hat A^k$

$\frac{d}{dx}(e^{x\hat A}) = \frac{d}{dx}\left(\hat{\mathbb{I}} + \frac{x}{1!}\hat A + \frac{x^2}{2!}\cdot\hat A^2 + \dots\right) =$

$= \hat\Theta + \hat A + x\hat A^2 + \frac{x^2}{2!}\cdot\hat A^3 + \dots =$

$= \hat A\cdot\left(\hat{\mathbb{I}} + x\hat A + \frac{x^2}{2!}\hat A^2 + \frac{x^3}{3!}\hat A^3 + \dots\right) =$

$= \hat A\cdot\exp(x\hat A) = \exp(x\hat A)\cdot\hat A$

(N6) $\vec l = \frac{1}{\hbar}[\vec x, \vec p]$ - обезразмеренный момент импульса

$\hat l = \frac{1}{\hbar}\cdot[\hat x, \hat p]$, $\hat l_i = -i\cdot\varepsilon_{ijk}\cdot x_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_k} = -i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}$

$[\hat l_i, \hat x_j]\psi = \hat l_i\hat x_j\psi - \hat x_j\hat l_i\psi = -i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j\cdot\psi) +$

$+ x_j\cdot i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = -i\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\cdot\psi - i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot x_j\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} +$

$+ i\cdot x_j\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = -i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\delta_{jk}\cdot\psi = -i\cdot\varepsilon_{iej}\cdot x_e\cdot\psi =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{переобознач.}\\ e=k\end{matrix}\right\} = -i\varepsilon_{ikj}\cdot x_k\psi = i\varepsilon_{jki}\cdot x_k\psi = i\varepsilon_{ijk}\cdot\hat x_k\psi$

$$\boxed{[\hat l_i, \hat x_j] = i\cdot\varepsilon_{ijk}\cdot\hat x_k}$$

$[\hat l_i, \hat p_j]\psi = \hat l_i\hat p_j\psi - \hat p_j\hat l_i\psi = -i\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\right) -$

$-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-i\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\psi\right)\right) = -\hbar\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\cdot\partial x_j} +$

$+\hbar\cdot\varepsilon_{iek}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_e\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = -\hbar\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\cdot\partial x_j} +$

$+\hbar\cdot\varepsilon_{iek}\cdot x_e\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\cdot\partial x_j} + \hbar\cdot\varepsilon_{iek}\cdot\delta_{ej}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = \hbar\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} =$

$= \varepsilon_{ijk}\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\cdot\frac{1}{-i} = i\cdot\varepsilon_{ijk}\cdot\hat p_k\psi$

$$[\hat{l}_i, \hat{p}_i] = i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \hat{p}_k$$

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\, \varepsilon_{ijk} \cdot \hat{l}_k$$

1. $e^{il_1\varphi} \cdot x_1 \cdot e^{-il_1\varphi} = x_1 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, x_1] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot [l_1[l_1, x_1]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1[l_1[l_1, x_1]]] + \dots =$

$= \{ [\hat{l}_1, \hat{x}_1] = i \cdot \varepsilon_{11k} \cdot \hat{x}_k = 0 \} = x_1$

2. $e^{il_1\varphi} \cdot p_1 \cdot e^{-il_1\varphi} = p_1 + \frac{i\varphi}{1!} [l_1, p_1] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot [l_1[l_1 p_1]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1[l_1[l_1 p_1]]] + \dots =$

$= \{ [l_1, p_1] = i \cdot \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{=0} \cdot p_k = 0 \} = p_1$

3. $e^{il_1\varphi} \cdot l_1 \cdot e^{-il_1\varphi} = l_1$

4. $e^{il_1\varphi} \cdot x_2 \cdot e^{-il_1\varphi} = x_2 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, x_2] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot [l_1[l_1 x_2]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1[l_1[l_1, x_2]]] + \dots =$

$[l_1, x_2] = i\, \varepsilon_{12k} \cdot x_k = i \cdot \varepsilon_{123} \cdot x_3 = i x_3$

$[l_1, [l_1 x_2]] = i\, [l_1, x_3] = \{ [l_1, x_3] = i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot x_k = i \cdot \varepsilon_{132} \cdot x_2 = -i x_2 \} = i \cdot (-i x_2) = x_2$

$[l_1[l_1[l_1, x_2]]] = [l_1, x_2] = i x_3$

$= x_2 + i\varphi \cdot i x_3 - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot x_2 + \frac{i \cdot (-\varphi^3)}{3!} \cdot i x_3 + \dots =$

$= x_2 - \varphi x_3 - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot x_2 + \frac{\varphi^3}{3!} \cdot x_3 + \dots = x_2 \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \dots\right) +$

$+ (-x_3) \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right) = x_2 \cdot \cos\varphi - x_3 \cdot \sin\varphi$ (поворот вокруг оси x_1)

5. $e^{il_1\varphi} \cdot p_2 \cdot e^{-il_1\varphi} = p_2 + \frac{i\varphi}{1!} [l_1, p_2] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot [l_1[l_1, p_2]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1[l_1[l_1, x_2]]] + \dots =$

$[l_1, p_2] = i \cdot \varepsilon_{12k} \cdot p_k = i p_3$

$A = [l_1, [l_1, p_2]] = i\, [l_1, p_3] = i \cdot i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot p_k = (-1) \cdot \varepsilon_{132} \cdot p_2 = p_2$

$[l_1, A] = [l_1, p_2] = i p_3$

$\dots$

$= p_2 + i\varphi \cdot i p_3 + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot p_2 + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot i p_3 + \dots =$

$= p_2 \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \dots\right) - p_3 \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right) =$

$= p_2 \cdot \cos\varphi - p_3 \cdot \sin\varphi$

6. $e^{il_1\varphi} \cdot l_2 \cdot e^{-il_1\varphi} = l_2 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, l_2] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot [l_1[l_1 l_2]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1[l_1[l_1 l_2]]] + \dots =$

$A = [l_1, l_2] = i \cdot \varepsilon_{12k} \cdot l_k = i \cdot \varepsilon_{123} \cdot l_3 = i l_3$

$B = [l_3 [l_1 l_2]] = i[l_1 l_3] = i \cdot i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot l_k = -\varepsilon_{132} \cdot l_2 = l_2$

$[l_1 [l_3 [l_1, l_2]]] = [l_1, l_2] = i \cdot \varepsilon_{12k} \cdot l_k = i \cdot \varepsilon_{123} l_3 = i l_3$

$= l_2 + i\varphi \cdot i l_3 + \frac{(-\varphi^2)}{2!} \cdot l_2 - \frac{i\varphi^3}{3!} \cdot (i l_3) + \frac{(i\varphi)^4}{4!} \cdot (l_2) + \ldots =$

$= l_2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right) - l_3 \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right) =$

$= l_2 \cdot \cos\varphi - l_3 \cdot \sin\varphi$

7. $e^{i l_1 \varphi} \cdot x_3 \cdot e^{-i l_1 \varphi} = x_3 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, x_3] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} [l_1 [l_1 x_3]] +$

$+ \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1 [l_1 [l_1 x_3]]] + \ldots$ $(=)$

$A = [l_1, x_3] = i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot x_k = i \cdot \varepsilon_{132} \cdot x_2 = -i x_2$

$B = [l_1, A] = -i [l_1, x_2] = (-i) \cdot i \cdot \varepsilon_{12k} \cdot x_k = \varepsilon_{123} \cdot x_3 = x_3$

$[l_1, B] = [l_1, x_3] = -i x_2$

$\ldots$

$(=)\ x_3 + i\varphi \cdot (-i x_2) + \frac{(-\varphi^2)}{2!} \cdot x_3 - \frac{i\varphi^3}{3!} \cdot (-i x_2) + \frac{\varphi^4}{4!} \cdot x_3 + \ldots =$

$= x_3 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right) + x_2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right) =$

$= x_2 \cdot \sin\varphi + x_3 \cdot \cos\varphi$

8. $e^{i l_1 \varphi} \cdot p_3 \cdot e^{-i l_1 \varphi} = p_3 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, p_3] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} [l_1 [l_1 p_3]] +$

$+ \ldots$ $(=)$

$[l_1, p_3] = i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot p_k = i \cdot \varepsilon_{132} \cdot p_2 = -i p_2$

$B = [l_1, [l_1, p_3]] = -i [l_1, p_2] = -i \cdot i \cdot \varepsilon_{123} \cdot p_3 = p_3$

$[l_1, B] = -i p_2$

$(=)\ p_3 + i\varphi \cdot (-i p_2) - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot p_3 - \frac{\varphi^3}{3!} \cdot p_2 + \ldots =$

$= p_3 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) + p_2 \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right) =$

$= p_3 \cdot \cos\varphi + p_2 \cdot \sin\varphi$

9. $e^{i l_1 \varphi} \cdot l_3 \cdot e^{-i l_1 \varphi} = l_3 + \frac{i\varphi}{1!} \cdot [l_1, l_3] + \frac{(i\varphi)^2}{2!} \cdot$

$\cdot [l_1 [l_1 l_3]] + \frac{(i\varphi)^3}{3!} \cdot [l_1 [l_1 [l_1 [l_1 l_3]]]] + \ldots =$

$(=)$

$A = [l_1, l_3] = i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot l_k = i \cdot \varepsilon_{132} \cdot l_2 = -i l_2$

$B = [l_1, A] = (-i) \cdot [l_1, l_2] = (-i) \cdot i l_3 = l_3$

$[l_1, B] = [l_1, l_3] = -i l_2$

$\ldots$

$(=)\ l_3 + i\varphi \cdot (-i l_2) + \frac{(-\varphi^2)}{2!} \cdot l_3 - \frac{i\varphi^3}{3!} \cdot (-i l_2) + \frac{\varphi^4}{4!} \cdot l_3 + \ldots =$

$= l_3 \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right) + l_2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right) =$

$= l_2 \cdot \sin\varphi + l_3 \cdot \cos\varphi$

(№4) $\hat{u} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 - \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 + i\varphi}$ — реализ. преобр-е Галилея

Док., что $\hat{U}$ - унитарный оператор

(исп., что $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$)

$$U^+ = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}^+x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}^+p_0 - i\varphi} = \{\hat{p}^+ = \hat{p},\ \hat{x}^+ = \hat{x}\} =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}(-x_0) - \frac{i}{\hbar}\hat{x}(p_0) + i\cdot(-\varphi)}$$

$$= U^{-1}$$

$U^+ = U^{-1}$ $\Rightarrow$ оператор унитарный

$$\hat{u}^+\hat{x}\hat{u} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi}\ \hat{x}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 - \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 + i\varphi} =$$

$$= \hat{x} + \frac{1}{1!}\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi,\ \hat{x}\right] + \dots =$$

$$= \hat{x} + \left(-\frac{i}{\hbar}x_0\right)[\hat{p}, \hat{x}] + \frac{i}{\hbar}p_0[\hat{x}, \hat{x}] + \dots = \quad [A[A,B]]$$

$$= \hat{x} - \frac{i}{\hbar}x_0\cdot(-i\cdot\hbar) + \dots = \hat{x} - x_0\cdot\hat{I} + \dots$$

$$[A[A,B]] = \left[-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi,\ x_0\cdot\hat{I}\right] = 0$$

$[A, [A, [A,B]]] = 0$

$\dots = 0$

$$\hat{u}^+\hat{x}\hat{u} = \hat{x} - x_0\cdot\hat{I}$$

$$\hat{u}^+\hat{p}\hat{u} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi}\ \hat{p}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 - \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 + i\varphi} = \quad 73$$

$$= \hat{p} + [\hat{A}, \hat{p}] + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] + \dots \quad (=)$$

$$[\hat{A}, \hat{p}] = \left[-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{x}p_0 - i\varphi,\ \hat{p}\right] =$$

$$= 0 + \frac{i}{\hbar}p_0[\hat{x}, \hat{p}] + 0 = \frac{i}{\hbar}p_0\cdot i\hbar = -p_0 =$$

$$= -p_0\cdot\hat{I}$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] = 0$$

$\dots = 0$

$(=)\ \hat{p} - p_0\cdot\hat{I}$

Семинар №4.

$e^{il_1\varphi}$ — оператор, реализующий поворот

$$e^{il_2\varphi}\ x_2 p_2\ e^{-il_1\varphi} = (x_2\cdot\cos\varphi - x_3\cdot\sin\varphi)\cdot$$

$$\cdot(p_2\cdot\cos\varphi - p_3\cdot\cos\varphi)$$

$[x_2, p_2] = i\hbar$

$$e^{il_1\varphi}\ x_2 p_2\cdot e^{-il_1\varphi} = e^{il_2\varphi}\ x_2\cdot e^{-il_2\varphi}\cdot p_2\cdot e^{-il_2\varphi} =$$

$= e^{il_2\varphi} \cdot x_2 \cdot \underbrace{e^{-il_2\varphi} \cdot e^{il_2\varphi}}_{I} p_2 \cdot e^{-il_2\varphi} = e^{il_2\varphi} \cdot x_2 \cdot e^{-il_2\varphi} \cdot$

$\cdot e^{il_2\varphi} \cdot p_2 \cdot e^{-il_2\varphi} = (x_2 \cdot \cos\varphi - x_3 \cdot \sin\varphi) \cdot (p_2 \cdot \cos\varphi - p_3 \sin\varphi$

вычислить:

№1

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}}$

Делать через спектральное разложение

$\lambda_1 |\psi_1\rangle$, $\lambda_2 |\psi_2\rangle$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$\sqrt{\lambda_1} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \sqrt{\lambda_2} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| =$

$= \sqrt{1} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \sqrt{-1} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| =$

$= (\pm 1) |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \pm i |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

№2 Дано:

$\rho = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4i \\ -0{,}4i & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Вычислить энтропию: $-Tr(\rho \ln \rho) = -\lambda_1 \cdot \ln\lambda_1 - \lambda_2 \cdot \ln\lambda_2$

Не с помощью ряда тейлора. А исп. СЛ:

~~$\ln\rho - \ln 1 + (\rho - 1)$~~

$-Tr(\rho \ln\rho) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 \end{pmatrix}$

№3 При каких λ (их бесконечно много) это матрица проекционная:

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\lambda = ?$

№4 Док, что $\forall$ матрицы [2×2]:

$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2) = P_1$ (проектор на 1-ый СВ $|\psi_1\rangle$)

$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1) = P_2$ (проектор на 2-ой СВ $|\psi_2\rangle$)

$Tr \Leftrightarrow Sp$ (след)

Докажать, что $Sp\, A = Sp(U^+ A U)$

(не меняется при унит. преобр.)

$Tr(ABC) = \{$ цикличн. перест. $\} =$

$= Tr(BCA) = Tr(CAB)$

Способ док-ва 1:

$Sp A = Sp(U^+ A U) = Sp(A \underbrace{U U^+}_{1}) = Sp A$

Способ док-ва 2: перейти в базис собств. векторов

$Sp A = Sp(U^+ A U)$

(сумма СЗ при унит. преобр не меняется)

$[a, a^+] = 1$

Доказать, что в <u>самосопряженном</u> п-ве таких матриц $\exists$ не может:

$Tr \hat{I} = 7$ (в самосопряженном п-ве)

$Sp(aa^+ - a^+a) = Sp(a^+a - a^+a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ таких матриц нет!

$[x, p] = i\hbar$ бывает только для бесконечномерн. матриц (док-во такое же)

$aa^+ + a^+a = \underline{-1}$, (такого нет ни в конечном. ни в беск. мерном случае)

$\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$СЗ(aa^+ + a^+a) \geq 0$ (Нужно док.)

НИД неотрицательности спектра:

$\lambda_i \geq 0 \iff \langle \psi | A \psi \rangle \geq 0$

$\langle \psi | \underbrace{aa^+}_{\chi} | \psi \rangle + \langle \psi | a^+ \underbrace{a | \psi \rangle}_{\xi} = \langle \chi | \chi \rangle +$

$+ \langle \xi | \xi \rangle = \underbrace{\langle \chi | \chi \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \xi | \xi \rangle}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0 \Rightarrow$ рав-во $aa^+ + a^+a = -1$ не выполняется

---

(15) На матр. Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти табл. умн. матриц. Паули (9 шт).

И док, что: $\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij} + i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \sigma_k$

$$\sigma_1^2 = 1$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = +i \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_3 = -i\sigma_2 = 0 + i \cdot \varepsilon_{13k} \cdot \sigma_k$$

Иногда $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$b \cdot \hat{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} = b + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ia_2 \\ ia_2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & b - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{x+w}{2}, \quad a_3 = \frac{x-w}{2}$$

$$a_2 = \frac{z-y}{2i}, \quad a_1 = \dots$$

$\Rightarrow$ можно изм. b, a_1, a_2, a_3

$b + a_3$

$(a_1 + ia_2)^* = a_1 - ia_2$

$a_1^* - i \cdot a_2^* = a_1 - ia_2 \Rightarrow a_1 \in \mathbb{R}e$, $a_2 \in \mathbb{R}e$

$b + \vec{a}\vec{\sigma}$ с вещ. век $\vec{a}$ и вещ. числ. b — произв. матрица 2×2

(N6) а) Док-ть: $(\vec{c}\vec{\sigma})(\vec{d}\vec{\sigma}) = \vec{c}\cdot\vec{d} + i[\vec{c}\times\vec{d}]\vec{\sigma}$

$\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij} + i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \sigma_k$, $\cdot c_i \sum_{i=1}^{3}$, $\cdot d_j \sum_{i=1}^{3}$

б) Док-ть $(\vec{c}\vec{\sigma})^2 = \vec{c}^2$ (век. произв. самого на себя $= 0$)

(N7) а) $f(b + \vec{a}\vec{\sigma})$ — любая ф-я от любой матрицы $[2\times2]$

а.1. через спектральное разложение

а.2. Ряд Тейлора

(важно корн. ответов)

Намек: 1) раскладывать в ряд Тейлора с центром в точке b. $\Rightarrow$

⇒ также подойдет разложение по степеням

$\vec{a}\vec{\sigma}$.

$$e^{\vec{a}\vec{b}} = 1 + \frac{\vec{a}\vec{b}}{1!} + \frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{2!} + \frac{(\vec{a}\vec{b})^3}{3!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{(\vec{a}\vec{b})}{1!} + a^2\frac{(\vec{a}\vec{b})}{2!} + \dots + a^4\frac{(\vec{a}\vec{b})}{2!}$$

$$= \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots\right) + (\vec{a}\vec{b})\cdot\left(\frac{a^0}{1!} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} + \dots\right) = \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{(\vec{a}\vec{b})}{a}\cdot\left(\frac{a^1}{1!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots\right) =$$

$=$

$1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots$ четные слаг. для ряда exp

$a + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots$ нечетные —//—

$$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-a} = 1 - \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = ch(a)$$

$$1 + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = sh(a)$$

$=$

A - любая наблюдаемая в двумерном п-ве

$A = B + \vec{a}\vec{b}$

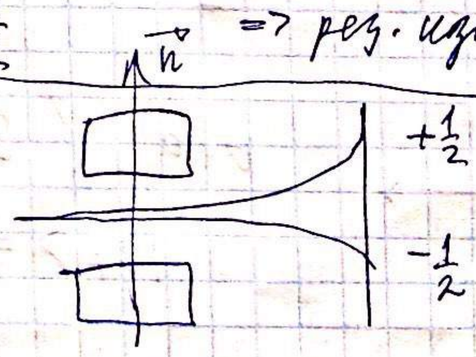
СЗ $(B + \vec{a}\vec{b})$ сдвинуты отн. СЗ $(\vec{a}\vec{b})$ на B

$A = B + \vec{a}\vec{b} = \left\{\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a}\right\} = B + a\underbrace{\vec{n}\vec{b}}_{\text{проекция спина } \frac{1}{2} \text{ на ось } \vec{n}}$.

(18) $S_{\vec{n}} = \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{b})$ (прибором Штерна и Герлаха она измерима)

имеет СЗ:

$\boxed{\lambda = \pm\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ рез. измерения $\pm\frac{1}{2}$



(19) Проверить, что $\vec{n}(\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

$$S_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Проверим, что $\lambda = \frac{1}{2}$ соотв. ВФ:

$$|\psi_+(\theta,\varphi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi}$$

ВФ спина кол. вдоль по оси $\vec{n}$ (проекция $+\frac{1}{2}$)

СВ определено точностью до фазового множителя

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ соотв. ВФ:

$$|\psi_-(\theta,\varphi)\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi'}$$

ВФ спина, кол. против оси $\vec{n}$ (проекция $-\frac{1}{2}$)

if: $\vec{z}\uparrow$ $\vec{n}\uparrow$ θ

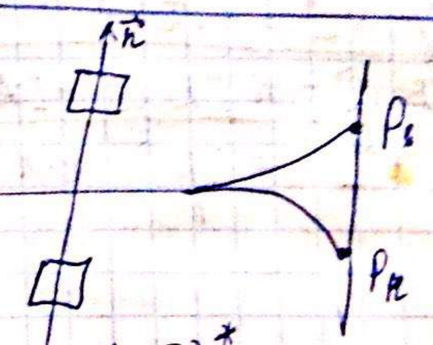
$\theta = 0$ $\left(S = \frac{1}{2}\right)$

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

if: $z\uparrow\downarrow$ $\theta = \pi$ $\quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Физ. смысл:



$|\uparrow\rangle$ меряем S_n

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle\uparrow| = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\right)^*$$

$$\left|\langle\uparrow|\psi\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

измеряем $P_\uparrow = P_{S_n=\frac{1}{2}} = \left|\langle\uparrow|\psi\rangle\right|^2 =$

$$= \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\left(|\psi\rangle\right)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$P_\downarrow = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(доделать)

$$|\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}\cdot e^{i\xi}\right|^2 =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} = P_\uparrow, \quad P_\downarrow = \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad P_\downarrow + P_\uparrow = 1$$

Если $[A,B] = \lambda$, то $[A, f(B)] = \lambda \cdot f'(B)$.

№10 Найти $[p^2, x^2]$, если известно, что

$[p, x] = -i\hbar$

$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$ (важен порядок!)

$[p^2, x^2] = [p^2, x \cdot x] =$

$=$

$[x, p] = i\hbar$

$[x, f(p)] = i\hbar \cdot f'(p)$

↑ произв. берется по аргументу x

$[x, p] = i\hbar$

$[x, p^2] = [x, p \cdot p] = p[x,p] + [x,p] \cdot p =$

$= 2i\hbar p$

$[x, p^3] = [x, p \cdot p^2] = 3i\hbar p^2$

$\forall p: \quad [x, f(p)] = i\hbar f'(p)$

Домашняя работа №4.

№1 Решать через спектральное разложение.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$ $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\det \ldots = \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$f(\hat{A}) = (\hat{A})^{\frac{1}{2}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = f(\lambda_1) \cdot |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + f(\lambda_2) \cdot |\psi_2\rangle\langle\psi_2| =$

$= \sqrt{\lambda_1} \cdot |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \sqrt{\lambda_2} \cdot |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

1. $\lambda_1 = 1$ $\quad \psi_1 - ?$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \psi_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\lambda_2 = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \; 1) + \sqrt{\lambda_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \; -1) =$

$= (\pm 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (\pm i) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$=>$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i & -1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

(4 матрицы)

б) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$ $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad \lambda^2 - (i\cdot(-i)) = 0$

$\lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm 1$

1. $\lambda_1 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\psi_1 = C\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle\psi_1|\psi_1\rangle = C\cdot(-i\ \ 1)\cdot C\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = C^2\cdot 2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\lambda_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad -c - id = 0$$

$\psi_2 = C\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \Rightarrow \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(-i\ \ 1) + \sqrt{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(i\ \ 1) =$$

$$= (\pm i)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + (\pm 1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}} = (\lambda_1)^{\frac{1}{3}}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (\lambda_2)^{\frac{1}{3}}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

$\lambda_1 = 1$, $\quad 1^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\cdot Ln(1)} = e^{\frac{1}{3}\cdot 2\pi k i} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}k}$

$\lambda_2 = -1$, $\quad (-1)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\cdot Ln(-1)} = e^{\frac{1}{3}\cdot i\pi(2k+1)}$

$$e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i\frac{6\pi}{3}} = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$3\times 3 = 9$ шт.

(Всего 9 шт. матриц)

2) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} +$

$$+ \left\{ \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

(Всего 9 шт. матриц.)

№2 $\rho = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4i \\ -0,4i & 0,7 \end{pmatrix}$

$S = -Tr(\rho \cdot \ln\rho) = -Tr\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= -Tr\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \ln\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot \ln\lambda_2 \end{pmatrix}\right) = -\lambda_1 \cdot \ln\lambda_1 - \lambda_2 \cdot \ln\lambda_2$

$\begin{vmatrix} 0,3-\lambda & 0,4i \\ -0,4i & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(0,3-\lambda)(0,7-\lambda) - (-0,4i \cdot 0,4i) = 0$

$0,21 - \lambda + \lambda^2 - 0,16 = 0$

$\lambda^2 - \lambda + 0,05 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 0,05 = 1 - 0,2 = 0,8$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{0,8}}{2}$

$S = -\left(\frac{1-\sqrt{0,8}}{2}\right) \ln\left(\frac{1-\sqrt{0,8}}{2}\right) -$

$-\left(\frac{1+\sqrt{0,8}}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{0,8}}{2}\right)$

№3 При каких λ эта матрица проекционная? $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1. $\hat{P}^2 = \hat{P}$
2. $\hat{P}^+ = \hat{P}$ $\longrightarrow$ $\hat{P}$ - проектор

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, т.е. $\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \forall \lambda$

2. $\hat{P}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4\lambda^*} \\ \lambda^* & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4\lambda^*} \\ \lambda^* & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\hat{P}}$

$\hat{P}^+ = \hat{P}$, если: $\frac{1}{4\lambda} = \lambda^*$, т.е. $\lambda\lambda^* = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{1}{4}$. $\Rightarrow$ при $\lambda = \frac{1}{2} \cdot e^{i\varphi}$ (φ - любая фаза)

матрица будет проекционной

№4 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A в базисе СВ имеет вид: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ (проектор на 1-ый СВ)

$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_2 I) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

(проектор на 2-ой СВ)

(№5) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sigma_1\cdot\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\cdot\sigma_3$$

$$\sigma_1\cdot\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\cdot\sigma_2$$

$$\sigma_2\cdot\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$$

$$\sigma_2\cdot\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$

$$\sigma_3\cdot\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$$

$$\sigma_3\cdot\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\cdot\sigma_1$$

$$\sigma_1\cdot\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\sigma_2\cdot\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\sigma_3\cdot\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\boxed{\hat{\sigma_i}\cdot\hat{\sigma_j} = \hat{\delta_{ij}} + i\varepsilon_{ijk}\cdot\hat{\sigma_k}}$$

(№6) а) $\sigma_i\cdot\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\cdot\sigma_k$, $\cdot c_i$ и $\sum_{i=1}^{3}$

$(c_i\sigma_i)\,\sigma_j = \delta_{ij}\cdot c_i + i\varepsilon_{ijk}\cdot\sigma_k\cdot c_i$

$(c_1\sigma_1 + c_2\cdot\sigma_2 + c_3\sigma_3)\cdot\sigma_j = c_j + i\varepsilon_{ijk}\cdot\sigma_k\cdot c_i$, $\cdot d_j$ и $\sum_{j=1}^{3}$

$(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3)(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\cdot\sigma_3) =$

$= c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + i\varepsilon_{ijk}\cdot\sigma_k\cdot c_i\cdot d_j$

$(\vec{c},\vec{\sigma})(\vec{d},\vec{\sigma}) = (\vec{c},\vec{d}) + i\varepsilon_{ijk}\cdot\sigma_k\cdot c_i\cdot d_j$

$i\varepsilon_{ijk}\cdot c_id_j\cdot\sigma_k = i\cdot\varepsilon_{1jk}\cdot c_1\cdot d_j\cdot\sigma_k + i\cdot\varepsilon_{2jk}\cdot c_2\cdot d_j\cdot\sigma_k +$

$+ i\cdot\varepsilon_{3jk}\cdot c_3\cdot d_j\cdot\sigma_k = (i\cdot\varepsilon_{12k}\cdot c_1\cdot d_2\cdot\sigma_k + i\cdot\varepsilon_{13k}\cdot c_1\cdot d_3\cdot\sigma_k) +$

$+ (\dots) + (\dots) = (i\cdot\varepsilon_{123}\cdot c_1\cdot d_2\cdot\sigma_3 + i\cdot\varepsilon_{132}\cdot c_1\cdot d_3\cdot\sigma_2) +$

$+ (i\cdot\varepsilon_{213}\cdot c_2\cdot d_1\cdot\sigma_3 + i\cdot\varepsilon_{231}\cdot c_2\cdot d_3\cdot\sigma_1) +$

$+ (i\cdot\varepsilon_{312}\cdot c_3\cdot d_1\cdot\sigma_2 + i\cdot\varepsilon_{321}\cdot c_3\cdot d_2\cdot\sigma_1) =$

$= i\cdot(c_1d_2 - c_2\cdot d_1)\sigma_3 + i(-c_1d_3 + c_3d_1)\sigma_2 +$

$+ i(c_2d_3 - c_3d_2)\sigma_1 = i\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{\sigma} =$

$= i[\vec{c}\times\vec{d}]\cdot\vec{\sigma}$

$$\boxed{(\vec{c},\vec{\sigma})\cdot(\vec{d},\vec{\sigma}) = (\vec{c},\vec{d}) + i\cdot[\vec{c}\times\vec{d}]\cdot\vec{\sigma}}$$

б) $(\vec{c}\,\vec{\sigma})^2 = (\vec{c},\vec{\sigma})\cdot(\vec{c},\vec{\sigma}) = (\vec{c},\vec{c}) + i\underbrace{[\vec{c}\times\vec{c}]}_{=\vec{0}}\vec{\sigma}$

$(\vec{c}\,\vec{\sigma})^2 = (\vec{c}^{\,2})$

№7 а) $f(B + \vec{a}\vec{\sigma}) = f(B) + \frac{f'(B)}{1!}\cdot(\vec{a}\vec{\sigma}) +$

$+ \frac{f''(B)}{2!}\cdot(\vec{a}\vec{\sigma})^2 + \frac{f'''(B)}{3!}\cdot(\vec{a}\vec{\sigma})^3 + \dots =$

$(\vec{a}\vec{\sigma})^2 = \vec{a}^2$

$(\vec{a}\vec{\sigma})^3 = \vec{a}^2\cdot(\vec{a}\vec{\sigma})$

$(\vec{a}\vec{\sigma})^4 = \vec{a}^4$

$(\vec{a}\vec{\sigma})^5 = \vec{a}^4\cdot(\vec{a}\vec{\sigma})$

$= f(B) + \frac{f'(B)}{1!}\cdot(\vec{a}\vec{\sigma}) + \frac{f''(B)}{2!}\cdot\vec{a}^2 +$

$+ \frac{f'''(B)}{3!}\cdot\vec{a}^2\cdot(\vec{a}\vec{\sigma}) + \frac{f^{IV}}{4!}\cdot\vec{a}^4 + \dots =$

$= \left[f(B) + \frac{f''(B)}{2!}\cdot\vec{a}^2 + \frac{f^{IV}(B)}{4!}\cdot\vec{a}^4 + \dots\right] +$

$+ (\vec{a}\vec{\sigma})\cdot\left[\frac{f'(B)}{1!} + \frac{f^{(3)}(B)}{3!}\cdot\vec{a}^2 + \frac{f^{(5)}(B)}{5!}\cdot\vec{a}^4 + \dots\right] =$

$= \left[f(B) + \frac{f''(B)}{2!}\cdot\vec{a}^2 + \frac{f^{(4)}(B)}{4!}\cdot\vec{a}^4\right] +$

$+ \frac{(\vec{a}\vec{\sigma})}{a}\left[\frac{f'(B)}{1!}\cdot a^1 + \frac{f^{(3)}}{3!}\cdot a^3 + \frac{f^{(5)}}{5!}\cdot a^5 + \dots\right] =$

$f(B+a) = f(B) + \frac{f'(B)}{1!}\cdot((B+a)-B)^1 + \frac{f''(B)}{2!}\cdot a^2 +$

$+ \frac{f^{(3)}(B)}{3!}\cdot a^3 + \dots$

$f(B-a) = f(B) - \frac{f'(B)}{1!}\cdot a + \frac{f''(B)}{2!}\cdot a^2 - \frac{f^{(3)}}{3!}\cdot a^3 + \dots$

$= \left[\frac{f(B+a) + f(B-a)}{2}\right] + \frac{(\vec{a},\vec{\sigma})}{a}\left[\frac{f(B+a) - f(B-a)}{2}\right]$

$\forall$ матрицы 2×2 $\forall f$

б) 2-ой способ: спектральное разложение

$f(B + \vec{a}\vec{\sigma}) = f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\,|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| +$

$+ f(\lambda_2)\cdot|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$

$\hat{A} = B + \vec{a}\vec{\sigma} = B + a_1\cdot\hat{\sigma}_1 + a_2\hat{\sigma}_2 + a_3\hat{\sigma}_3$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$ $\quad \lambda^2 - 1 = 0$ $\quad \lambda = \pm 1$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}-\lambda & -i\\ i & -\lambda\end{vmatrix} = 0$ $\quad \lambda^2 = 1,\ \lambda = \pm 1$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}$ $\rightarrow \lambda = \pm 1$

$\hat{A} = B + (\vec{a},\vec{\sigma}) = B + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix}B+a_3 & a_1 - ia_2\\ a_1 + ia_2 & B - a_3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}B+a_3-\lambda & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & B-a_3-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$(B+a_3-\lambda)(B-a_3-\lambda) - (a_1+ia_2)\cdot(a_1-ia_2) = 0$

$(B+a_3)\cdot(B-a_3-\lambda) - \lambda(B-a_3-\lambda) - (a_1^2+a_2^2) = 0$

$B(B-a_3-\lambda) + a_3\cdot B - a_3^2 - a_3\cdot\lambda - \lambda B + \lambda a_3 + \lambda^2 - a_1^2 - a_2^2 = 0$

$B^2 - a_3\cdot B - \lambda B + a_3 B - a_3^2 - a_3\lambda - \lambda B + \lambda a_3 + \lambda^2 - a_1^2 - a_2^2 = 0$

$\lambda_1 = B - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = B - a$

$\lambda_2 = B + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = B + a$

$$f(\hat{A}) = f(b-a)\cdot|d_1\rangle\langle d_1| + f(b+a)\,|d_2\rangle\langle d_2|$$

1. $\lambda_1 = b-a$

$$\begin{pmatrix} b+a_3-(b-a) & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & a-a_3 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_3+a & a_1-ia_2 \\ a_3+a & \frac{(a-a_3)(a+a_3)}{a_1+ia_2} \end{vmatrix}_{\cdot} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_3+a & a_1-ia_2 \\ a_3+a & \frac{(a^2-a_3^2)\cdot(a_1-ia_2)}{(a_1+ia_2)\cdot(a_1-ia_2)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_3+a & a_1-ia_2 \\ a_3+a & \frac{(a_1^2+a_2^2)}{(a_1^2+a_2^2)}(a_1-ia \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_3+a & a_1-ia_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \qquad\quad 0 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = C_1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3+a} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1^2\cdot\left(-\frac{a_1+ia_2}{a_3+a} \quad 1\right)\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3+a} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$C_1^2\cdot\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{(a_3+a)^2}+1\right) = 1 = C_1^2\cdot\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+2aa_3+a^2}{(a_3+a)^2}\right)$$

$$= C_1^2\cdot\frac{(2a^2+2aa_3)}{(a_3+a)^2} = \frac{C_1^2\cdot 2a}{a_3+a} \Rightarrow C_1^2 = \frac{a_3+a}{2a}$$

2. $\lambda_2 = b+a$

$$\begin{pmatrix} b+a_3-(b+a) & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & b-a_3-(b+a) \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_3-a & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a-a_3 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_3-a & a_1-ia_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow d_2 = C_2\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3-a} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2^2\cdot\left(-\frac{a_1+ia_2}{a_3-a} \quad 1\right)\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3-a} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$C_2^2\cdot\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{(a_3-a)^2}+1\right) = 1$$

$f(b-a) = f(0)$

1!

ст. стр

$$|d_1\rangle\langle d_1| = \frac{a_3+a}{2a}\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3+a} \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{a_1+ia_2}{a_3+a} \quad 1\right) =$$

$$= \frac{a_3+a}{2a}\begin{pmatrix} \frac{a_1^2+a_2^2}{(a_3+a)^2} & -\left(\frac{a_1-ia_2}{a_3+a}\right) \\ -\left(\frac{a_1+ia_2}{a_3+a}\right) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{a_3+a}{2a}\begin{pmatrix} \frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_3+a)\cdot a} & -\left(\frac{a_1-ia_2}{2a}\right) \\ -\frac{(a_1+ia_2)}{2a} & \frac{a_3+a}{2a} \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_3+a)\cdot a} = \frac{a^2-a_3^2}{2(a_3+a)\cdot a} = \frac{a-a_3}{2a} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-a_3 & -(a_1-ia_2) \\ -(a_1+ia_2) & a_3+a \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2a} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2a}\right)\cdot\begin{pmatrix} a_3-a & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3-a \end{pmatrix} =$$

$$C_2^2\cdot\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{(a_3-a)^2}+1\right) = 1 = C_2^2\cdot\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_3a+a^2}{(a_3-a)^2}\right) =$$

$$= \frac{C_2^2\cdot 2\cdot a(a-a_3)}{(a_3-a)^2} = 1 \quad \rightarrow C_2^2 = \frac{a-a_3}{2a}$$

$$|d_2\rangle\langle d_2| = \frac{a-a_3}{2a}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a_1-ia_2}{a_3-a} \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{a_1+ia_2}{a_3-a} \quad 1\right)$$

$$\left(\frac{a-a_3}{2a}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{a_1^2+a_2^2}{(a-a_3)^2} & \frac{a_1-ia_2}{a-a_3} \\ \frac{a_1+ia_2}{a-a_3} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} \frac{a_1^2+a_2^2}{a-a_3} & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & a-a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \frac{a_1^2+a_2^2}{a-a_3} = \frac{a^2-a_3^2}{a-a_3} = a+a_3 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\begin{pmatrix} a+a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & a-a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\hat{A}) = f(b-a)|a_1\rangle\langle a_1| + f(b+a)\cdot|a_2\rangle\langle a_2| =$$

$$= \frac{f(b+a)}{2a}\begin{pmatrix} a+a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & a-a_3 \end{pmatrix} - \frac{f(b-a)}{2a}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_3-a & a_1-ia_2 \\ (a_1+ia_2) & -a_3-a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{f(b+a)}{2a}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \frac{f(b+a)}{2a}\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{f(b-a)}{2a}\cdot\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \frac{f(b-a)}{2a}\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} = \quad (2)$$

$$\frac{f(b+a)}{2} \cdot \hat{1} + \frac{f(b+a)}{2a} \cdot (\vec{a}\,\vec{b}) +$$

$$+ \frac{f(b-a)}{2} \hat{1} - \frac{f(b-a)}{2a} \cdot (\vec{a}\,\vec{b}) =$$

$$= \frac{f(b+a)+f(b-a)}{2} + \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{a} \cdot \left[\frac{f(b+a)-f(b-a)}{2}\right]$$

№8 $S_{\vec{n}} = \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\sigma})$

$$b\cdot\hat{I} + \vec{a}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} b+a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & b - a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & 0 - n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{n_3}{2} & \frac{n_1 - in_2}{2} \\ \frac{n_1 + in_2}{2} & -\frac{n_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{n_3}{2} - \lambda & \frac{n_1 - in_2}{2} \\ \frac{n_1 + in_2}{2} & -\frac{n_3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\left(\frac{n_3}{2} - \lambda\right)\cdot\left(\frac{n_3}{2} + \lambda\right) - \frac{n_1^2}{4} - \frac{n_2^2}{4} = 0$$

$$= -\left(\frac{n_3^2}{4} - \lambda^2\right) - \frac{n_1^2}{4} - \frac{n_2^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{\vec{n}^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

{ проекции спина (наблюдаемое)

№9 $S_{\vec{n}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$

1. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$S_{\vec{n}} - \lambda_1\cdot\hat{I} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - 1 & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} & 0 \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} \rho \\ 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} & -2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\psi_+ = C\cdot\begin{pmatrix} \frac{\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = C'\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i\xi}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

2. $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$S_{\vec{n}} - \lambda_2\hat{I} = S_{\vec{n}} + \frac{1}{2}\cdot\hat{I} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta+1 & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta & -\cos\theta+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} & 2\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} & 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\psi_- = C_1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi}}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = C_1'\cdot\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i\xi'}\cdot\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

(N10) $[p^2, x^2] = [pp, x^2] = \{[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B\} = p[p,x^2] + [p,x^2]p =$

$= (p[p,xx] + [p,xx]p) = (-p[\overset{A}{x}\overset{B}{x},\overset{C}{p}] - [\overset{A}{x}\overset{B}{x},\overset{C}{p}]p) = -p(x[x,p] + [x,p]x) - (x[x,p] + [x,p]x)p = -p(x\cdot i\hbar + i\hbar x) - (x\cdot i\hbar + i\hbar x)p = -2i\hbar px - 2i\hbar xp =$

$= -2i\hbar(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})$

Семинар №5.

Найти общий вид проектора в п-ве матриц 2×2.

$$P = b + \vec{a}\vec{\sigma}$$

Для эрмитовости P дост., чтобы:

$$b^* = b, \quad \vec{a}^* = \vec{a}$$

$$P^2 = P$$

$$\hat{1} b^2 + 2b(\vec{a}\vec{\sigma}) + \underbrace{(\vec{a}\vec{\sigma})^2}_{\vec{a}^2} = b + (\vec{a}\vec{\sigma})$$

$\hat{1}$: $\begin{cases} b^2 + a^2 = b \\ 2b\vec{a} = \vec{a} \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \\ \vec{a} = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$P = 0$ (проектир. на 0-мерное п-во)

$P = 1$ (проектор на все двумерное п-во)

$b = \frac{1}{2}$ - нетрив. случай (проектирование на 1-мерное п-во)

$b = \frac{1}{2} \rightarrow \vec{a}^2 = \frac{1}{4} \rightarrow$ длина век. $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}$, $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{n}$ $\quad \vec{n}$ - произв. единичный вектор

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\sigma})$$

Куда проектирует проектор? Нужно найти СВ и СЗ.

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $\quad |\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$$P|\psi_+(\theta,\varphi)\rangle = \frac{1}{2}|\psi_+\rangle + \frac{1}{2}|\psi_+\rangle = |\psi_+\rangle$$

$$P|\psi_-\rangle = 0$$

↓ видно, что проектор одномерный (на $|\psi_+\rangle$)

$$P = |\psi_+(\theta,\varphi)\rangle\langle\psi_+(\theta,\varphi)|$$

(№1) Проверить, что, подставив явный вид $|\psi_+\rangle$, получится $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\sigma})$

$$P = |\psi_+(\theta,\varphi)\rangle\langle\psi_+(\theta,\varphi)| = \underbrace{1}_{\lambda_1}\cdot|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + \underbrace{0}_{\lambda_2}\cdot|\psi_-\rangle\langle\psi_-|$$

(правильнее через спектральное разложение)

(N2) $\exists$ эрмитов оператор 2×2

$$a^2 = 0$$

$$aa^+ + a^+a = 1$$

а) Найти общий вид (через матрицы Паули) (в отличие от пред. случаев в-копия.!)

б) a^+a – ?

в) $C3(a^+a)$ – ?

здесь ↑ C3: 0 и 1

(оператор рождения фермионов в данном состоянии не более 1-го фермиона)

↑ пр. Паули

$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ оператор инверсии

Записать вид (интегральное предст.)

а) $\hat{I}\psi(x) = \psi(x) \to \int dx'\,\delta(x-x')\psi(x') = \psi(x)$

$\delta(x-x') = \delta(x'-x)$ ф-я четная

б) $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \to \int dx'\,\delta(x+x')\cdot\psi(x') = \psi(-x)$

(интегр. предст. опер-ра инверсии)

(N3) Дано 3 И.О.:

$$\int dx'\cdot f(x-x')\cdot\psi(x') = \hat{L}\psi$$

$f(x+x')$

$f(x)g(x')$

Какими должны быть f, f, $f \neq g$, чтобы $\hat{L}^+ = \hat{L}$.

Делать через компл. сопр. матричного элемента:

$$\langle\chi|L|\psi\rangle^* = \langle\psi|L^+|\chi\rangle = \langle\psi|L|\chi\rangle \Rightarrow L^+ = L$$

Проверить рав-во: $\langle\chi|L|\psi\rangle^* = \langle\psi|L|\chi\rangle$

$$\langle\chi|L|\psi\rangle = \int dx\,dx'\,\chi^*(x)\cdot L(x,x')\cdot\psi(x')$$

(сравнить 2 двойных $\int$-а)

$e^{\frac{i}{\hbar}px_0}$ -оператор трансляции на x_0

В лоб. вич. как $e^{\frac{i}{\hbar}px_0}$ действ. на $\forall$ ВФ:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)x_0}\psi(x) = e^{x_0\frac{d}{dx}}\psi(x)$$

(разложили в ряд Тейлора)

$$= \psi(x) + \frac{x_0^1}{1!}\cdot\psi'(x) + \frac{x_0^2}{2!}\cdot\psi''(x) + \dots = \psi(x+x_0)$$

т.е. оп. ВФ сдвигает на x_0

$e^{\frac{i}{\hbar}px_0}$ –

$\tilde{\psi} = U^+\psi$

$\tilde{x} = U^+xU$

$\langle\psi|x|\psi\rangle \Rightarrow \langle\tilde{\psi}|\tilde{x}|\tilde{\psi}\rangle$

$\langle U^+\psi|U^+xU|U^+\psi\rangle$

$\boxed{\langle\psi|x|\psi\rangle = \langle\tilde{\psi}|\tilde{x}|\tilde{\psi}\rangle}$

$\langle\tilde{\psi}|\tilde{x}|\tilde{\psi}\rangle$ = в интеграле все сдвинули на x_0

$\langle\tilde{\psi}|\tilde{x}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|\underbrace{UU^+}_{1}x\underbrace{UU^+}_{1}|\psi\rangle =$

$= \langle\psi|x|\psi\rangle$

т.е., чтобы сдвинуть опер: $\langle\tilde{\psi}|x|\tilde{\psi}\rangle$ либо $\langle\psi|\tilde{x}|\psi\rangle$

(№4) $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0x}$ – гауссов пакет

$\psi(p)$ – ?

перейти в имп. п-во: $\psi(p)$ (тоже гауссов пакет)

$$\psi(p) = \int dx \cdot \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\psi(x)$$

Запомнить знак в квантах!

$\langle x\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle$ – ?, Δx – ?

$\langle p^2\rangle$ – ?, Δp – ?

Будем счит. что частица своб.

$H = \frac{p^2}{2m}$. Найти $\langle H\rangle, \langle H^2\rangle, \Delta H$ – ?

Проверить соотн. неопределенности $\Delta x\cdot\Delta p$

Зам. $\Delta H \neq 0$! (гауссов пакет – состояние с неопределенной энергией)

(№5) $\psi(x) = \frac{N}{ch(ax)}$

N – ? (из усл. нормировки)

$\psi(p)$ - ? $\langle x \rangle$ $\langle x^2 \rangle$ $\mathcal{D}x$

$\langle p \rangle$ $\langle p^2 \rangle$ $\mathcal{D}p$

+ соотнош. неопределенности

$\langle x \rangle = 0$

$\langle p \rangle = 0$

$\forall$ четной или нечетной ВФ: $\langle x \rangle = 0$

$\langle p \rangle = 0$

(т.к. четное распред. вероятности в любом случае дают нулевое среднее)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

(можно писать и для неконсерв. систем: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$)

Картина Ш: ВФ эвол. согласно нестац. УШ, т.е. $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_Ш(t)\rangle = H|\psi_Ш(t)\rangle$,

а оп-ры по большей части не зависят от времени $A_Ш(t) = A_Ш(0)$, $\frac{\partial}{\partial t} A_Ш = 0$

(не зависит (не эвол.), если нет явной зав-ти от t)

Пр-м: $\hat{x}_Ш(t) = \hat{x}_Ш(0) = x$

$\hat{p}_Ш(t) = \hat{p}_Ш(0) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

Если построить $\hat{A} \equiv t^2 \cdot \hat{p}$, то он конечно будет зависеть от времени.

Картина Г

картина Ш $\longrightarrow$ картина Г

↑ унит. преобр. (просто другой выбор базиса)

$|\psi_Г(t)\rangle \equiv |\psi_Г(0)\rangle$

$\frac{d}{dt} A_Г(t) = \frac{\partial A_Г(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A_Г(t)]$ ← Уравнение Гейзенберга

явная зав-ть от времени может быть (если руковольно внести зав-ть от времени в оператор)

Формальное решение УШ:

$$|\psi_Ш(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi_Ш(0)\rangle$$

Формальное решение УГ:

$$A_Г(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \cdot A_Г(0) \cdot e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

НУШ $\Leftrightarrow$ УГ $\Leftrightarrow$ $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ $\Leftrightarrow$ $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

УГ решается для:

1. Своб. частица $\frac{p^2}{2m}$
2. Гарм. осцилл. : $\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$
3. Прецесс. момент прецессирующий в маг. поле

$l_x\ l_y\ l_z$

$H = -g\mu_0 l_z H_z$, g-гиромагнитное отнош.

4. Прецессирование спина

S_x, S_y, S_z

$H = -2\mu_0 S_y H_y$ (получ. прецессия вокруг направл. магнитного поля)

g (для спина) $= 2$

(№6) Решить УГ для всех перечисленных систем. (реш. по подобию)

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$

Есть НУ: $\hat{x}(0)$, $\hat{p}(0)$

$\frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, x\right]$ ($\frac{kx^2}{2}$ коммут с x)

$\frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{i}{\hbar}\cdot\frac{1}{2m}[\hat{p}^2, \hat{x}] = \frac{i}{\hbar}\cdot\left(-\frac{2i\hbar\hat{p}}{2m}\right) = \frac{\hat{p}}{m}$

$\frac{d}{dt}\hat{p} = \underbrace{-k\hat{x}}_{-\frac{\partial U}{\partial x}}$ сила

Ищем реш. в виде:

$\hat{x}(t) = a(t)\cdot\hat{x}(0) + b(t)\cdot\hat{p}(0)$

$\hat{p}(t) = c(t)\cdot\hat{p}(0) + d(t)\cdot\hat{x}(0)$

нужно подст. в диффр. и решить их (приравн. коэфф. при $\hat{p}(0)$ и $\hat{x}(0)$)

Получ.

$\hat{x}(t) = \cos(\omega t)\cdot\hat{x}(0) + \sin(\omega t)\cdot\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}$

$\hat{p}(t) = \cos(\omega t)\cdot\hat{p}(0) - \sin\omega t\cdot\hat{x}(0)\cdot\frac{k}{\omega}$

в Д/з аккуратно получить эти a, b, c, d

(№7) $|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}$

а) своб. частица $H = \frac{p^2}{2m}$

б) гармонич. осцилл. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$

Найти все то же самое в момент t:

$\langle x \rangle$ $\langle p \rangle$ $\langle x^2 \rangle$ $\langle p^2 \rangle$

$\mathcal{D}x$ $\mathcal{D}p$ - СН

↖ ↑ тоже колеблются

xp
px

важно следить за порядком!

$$\left(\hat{x}(t)\right)^2 = \left(\cos(\omega t)\cdot\hat{x}(0) + \sin(\omega t)\cdot\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\right)^2 -$$

<u>4 слагаемых!</u>

Домашняя работа №5.

(№1) $P = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| = \left\{|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix}\cdot e^{i\xi}\right\} =$

$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi}\right)\cdot \cancel{e^{i\xi}\cdot e^{-i\xi}} =$

$= \begin{pmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & 1-\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} +$

$+ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$

$(\vec{n}\vec{\sigma}) = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$

$n_1 = \sin\theta\cdot\cos\varphi$, $n_2 = \sin\theta\cdot\sin\varphi$, $n_3 = \cos\theta$

$(\vec{n},\vec{\sigma}) = \sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} +$

$+ \cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)\\ \sin\theta(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) & -\cos\theta\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$, т.е. $|\psi_+\rangle\langle\psi_+| = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}(\vec{n},\vec{\sigma})$

(№4) $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}$ — гауссов пакет

$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x)\cdot e^{\frac{-ipx}{\hbar}}\cdot dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\sqrt{2\pi\hbar}}}_{c}\cdot\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x}\cdot dx =$

$= c\cdot\int e^{-\left(\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x\right)}\cdot dx = c\cdot\int e^{-\left(\frac{x^2}{2\Delta^2} - \frac{xx_0}{\Delta^2} + \frac{x_0^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x\right)}\cdot dx =$

$= c\cdot\int e^{-\left(\frac{x^2}{2\Delta^2} + 2\cdot\left(\frac{i\cdot(p-p_0)}{\hbar\cdot 2} - \frac{x_0}{2\Delta^2}\right)\cdot x + \frac{x_0^2}{2\Delta^2}\right)}\cdot dx = c\cdot\int\exp\left[-\left(\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{2}\Delta} + \sqrt{2}\cdot\Delta\cdot\left(\frac{i}{\hbar}\frac{(p-p_0)}{2} - \frac{x_0}{2\Delta^2}\right)\right)^2}_{=y^2} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{x_0^2}{2\Delta^2} - 2\Delta^2\cdot\left(\frac{i}{\hbar}\frac{(p-p_0)}{2} - \frac{x_0}{2\Delta^2}\right)^2\right)\right]\cdot dx =$

$= c\cdot e^{\left\{2\Delta^2\cdot\left(\frac{i}{\hbar}\frac{(p-p_0)}{2} - \frac{x_0}{2\Delta^2}\right)^2 - \frac{x_0^2}{2\Delta^2}\right\}}\cdot\int e^{-(\ldots)^2}\cdot dx =$

$$= C \cdot e^{\left\{2\Delta^2 \cdot \left(\frac{i}{\hbar}\frac{(p-p_0)}{2} - \frac{x_0}{2\Delta^2}\right)^2 - \frac{x_0^2}{2\Delta^2}\right\}} \cdot \sqrt{2}\cdot\Delta \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy}_{=\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\Delta\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta\cdot\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{\left\{2\Delta^2\cdot\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4\hbar^2}\right) - \cancel{2\Delta^2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{i}{\hbar}\frac{(p-p_0)}{\cancel{2}}\cdot\frac{x_0}{\cancel{2\Delta^2}}\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sqrt{\pi}\hbar}} \cdot e^{-\frac{(p-p_0)^2\cdot\Delta^2}{2\hbar^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\frac{\hbar}{\Delta}}} \cdot e^{-\frac{(p-p_0)^2\cdot\Delta^2}{2\hbar^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0}$$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\frac{\hbar}{\Delta}}} \cdot e^{-\frac{(p-p_0)^2\cdot\Delta^2}{2\hbar^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0}}$$

$$\langle x\rangle = \int \psi^*(x)\cdot\hat{x}\cdot\psi(x) = \int \frac{1}{\sqrt{\Delta\sqrt{\pi}}} \cdot e^{\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \cancel{\frac{i}{\hbar}}p_0 x\right\}} \cdot$$

$$\cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta\sqrt{\pi}}} \cdot e^{\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \cancel{\frac{i}{\hbar}}p_0 x\right\}} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}} \underbrace{\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}} \cdot x\cdot dx}_{I} \quad (=)$$

$$I = \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}} \cdot x\cdot dx = \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x-x_0}{\Delta} \\ dy = \frac{dx}{\Delta} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot(\Delta y + x_0)\cdot\Delta\cdot dy = \Delta\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y\cdot dy}_{=0\ (\text{нечет. ф-я})} +$$

$$+ \Delta x_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy = \Delta\cdot x_0\cdot\sqrt{\pi}$$

$$(=)\ \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}} \cdot \Delta x_0\cdot\sqrt{\pi} = x_0 \qquad \boxed{\langle x\rangle = x_0}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}} \cdot \frac{x^2}{\Delta^2}\cdot dx\cdot\Delta^2 =$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}} \cdot \left(\frac{x-x_0}{\Delta}\right)^2\cdot dx + 2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\Delta}\right)^2}\cdot\frac{xx_0\cdot dx}{\Delta^2} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\Delta}\right)^2}\cdot\frac{x_0^2\cdot dx}{\Delta^2}\right] = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y^2\cdot dy\cdot\Delta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2x_0}{\Delta^2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\Delta}\right)^2}\cdot x\cdot dx - \frac{x_0^2}{\Delta^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy\cdot\Delta\right] =$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\Delta\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y^2\cdot dy + \frac{2x_0}{\Delta^2}\cdot I - \frac{x_0^2}{\Delta^2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Delta\right] =$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\left[\Delta\cdot I_1 + \frac{2x_0}{\Delta^2}\cdot\Delta x_0\cdot\sqrt{\pi} - \frac{x_0^2}{\Delta}\sqrt{\pi}\right]$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y^2\cdot dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot d\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-y^2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int y \cdot d\left(e^{-y^2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(y\cdot e^{-y^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

($y\cdot e^{-y^2}\to 0$ at $\pm\infty$; $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$)

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\Delta\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2x_0^2}{\Delta}\cdot\sqrt{\pi} - \frac{x_0^2}{\Delta}\sqrt{\pi}\right] =$$

$$= \frac{\Delta^2}{2} + x_0^2$$

$$\boxed{\langle x^2\rangle = \frac{\Delta^2}{2} + x_0^2}$$

$$\mathcal{D}x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \left(\frac{\Delta^2}{2} + x_0^2\right) - x_0^2 = \frac{\Delta^2}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{D}x = \frac{\Delta^2}{2}}$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\cdot dx = (-i\hbar)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\Delta\sqrt{\pi}}}\cdot e^{\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x\right]}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot dx = \frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot\left(-\frac{2(x-x_0)}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot dx =$$

$$= \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot dx = \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta}}\cdot\frac{(x-x_0)}{\Delta}\cdot\frac{dx}{\Delta}\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\hbar}p_0\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx\right) = \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\cdot\left(\underbrace{-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y\cdot dy}_{=0} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\hbar}p_0\cdot e^{-(\dots)}\cdot dx\right) = \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\hbar}p_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot p_0\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy\cdot\Delta = \frac{p_0}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\Delta\cdot\sqrt{\pi} = p_0$$

$$\boxed{\langle p\rangle = p_0}$$

$$\langle p^2\rangle = \int\psi^*\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\cdot\psi\cdot dx = (-\hbar^2)\cdot\int\frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{(-\hbar^2)}{\Delta\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot e^{-(\dots)}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{-\hbar^2}{\Delta\sqrt{\pi}}\left[\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot\left(-\frac{1}{\Delta^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot dx + \right.$$

$$\left. + \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x}\cdot\left(\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}\right)\cdot dx\right] =$$

$$= \left(\frac{-\hbar^2}{\Delta\sqrt{\pi}}\right)\cdot\left(\left(\frac{-1}{\Delta^2}\right)\cdot\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx + \right.$$

$$\left. + \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^4} - \frac{i\cdot 2(x-x_0)\cdot p_0}{\hbar\cdot\Delta^2} - \frac{p_0^2}{\hbar^2}\right)\cdot dx\right) =$$

$$= \left(\frac{t^2}{\Delta^2\sqrt{\pi}}\right)\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy}_{\sqrt{\pi}} + \left(-\frac{t^2}{\Delta\sqrt{\pi}}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot y^2\cdot \frac{dy}{\Delta}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\Delta}} +$$

$$+ \left(\frac{-t^2}{\Delta\sqrt{\pi}}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot(-y)\cdot dy}_{=0\ (\text{нечет. ф-я})}\cdot\frac{2ip_0}{t\Delta} +$$

$$+ \left(-\frac{t^2}{\Delta\sqrt{\pi}}\right)\cdot\left(-\frac{p_0^2}{t^2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy\cdot\Delta =$$

$$= \frac{t^2}{\Delta^2} - \frac{t^2}{2\Delta^2} + p_0^2 = \frac{t^2}{2\Delta^2} + p_0^2$$

$$\boxed{\langle p^2\rangle = p_0^2 + \frac{t^2}{2\Delta^2}}$$

$$\mathcal{D}p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{t^2}{2\Delta^2}$$

$$\boxed{\mathcal{D}p = \frac{t^2}{2\Delta^2}}$$

$$\mathcal{D}x\cdot\mathcal{D}p = \frac{\Delta^2}{2}\cdot\frac{t^2}{2\Delta^2} = \frac{t^2}{4}$$

$$\sqrt{\mathcal{D}x}\cdot\sqrt{\mathcal{D}p} = \frac{t}{2}$$

Пусть: $H = \frac{p^2}{2m}$ (свободная частица)

$$\langle H\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{1}{2m}\cdot\left(p_0^2 + \frac{t^2}{2\Delta^2}\right)$$

$$\langle H^2\rangle = \left\langle\frac{p^4}{4m^2}\right\rangle = \frac{1}{4m^2}\cdot\underbrace{\langle p^4\rangle}_{=?}$$

$$\langle p^4\rangle = \int\psi^*\,\hat{p}^4\cdot\psi\,dx = \int\psi^*\cdot\left(-it\cdot\frac{d}{dx}\right)^4\cdot\psi\cdot dx =$$

$$= \frac{1\cdot t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} - \frac{i}{t}p_0\cdot x}\cdot\frac{d^4}{dx^4}\psi\cdot dx \quad (=)$$

$$\Gamma\ \frac{d^4}{dx^4}\psi = \frac{d^4}{dx^4}\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0x}\right) = \frac{d^3}{dx^3}\left(\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0\cdot x}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\left(-\frac{1}{\Delta^2}\right)\cdot e^{-(\dots)} + \left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0\right)^2\cdot e^{-(\dots)}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\left(-\frac{1}{\Delta^2}\right)\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{t}\cdot p_0\right)\cdot e^{-(\dots)} + \right.$$

$$+ 2\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0\right)\cdot\left(-\frac{1}{\Delta^2}\right)\cdot e^{-(\dots)} +$$

$$\left. + \left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{t}p_0\right)^3\cdot e^{-(\dots)}\right) =$$

$$= \dots = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{ip_0x}{t}}\cdot\left[\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{ip_0}{t}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\Delta^4} - \frac{6(x_0\cdot t - tx + ip_0\cdot\Delta^2)^2}{t^2\cdot\Delta^6}\right]$$

$$= \frac{t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{ip_0}{\hbar}\right)^4 dx +$$

$$+\frac{t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\frac{3}{\Delta^4}\cdot dx \quad -\frac{6t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(-\frac{x-x_0}{\Delta^2}+\frac{ip_0}{\hbar}\right)^2}{\Delta^2}\cdot dx = I_1 + I_2 + I_3$$

(конт.) $I_1 = \frac{t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot(3t^4 - 12p_0^2t^2\Delta^2 + 4p_0^4\Delta^4)}{4t^4\cdot\Delta^3}$

$I_2 = \frac{t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\frac{3}{\Delta^4}\cdot\Delta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy = \frac{3t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta^4}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3t^4}{\Delta^4}$

$$I_3 = \frac{-6t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta^3}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{ip_0}{\hbar}\right)^2\cdot dx =$$

$$= \frac{-6t^4}{\sqrt{\pi}\Delta^3}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(...)}\cdot\left(\frac{(x-x_0)^2}{\Delta} - \frac{2ip_0(x-x_0)}{\Delta^2\cdot\hbar} - \frac{p_0^2}{\hbar^2}\right)\cdot dx}_{I_4}$$

I_4 был посчитан $I_4 = \left(p_0^2 - \frac{t^2}{2\Delta^2}\right)\left(-\frac{\Delta\cdot\sqrt{\pi}}{t^2}\right)$

$$I_3 = \frac{-6t^4}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta^3}\cdot\left(p_0^2 - \frac{t^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\left(-\frac{\Delta\cdot\sqrt{\pi}}{t^2}\right) =$$

$$= \frac{6t^2}{\Delta^2}\cdot\left(p_0^2 - \frac{t^2}{2\Delta^2}\right)$$

$$\langle p^4\rangle = \frac{3t^4 - 12p_0^2\cdot t^2\cdot\Delta^2 + 4p_0^4\cdot\Delta^4}{4\cdot\Delta^4} + \frac{3t^4}{\Delta^4} + \frac{6t^2p_0^2}{\Delta^2} -$$

$$-\frac{6t^4}{2\Delta^4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{t^4}{\Delta^4} + \frac{3p_0^2t^2}{\Delta^2} + p_0^4$$

$$\boxed{\langle H^2\rangle = \frac{1}{4m^2}\cdot\left(\frac{3t^2}{4\Delta^2}\cdot\left(\frac{t^2}{\Delta^2}+4p_0^2\right)+p_0^4\right)}$$

$$\mathcal{D}H = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 = \frac{1}{4m^2}\left(\frac{3t^4}{4\Delta^4} + \frac{3p_0^2t^2}{\Delta^2} + p_0^4\right) -$$

$$-\frac{1}{4m^2}\cdot\left(p_0^4 + \frac{p_0^2t^2}{\Delta^2} + \frac{t^4}{4\Delta^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4m^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{t^4}{\Delta^4} + 4\cdot\frac{p_0^2t^2}{\Delta^2}\right)$$

$$\mathcal{D}H = \frac{1}{4m^2}\cdot\frac{t^2}{\Delta^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\Delta^2} + 8p_0^2\right) =$$

$$= \frac{t^2}{8m^2\Delta^2}\cdot\left(\frac{t^2}{\Delta^2} + 8p_0^2\right)$$

$$\boxed{\mathcal{D}H = \frac{t^2}{8m^2\Delta^2}\cdot\left(\frac{t^2}{\Delta^2} + 8p_0^2\right)}$$

№5 $\psi(x) = \frac{N}{ch(ax)}$

$$\int\psi^*(x)\cdot\psi(x) = 1$$

$$\int \frac{N^2}{ch^2(ax)}\cdot dx = 1 \quad \to \quad N = \frac{1}{\sqrt{\int \frac{1}{ch^2(ax)}dx}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(ax)}\cdot dx = \left\{ ch(ax) = \cos(iax) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cos^2(iax)}\cdot dx = \left(\frac{1}{ia}\cdot tg(iax) \right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \left\{ tg(ix) = i\cdot th x \right\} = \left(\frac{1}{ia}\, i\cdot th(ax) \right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(th(ax) \right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$th(ax) = \frac{sh(ax)}{ch(ax)} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-x\cdot a}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} th(ax) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2ax}}{1 + e^{-2ax}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} th(ax) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1} = -1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(ax)}\cdot dx = \frac{2}{a}$$

$$N = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot \left[ch(ax) \right]^{-1}$$

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi\, dx = \frac{a}{2}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{ch^2(ax)}\cdot dx =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax}{ch^2(ax)}\, d(ax) = \frac{1}{2a}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\cdot dy}{ch^2 y} = 0$$

y — нечетн.

$\boxed{\langle x \rangle = 0}$

$$\langle p \rangle = \int \psi^* \hat{p} \psi\, dx = \frac{a}{2}\int \frac{1}{ch(ax)}\left(-i\hbar\cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ch(ax)} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{-i\hbar a}{2} \right)\int \frac{1}{ch(ax)}\cdot\left(-\frac{1}{ch^2(ax)}\cdot a\cdot sh(ax) \right) dx =$$

$$= \left(\frac{i\hbar a}{2} \right)\int \frac{sh(ax)}{ch^3(ax)}\cdot d(ax) = \left(\frac{i\hbar a}{2} \right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sh(y)\cdot dy}{ch^3(y)} = 0$$

$sh(y)$ — нечетн.

$\boxed{\langle p \rangle = 0}$

$$\langle x^2 \rangle = \int \psi^* \hat{x}^2 \psi\, dx = \frac{a}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{ch^2 ax}\cdot dx = \frac{a}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(ax)^2}{ch^2(ax)}\cdot d(ax)\cdot\frac{1}{a^3} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\cdot dy}{ch^2 y} = \frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{ch^2 y}\cdot dy = \frac{1}{2a^2} I_1$$

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\int \psi(x)\cdot e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{ch(ax)}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right)}\cdot dx \quad \in$$

$e^{ax} + e^{-ax} = 0$

$e^{2ax} = -1 = e^{i\pi(2k+1)} \Rightarrow x = \frac{i\pi(2k+1)}{2a}$



$\int = 2\pi i \cdot \sum \mathrm{Res}\,[\dots]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 2\pi i \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{a \cdot sh(ax)} \right) \Big|_{x = \frac{i\pi(2k+1)}{2a}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1}{a} \cdot 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}(2k+1)}}{sh\left(\frac{i\pi(2k+1)}{2a}\right)} =$

$= \frac{2\pi i}{2\sqrt{\pi\hbar a}} \sum \dots = \left\{ sh\left(\frac{i\pi(2k+1)}{2a}\right) = i \cdot (-1)^k \right\} =$

$= \frac{\pi \cdot i}{\sqrt{\pi\hbar a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{i} \cdot e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}(2k+1)} =$

$= \sqrt{\frac{\pi}{\hbar a}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}(2k+1)}$ (=)

$\sum \dots = e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}} - e^{\frac{p\pi}{2a\hbar} \cdot 3} + e^{\frac{p\pi}{2a\hbar} \cdot 5} - \dots =$

$= \frac{e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}}}{1 + e^{\frac{p\pi}{2a\hbar} \cdot 2}} = \frac{e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}}}{1 + e^{\frac{p\pi}{a\hbar}}} = \frac{1}{e^{\frac{p\pi}{2a\hbar}} + e^{-\frac{p\pi}{2a\hbar}}} =$

$= \frac{1}{2 \cdot ch\left(\frac{p\pi}{2a\hbar}\right)}$

(=) $\sqrt{\frac{\pi}{\hbar a}} \cdot \frac{1}{2 \cdot ch\left(\frac{p\pi}{2a\hbar}\right)}$

$$\boxed{\psi(p) = \sqrt{\frac{\pi}{\hbar a}} \cdot \frac{1}{2 \cdot ch\left(\frac{p\pi}{2a\hbar}\right)}}$$

$\langle x^2 \rangle = \frac{a}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{ch^2(ax)} \cdot dx$ (=)

нули $ch(ax)$: $x = \frac{i\pi(2k+1)}{2a}$ (каждый полюс $\Rightarrow$ двукратный)

$\Rightarrow$ формула $\mathrm{Res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z-a)^n \cdot f(z)]$

$n = 2$ (кратность полюса)

(=) $\frac{a}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1!} \lim_{z \to \frac{i\pi(2k+1)}{2a}} \left[\frac{d}{dz} \left(\left(z - \frac{i\pi(2k+1)}{2a} \right)^2 \cdot \frac{z^2}{ch^2(az)} \right) \right] \cdot 2\pi i$

Попр. дифференцированием по параметру

$\langle x \rangle = \frac{a}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{ch^2(ax)} \cdot dx = 0$

$\langle x^2 \rangle = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{ch^2(ax)} \cdot dx$

$1 = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(ax)} \cdot dx$

$$1 = \int \frac{a}{2ch^2(ax)} \cdot dx$$

$$\frac{d}{da} 1 = 0 = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{ch^2(ax)}\,dx + \int \frac{(-2)\cdot sh(ax)\cdot x\cdot dx}{ch^3(ax)}\right]$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\pi^2}{12a^2}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^*(p)\cdot p\cdot \psi(p)\cdot dp = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\hbar a}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \int \frac{p^2}{ch^2\left(\frac{p\pi}{2a\hbar}\right)} \cdot dp$$

$$= \frac{\pi}{4\hbar a} \cdot \frac{\pi^2}{6\cdot(\xi)^3} = \frac{\pi}{4\hbar a} \cdot \frac{\pi^2}{6\cdot\left(\frac{\pi}{2a\hbar}\right)^3} = \xi$$

$$= \frac{\hbar^2 \cdot a^2}{24} = \frac{\hbar^2 a^2}{24}$$

$$Dx = \frac{\pi^2}{12a^2}$$

$$Dp = \frac{\hbar^2 a^2}{24}$$

$$Dx \cdot Dp = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{12 \cdot 24}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^*(x)\cdot(-\hbar^2)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\cdot dx = -\hbar^2 \cdot \frac{a}{2}\int \frac{1}{ch(ax)}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{ch(ax)}\right)\cdot dx = -\hbar^2 \cdot \frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right) = \frac{\hbar^2\cdot a^2}{3}$$

$$Dx \cdot Dp = \frac{\pi^2}{12a^2} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot a^2}{3}$$

(№3) $\langle \chi | L | \psi \rangle^* = \langle \psi | L^+ | \chi \rangle = \{L = L^+\} =$

$= \langle \psi | L | \chi \rangle$

Какими должны быть f, f, f и g, чтобы $L^+ = L$? Нужно проверить равенство:

$\langle \chi | L | \psi \rangle^* = \langle \psi | L | \chi \rangle$

а) $\hat{L}\psi = \int dx' \cdot f(x-x')\cdot\psi(x')$

$\langle \chi | L | \psi \rangle = \int dx \cdot dx' \cdot \chi^*(x)\cdot \underbrace{L(x,x')}_{f(x-x')}\cdot\psi(x')$

$\langle \chi | L | \psi \rangle^* = \int dx\,dx' \cdot \chi(x)\cdot f^*(x-x')\cdot\psi^*(x') =$

$= \int dx\,dx' \cdot \psi^*(x')\cdot\chi(x)\cdot f^*(x-x') = \langle \psi | L^* | \chi \rangle$

Чтобы выполн. равенство $\langle \chi | L | \psi \rangle^* = \langle \psi | L | \chi \rangle$, нужно: $f(x-x') = f^*(x-x')$

б) $f(x+x') = f^*(x+x')$

в) $f(x)\cdot g(x') = (f(x)\cdot g(x'))^*$

(№6) 2. Гармонический осциллятор: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$

$\hat{x}|_{t=0} = \hat{x}(0)$, $\hat{p}|_{t=0} = \hat{p}(0)$

$\frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{\hat{p}}{m}$, $\frac{d}{dt}\hat{p} = -k\hat{x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{\hat{p}}{m} \\ \frac{d\hat{p}}{dt} = -k\hat{x} \end{cases} \quad (1)$$

$\frac{d}{dt}$ (1) →

$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot\frac{d\hat{x}}{dt}$$

($\frac{d\hat{p}}{dt} = -k\hat{x}$)

$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \omega^2\cdot\frac{d\hat{x}}{dt} = 0$$

$$\hat{x}(t) = \hat{C}_1\cdot\cos(\omega t) + \hat{C}_2\cdot\sin(\omega t)$$

$$\hat{p}(t) = m\cdot\frac{d\hat{x}}{dt} = -m\omega\cdot\hat{C}_1\cdot\sin(\omega t) + m\omega\cdot\cos(\omega t)\cdot\hat{C}_2$$

$\hat{C}_1, \hat{C}_2$ → из НУ

$\hat{x}|_{t=0} = \hat{x}(0) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{x}(0)$

$\hat{p}(0) = \hat{p}(0) \Rightarrow m\omega\hat{C}_2 = \hat{p}(0) \rightarrow \hat{C}_2 = \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}$

Итого: решение ур-я Гайзенберга

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0)\cdot\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\cdot\sin\omega t$$

$$\hat{p}(t) = -m\omega\cdot\hat{x}(0)\cdot\sin\omega t + \hat{p}(0)\cdot\cos(\omega t)$$

1. Свободная частица $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

$k=0$: $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m}$

$\frac{d\hat{p}}{dt} = \underbrace{-k\hat{x}}_{=0} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \hat{p}(0)$

$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}(0)}{m} \rightarrow \hat{x}(t) = \frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t + C$

$\hat{x}(t=0) = \hat{x}(0) \Rightarrow C = \hat{x}(0)$

Решение ур:

$\hat{p} = \hat{p}(0)$, $\hat{x} = \frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t + \hat{x}(0)$

3. $\hat{H} = -g\mu_0\hat{l}_z H_z$

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{L}]$$

$$\frac{d}{dt}\hat{l}_x = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{l}_x] = \frac{i}{\hbar}\cdot(-g\cdot\mu_0\cdot H_z)\cdot[\hat{l}_z, \hat{l}_x] =$$

$$= \{\,[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\varepsilon_{ijk}\cdot\hat{l}_k\,\} = -\frac{i}{\hbar}\cdot g\cdot\mu_0 H_z\cdot i\cdot\underbrace{\varepsilon_{312}}_{=1}\cdot\hat{l}_y =$$

$$= \frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot\hat{l}_y$$

$$\frac{d}{dt}\hat{l}_y = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{l}_y] = \frac{i}{\hbar}\cdot(-g\mu_0 H_z)\cdot[\hat{l}_z, \hat{l}_y] =$$

$$= \{\,[\hat{l}_z, \hat{l}_y] = i\cdot\varepsilon_{321}\cdot\hat{l}_x = -i\cdot\hat{l}_x\,\} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\cdot(-g\mu_0 H_z)\cdot(-i\hat{l}_x) = -\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot\hat{l}_x$$

$$\frac{d}{dt}\hat{l}_z = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{l}_z] = \ldots\cdot[\hat{l}_z, \hat{l}_z] = 0 \rightarrow \boxed{\hat{l}_z = \hat{l}_z(0)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{l}_x = \frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\hat{l}_y & (1) \\ \frac{d}{dt}\hat{l}_y = -\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\hat{l}_x \\ \hat{l}_z = \hat{l}_z(0) \end{cases}$$

$\frac{d}{dt}(1) \to \frac{d^2}{dt^2}\hat{l}_x = \frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot\frac{d}{dt}\hat{l}_y = -\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\right)^2\cdot\hat{l}_x$

$\frac{d^2}{dt^2}\cdot\hat{l}_x + \left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\right)^2\cdot\hat{l}_x = 0$

$\hat{l}_x(t) = \hat{C}_1\cdot\cos\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t\right) + \hat{C}_2\cdot\sin\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t\right)$

$\hat{l}_y(t) = \frac{\hbar}{g\mu_0 H_z}\cdot\frac{d}{dt}\hat{l}_x = -\hat{C}_1\cdot\sin\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t\right) +$

$+\hat{C}_2\cdot\cos\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t\right)$

$\hat{l}_x(0) = \hat{l}_x(0) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{l}_x(0)$

$\hat{l}_y(t=0) = \hat{l}_y(0) \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{l}_y(0)$

Решение УГ:

$$\begin{cases} \hat{l}_x(t) = \hat{l}_x(0)\cdot\cos\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}t\right) + \hat{l}_y(0)\cdot\sin\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}t\right) \\ \hat{l}_y(t) = -\hat{l}_x(0)\cdot\sin\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}t\right) + \hat{l}_y(0)\cdot\cos\left(\frac{g\mu_0 H_z}{\hbar}t\right) \\ \hat{l}_z(t) = \hat{l}_z(0) \end{cases}$$

4. $\hat{H} = -2\mu_0\cdot\hat{S}_y\cdot H_y$

$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{L}]$

$\frac{d}{dt}\hat{S}_x = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{S}_x] = \frac{i}{\hbar}\cdot(-2\mu_0 H_y)\cdot[\hat{S}_y,\hat{S}_x] =$

$= \frac{-2i\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot i\cdot\underbrace{\varepsilon_{213}}_{=-1}\cdot\hat{S}_z = \left(\frac{-2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)\hat{S}_z$

$\frac{d}{dt}\hat{S}_y = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{S}_y] = 0$

$\frac{d}{dt}\hat{S}_z = \frac{i}{\hbar}\cdot[\hat{H},\hat{S}_z] = \frac{i}{\hbar}\cdot(-2\mu_0 H_y)\cdot[\hat{S}_y,\hat{S}_z] =$

$= \frac{i}{\hbar}\cdot(-2\mu_0 H_y)\cdot i\cdot\underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1}\cdot\hat{S}_x = \frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot\hat{S}_x$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{S}_x = \left(\frac{-2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)\cdot\hat{S}_z \quad (1) \\ \frac{d}{dt}\hat{S}_y = 0 \\ \frac{d}{dt}\hat{S}_z = \left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)\cdot\hat{S}_x \end{cases}$$

$\frac{d}{dt}(1) \to \frac{d^2}{dt^2}\cdot\hat{S}_x = \left(\frac{-2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)\cdot\frac{d\hat{S}_z}{dt} = -\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)^2\cdot\hat{S}_x$

$\frac{d^2}{dt^2}\hat{S}_x + \left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\right)^2\cdot\hat{S}_x = 0$

$\hat{S}_x = \hat{C}_1\cdot\cos\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}t\right) + \hat{C}_2\cdot\sin\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}t\right)$

$\hat{S}_y = \hat{S}_y(0)$

$\hat{S}_z = -\left(\frac{\hbar}{2\mu_0 H_y}\right)\cdot\frac{d}{dt}\hat{S}_x = \hat{C}_1\cdot\sin\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot t\right) - \hat{C}_2\cdot\cos\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}t\right)$

$\hat{S}_x(t=0) = \hat{S}_x(0) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{S}_x(0)$

$\hat{S}_z(t=0) = \hat{S}_z(0) \Rightarrow \hat{C}_2 = -\hat{S}_z(0)$

Итого:

$$\begin{cases} \hat{S}_x(t) = \hat{S}_x(0)\cdot\cos\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}t\right) - \hat{S}_z(0)\cdot\sin\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot t\right) \\ \hat{S}_y(t) = \hat{S}_y(0) \\ \hat{S}_z(t) = \hat{S}_x(0)\cdot\sin\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot t\right) + \hat{S}_z(0)\cdot\cos\left(\frac{2\mu_0 H_y}{\hbar}\cdot t\right) \end{cases}$$

(№7) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x}$

а) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ $\quad \hat{x}(t) = \frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t + \hat{x}(0)$

$\psi(x,t) = \psi\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle$

$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\cdot\langle[\hat{H},\hat{x}]\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\frac{p^2}{2m},x]\rangle =$

$= \frac{i}{2m\hbar}\langle p[px] + [px]p\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle -2i\hbar p\rangle =$

$= \frac{\langle p\rangle}{m}$

$\langle\hat{x}\rangle = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m}\cdot t + \hat{x}(0)$

$n_1\cdot S_1(t) + n_2\cdot S_2(t) = n_1(0)\cdot S_1(0)$

$\langle\psi|x|\psi\rangle = x_0$

$\langle\psi|p|\psi\rangle = p_0$

$\langle x(t)\rangle = \frac{p_0}{m}\cdot t + x_0$

$\langle\psi|x^2(t)|\psi\rangle = \langle x^2(t)\rangle = \langle\psi|\left(\frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t + \hat{x}(0)\right)^2|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{\hat{p}^2(0)}{m}\cdot t + \frac{1}{m}\cdot\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)\cdot t + \frac{1}{m}\hat{x}(0)\cdot\hat{p}(0)t + \hat{x}^2(0)|\psi\rangle =$

$= \frac{1}{m}\cdot\langle\psi|\hat{p}^2(0)|\psi\rangle\cdot t + \frac{1}{m}\langle\psi|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0) + \hat{x}(0)\cdot\hat{p}(0)|\psi\rangle\cdot t + \langle\psi|\hat{x}^2(0)|\psi\rangle = \frac{1}{m}\cdot t\cdot\langle p^2\rangle + \frac{1}{m}\langle\psi|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0) + \hat{x}(0)\cdot\hat{p}(0)|\psi\rangle\cdot t + \langle x^2\rangle$

$\langle x^2\rangle = \frac{\Delta^2}{2} + x_0^2$

$\langle p^2\rangle = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}$

3 вопрос:

№2 Ответ к задаче: $a=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ один из ответов

$$a^+=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

чтобы получить ответы в общем виде → переход к новому базису:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow |\psi_+(\theta,\varphi)\rangle$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad |\psi_-(\theta,\varphi)\rangle$

№7 $\hat{x}_r(t) = x_r(0) + \frac{p_r(0)}{m}\cdot t$

$\hat{p}_r(t) = \hat{p}_r(0)$

$\langle\psi_r|\hat{x}_r(t)|\psi_r\rangle = x_0 + \frac{p_0}{m}\cdot t =$

$= \langle\psi_w(t)|\hat{x}_w|\psi_w(t)\rangle$

$\langle\psi_r|\hat{p}_r(t)|\psi_r\rangle = p_0$

$\mathcal{D}p = ?$

$\langle\psi_r|\hat{p}_r^2(t)|\psi_r\rangle = \langle\psi_r|p_r^2(0)|\psi_r\rangle =$

$= \left(\text{такой же ответ, как будто динамики нет}\right) = p_0^2 + \underbrace{\frac{t^2}{2\Delta^2}}_{\mathcal{D}p}$

$\mathcal{D}p = \frac{t^2}{2\Delta^2}$ (не зависит от времени)

$\langle\psi_r|x_r^2(t)|\psi_r\rangle = \langle\psi_r|x_r^2(0) +$

$+\hat{x}_r(0)\cdot\frac{\hat{p}_r(0)}{m}\cdot t + \frac{\hat{p}_r(0)}{m}\cdot\hat{x}_r(0)\cdot t +$

$+\frac{p_r^2(0)}{b^2}\cdot t^2|\psi_r\rangle = \left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right) +$

$+\frac{1}{m^2}\cdot t^2\cdot\left(p_0^2+\frac{t^2}{2\Delta^2}\right) +$

$+\langle\ldots\rangle$

↑ считать вместе (т.к. по отд. $\frac{p_r(0)}{m}\cdot x_r(0)$ не получ. расплывание пакета $\mathcal{D}x \sim \frac{\Delta^2}{2} + \frac{t^2}{m^2\Delta^2}t^2$

вопрос с координатами

↑ дисп. импульса, деленная на массу $\sim\left(\frac{\delta p}{m}\cdot t\right)^2$

Для гарм. осциллятора: средние $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ колеблются по гарм. закону

$\Delta x \sim ? \cdot \cos^2 \omega t + ?? \cdot \sin^2 \omega t$

$\Delta p \sim$ ——— // ———

Проверка:

Если: $\Delta^2 = \frac{t}{\sqrt{km}}$ подогнать ↓ $\Rightarrow$ $\Delta x = const$, $\Delta p = const$ (т.к. ? совп. с ??)

по нашу т.о. – классическая частица

Семинар. Гайзенберг.

(11) $H = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & & -\hbar\omega \end{pmatrix}$

$\hat{A}(t=0) = \begin{pmatrix} p(t) & a(t) & b(t) \\ a^*(t) & q(t) & c(t) \\ b^*(t) & c^*(t) & r(t) \end{pmatrix}$ ← произв. эрмитов оператор

$A_r(t) - ?$ Решать не с помощью УГ!!!

Форм. решения УГ здесь сработает:

$\hat{A}_r(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \cdot A_r(0) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$n_1 S_1(t) + n_2 S_2(t) = n_1(0) S_1(0) + n_2(0) S_2(0)$

$e^{\frac{i}{\hbar}Ht} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$

$\hat{A}_r(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(t) & a(t) & b(t) \\ a^*(t) & q(t) & c(t) \\ b^*(t) & c^*(t) & r(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & e^{i\omega t} \end{pmatrix} =$

$= \dots$

(12) а) $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2}$ → $U(x)$ (не яма)

Решение получ. для обычного

$\hat{x}(t) = \cos(\omega t) \cdot \hat{x}(0) + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \cdot \sin(\omega t)$

→ $(k \to -k)$ и $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \to i\omega$

$\hat{x}(t) = x(0) \cdot ch(\omega t) + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \cdot sh(\omega t)$

Найти

$\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$, $\Delta x(t)$, $\Delta p(t)$ – ?

(в гауссовом пакете)

p_0 → x_0 •

б) Убедиться, что получ. 4 случая:

1) взав-ие от x_0, p_0, Δ (от их соотн.):

* а) ⇄

* б) ⟶ (туннелирование)

(Сначала посчитать энергию)

2)

* а)

* б) ⇄ (надбарьерное отражение)

(№3) 1. а) свободная частица $\frac{p^2}{2m}$

б) гармонич. осциллятор $\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$

Выписать соотн. неопр. для коорд. в $t=0$ и коорд. при t:

$\mathcal{D}(x(0)) \cdot \mathcal{D}x(t) \geq ?$

2, $|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$

Найти корреляционную ф-ю: $\langle X(t)\cdot X(0)\rangle = ?$

Эрмитов ли оператор $\left(X(t)\cdot X(0)\right)^+ = X^+(0)\cdot X^+(t) =$

$= X(0)\cdot X(t) \neq X(t)\cdot X(0)$ нет, не эрмитов

$\langle X(t)\cdot X(0)\rangle =$ (будет комплекс. число – ничего удивительного, т.к. $X(t)\cdot X(0)$ неэрмитов)

↑ все матричные элементы уже подсчитаны

(№4) $\sum_n X^*_{mn} \cdot X_{nm} \cdot \omega^4_{nm} = ?$ (решена в лекциях)

$\sum_n X^*_{mn} \cdot X_{nm} \cdot \omega^5_{nm} = ?$

Дан гамильтониан: $X_{nm} = \langle \psi_n | X | \psi_m \rangle$

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ↖ произв. потенциал.

$\omega_{nm} =$

(№5) Шредингер, $H = \hbar\omega \cdot \sigma_x$

$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\psi_{\omega}(t)\rangle = ?$

$\langle \sigma_1 \rangle - ?$ $\langle \sigma_3 \rangle - ?$ $\mathcal{D}\sigma_1$, $\mathcal{D}\sigma_3$

Пишем

$$|\psi_{ш}(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \rightarrow \text{подст. в нестац. УШ}$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(получ. простая система ДУ)

Легче: взять $|\psi(0)\rangle = \psi_{Г}$ и найти в Гейзенберге $\langle \sigma_1 \rangle$ $\langle \sigma_3 \rangle$

Но тут решать в УШ.

$$\langle \psi_{ш} | \sigma_1 | \psi_{ш} \rangle = \langle \underbrace{\psi(0)}_{\psi_{Г}} | \sigma_1^{Г}(t) | \psi(0) \rangle$$

(№6) пусть есть 2 ямы, частица может быть либо в одной, либо в другой. Система двухуровневая.



$$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \Delta \left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| \right)$$

Δ ↑ const

$$H|L\rangle = \Delta|L\rangle \underbrace{\langle R|L\rangle}_{=0} + \Delta|R\rangle \underbrace{\langle L|L\rangle}_{=1} = \Delta|R\rangle$$

Задача: $|\psi(0)\rangle = \cos\alpha \cdot |L\rangle + \sin\alpha \cdot |R\rangle$

$|\psi(t)\rangle = ?$

$P_R(t) = ?$

$P_L(t) = ?$

ВФ ищем в виде $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ → в нестац. УШ (как в предыд.)

$$P_R(t) = |\langle R|\psi\rangle|^2 = |b(t)|^2$$

$$P_L(t) = |\langle L|\psi\rangle|^2 = |a(t)|^2$$

H эрмитов → $e^{\frac{1}{i\hbar}Ht}$ при H эрмитовом – унитарен → сохр. норма ВФ →

→ $|b(t)|^2 + |a(t)|^2 = 1 \Rightarrow$

не нужно заботиться о нормировке вер-тн., т.к. $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

(№7) Гамильтониан 2-х уровневой системы общего вида:

$$H = V \cdot \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdot V^+$$

↑ унитарной

$$V = e^{i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{i\varphi} & -\sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ \sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

$H = \text{унит} \cdot \text{диаг} \cdot \text{унит}^+ = \underset{\text{эрмитов}}{\text{произв.}}$

$$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вер-ти переходов:

$$P_{1\to 2} = |\langle 2| \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}_{\text{ВФ в момент времени } t} |1\rangle|^2$$

$$P_{2\to 1} = |\langle 1| e^{\frac{i}{\hbar}Ht} |2\rangle|^2$$

одинаковы (всегда для двухуровневой системы)

доп. $|3\rangle$ (трехуровневая система), тогда

$P_{1\to 2} \neq P_{2\to 1}$,

$\boxed{P_{1\to 2} = P_{2\to 1}}$ только для двухуровневой системы

• Считать в базисе, где V V^+ убрутся. Потом вернутся в старый базис.

$$H = VAV^+$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = 1 + \left(\frac{-i}{\hbar}t\right) VAV^+ + \underbrace{\frac{\left(\frac{-i}{\hbar}t\right)^2}{2!} VAV^+}_{u_I} \cdot$$

$$\underline{V}AV^+ + \ldots = \{ V^+V = 1 \} =$$

$$= VV^+ + \left(\frac{-it}{\hbar}\right) VAV^+ + \frac{\left(\frac{i}{\hbar}t\right)^2}{2!} \cdot VA^2V^+ + \ldots =$$

$$= V\left(1 + \left(\frac{-i}{\hbar}tA\right)^1 + \frac{\left(\frac{-i}{\hbar}tA\right)^2}{2!} + \ldots\right) \cdot V^+ =$$

$$= V \cdot e^{\frac{-i}{\hbar}At} \cdot V^+$$

$$\langle 2|V \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}At} \cdot V^+|1\rangle = \langle 2|V \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i}{\hbar}E_2t} \end{pmatrix}$$

$V^+|1\rangle$

$\langle 2|V$ · $\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} \end{pmatrix}$ · $V^+|1\rangle$

$\langle 1|V$ — и — $V^+|2\rangle$

примем $(V^+|1\rangle)^+ = \langle 1|V$

№8 $|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot |\psi_1(x)\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}} |\psi_2(x)\rangle$

Найти $|\psi(t)\rangle$

Найти:

$\langle x \rangle$
$\langle p \rangle$
Δx
Δp

в момент времени t

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|\psi_1(x)\rangle \cdot + i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2(x)\rangle\right).$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} |\psi_1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} |\psi_2\rangle$$

$|\psi_1(x)\rangle$ полиномы Эрмита
$|\psi_2(x)\rangle$

Домашняя работа №6:

б)
2)+ №1 $H = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\omega \end{pmatrix}$, $\hat{A}(t=0) = \begin{pmatrix} p & a & b \\ a^* & q & c \\ b^* & c^* & r \end{pmatrix}$

$A_H(t) = \underbrace{e^{\frac{iHt}{\hbar}} \cdot A_H(0) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}_{\text{формальное решение уравнения Гайзенберга}} = ?$

ера
а/з: $A_H(t) = ?$

$$e^{\frac{iHt}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$A_H(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & a & b \\ a^* & q & c \\ b^* & c^* & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p \cdot e^{i\omega t} & a \cdot e^{i\omega t} & b \cdot e^{i\omega t} \\ a^* & q & c \\ b^* \cdot e^{-i\omega t} & c^* \cdot e^{-i\omega t} & r \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p & a \cdot e^{i\omega t} & b \cdot e^{i2\omega t} \\ a^* \cdot e^{-i\omega t} & q & c \cdot e^{i\omega t} \\ b^* \cdot e^{-i2\omega t} & c^* \cdot e^{-i\omega t} & r \end{pmatrix}$$

№2 а) $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2}$ не зна, а:

Для Г.О. получим:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cdot \cos(\omega t) + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

$K \to -K \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$ [ω]

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cdot \cos(i\omega t) + \frac{\hat{p}(0)}{mi\omega} \cdot \sin(i\omega t) = \left\{ \begin{array}{l} \cos(ix) = \mathrm{ch}\,x \\ \sin(ix) = i \cdot \mathrm{sh}\,x \end{array} \right\} =$$

$$= \hat{x}(0) \cdot \mathrm{ch}(\omega t) + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \cdot \mathrm{sh}(\omega t)$$

Для Г.О.: $\hat{p}(t) = -m\omega\hat{x}(0) \cdot \sin(\omega t) + \hat{p}(0) \cdot \cos(\omega t)$

$\hat{p}(t) = -im\omega \cdot \hat{x}(0) \cdot i \cdot \mathrm{sh}(\omega t) + \hat{p}(0) \cdot \mathrm{ch}(\omega t) = m\omega\hat{x}(0) \cdot \mathrm{sh}\omega t +$

$+ \hat{p}(0) \cdot \mathrm{ch}(\omega t)$

$$\boxed{\langle \psi_n | \hat{x}_n(t) | \psi_n \rangle = x_0 \cdot \mathrm{ch}(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \cdot \mathrm{sh}(\omega t)}$$

$$\langle\psi_n|\hat{p}_n(t)|\psi_n\rangle = m\omega x_0 \cdot sh(\omega t) + p_0 \cdot ch(\omega t)$$

$$\langle\psi_n|\hat{X}_n^2(t)|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\hat{X}^2(0)\cdot ch^2\omega t + \frac{1}{m\omega}\cdot ch(\omega t)\cdot sh(\omega t)\cdot$$

$$\cdot x(0)\cdot p(0) + \frac{1}{m\omega}\cdot p(0)\cdot x(0)\cdot sh(\omega t)\cdot ch(\omega t) + \frac{\hat{p}^2(0)\cdot sh^2\omega t}{m^2\omega^2}|$$

$$\psi_n\rangle = \left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)\cdot ch^2\omega t + \left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\frac{sh^2\omega t}{m^2\omega^2} +$$

$$+\langle\psi_n|\hat{X}(0)\cdot\hat{p}(0) + \hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle\cdot\frac{1\cdot sh(\omega t)\cdot ch(\omega t)}{m\omega}$$

$$\langle\psi_n|\hat{X}(0)\cdot\hat{p}(0) + \hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle = \int\psi^*\cdot\hat{A}\cdot\psi\cdot dx =$$

$$= \left\{\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\Delta^2}-\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\cdot\left(x\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_n\right) - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot\psi_n)\right)\cdot$$

$$\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot\int\left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}-\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\cdot\left(x\cdot(-i\hbar)\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot\right.\right.$$

$$\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x} - i\hbar x\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0 x} -$$

$$\left.\left. - i\hbar\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0 x}\right)\right]\cdot dx =$$

$$= \frac{(-i\hbar)}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(2x\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\right)+\right.$$

$$\left. + 1\right)\cdot dx = \frac{(i\hbar)}{\sqrt{\pi}\Delta}\cdot 2\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}\cdot dx +$$

$$+\frac{(-i\hbar)}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\cdot\frac{i}{\hbar}p_0\cdot 2\cdot\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot dx +$$

$$+\frac{(-i\hbar)}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx = I_1+I_2+I_3$$

$$I_1 = \frac{2i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\frac{x}{\Delta}\cdot\frac{(x-x_0)}{\Delta}\cdot dx =$$

$$= \frac{2i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}\cdot dx + \frac{2i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot x_0\cdot\underbrace{\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}\cdot dx}_{=0} =$$

(нечетн. ρ-ся)

$$= \frac{2i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-y^2}\cdot y^2\cdot dy\cdot\Delta = \frac{2i\hbar}{\sqrt{\pi}}\cdot\int y\cdot d\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}}\right)\int y\cdot d(e^{-y^2}) = \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\left(\underbrace{(y\cdot e^{-y^2})\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\cdot dy}_{=\sqrt{\pi}}\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = i\hbar$$

$$I_3 = \frac{(-i\hbar)}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx = \frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Delta = -i\hbar$$

$$I_2 = \frac{2p_0}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot dx = \frac{2p_0}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\left[\underbrace{\int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot(x-x_0)\cdot dx}_{\text{(нечет. } \rho\text{-ся)}\ \to 0} +\right.$$

$$\left. + \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x_0\cdot dx\right] = \frac{2p_0\cdot x_0}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Delta = 2p_0\cdot x_0$$

$$I_1+I_2+I_3 = 2p_0\cdot x_0 + i\hbar - i\hbar = 2p_0\cdot x_0$$

$$\langle\psi_n|\hat{X}_n^2(t)|\psi_n\rangle = \left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)\cdot ch^2\omega t + \left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\frac{sh^2\omega t}{m^2\omega^2} +$$

$+\frac{2p_0 x_0 \cdot sh(\omega t)\, ch(\omega t)}{m\omega}$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{p}^2(0)|\psi_\Gamma\rangle = \langle\psi_\Gamma|(m\omega\hat{x}(0)\cdot sh\omega t + \hat{p}(0)\cdot ch\omega t)^2|\psi_\Gamma\rangle =$

$= m^2\omega^2 \cdot sh^2\omega t \cdot \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) + \left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot ch^2\omega t +$

$+ m\omega \cdot sh\omega t \cdot ch\omega t : \langle\psi_\Gamma|\hat{x}(0)\cdot\hat{p}(0) + \hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle =$

$= m^2\omega^2 \cdot sh^2\omega t \cdot \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) + \left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot ch^2\omega t +$

$+ m\omega \cdot sh\omega t \cdot ch\omega t \cdot 2p_0 x_0$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{p}^2(0)|\psi_\Gamma\rangle = m^2\omega^2 \cdot sh^2\omega t \cdot \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) + \left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot ch^2\omega t + 2p_0 x_0 \cdot m\omega \cdot sh\omega t \cdot ch\omega t$

$\mathcal{D}x(t) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right)\cdot ch^2\omega t +$

$+ \left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot \frac{sh^2\omega t}{m^2\omega^2} + \frac{2p_0 x_0 \cdot sh(\omega t)\cdot ch\omega t}{m\omega} -$

$- \left(x_0 \cdot ch\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\cdot sh\omega t\right)^2 = (-//-) - x_0^2 \cdot ch^2\omega t -$

$- \frac{2x_0 p_0 \cdot ch\omega t \cdot sh\omega t}{m\omega} - \frac{p_0^2 \cdot sh^2\omega t}{m^2\omega^2} =$

$= \frac{\Delta^2}{2}\cdot ch^2\omega t + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\cdot\frac{sh^2\omega t}{m^2\omega^2}$

$\mathcal{D}p(t) = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = m^2\omega^2 \cdot sh^2\omega t\left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) +$

$+ \left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot ch^2\omega t + 2p_0 x_0 \cdot m\omega \cdot sh\omega t \cdot ch\omega t -$

$- (m\omega x_0 \cdot sh\omega t + p_0 \cdot ch\omega t)^2 = m^2\omega^2 \cdot sh^2\omega t \cdot \frac{\Delta^2}{2} +$

$+ \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\cdot ch^2\omega t$

Если $\Delta^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{km}} = \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}} = \frac{\hbar}{m\omega}$, то $\mathcal{D}x = const$, $\mathcal{D}p = const$

Аналогичный номер из старой Д/З:

1. Свободная частица $H = \frac{p^2}{2m}$

$\hat{x}(t) = \frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t + \hat{x}(0)$, $\hat{p} = \hat{p}(0)$

$\langle x\rangle = \langle\psi_\Gamma|\hat{x}_\Gamma(t)|\psi_\Gamma\rangle = x_0 + \frac{p_0}{m}\cdot t$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{p}_\Gamma(t)|\psi_\Gamma\rangle = p_0$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{x}_\Gamma^2(t)|\psi_\Gamma\rangle = \langle\psi_\Gamma|\left(\hat{x}_\Gamma(0) + \frac{\hat{p}_\Gamma(0)}{m}\cdot t\right)^2|\psi_\Gamma\rangle =$

$= \langle\psi_\Gamma|\hat{x}_\Gamma^2(0) + \hat{x}_\Gamma(0)\cdot\frac{\hat{p}_\Gamma(0)}{m}\cdot t + \frac{\hat{p}_\Gamma(0)}{m}\cdot\hat{x}_\Gamma(0)\cdot t +$

$+ \frac{p_\Gamma^2(0)}{m^2}\cdot t^2|\psi_\Gamma\rangle = \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) + \frac{t^2}{m^2}\cdot\left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right) +$

$+ \langle\psi_\Gamma|\hat{x}_\Gamma(0)\cdot\hat{p}_\Gamma(0) + \hat{p}_\Gamma(0)\cdot\hat{x}_\Gamma(0)|\psi_\Gamma\rangle\cdot\frac{1}{m} =$

$= \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right) + \frac{t^2}{m^2}\cdot\left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right) + \frac{t}{m}\cdot 2p_0 x_0$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{p}_\Gamma^2|\psi_\Gamma\rangle = \langle\psi_\Gamma|\hat{p}^2(0)|\psi_\Gamma\rangle = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}$

$\mathcal{D}x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{t^2}{m^2}\cdot\left(p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right) +$

$+ \frac{t}{m}\cdot 2p_0 x_0 - \left(x_0 + \frac{p_0}{m}\cdot t\right)^2 = \frac{\Delta^2}{2} + \frac{t^2}{m^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}$

$\mathcal{D}p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\Delta^2} - p_0^2 = \frac{\hbar^2}{2\Delta^2}$

2. Гармонический осциллятор $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}$

$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)\cdot\cos\omega t+\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\cdot\sin\omega t$

$\hat{p}(t)=-m\omega\hat{x}(0)\cdot\sin\omega t+\hat{p}(0)\cdot\cos\omega t$

$\langle x\rangle=\langle\psi_n|\hat{x}(t)|\psi_n\rangle=x_0\cdot\cos\omega t+\frac{p_0}{m\omega}\cdot\sin\omega t$

$\langle p\rangle=\langle\psi_n|\hat{p}(t)|\psi_n\rangle=-m\omega\cdot x_0\sin\omega t+p_0\cdot\cos\omega t$

$\langle\psi_n|\hat{x}^2(t)|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|(\hat{x}(0)\cdot\cos\omega t+\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\cdot\sin\omega t)^2|\psi_n\rangle=$

$=\langle\psi_n|\hat{x}^2(0)\cdot\cos^2\omega t+\frac{1}{m\omega}\cdot\cos\omega t\cdot\sin\omega t\cdot(\hat{x}(0)\hat{p}(0)+$

$+\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0))+\frac{\hat{p}^2(0)}{m^2\omega^2}\cdot\sin^2\omega t|\psi_n\rangle=$

$=\cos^2\omega t\cdot\left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)+\left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2}+$

$+\frac{1}{m\omega}\cdot\cos\omega t\sin\omega t\cdot 2p_0x_0$

$\langle\psi_n|\hat{p}^2(t)|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|m^2\omega^2\cdot\hat{x}^2(0)\cdot\sin^2\omega t+$

$+(-m\omega\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t)\cdot(\hat{x}(0)\cdot\hat{p}(0)+\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0))+$

$+\hat{p}^2(0)\cdot\cos^2\omega t|\psi_n\rangle=m^2\omega^2\cdot\sin^2\omega t\cdot\left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)+$

$+(-m\omega\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t)\cdot 2x_0\cdot p_0+\left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\cos^2\omega t$

$\mathbb{D}x=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\cos^2\omega t\cdot\left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)+\left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2}+\frac{2x_0p_0}{m\omega}\cdot\cos\omega t\cdot\sin\omega t-\left(x_0\cdot\cos\omega t+\frac{p_0}{m\omega}\cdot\sin\omega t\right)^2=\frac{\Delta^2}{2}\cdot\cos^2\omega t+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\cdot\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2}$

$\mathbb{D}p=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=m^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t)\cdot\left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)+$

$+(-m\omega\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t)\cdot 2x_0\cdot p_0+\left(p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\right)\cdot$

$\cdot\cos^2\omega t-(-m\omega x_0\cdot\sin\omega t+p_0\cdot\cos\omega t)^2=$

$=m^2\cdot\omega^2\cdot\sin^2\omega t\cdot\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\cdot\cos^2\omega t$

(N3) 1. а) своб. частица $H=\frac{p^2}{2m}$

$\mathbb{D}x(t)=\frac{\Delta^2}{2}+\frac{t^2}{m^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}$

$\mathbb{D}x(0)=\frac{\Delta^2}{2}$

$\mathbb{D}x(t)\cdot\mathbb{D}x(0)=\frac{\Delta^4}{4}+\frac{\hbar^2}{4m^2}\cdot t^2\geq\frac{\Delta^4}{4}$ (равно при $t=0$)

$\mathbb{D}x(t)\cdot\mathbb{D}x(0)\geq\frac{\Delta^4}{4}$

б) гармонический осциллятор $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}$

$\mathbb{D}x(t)=\frac{\Delta^2}{2}\cdot\cos^2\omega t+\frac{\hbar^2}{2\Delta^2}\cdot\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2}$

$\mathbb{D}x(0)=\frac{\Delta^2}{2}$

$\mathbb{D}x(t)\cdot\mathbb{D}x(0)=\frac{\Delta^4}{4}\cdot\cos^2\omega t+\frac{t^2}{4m^2\omega^2}\cdot\sin^2\omega t$

$\mathbb{D}x(t)\cdot\mathbb{D}x(0)\geq\max\left\{\frac{\Delta^4}{4},\frac{t^2}{4m^2\omega^2}\right\}$

2. $|\psi_\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0 x}$

Корреляционная функция $\langle x(t)\cdot x(0)\rangle$ - ?

$\langle\psi_\Gamma|\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle$

а) свободная частица:

$\langle\psi_\Gamma|\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle = \langle\psi_\Gamma|\left(\hat{x}(0)+\frac{\hat{p}(0)}{m}\cdot t\right)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle =$

$= \langle\psi_\Gamma|\hat{x}^2(0)|\psi_\Gamma\rangle + \frac{t}{m}\cdot\langle\psi_\Gamma|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle =$

$= \left(x_0^2+\frac{\Delta^2}{2}\right) + \frac{t}{m}\langle\psi_\Gamma|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle$

$\langle\psi_\Gamma|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_\Gamma\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}-\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\cdot$

$\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\right)\right)\cdot dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot(-i\hbar)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}-\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}\cdot\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x}+\right.$

$\left.+ x\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\right)\cdot e^{\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\cdot x\right)}\right)dx =$

$= \frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\left(1+x\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}+\frac{i}{\hbar}p_0\right)\right)dx =$

$= \frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot dx + \left(\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot\frac{(x-x_0)}{\Delta^2}\cdot dx +$

$+ \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot\frac{i}{\hbar}p_0\cdot dx$ (=)

$0+\frac{1}{2}(\vec{n},\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+n_3 & n_1-ia_2 \\ n_1+ia_2 & 0-n_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n_3 & n_1-ia_2 \\ n_1+ia_2 & -n_3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{n_3}{2}-\lambda & \frac{n_1-ia_2}{2} \\ \frac{n_1+ia_2}{2} & -\frac{n_3}{2}-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$-\left(\frac{n_3}{2}-\lambda\right)\cdot\left(\frac{n_3}{2}+\lambda\right) - \frac{n_1^2}{4} - \frac{n_2^2}{4} = 0$

$-\left(\frac{n_3^2}{4}-\lambda^2\right) - \frac{n_1^2}{4} - \frac{n_2^2}{4} = 0$

$\lambda^2 - \frac{\vec{n}^2}{4} = 0$

$\lambda^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\rangle$

$[x(t), x(0)] = [\hat{x}(0)\cdot\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\cdot\sin\omega t,\ \hat{x}(0)] =$

$= [\hat{p}(0), \hat{x}(0)]\cdot\frac{\sin\omega t}{m\omega} = \left(-i\cdot\hbar\cdot\frac{\sin\omega t}{m\omega}\right) = i\cdot C$

$\Delta x(t)\cdot\Delta x(0) \geq \frac{\langle C\rangle^2}{4}$

$C = -\frac{\sin\omega t\cdot\hbar}{m\omega}$

③ $\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\Delta\cdot\sqrt{\pi} + \left(\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot\frac{x\cdot(x-x_0)}{\Delta^2}\cdot dx +$

$+\left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\Delta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}\cdot x\cdot\frac{i}{\hbar}p_0\cdot dx = \frac{-i\hbar}{\sqrt{\pi}\cdot\Delta}\cdot\Delta\sqrt{\pi} + I_2' + I_3'$

$I_2' = \frac{1}{2}I_1$, где I_1 посчитан в №2 этой д/з

$I_2' = \frac{i\hbar}{2}$

$I_3' = \frac{1}{2}I_2$, где I_2 посчитан в №2 этой д/з

$I_3' = \frac{1}{2}\cdot 2p_0\cdot x_0 = p_0\cdot x_0$

$\langle\psi_n|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle = -i\hbar + \frac{i\hbar}{2} + p_0\cdot x_0 = \frac{-i\hbar}{2} + p_0\cdot x_0$

Корреляционная функция:

$$\langle\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)\rangle = \langle\psi_n|\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle = x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{t}{m}\cdot\left(p_0\cdot x_0 - \frac{i\hbar}{2}\right)$$

б) гармонический осциллятор

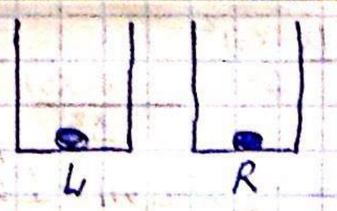
$\langle\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)\rangle = \langle\psi_n|\left(\hat{x}(0)\cdot\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\cdot\sin\omega t\right)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle =$

$= \langle\psi_n|\hat{x}^2(0)|\psi_n\rangle\cdot\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega}\langle\psi_n|\hat{p}(0)\cdot\hat{x}(0)|\psi_n\rangle =$

$= \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right)\cdot\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega}\cdot\left(p_0\cdot x_0 - \frac{i\hbar}{2}\right)$

$$\langle\hat{x}(t)\cdot\hat{x}(0)\rangle = \left(x_0^2 + \frac{\Delta^2}{2}\right)\cdot\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{m\omega}\left(p_0 x_0 - \frac{i\hbar}{2}\right)$$

№6



$|L\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|R\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$H = \Delta(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|) = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot(1\ 0)\right) =$

$= \Delta\cdot\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \Delta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$|\psi(0)\rangle = \cos\alpha\cdot|L\rangle + \sin\alpha\cdot|R\rangle$

$|\psi(t)\rangle = ?$, $P_R(t) = ?$, $P_L(t) = ?$

$|\psi(t)\rangle$ ищем в виде $\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$ → подст. в нестац. уравнение Шредингера

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot a\\ \dot b\end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot a = \Delta b \\ i\hbar\dot b = \Delta a\end{cases} \quad ,\frac{d}{dt}$$

$i\hbar\ddot a = \Delta\dot b = \Delta\cdot\frac{\Delta a}{i\hbar}$ → $\ddot a + \frac{\Delta^2}{\hbar^2}\cdot a = 0$

$a = A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t$, $\omega = \sqrt{\frac{\Delta^2}{\hbar^2}} = \frac{\Delta}{\hbar}$

$b = \frac{i\hbar}{\Delta}\cdot\dot a = \frac{i\hbar}{\Delta}\cdot(-\sin\omega t)\cdot\frac{\Delta}{\hbar}\cdot A + B\cdot\frac{i\hbar}{\Delta}\cdot\cos\omega t\cdot\frac{\Delta}{\hbar} =$

$= -iA\cdot\sin\omega t + iB\cdot\cos\omega t$

$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(0)\\b(0)\end{pmatrix}$

$a(0) = A = \cos\alpha$, $b(0) = iB = \sin\alpha$

$A = \cos\alpha$, $B = -i\cdot\sin\alpha$

$\psi(t) = \begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot\cos\omega t - i\cdot\sin\alpha\cdot\sin\omega t\\ -i\cdot\cos\alpha\cdot\sin\omega t + i\cdot(-i\cdot\sin\alpha)\cdot\cos\omega t\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot\cos\omega t - i\cdot\sin\alpha\cdot\sin\omega t\\ -i\cdot\cos\alpha\cdot\sin\omega t + \sin\alpha\cdot\cos\omega t\end{pmatrix}$

$P_R(t) = |\langle R|\psi\rangle|^2 = |b(t)|^2 = \left(\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\omega t + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\omega t}\right)^2 =$

$= \cos^2\alpha\cdot\sin^2\omega t + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\omega t$

$P_L(t) = |\langle L|\psi\rangle|^2 = |a(t)|^2 = \cos^2\alpha\cdot\cos^2\omega t + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\omega t$,

где $\omega = \frac{\Delta}{\hbar}$

$P_R + P_L = 1$

(25) $H = \hbar\omega\sigma_2$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\psi_{III}(t)\rangle = ?$

Ищем $\psi_{III}(t)$ в виде: $|\psi_{III}(t)\rangle = \begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$

подст. в нестац. УШ

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot a\\ \dot b\end{pmatrix} = \hbar\omega\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot a = -ib\hbar\omega \\ i\hbar\dot b = ia\hbar\omega\end{cases} \quad \begin{cases}\dot a = -b\omega\\ \dot b = a\omega\end{cases}$$

$\ddot{a} = -\dot{b}\cdot\omega = -\omega^2 \cdot a$

$\ddot{a} + \omega^2 a = 0$

$a = A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t$

$b = -\frac{1}{\omega}\cdot\dot{a} = -\frac{1}{\omega}\cdot(A\omega\cdot(+\sin\omega t) + B\omega\cdot\cos\omega t) =$

$= A\cdot\sin\omega t - B\cdot\cos\omega t$

A, B опр. из Н.У.: $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$a(0) = 1 = A \quad \Rightarrow A = 1$

$b(0) = 0 = -B \quad \Rightarrow B = 0$

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$

$\langle\sigma_1\rangle = \langle\psi_{III}|\sigma_1|\psi_{III}\rangle = (\cos\omega t \ \ \sin\omega t)\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} =$

$= (\sin\omega t \ \ \cos\omega t)\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = \sin\omega t\cdot\cos\omega t + \cos\omega t\cdot\sin\omega t =$

$= \sin(2\omega t)$

$\langle\sigma_3\rangle = (\cos\omega t \ \ \sin\omega t)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} =$

$= (\cos\omega t \ \ -\sin\omega t)\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = \cos^2\omega t - \sin^2\omega t =$

$= \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} - \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} = \cos 2\omega t$

$\langle\sigma_1\rangle = \sin 2\omega t$

$\langle\sigma_3\rangle = \cos 2\omega t$

$\langle\sigma_1^2\rangle = ?$

$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\langle\sigma_1^2\rangle = \langle\psi_{III}|\hat{\sigma}_1^2|\psi_{III}\rangle = (\cos\omega t \ \ \sin\omega t)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} =$

$= \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$

$\langle\sigma_3^2\rangle = ?$

$\sigma_3^2 = \hat{I}$

$\langle\sigma_3^2\rangle = 1$

$D\sigma_1 = \langle\sigma_1^2\rangle - \langle\sigma_1\rangle^2 = 1 - \sin^2(2\omega t) = 1 - \sin^2(2\omega t) = \cos^2(2\omega t)$

$D\sigma_3 = \langle\sigma_3^2\rangle - \langle\sigma_3\rangle^2 = 1 - \cos^2(2\omega t) = \sin^2(2\omega t)$

(№) ур $\dot{\hat{z}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{z}]$

Возьм $\langle n|\dot{\hat{z}}|k\rangle$ в базисе СФ $\hat{H}$:

$\langle n|\dot{\hat{z}}|k\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle n|\hat{H}\hat{z} - \hat{z}\hat{H}|k\rangle = \left\{\begin{array}{l}\hat{H}|k\rangle = E_k|k\rangle\\ H\text{-эрмитов}, \ \langle n|\hat{H} = E_n\langle n|\end{array}\right\} =$

$= \frac{i}{\hbar}(E_n\langle n|\hat{z}|k\rangle - E_k\langle n|\hat{z}|k\rangle) = \underbrace{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_k)}_{\uparrow \omega_{nk}}\langle n|\hat{z}|k\rangle =$

$= i\omega_{nk}\cdot\langle n|\hat{z}|k\rangle$

$\boxed{\omega_{nk} = -\omega_{kn}}$

$z_{nk} = \langle n|\hat{z}|k\rangle = \int\psi_n^*\cdot\hat{z}\cdot\psi_k\cdot dx$

$(z_{nk})^* = \left(\int\psi_n^*\hat{z}\psi_k\cdot dx\right)^* = \int\psi_k^*\cdot\hat{z}^*\cdot\psi_n\cdot dx = \langle k|\hat{z}^*|n\rangle =$

$= (z^*)_{kn} \Rightarrow$

$\Rightarrow (X^*)_{mn} = (X_{nm})^*$

$(X_{mn})^* = (X^*)_{nm} = \{X^* = X\} = X_{nm}$

$\dot{z}_{nk} = i\omega_{nk} \cdot z_{nk}$

$A_{nk} = \int \varphi_n^* \cdot \hat{A}(x,p) \cdot \varphi_k \, dx$

$A_m = \sum_k |z_{nk}|^2 \cdot \omega_{nk}^{2m+1} = \begin{cases} \dot{z}_{nk} = i\omega_{nk} \cdot z_{nk} \\ z_{nk}^* = z_{kn} \ (if \ z = z^*?) \\ \omega_{nk} = -\omega_{kn} \end{cases}$

$= \begin{cases} \ddot{z}_{nk} = i\omega_{nk} \cdot \underbrace{i\omega_{nk} \cdot z_{nk}}_{\dot{z}_{nk}} = i^2 \cdot \omega_{nk}^2 \cdot z_{nk} \\ z_{nk}^{(m)} = i^m \cdot \omega_{nk}^m \cdot z_{nk} \end{cases} =$

$= \sum z_{nk} \cdot z_{nk}^* \cdot \omega_{nk}^{2m+1} = \sum z_{nk} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{nk}^m \cdot \omega_{nk}^{m+1} =$

$= \frac{1}{2} \sum \left[z_{nk} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{nk}^m \cdot \omega_{nk}^{m+1} + z_{nk} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{nk}^m \cdot \omega_{nk}^{m+1} \right] =$

$= \frac{1}{2} \sum \left[\frac{(i^m \cdot \omega_{nk}^m \cdot z_{nk})}{i^m \cdot \omega_{nk}} \cdot \frac{(i^{m+1} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{kn}^{m+1})}{i^{m+1} \cdot \omega_{kn}^{m+1}} \cdot \omega_{nk}^m \cdot \omega_{nk}^{m+1} + \right.$

$\left. + \frac{(i^{m+1} \cdot \omega_{nk}^{m+1} \cdot z_{nk})}{i^{m+1} \cdot \omega_{nk}^{m+1}} \cdot \frac{(i^m \cdot \omega_{kn}^m \cdot z_{kn})}{i^m \cdot \omega_{kn}^m} \cdot \omega_{nk}^m \cdot \omega_{nk}^{m+1} \right] =$

$= \frac{1}{2} \sum \left[(i^m \cdot \omega_{nk}^m \cdot z_{nk}) \cdot (i^{m+1} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{kn}^{m+1}) \cdot (-1)^{2m+1} \cdot (-1)^{m+1} + \right.$

$\left. + (i^{m+1} \cdot z_{nk} \cdot \omega_{nk}^{m+1}) \cdot (i^m \cdot \omega_{kn}^m \cdot z_{kn}) \cdot (-1)^{2m+1} \cdot (-1)^m \right] =$

$= \frac{1}{2} \sum_k (-i)^{2m+1} \cdot (-1)^{m+1} \cdot \left[z_{nk}^{(m)} \cdot z_{kn}^{(m+1)} - z_{nk}^{(m+1)} \cdot z_{kn}^{(m)} \right] =$

$(-i)^{2m+1} \cdot (-1)^{m+1} = (-i) \cdot \left((-i)^{2m} \cdot (-1)^{m+1} \right) =$

$= (-i) \cdot \left(i^{2m} \cdot (-1)^{m+1} \right) = \left\{ \begin{matrix} i^0 = 1 & i^4 = 1 \\ i^2 = -1 & \dots \end{matrix} \right\} =$

$= \{ i^{2m} = (-1)^m \} = (-i) \cdot \left((-1)^m \cdot (-1)^{m+1} \right) =$

$= (-i) \cdot (-1)$

$= -\frac{i}{2} \cdot \sum_k (-1) \cdot \left[\langle n | z^{(m)} | k \rangle \cdot \langle k | z^{(m+1)} | n \rangle - \right.$

$\left. - \langle n | z^{(m+1)} | k \rangle \cdot \langle k | z^{(m)} | n \rangle \right] = \left\{ \sum_k |k\rangle\langle k| = \hat{I} \right\} =$

$= \frac{-i}{2} \cdot \left((-1) \cdot \left[\langle n | z^{(m)} \cdot z^{(m+1)} | k \rangle - \langle n | z^{(m+1)} \cdot z^{(m)} | n \rangle \right] \right) =$

$= \frac{-i}{2} \cdot (-1) \cdot \langle n | z^{(m)} \cdot z^{(m+1)} - z^{(m+1)} \cdot z^{(m)} | n \rangle =$

$= \frac{-i}{2} \cdot (-1) \cdot \langle n | \left[\frac{d^m z}{dt^m}, \frac{d^{m+1} z}{dt^{m+1}} \right] | n \rangle$

$A_m = (-1) \cdot \left\{ -\frac{i}{2} \langle n | \left[\frac{d^m z}{dt^m}, \frac{d^{m+1} z}{dt^{m+1}} \right] | n \rangle \right\}$

Если бы считали $C_m = \sum |z_{nk}|^2 \cdot \omega_{kn}^{2m+1} =$

$= -A_m \ \{ m.к. \ \omega_{kn} = -\omega_{nk} \} = \frac{-i}{2} \left\{ \langle n | \left[\frac{d^m z}{dt^m}, \frac{d^{m+1} z}{dt^{m+1}} \right] \right.$

$| n \rangle$

$$B_m = \sum |z_{nk}|^2 \cdot \omega_{kn}^{2m} = \sum z_{nk} \cdot z_{kn} \cdot \omega_{kn}^{2m} =$$

$$= \left\{ z^{(m)}_{nk} = i^m \cdot \omega_{nk}^m \cdot z_{nk} \right\} =$$

$$= \sum_k \left(z_{nk} \cdot \omega_{kn}^m \right) \cdot \left(z_{kn} \cdot \omega_{kn}^m \right) =$$

$$= \sum_k \left[\frac{\left(i^m \cdot \omega_{nk}^m \cdot z_{nk} \right)}{i^m \cdot \omega_{nk}^m} \cdot \omega_{kn}^m \right] \cdot \left[\frac{\left(i^m \cdot \omega_{kn}^m \cdot z_{kn} \right)}{i^m \cdot \omega_{kn}^m} \cdot \omega_{kn}^m \right] =$$

$$= \sum_k \left[z^{(m)}_{nk} \cdot (-i)^m \cdot (-1)^m \right] \cdot \left[z^{(m)}_{kn} \cdot (-i)^m \right] =$$

$$= \sum_k \underbrace{\left((-i)(-i)(-1) \right)^m}_{=1} \cdot \langle n | z^{(m)} | k \rangle \cdot \langle k | z^{(m)} | n \rangle =$$

$$= \left\{ \sum_k |k\rangle\langle k| = \hat{I} \right\} = \langle n | z^{(m)} \cdot z^{(m)} | n \rangle =$$

$$= \langle n | \left(\frac{d^m z}{dt^m} \right)^2 | n \rangle$$

Дано:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$B_2 = \sum_n |x_{mn}|^2 \cdot \omega_{nm}^4 = \langle m | \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 | m \rangle$$

$$A_2 = \sum_n |x_{mn}|^2 \cdot \omega_{nm}^6 = \frac{-i}{2} \langle m | \left[\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^3 x}{dt^3} \right] | m \rangle$$

$$\dot{\hat{x}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}), \hat{x} \right] = \frac{i}{\hbar} \cdot \frac{1}{2m} [\hat{p}^2, \hat{x}] =$$

$$= \left\{ \text{вычисляем уже } [\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p} \right\} =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left(\frac{-2i\hbar\hat{p}}{2m} \right) = \frac{\hat{p}}{m}$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{-\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{m} \Rightarrow \ddot{\hat{x}} = \frac{1}{m} \dot{\hat{p}} = -\frac{1}{m} \cdot V'(x)$$

$$\dddot{\hat{x}} = -\frac{1}{m} \cdot V''(x)$$

$$B_2 = \langle m | \left(\frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} \right)^2 | m \rangle = \langle m | \frac{1}{m^2} \cdot (V'(x))^2 | m \rangle = \frac{(V'(x))^2}{m^2}$$

(состояние ψ_m; $\frac{1}{m^2}$ — масса)

$$A_2 = \frac{-i}{2} \langle m | \left[\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^3 x}{dt^3} \right] | m \rangle = -\frac{i}{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{m} \cdot V'(x) \right) \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot V''(x) \right) - \left(-\frac{1}{m} \cdot V''(x) \right) \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot V'(x) \right) \right] = 0$$

??? 0 — при чётном потенциале

(V8) $|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\psi_1(x)\rangle + i \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |\psi_2(x)\rangle$

$\psi(t)$ — ?

$\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, Δx, Δp — ? в момент времени t

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 \cdot t} \cdot |\psi_1(x)\rangle + i \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{iE_2 \cdot t}{\hbar}} \cdot |\psi_2(x)\rangle$$

$\langle x(t)\rangle = \int \psi^*(x,t)\cdot x\cdot \psi(x,t)\cdot dx$

$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^n\cdot n!}}$

$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2} =$

$= \underbrace{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}}_{\tilde{a}}\cdot x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2} = \tilde{a}x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

$\psi_2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot 2}} =$

$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(4\cdot\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} =$

$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}}_{b}\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

$\langle x\rangle = \int |\psi(x,t)|^2\cdot x\cdot dx = \int\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|\psi_1\rangle\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} - i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|\psi_1\rangle\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\cdot x\cdot dx =$

$= \frac{1}{3}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\psi_1^2(x)\cdot x\,dx}_{\text{нечетн.}}\to 0 + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\psi_2^2(x)\cdot x\,dx}_{\text{нечетн.}}\to 0 +$

$+\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot i\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\psi_1\cdot\psi_2\cdot\left\{e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)\cdot t} - e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)\cdot t}\right\}\cdot dx =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\psi_1\cdot\psi_2\cdot\underbrace{2i\cdot\sin\left(\frac{E_1-E_2\cdot t}{\hbar}\right)}\cdot dx =$

$= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{E_2-E_1\cdot t}{\hbar}\right)\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi_1\cdot\psi_2\cdot dx =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sin\left(\frac{E_2-E_1\cdot t}{\hbar}\right)\cdot I$

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi_1\cdot\psi_2\cdot dx = \tilde{a}b\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\left(x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\right)\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot dx =$

$= \tilde{a}\cdot b\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^4 - 2x^2\right)\cdot dx =$

$= \tilde{a}b\cdot\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot x^4\cdot dx - 2ab\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot x^2\cdot dx =$

Табличный интеграл:

$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cdot x^n\cdot dx = \begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/a^{\frac{n+1}{2}} & (n>-1,\ a>0)\\ \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}\cdot a^k}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} & (n=2k,\ k,a>0)\end{cases}$

$= \tilde{a}b\cdot\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot\frac{3!!}{2^3\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} - 2ab\cdot\frac{1}{2^2\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^1}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$

где $\tilde{a} = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\pi^{1/4}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot \sin\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\cdot t\right)\cdot I$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$$

$$\boxed{\langle x(t)\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot \sin(\omega t)\cdot I}$$

$$\langle x^2(t)\rangle = \int \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\psi_1\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\psi_1\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + i\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\psi_2\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)x^2\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^2\cdot x^2\cdot dx + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^2\cdot x^2\cdot dx + \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot i\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots = \frac{1}{3}\int\psi_1^2\cdot x^2\cdot dx + \frac{2}{3}\int\psi_2^2\cdot x^2\cdot dx +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\left(\underbrace{\frac{E_2-E_1}{\hbar}}_{=\omega}t\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1\cdot\psi_2\cdot x^2\cdot dx =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\cdot\int\tilde{a}^2\cdot x^2\cdot e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x^2\cdot dx = \frac{1}{3}\cdot\tilde{a}^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x^4\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\tilde{a}^2\cdot\frac{3}{2^3\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$I_2 = \frac{2}{3}\int\psi_2^2\cdot x^2\cdot dx = \frac{2}{3}\cdot\tilde{a}^2\int\left(\frac{4m\omega}{\hbar}x^2-2\right)^2\cdot x^2\cdot e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot dx =$$

$$= \frac{2}{3}\tilde{a}^2\left[\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot\frac{16m^2\omega^2}{\hbar^2}\cdot x^6\cdot dx + \right.$$

$$+\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot\left(-\frac{16m\omega}{\hbar}\right)\cdot x^4\cdot dx + 4\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x^2\cdot dx\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\tilde{a}^2\cdot\left[\frac{16m^2\omega^2}{\hbar^2}\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{2^4\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{16m\omega}{\hbar}\cdot\frac{3}{2^3\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right.$$

$$\left.+4\cdot\frac{1}{2^2\cdot\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right], \text{ здесь } a=\frac{m\omega}{\hbar}$$

$a = \frac{m\omega}{\hbar}$

$$I_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sin(\omega t)\cdot\int\tilde{a}b\cdot x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}x^2-2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot x^2\, dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\omega t\cdot\tilde{a}b\cdot\left[\int\underbrace{e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot\frac{4m\omega}{\hbar}x^5}_{\text{нечет.}}\cdot dx - 2\int\underbrace{e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x^3}_{\text{нечет.}}\cdot dx\right] = 0$$

$$\boxed{\langle x^2(t)\rangle = I_1 + I_2 + 0}$$

$$\boxed{\mathcal{D}x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = (I_1+I_2) - \frac{8}{9}\cdot\sin^2\omega t\cdot I^2}$$

$$\langle p(t)\rangle = \int \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cdot\psi_1\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} - i\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_2\cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-i\hbar\right)\cdot\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + i\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)dx =$$

(=)

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \tilde{a}\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \tilde{a}x\cdot\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} =$$

$$= \tilde{a}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2\right)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = b\cdot\frac{8m\omega}{\hbar}\cdot x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + b\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = b\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot\left(\frac{8m\omega}{\hbar}\cdot x + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\cdot x\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\right)$$

(=) $(-i\hbar)\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3}\psi_1\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{3}\cdot\psi_2\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\,dx + \right.$

$$+ i\sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\int\left(\psi_1\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t} - \psi_2\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)\cdot t}\right)\cdot dx\right] = I_4 + I_5 + I_6$$

$$I_4 = \frac{1}{3}\int\psi_1\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,dx = \frac{1}{3}\int\tilde{a}\,x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot\left(\tilde{a}\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2\right)\right)\cdot dx = \left\{\begin{array}{l}\text{в подынтегр. вогр.}\\ \text{нечетная ф-я} \Rightarrow =0\end{array}\right\} = 0$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\int\psi_2\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cdot dx = \frac{2}{3}\int b\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}x^2 - 2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2}\cdot$$

$$\cdot b\cdot\left(\frac{8m\omega}{\hbar}\cdot x - \frac{m\omega}{\hbar}\cdot\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^3 + \frac{2m\omega}{\hbar}\cdot x\right)\cdot dx =$$

$$= \int\underbrace{e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x^3}_{\text{нечет.}}\cdot dx \;(\text{так со всеми}) + \ldots - \frac{4m\omega}{\hbar}\cdot\frac{2}{3}b^2\int$$

$$e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\cdot x\cdot dx = 0$$

$$I_6 = I_7 + I_8$$

$$I_7 = i\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t}\int\tilde{a}\cdot x\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot b\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{8m\omega}{\hbar}x - \frac{m\omega}{\hbar}x\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\right)\cdot dx$$

$$I_8 = i\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}\int b\cdot\left(\frac{4m\omega}{\hbar}\cdot x^2 - 2\right)\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot x^2}\cdot$$

$$\cdot\tilde{a}\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2\right)\cdot dx$$

I_7, I_8 также счит. по формуле стр. 11

$$\boxed{\langle p(t)\rangle = I_6 = I_7 + I_8}$$

(№7) $A = V \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdot V^+$ — V-унитарной

$$V = e^{i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{i\varphi} & -\sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ \sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

$P_{1\to 2} = |\langle 2| e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |1\rangle|^2 = ?$

$P_{2\to 1} = |\langle 1| e^{\frac{i}{\hbar}Ht} |2\rangle|^2 = ?$

(Для двухуровневой системы $P_{1\to 2} = P_{2\to 1}$)

1 способ: (не переходим в новый базис)

$$H = e^{i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{i\varphi} & -\sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ \sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} & \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{-i\xi} = \dots$$

$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-\frac{i}{\hbar}(VAV^+)} = V \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}At} \cdot V^+$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}At} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \end{pmatrix}$$

$$P_{1\to 2} = \left| \langle 2| V \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \end{pmatrix} V^+ |1\rangle \right|^2$$

$$P_{2\to 1} = \left| \langle 1| V \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \end{pmatrix} V^+ |2\rangle \right|^2$$

$$V^+|1\rangle = e^{-i\xi} \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} & \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

[2×2]·[2×1] = [2×1]

$$= e^{-i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} \end{pmatrix}$$

$(V^+|1\rangle)^+ = \langle 1|V$

$$\langle 1|V = \left(e^{-i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} \end{pmatrix} \right)^+ = e^{i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \\ -\sin\theta \cdot e^{i\eta} \end{pmatrix}^T$$

$$V^+|2\rangle = e^{-i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} & \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$(V^+|2\rangle)^+ = \langle 2|V$

$$\langle 2|V = e^{i\xi} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot e^{-i\eta} \\ \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}^T$$

$$\langle 2|V \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} V^+|1\rangle =$$

$$= e^{i\xi} e^{-i\xi} \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot e^{-i\eta} & \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta \cdot e^{-i\eta} \end{pmatrix} =$$

$= (\sin\theta \cdot e^{-i\eta} \quad \cos\theta \cdot e^{-i\varphi}) \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot \cos\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ -e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \cdot \sin\theta \cdot e^{-i\eta} \end{pmatrix} =$

$= \sin\theta\cos\theta \cdot e^{-i(\eta+\varphi)} \cdot \left(e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right) =$

$P_{1\to 2} = |-\!\!\!\!-|^2 =$

$\langle 11 | V \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 \cdot t} \end{pmatrix} V^+ | 2 \rangle =$

$= e^{i\frac{\eta}{2}} \cdot (\cos\theta \cdot e^{i\varphi} \quad -\sin\theta \cdot e^{i\eta}) \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \cdot$

$\cdot e^{-i\frac{\eta}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} = (\cos\theta \cdot e^{i\varphi} \quad -\sin\theta \cdot e^{i\eta}) \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \cdot \sin\theta \cdot e^{i\eta} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \cdot \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \sin\theta\cdot\cos\theta \cdot e^{i(\eta+\varphi)} \cdot \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)$

$P_{1\to 2} = P_{2\to 1} = \left\{ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \right\} =$

$= \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \underbrace{\left|e^{i(\eta+\varphi)}\right|^2}_{=1} \cdot \left| e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \right|^2$

$e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} = \cos\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) - i\cdot\sin\left(\frac{E_1}{\hbar}\cdot t\right) -$

$-\cos\left(\frac{E_2}{\hbar}\cdot t\right) + i\cdot\sin\left(\frac{E_2}{\hbar}\cdot t\right)$

$|-\!\!\!\!-|^2 = \left(\cos\left(\frac{E_1 \cdot t}{\hbar}\right) - \cos\left(\frac{E_2}{\hbar}\cdot t\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{E_1 t}{\hbar}\right) - \sin\left(\frac{E_2 \cdot t}{\hbar}\right)\right)^2$

$\cos a - \cos b = -2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$|-\!\!\!\!-|^2 = 4\cdot\sin^2\left(\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}\right)t\right)\cdot\left(\sin^2\left(\frac{E_1+E_2}{2\hbar}\cdot t\right) + \cos^2\left(\frac{E_1+E_2}{2\hbar}\cdot t\right)\right) =$

$= 4\cdot\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}\cdot t\right)$

$$\boxed{P_{1\to 2} = P_{2\to 1} = 4\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}t\right)}$$

номер 2 из Д/З N5

1) $a^2 = 0$

2) $aa^+ + a^+a = 1 \qquad a = b + (\vec{c}\vec{\sigma}) \quad , \boxed{\vec{\sigma}^+ = \vec{\sigma}}$

(2:) $(b + (\vec{c},\vec{\sigma}))\cdot(b^* + (\vec{c}^*,\vec{\sigma})) + (b^* + (\vec{c}^*,\vec{\sigma}))\cdot(b + (\vec{c},\vec{\sigma})) = \hat{I}$

$bb^* + b^*\cdot(\vec{c},\vec{\sigma}) + b(\vec{c}^*,\vec{\sigma}) + (\vec{c},\vec{\sigma})\cdot(\vec{c}^*,\vec{\sigma}) +$

$+ b^*b + b\cdot(\vec{c}^*,\vec{\sigma}) + b^*\cdot(\vec{c},\vec{\sigma}) + (\vec{c}^*,\vec{\sigma})\cdot(\vec{c},\vec{\sigma}) = \hat{I}$

$2|b|^2 + 2b(\vec{c}^*,\vec{\sigma}) + 2b^*(\vec{c},\vec{\sigma}) + 2(\vec{c},\vec{c}^*) +$

$i[\vec{c}^*,\vec{c}]\cdot\vec{\sigma} + i\cdot[\vec{c},\vec{c}^*]\vec{\sigma} = \hat{I}$

$i\cdot[\vec{c}^*,\vec{c}]\vec{b} + i\cdot[\vec{c},\vec{c}^*]\cdot\vec{\sigma}$

$= \vec{0}$

$2|B|^2 + 2B(\vec{c}^*,\vec{\sigma}) + 2B^*(\vec{c},\vec{\sigma}) + 2(\vec{c},\vec{c}^*)\cdot\hat{\vec{I}} =$

$BB^* + (B\vec{c}^* + B^*\vec{c},\vec{\sigma}) + (\vec{c},\vec{c}^*)\cdot\hat{\vec{I}} = \frac{\hat{\vec{I}}}{2}$

Приравнивание коэфф. при матрицах ($\vec{\sigma}$ и $\vec{I}$):

$$\begin{cases} |B|^2 + (\vec{c},\vec{c}^*) = \frac{1}{2} \\ B\vec{c}^* + B^*\vec{c} = 0 \end{cases}$$

(1;) $(B + (\vec{c},\vec{\sigma}))\cdot(B + (\vec{c},\vec{\sigma})) = 0$

$B^2 + 2B(\vec{c}\vec{\sigma}) + \vec{c}^2 = 0$

$$\begin{cases} B^2 + \vec{c}^2 = 0 \\ 2B\vec{c} = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\begin{cases} |B|^2 + (\vec{c},\vec{c}^*) = \frac{1}{2} \\ B\vec{c}^* + B^*\vec{c} = 0 \\ B^2 + \vec{c}^2 = 0 \\ 2B\vec{c} = 0 \end{cases}$$

Допустим: $B = 0$, тогда

$$\begin{cases} (\vec{c},\vec{c}^*) = \frac{1}{2} \\ \vec{c}^2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$\vec{c}^* = \{c_1^*, c_2^*, c_3^*\}$

Пусть: $c_1 = a + ib$

$c_2 = d + ie$

$c_3 = f + ig$

$$\begin{cases} |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = \frac{1}{2} \quad (1) \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0 + 0i \quad (2) \end{cases}$$

$a^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = \frac{1}{2}$ (1)

$a^2 + 2ab\cdot i - b^2 + d^2 + 2de\cdot i - e^2 + f^2 + 2fg\cdot i - g^2 = 0$

$\Downarrow$

$a^2 - b^2 + d^2 - e^2 + f^2 - g^2 = 0$

$2ab + 2de + 2fg = 0$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = \frac{1}{2} \\ a^2 - b^2 + d^2 - e^2 + f^2 - g^2 = 0 \\ ab + de + fg = 0 \end{cases}$$

3 ур-я
6 неизвестных

$$\begin{cases} a^2 + d^2 + f^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 + e^2 + g^2 = \frac{1}{4} \\ ab + de + fg = 0 \end{cases}$$

по задаче: нужно сочин.

(3) 22 парое Д/З

$[A,B] = iC$ (коммут. зависит от времени)

$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\langle C \rangle^2}{4}$

(N1) $it \cdot \frac{d}{dt} G(t,x,x') = -\frac{t^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} G(t,x,x')$ (*)

$H = \frac{p^2}{2m}$

$G(0,x,x') = \delta(x-x')$

Замечание: 1) $G(t,x,x') = G(x-x',t)$, т.к ур-е (*) инвариантно относительно выбора начала координат.

1 способ. 2) Совершить преобразование Фурье по координате → решить (*) → → потом обр. преобр. Фурье.

2 способ. 3) $t \cdot \frac{d}{dt} G = -\frac{t^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} G$

↑ ур-е теплопр-ти ⇒ для него строим ф-ю Грина, в ней построить аналит. продолжение для G.

(N2) $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi}$

$S_n = (\vec{n}\vec{\sigma}) \cdot \frac{1}{2}$ (оператор проекции спина на ось $\vec{n}$: $\vec{n}(\theta,\varphi)$)

$S_{\vec{n}} |\psi(0)\rangle = \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}} |\psi(0)\rangle$

попадаем в верхнее пятно

все это помещено в слабое м.п.:

$\hat{H} = -2\mu_0 \hat{S}_z H_z$ Задача? спустя время t куда смотрит спин $\vec{n}(t) = ?$ $\Leftrightarrow$ $\theta(t) - ?$ $\varphi(t) - ?$

Решить 2-мя способами:

а) Шредингер
б) Гайзенберг $\Big\rangle$ получить одинаковые ответы

а) $it \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$ нестац. ур-е Шрединера

получим $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

в этом состоянии как подобрать, чтобы: ↗ напр. оси $\vec{n}(t)$

$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\underbrace{\vec{n}(t)}_{\uparrow}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

подобрать $\vec{n}(t)$, чтобы $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ был с.в. оператора $(\vec{n}\vec{\sigma})$

Так: $|\psi(0)\rangle$ знаем.

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta(t)}{2} \\ \sin\frac{\theta(t)}{2} \cdot e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi(t)}$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} = \underbrace{\operatorname{tg}\frac{\theta(t)}{2} \cdot e^{i\varphi(t)}}_{\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta(t) = 2\operatorname{arctg}\left(\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|\right)$$

$$\varphi(t) = \arg\frac{b(t)}{a(t)}$$

б) Гайзенберг $\vec{S}_r(t)$ → описать из предод. семинара:

$$\vec{S}_r(t) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_r(t)$$

У-равнение: $\vec{n}(t)\cdot\vec{S}_r(t) \bullet \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot e^{i\xi}$$

при $\hbar = 0$ условие выполняется

$\vec{n}(t)\cdot\vec{S}_r(t) = \vec{n}(0)\cdot\vec{S}_r(0)$ из этого ур-я подбираем $\vec{n}(t)$,

$\vec{n}(t)$ тоже должен вращ. вокруг оси z →

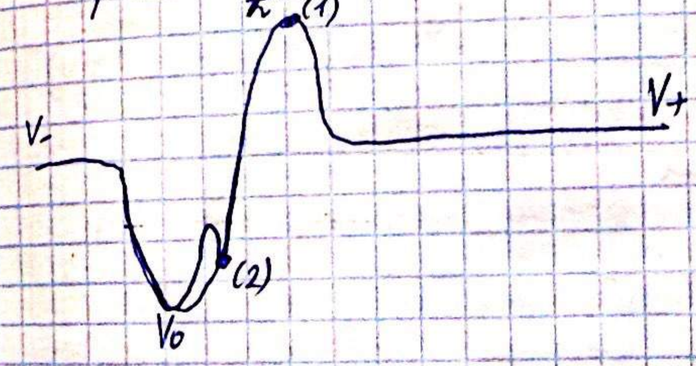
достаточно найти $\vec{n}(t)$

Ответ:

$\vec{n}(t)$ - прецессия вокруг оси z.

Стац. ур-е Шредингера в одномерном случае.

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0$$



Важно:

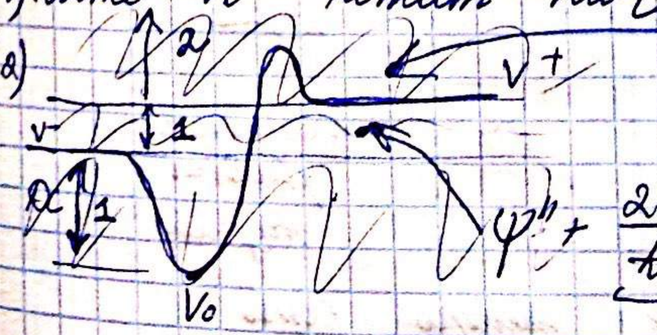
асимп. V_- — т.б. $+\infty$

асимпт. V_+ / (производная нет)

глобальный минимум

(1), (2) не играют роли вообще

1) ниже V_0 лежит нечего



а) $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_+)\psi = 0$

$\psi = A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx}$

$\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_+)\psi = 0$ $\quad \to \psi = A\cdot e^{\alpha x} + B\cdot e^{-\alpha x}$

$-\alpha^2$ $\quad$ $=0$ (из огр. ГУ на ∞) положим константу равной 1

Осцилляционная теорема:

Если уровни считать с 0-го:

0 ψ_0 → 0 нулей

1 ψ_1 → 1 нуль

2 ψ_2 → 2 нуля

.....

Теорема о четном потенциале

Если $V(-x) = V(x)$, то ψ_n либо четное, либо нечетное

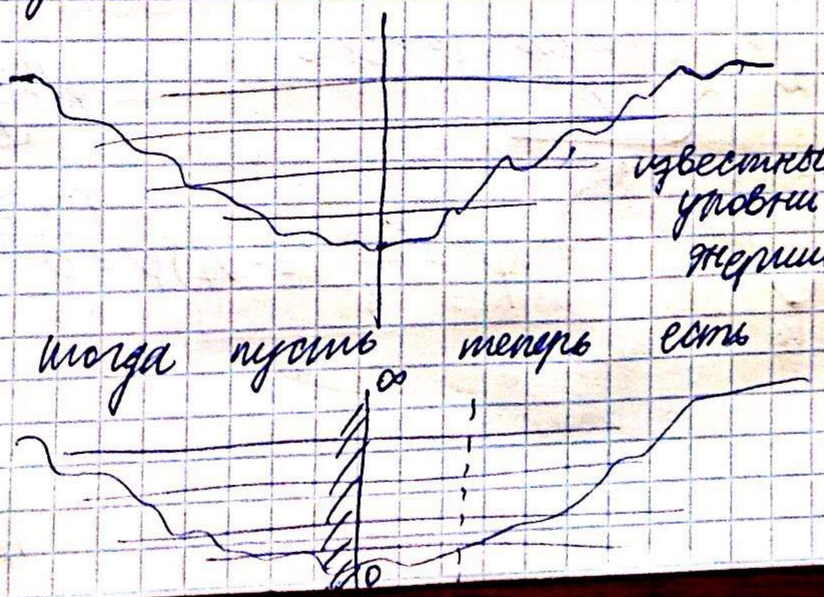
0 - четная

1 - нечетная

2 - четная

3 - нечетная

(N3) Пусть есть четной потенциал:

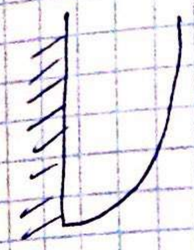


ост. только нечетное, чтобы удовл. ГУ: $\psi(0)=0$.

(на бесконечной стенке ВФ обращается в ноль)

$\left(E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$

$n \geq 1$



$\frac{kx^2}{2}$ уровни; $E_1 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

.....

$E_3 = \left(3+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

.....

(N4) $\psi(x) = N \cdot e^{-\frac{x^4}{\alpha^4 \cdot 4}}$ $E = ?$

$\psi(x) = N \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2} - p|x|}$ $V(x) = ?$

Мы не можем однозначно найти $V(x)$, т.к. $V(x)$ и $V(x)+C$ удовлетворяют УШ.

Будем считать: $V(\pm\infty) = 0$ (*)

Искать $V(x)$: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0$

Условие (*) позволяет отделить E и V.

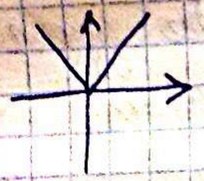
Замечание: осторожно с дифференцируем:

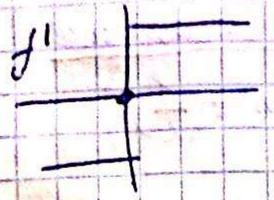
$f(x) = |x|$



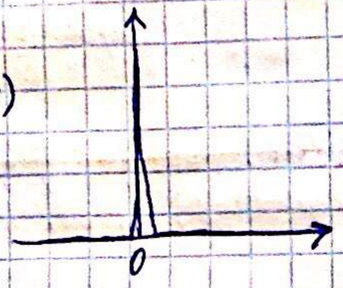
$f'(x)$

$f(x)=|x|$

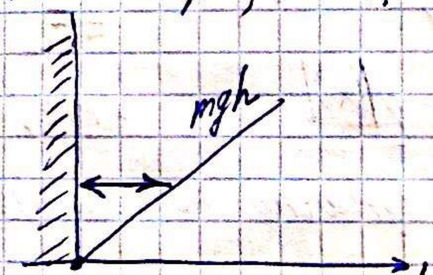




$f'' = 2\delta(x)$



(+) (№5) есть нейтрон, кот. живет в потенциале

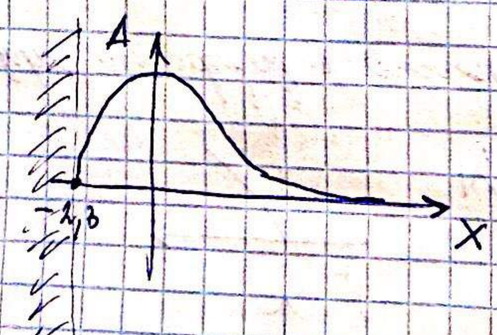


Найти уровень энергии основного состояния E_0, Δh локализац. ВФ в основном состоянии.

Понадобится спецфункция:

Ф-я Эйри I-го рода - решение ур-я:

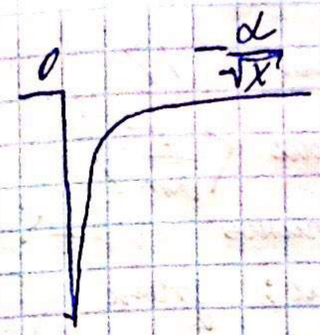
$A'' = xA$



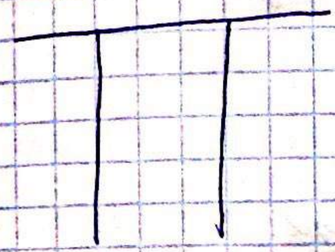
E_0 - ?

Δh - ?

(№6) (+)

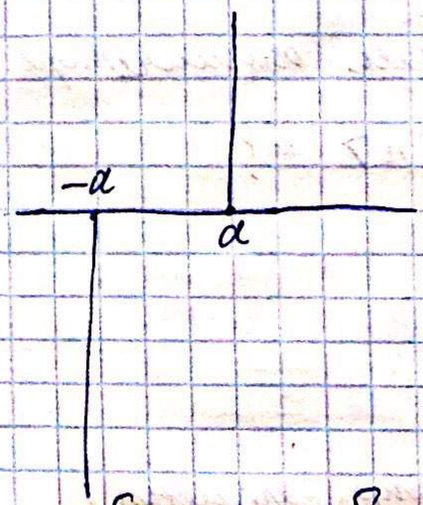


(№7)



2 δ-ямы (лекция - ?)

на дом:



1) Найти уровень энергии

2) Найти, как зависит ответ от расстояния

Ответ при беск. расстоянии - ответ для одной δ-ямы

оценить (по размерности) энергию основного состояния E_0 - ?

$\tilde{\nu}$?

(+) №8 $-q\cdot\delta(x)$

1) Найти $\langle V\rangle$

2) Найти $\left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle$

3) Проверить $\langle V\rangle + \left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle = E$

Ловушка: знак $\left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle > 0$

Вычислять аккуратно!

$\int \psi^* \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d}{dx^2}\right)\psi\, dx$ знак должен быть >0.

№9 Найти в гарм. осцилляторе.

(+) а) $\langle n|\ \begin{matrix} x \\ p \\ x^2 \\ p^2 \\ x^2p^2 \end{matrix}\ |n\rangle = ?$

б) недиаг. матр. элемент:

$\langle m|\ \begin{matrix} x^3 \\ x^4 \end{matrix}\ |n\rangle = ?$

в) $\langle 0|\ x^{2014}\ |2013\rangle$

$|2014\rangle$

$|2013\rangle$

$|2012\rangle$

Для в) решение:

$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\cdot(a+a^+)$ $\quad x_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{km}}$ (1)

$\hat{p} = \frac{p_0}{\sqrt{2}i}(a-a^+)$ $\quad p_0^2 = \hbar\sqrt{km}$ (2)

$[a, a^+] = 1$ (проверяется вар. a, a^+ из (1), (2) и вач. коммут.)

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

Пример: $\langle m|x^2|n\rangle = \langle m|\frac{x_0^2}{2}(a^2+aa^++a^+a+(a^+)^2)|n\rangle =$

$= \frac{x_0^2}{2}\cdot(\ldots)$ (=)

$\langle m|a^2|n\rangle = \langle m|a\,\underline{a|n\rangle} = $

$= \langle m|a\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \langle m|\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle =$

$= \sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\delta_{m,n-2}$

(=) $= \frac{x_0^2}{2}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\cdot\delta_{m,n-2} + \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\delta_{m,n+2}\right.$

Домашняя работа №8.

(+) (№2) а) Шредингер

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$$

1 а) б)
2 а)+ б)+
4 а)+ б)+
5 +
6 +
7
8 +
9 а)+
б)+
в)

$$\hat{H} = -2\mu_0 \hat{S}_z \cdot H_z$$

Ищем решение нестац. УШ в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \hat{H} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta(t)}{2} \\ \sin\frac{\theta(t)}{2} \cdot e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix} \cdot e^{i\cdot\xi(t)}$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} = \underbrace{tg\frac{\theta(t)}{2}}_{\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|} \cdot e^{i\varphi(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta(t) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|$$

$$\varphi(t) = \arg\frac{b(t)}{a(t)}$$

$\vec{e}_z \{0,0,1\}$

$$S_z = \frac{1}{2}(\{0,0,1\}\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -2\mu_0 H_z \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -\mu_0 \cdot H_z \cdot \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot{a} = -\mu_0 H_z \cdot a \\ i\hbar\dot{b} = +\mu_0 H_z \cdot b \end{cases}$$

$$i\hbar\ddot{a} = -\mu_0 H_z \cdot a$$

$$i\hbar \cdot \frac{da}{dt} = -\mu_0 H_z \cdot a \quad \rightarrow \quad \frac{da}{a} = -\frac{\mu_0 H_z}{i\hbar} \cdot dt$$

$$\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{i\mu_0 H_z}{\hbar} \cdot t \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{\frac{i\mu_0 H_z \cdot t}{\hbar}}$$

$$b(t) = b_0 \cdot e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar} \cdot t}$$

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i\xi}$$

$$a(0) = \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\xi} = a_0$$

$$b(0) = \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\varphi+\xi)} = b_0$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\xi} \cdot e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar} \cdot t}$$

$$b(t) = \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\varphi+\xi)} \cdot e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar} \cdot t}$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} = tg\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{-i\cdot\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar} t}$$

$$\theta(t) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| = 2 \cdot \operatorname{arctg} tg\frac{\theta}{2} = \theta$$

$$\boxed{\varphi(t) = \arg\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \varphi - \frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}$$

б) $\vec{S}_n(t) = \frac{1}{2}\cdot\vec{\sigma}_n(t)$

$$A_n(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\cdot A_n(0)\cdot e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$$

$$\sigma_1(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{[-2\mu_0\cdot H_z\cdot\frac{1}{2}\cdot\sigma_z]} = e^{[-\mu_0 H_z\cdot\sigma_z]} =$$

$$= e^{[-\mu_0 H_z\cdot\sigma_z]} = \begin{pmatrix} e^{-\mu_0 H_z\cdot\frac{i}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{\mu_0 H_z\cdot\frac{i}{\hbar}t}\end{pmatrix}$$

$$\sigma_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{i\cdot\frac{\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-//-} & 0\\ 0 & e^{-//-}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\\ e^{i\frac{\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\cdot\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\\ e^{i\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -//- & 0\\ 0 & -//-\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i\cdot e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\\ i\cdot e^{\frac{i\mu_0 H_z\cdot t}{\hbar}} & 0\end{pmatrix} = \quad (35)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\cdot e^{-i\cdot\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\\ i\cdot e^{i\cdot\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_3(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0\\ 0 & e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i\mu_0 H_z}{\hbar}t}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}(t)\cdot\vec{S}_n(t)\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix}\cdot e^{i\xi} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix}\cdot e^{i\xi}$$

$$n_1(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sigma_1(t)\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{n}(t)\cdot\vec{S}_n(t) = \vec{n}(0)\cdot\vec{S}_n(0)}$$

$\vec{n}(t)\cdot\vec{S_r}(t) = \vec{n}(0)\cdot\vec{S_r}(0)$

$n_1(t)\cdot\sigma_1(t) + n_2(t)\cdot\sigma_2(t) + n_3(t)\cdot\sigma_3(t) = n_1(0)\cdot\sigma_1(0) +$

$+ n_2(0)\cdot\sigma_2(0) + n_3(0)\cdot\sigma_3(0)$

$\sin\theta(t)\cdot\cos\varphi(t)\cdot\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\underbrace{\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t}_{\omega_0}} \\ e^{i\frac{2\mu_0 H_z}{\hbar}\cdot t} & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta(t)\cdot\sin\varphi(t)\cdot$

$\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i\cdot e^{-i\omega_0 t} \\ i\cdot e^{i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta(t)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sin\theta\cdot\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$

$+\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sin\theta(t)\cdot\cos\varphi(t)\cdot e^{-i\omega_0 t} + \sin\theta(t)\cdot\sin\varphi(t)\cdot(-i\cdot e^{-i\omega_0 t}) +$

$+\cos\theta(t) = \sin\theta\cdot\cos\varphi - i\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + \cos\theta$

$\sin\theta(t)\cdot e^{-i(\varphi(t)+\omega_0 t)} + \cos\theta(t) = \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} + \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta(t) = \cos\theta \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta}$

$-i\varphi = -i(\varphi(t) + \omega_0 t) \Rightarrow \varphi = \varphi(t) + \omega_0\cdot t$

$\boxed{\varphi(t) = \varphi - \omega_0\cdot t}$

ω_0 – ларморова честота

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(t) &= \theta \\ \varphi(t) &= \varphi - \frac{2\mu_0\cdot H_z}{\hbar}\cdot t\end{aligned}}$$

№4 а) $\psi(x) = N \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}}$ $\quad E = ?$ $\quad V(x) = ?$

$V(\pm\infty) = 0$

УШ: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0$

$\psi'(x) = N \cdot \left(-\frac{4x^3}{4a^4}\right) \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}} = -\frac{Nx^3}{a^4} \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}}$

$\psi''(x) = \left(\left(-\frac{Nx^3}{a^4}\right) \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}}\right)' = \left(-\frac{N}{a^4}\right) \cdot \left(3x^2 \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}} + x^3 \cdot \frac{(-4x^3)}{4a^4} \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}}\right) = \left(\frac{-N}{a^4}\right) e^{-\frac{x^4}{4a^4}} \cdot \left(3x^2 - \frac{x^6}{a^4}\right) = e^{-\frac{x^4}{4a^4}} \cdot \left(-\frac{3x^2 \cdot N}{a^4} + \frac{x^6 \cdot N}{a^8}\right)$

↓ в УШ,

$e^{-\frac{x^4}{4a^4}} \cdot \left(-\frac{3x^2 N}{a^4} + \frac{x^6 N}{a^8}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) \cdot N \cdot e^{-\frac{x^4}{4a^4}} = 0$

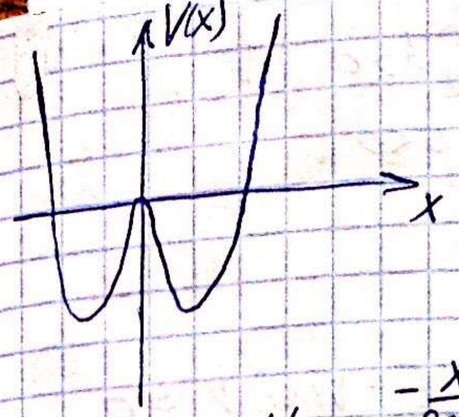
$\frac{x^6}{a^8} - \frac{3x^2}{a^4} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V(x) = 0$

⇓

$E = 0$

$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{x^6}{a^8} - \frac{3x^2}{a^4}\right) = \frac{\hbar^2}{2ma^8} \cdot (x^6 - 3x^2 a^4) =$

$= \frac{\hbar^2}{2ma^4} \cdot \left(\frac{x^6}{a^4} - 3x^2\right)$



б) $\psi(x) = N \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \eta|x|}$

$\psi' = N \cdot \left(-\frac{2x}{2a^2} - \eta(|x|)'\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \eta|x|} =$

$= N \cdot \left(-\frac{x}{a^2} - \eta \cdot \operatorname{sgn}(x)\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \eta|x|}$

$\psi'' = N \cdot \left[\left(-\frac{x}{a^2} - \eta \cdot \operatorname{sgn}(x)\right)^2 \cdot e^{-\text{//-}} + \left(-\frac{1}{a^2} - \eta \cdot \delta(x) \cdot 2\right) \cdot$

УШ: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{-x}{a^2}\right)^2 + \frac{2x\eta}{a^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) + \eta^2 \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}^2(x)}_{=1} - \frac{1}{a^2} - \eta \cdot \delta(x) \cdot 2 +$

$+ \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)] = 0$

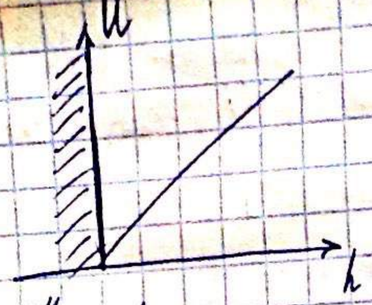
$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{2x\eta}{a^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) - 2\eta \cdot \delta(x)\right) + \left(\eta^2 - \frac{1}{a^2}\right)\right] =$

$= V(x) - E$

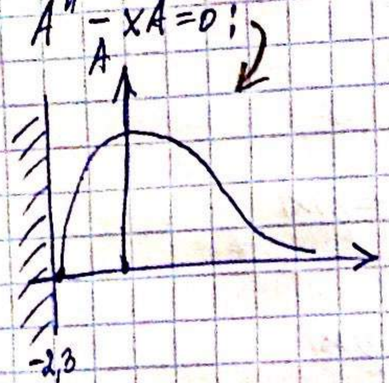
$V(\pm\infty) = 0 \quad ; \quad E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} - \eta^2\right)$

$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{2x\eta}{a^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) - 2\eta \cdot \delta(x)\right]$

№5



$$U = \begin{cases} mgh, & h>0 \\ \infty, & h<0 \end{cases}$$



$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(h))\psi = 0$$

Замена пер.: $x = \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(h - \frac{E}{mg}\right)$

$$\frac{d\psi}{dh} = \frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{dh} = \psi'_x \cdot \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\psi''_h = \psi''_x \cdot \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi''_x \cdot \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}} - x\cdot\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}}\psi = 0$$

$\psi''_x - x\cdot\psi = 0$ Его решение:

$\psi(x) = A\cdot\Phi[x] = A\cdot\Phi\left[\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(h - \frac{E}{mg}\right)\right] = \psi(h)$ (гр. задача)

$E_0 - ?$

$\psi(h=0) = 0 \rightarrow \Phi\left[-\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{E}{mg}\right] = 0$

Первый корень (-2,34): $E_0 = 2{,}34\cdot mg\cdot\left(\frac{\hbar^2}{2m^2g}\right)^{\frac{1}{3}} = 2{,}34\cdot\left(\frac{mg^2\hbar^4}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$[m] = M$, $[g] = LT^{-2}$, $[\hbar] = ML^2T^{-1}$

Кому: $[E] = ML^2T^{-2} = m^x\cdot g^y\cdot\hbar^z = M^x\cdot L^y\cdot T^{-2y}\cdot M^z\cdot L^{2z}\cdot T^{-z} = M^{x+z}\cdot L^{y+2z}\cdot T^{-2y-z}$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+2z=2 \\ -2y-z=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+2\cdot(2-2y)=2 \\ y-4y=-2 \end{cases}$$

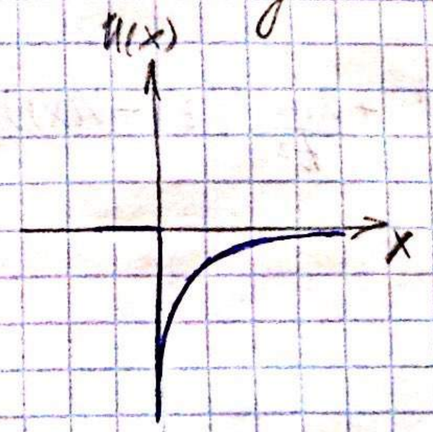
$y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$

$E_0 = m^{\frac{1}{3}}\cdot g^{\frac{2}{3}}\cdot\hbar^{\frac{2}{3}} \sim 10^{-25}$ эрг

$\Delta h = \frac{E_0}{mg} = m^{-\frac{2}{3}}\cdot g^{-\frac{1}{3}}\cdot\hbar^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{m^2g}} \sim 10^{-4}$ см

№6

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{-\alpha}{\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$$



$[E] = ML^2T^{-2}$

$$\begin{cases} [m] = M \\ [\hbar] = \frac{ML^2}{T} \\ [\alpha] = ML^{\frac{5}{2}}\cdot T^{-2} \end{cases}$$

$m^x\hbar^y\alpha^z = M^x\cdot M^y\cdot L^{2y}\cdot T^{-y}\cdot M^z\cdot L^{\frac{5}{2}z}\cdot T^{-2z} = ML^2T^{-2}$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+2{,}5z=2 \\ -y-2z=-2 \end{cases}$$

$y = 2-2z$

$1-\frac{1}{2}z + \frac{5}{2}z = 2 \rightarrow 2 = \frac{3}{2}z \rightarrow \boxed{z = \frac{4}{3}}$

$y = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3}}$, $\boxed{x = 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 1}$

$E_0 \sim m^{\frac{1}{3}}\cdot\hbar^{-\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{m\alpha^4}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\boxed{E_0 \sim \left(\frac{m\alpha^4}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

№9 а) 1) $\langle n|x|n\rangle = \langle n|\frac{x_0}{\sqrt{2}}\cdot(a+a^+)|n\rangle =$

$= \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left[\langle n|a|n\rangle + \langle n|a^+|n\rangle\right] =$

$= \frac{x_0}{\sqrt{2}}\cdot\left[\langle n|\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \langle n|\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right] =$

$= \frac{x_0}{\sqrt{2}}\cdot\left[\sqrt{n}\cdot\underbrace{\delta_{n,n-1}}_{=0} + \sqrt{n+1}\cdot\underbrace{\delta_{n,n+1}}_{=0}\right] = 0$

2) $\langle n|p|n\rangle = \langle n|\frac{p_0}{\sqrt{2}i}\cdot(a-a^+)|n\rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}i}\cdot\left[\langle n|a|n\rangle -\right.$

$\left. -\langle n|a^+|n\rangle\right] = \frac{p_0}{\sqrt{2}i}\left[\sqrt{n}\cdot 0 - \sqrt{n+1}\cdot 0\right] = 0$

3) $\langle n|x^2|n\rangle = \langle n|\frac{x_0^2}{2}\cdot\left[a^2+aa^+ +a^+a +(a^+)^2\right]|n\rangle =$

$\langle n|a^2|n\rangle = \langle n|a\underline{a|n\rangle} = \langle n|a\sqrt{n}\,|n-1\rangle =$

$= \sqrt{n}\langle n|\underline{a|n-1\rangle} = \sqrt{n}\langle n|\sqrt{n-1}|n-2\rangle =$

$= \sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\underline{\langle n|n-2\rangle} = n\cdot\delta_{n,n-2} = 0$

$\langle n|a\underline{a^+|n\rangle} = \langle n|a\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|\underline{a|n+1\rangle} =$

$= \sqrt{n+1}\cdot\langle n|\sqrt{n+1}\,|n\rangle = n+1\langle n|n\rangle = n+1$

$\langle n|a^+\underline{a|n\rangle} = \langle n|a^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\langle n|\sqrt{n}\,|n\rangle =$

$= n\cdot 1 = n$

$\langle n|a^+\underline{a^+|n\rangle} = \langle n|a^+\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle =$

$= \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\underbrace{\langle n|n+2\rangle}_{=0} = 0$

Σ $\frac{x_0^2}{2}\cdot(2n+1)$

4) $\langle n|p^2|n\rangle = \langle n|\frac{p_0^2}{(-2)}(a^2+aa^+-a^+a+(a^+)^2|n\rangle =$

$= -\frac{p_0^2}{2}\left[\underbrace{\langle n|a^2|n\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n|aa^+|n\rangle}_{n+1} - \underbrace{\langle n|a^+a|n\rangle}_{n}\right.$

$\left. + \underbrace{\langle n|(a^+)^2|n\rangle}_{=0}\right] = -\frac{p_0^2}{2}\left[n+1-n\right] = -\frac{p_0^2}{2}$

5) $\langle n|x^2p^2|n\rangle = \langle n|\frac{x_0^2}{2}\cdot(a^2+aa^+ +a^+a +(a^+)^2)\cdot(a^2+aa^+ -$

$+(a^+)^2)\cdot\left(-\frac{p_0^2}{2}\right)|n\rangle = -\frac{x_0^2\cdot p_0^2}{4}\cdot\left[\langle n|a^4|n\rangle + \right.$

$\neq 0$

$+\langle n|aa^+a^2|n\rangle + \langle n|a^+aa^2|n\rangle + \langle n|(a^+)^2a^2|n\rangle +$

$+\langle n|a^3a^+|n\rangle + \langle n|aa^+aa^+|n\rangle - \langle n|a^+aa^+a|n\rangle -$

$+\langle n|(a^+)^2(a^+a)\cdot(-1)|n\rangle + \langle n|a^2(a^+)^2|n\rangle + \langle n|a(a^+)^3|n\rangle +$

$+\langle n|a^+\cdot a\cdot(a^+)^2|n\rangle + \langle n|(a^+)^4|n\rangle + \langle n|a^+a^2a^+|n\rangle +$

$+\langle n|(a^+)^2\cdot a^2|n\rangle + \langle n|(a^+)^2\cdot aa^+|n\rangle - \langle n|a^2a^+a|n\rangle -$

$= -\frac{x_0^2\cdot p_0^2}{4}\left[0+0+0+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n} + \right.$

$+0+\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot$

$\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n} + 0 + \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+1} +$

$+0+0+0+\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n} +$

$\left. +\sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n} + 0 + 0\right] =$

$$= \frac{-x_0^2 \cdot p_0^2}{4} \cdot \left[n\cdot(n-1) + (n+1)^2 + n^2 + (n+1)\cdot(n+2) \right.$$

$$\left. + (n+1)\cdot n + n\cdot(n-1) \right) = \frac{-x_0^2 \cdot p_0^2}{4} \cdot \left(n^2 - n + n^2 + 2n + 1 + \right.$$

$$\left. + n^2 + n^2 + 3n + 2 + n^2 + n + n^2 - n \right) =$$

$$= \frac{-x_0^2 \cdot p_0^2}{4} \cdot \left[6n^2 + 4n + 3 \right]$$

$$\langle n | x^2 \cdot p^2 | n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle n | x^2 | m \rangle \langle m | p^2 | n \rangle$$

б) 1. $\langle m | x^3 | n \rangle = \langle m | \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot (a + a^+)^3 | n \rangle =$

$$= \frac{x_0^3}{2\sqrt{2}} \langle m | (a+a^+) \cdot (a^2 + aa^+ + a^+a + (a^+)^2 | n \rangle =$$

$$= \frac{x_0^3}{2\sqrt{2}} \langle m | a^3 + a^+a^2 + a^2a^+ + a^+aa^+ +$$

$$+ aa^+a + a^+ \cdot a^+a + a \cdot (a^+)^2 + (a^+)^3 | n \rangle \textcircled{=}$$

$\langle m | a^3 | n \rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-2} \cdot \delta_{m,n-3}$

$\langle m | a^+a^2 | n \rangle = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1} \cdot \delta_{m,n-1}$

$\langle m | a^2a^+ | n \rangle = \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n} \cdot \delta_{m,n-1}$

$\langle m | a^+aa^+ | n \rangle = \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1} \cdot \delta_{m,n+1}$

$\langle m | aa^+a | n \rangle = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\sqrt{n} \cdot \delta_{m,n-1}$

$\langle m | a^+a^+a | n \rangle = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} \cdot \delta_{m,n+1}$

$\langle m | a(a^+)^2 | n \rangle = \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+2} \cdot \delta_{m,n+1}$

$\langle m | (a^+)^3 | n \rangle = \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3} \cdot \delta_{m,n+3}$

2. $\langle m | x^4 | n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle m | x^2 | k \rangle \langle k | x^2 | n \rangle$

$$x^3 | n \rangle = \frac{x_0^3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-2}\cdot | n-3 \rangle + \right.$$

$$+ \sqrt{n}\cdot(n-1)\cdot | n-1 \rangle + (n+1)\cdot\sqrt{n}\cdot | n-1 \rangle + (n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot | n+1$$

$$+ n^{\frac{3}{2}} \cdot | n-1 \rangle + n\cdot\sqrt{n+1}\cdot | n+1 \rangle + \sqrt{n+1}\cdot(n+2)\cdot | n+1 \rangle +$$

$$\left. + \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}\cdot | n+3 \rangle \right.$$

$$x \cdot x^3 | n \rangle = \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} (a + a^+) \right) x^3 | n \rangle =$$

$$= \frac{x_0^4}{4} \left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-2}\cdot\sqrt{n-3}\cdot | n-4 \rangle + \sqrt{n}\cdot(n-1)\cdot\sqrt{n-1}\cdot | n-2 \right.$$

$$+ (n+1)\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot | n-2 \rangle + (n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot (n+1) | n \rangle +$$

$$+ n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n-1} \cdot | n-2 \rangle + n\cdot(n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot | n \rangle + \sqrt{n+1}\cdot(n+2)(n+1)$$

$$\left. + \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}\cdot\sqrt{n+3}\cdot | n+2 \rangle + a^+x^3 | n \rangle \right) =$$

$$= \frac{x_0^4}{4} \cdot \left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-2}\cdot\sqrt{n-3}\cdot | n-4 \rangle + \left(\sqrt{n}\cdot(n-1)^{\frac{3}{2}} + \right. \right.$$

$$+ (n+1)\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}\cdot + n^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{n-1} \Big) \cdot | n-2 \rangle +$$

$$+ \left((n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot (n+1) | n \rangle + n\cdot(n+1)^{\frac{3}{2}} + (n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot (n+ \right.$$

$$\left. \left. \cdot | n \rangle + a^+x^3 | n \rangle \right) \right.$$

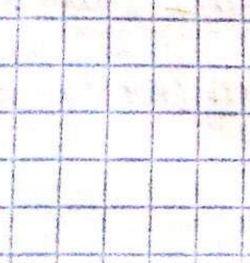
№8 $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - q\cdot\delta(x)\psi = E\psi$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$ и $\varepsilon \to 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot(\psi'(\overset{\to 0}{\varepsilon+0}) - \psi'(0\overset{\to 0}{-\varepsilon})) - q\cdot\psi(0) = 0$

$\psi(0+0) = \psi(0-0)$

$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'(0+0) - \psi'(0-0)) = q\cdot\psi(0)$

$\Delta\psi'(0) = \psi'(0+0) - \psi'(0-0) = -\frac{2mq}{\hbar^2}\cdot\psi(0)$



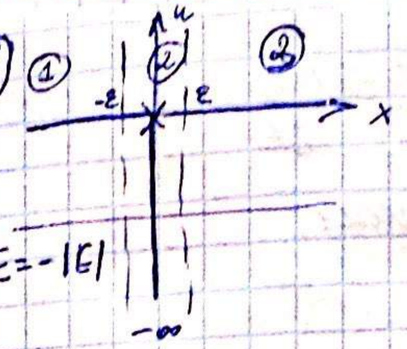
I, II уш: $-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'') = E\psi$, $E<0$, $E=-|E|$

$\psi'' - \varkappa^2\psi = 0$, $\varkappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$

I $|\psi_1| < +\infty \Rightarrow \psi_1 = C_1\cdot e^{\varkappa x}$

II $|\psi_2| < +\infty \Rightarrow \psi_2 = C_2\cdot e^{-\varkappa x}$

№8



$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + |E|\psi - q\cdot\delta(x)\cdot\psi = 0$

$k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2}$

$\psi'' + \frac{2mq}{\hbar^2}\cdot\delta(x)\cdot\psi - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi = 0$

1,3 $\psi'' - k^2\psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = C_1\cdot e^{kx} + C_3\cdot e^{-kx}$

① $|\psi^1| < \infty \Rightarrow \psi_1(x) = C_1\cdot e^{+kx}$

② $|\psi_3| < \infty \Rightarrow \psi_3(x) = C_3\cdot e^{-kx}$

а) ВФ непрерывна $\Rightarrow \psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) \Rightarrow C_1 = C_3 = C$

$\psi_2(0) = C$

б) Непр. 1-ой производной:

$\psi_1'(-\varepsilon) = kC\cdot e^{-k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} kC = \psi_2'(-\varepsilon)$

$\psi_3'(+\varepsilon) = -kC\cdot e^{-k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -kC = \psi_2'(+\varepsilon)$

② $\psi'' + \frac{2mq}{\hbar^2}\cdot\delta(x)\psi - k^2\psi = 0$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots dx$ и $\varepsilon\to 0$

$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''\cdot dx = \psi_2'(+\varepsilon) - \psi_2'(-\varepsilon) = -2kC$

$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{2mq}{\hbar^2}\cdot\delta(x)\cdot\psi_{2x} = \frac{2mq}{\hbar^2}\cdot\psi_2(0) = \frac{2mq}{\hbar^2}\cdot C$

$-k^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi\cdot dx \sim -k^2\cdot\frac{\psi_2(0)}{C}\cdot 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

по теореме о среднем

$$-2kC + \frac{2mq}{\hbar^2}\cdot C = 0 \quad \to \quad k = \frac{mq}{\hbar^2}$$

Единственный уровень энергии:

$$E_0 = -|E_0| = -\frac{k^2\hbar^2}{2m}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = C\cdot e^{kx}, & x<0 \\ \psi_2(0) = C, & x=0 \\ \psi_3(x) = C\cdot e^{-kx}, & x>0 \end{cases} \Rightarrow \psi = C\cdot e^{-\frac{mq}{\hbar^2}|x|}$$

Нормировка:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 2|C|^2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2mq}{\hbar^2}x}\cdot dx =$$

$$= 2\cdot|C|^2\cdot\frac{\hbar^2}{2mq}\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot dy}_{=1} = \frac{|C|^2\cdot\hbar^2}{mq} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sqrt{mq}}{\hbar} = \sqrt{k}$$

$$\boxed{\psi = \sqrt{k}\cdot e^{-k|x|}}, \text{ где } k = \frac{mq}{\hbar^2}$$

$$\langle V\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2k|x|}\cdot k\cdot(-q\cdot\delta(x))\cdot dx = -q\cdot k\cdot\left(e^{-2k|x|}\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= -q\cdot k = -\frac{q^2 m}{\hbar^2} = \underbrace{2E_0}_{<0} < 0$$

$$\boxed{\langle V\rangle = 2E_0}$$

$$\langle T\rangle = \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\psi\right)\cdot dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} k\cdot e^{-k|x|}\cdot\frac{d^2\left(e^{-k|x|}\right)}{dx^2}\,dx$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2\cdot k}{2m}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|x|}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-k|x|}\right)\cdot dx \ominus$$

$$\frac{d}{dx}\cdot e^{-k|x|} = -k\cdot sgn(x)\cdot e^{-k|x|}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-k|x|}\right) = -k\cdot\left(2\delta(x)\cdot e^{-k|x|} + sgn(x)\cdot sgn(x)\cdot e^{-k|x|}\cdot(-k)\right) =$$

$$= -k\cdot e^{-k|x|}\cdot\left(2\delta(x) + \underbrace{sgn^2(x)}_{\to 1}\cdot(-k)\right)$$

$$\ominus\left(-\frac{\hbar^2\cdot k}{2m}\right)\cdot(-k)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2k|x|}\cdot 2\delta(x)\cdot dx + \left(-\frac{\hbar^2\cdot k}{2m}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{-2k|x|}\,dx =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\cdot k^2\cdot 1\cdot 2 - \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2k|x|}\cdot d(kx) =$$

$$= 2\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\cdot k^2 - \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-2y}\cdot dy =$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\cdot k^2 - \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m}\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-z}\cdot dz}_{=1} = \frac{\hbar^2\cdot k^2}{m} - \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m} =$$

$$= \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m} = -\underbrace{E_0}_{<0} > 0 \qquad \boxed{\langle T\rangle = -E_0}$$

$$\boxed{\langle V\rangle + \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle = 2E_0 - E_0 = E_0 = -\frac{\hbar^2\cdot k^2}{2m}}$$

52

Разумно пользоваться в подсчете №9, б.1.

$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$

$aa^+|n\rangle = (n+1)|n\rangle$

$(n-1)\cdot\sqrt{n} + (n+1)\cdot\sqrt{n} + n\cdot\sqrt{n}$

$\langle 0|x^{2014}|2015\rangle = 0$

$\langle 0|x^{2014}|2014\rangle =$

$\langle 0|x^{2014}|2013\rangle = 0$

$\langle 0|x^{2014}|2012\rangle =$

Задача:

1) Доказать, что ~~С.З~~ уровни энергии в П.О. являются СФ оператора Фурье. Найти С.З.

$|0\rangle \qquad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \longrightarrow$

$\longrightarrow \psi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\cdot p_0}} \cdot e^{-\frac{p^2}{2p_0^2}} \Rightarrow$

эта ф-я - СФ опр-а преобр. Фурье с $\lambda = 1$

$|1\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{1}}|0\rangle$

$\psi_1(x) = \frac{a^+}{\sqrt{1}}\psi_0(x) \longrightarrow$ вор. через x, p

$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a+a^+)$ $\longrightarrow$ $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\cdot\frac{p}{p_0}\right)$

$p = \frac{p_0}{\sqrt{2}\cdot i}\cdot(a-a^+)$

$\Rightarrow \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{p_0}\right)\right)\psi_0 =$

$x_0 \cdot p_0 = \hbar$

$= \frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - x_0\cdot\frac{d}{dx}\right)\psi_0$

$x = i\hbar\frac{d}{dp} = i\hbar\frac{d}{dp}$

$p = i\hbar\frac{d}{dx}$

$\psi_1(p) = \frac{a^+}{\sqrt{1}}\psi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(i\hbar\frac{d}{dp}\frac{1}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-i)\cdot\left[\frac{p}{p_0} - p_0\cdot\frac{d}{dx}\right]\psi_0 \qquad (-i)^2$

$\Rightarrow \qquad \psi_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi(p) \qquad \lambda = (-i)$

4

Далее: -1

i

⋮

Так: 0: $\lambda = 1$ (всего четыре СЗ: $\pm 1, \pm i$, они чередуются)

-1; $\lambda = (-i)$

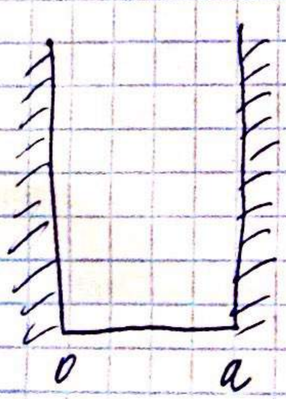
2: $\lambda = (-1)$

3: $\lambda = i$

4: $\lambda = 1$

5: $\lambda = -i$

№1



Δx - ?

Δp - ?

№2 Найти $\hat{x}$ и $\hat{p}$ в энергетическом представлении (в базисе СФ оператора энергии); $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$

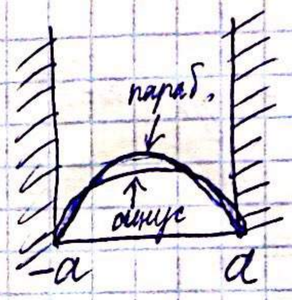
$H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

$x_{nm} = \langle \psi_n | x | \psi_m \rangle = \int_0^a \psi_n^* \cdot x \cdot \psi_m \cdot dx$

эта беск. матрица и будет опер. x в базисе СФ энергии.

55

№3



$\psi(x) = \{ \begin{matrix} \text{не СФ} \\ H \end{matrix} \} = N(a^2 - x^2)$

1) N нужно найти

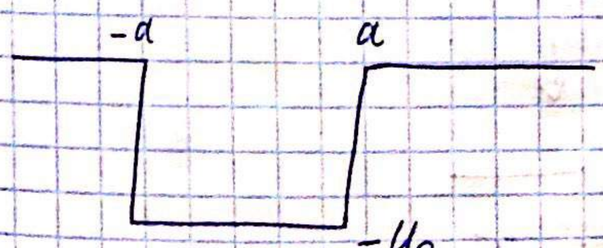
2) найти $\langle H \rangle$ - ? ($H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ внутри ямы).

Δ_H - ?

* дисп. $\langle H \rangle$, которое (да) на 10% отличается от наст.

* разница между ВФ больше, чем разница между энергиями

№4



а) $a = 3 \cdot 10^{-8}$ см

$U_0 = 10$ eV

1) оценить энергию основного состояния

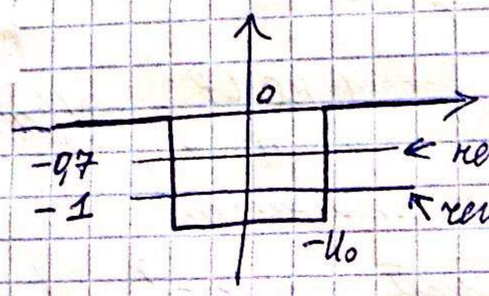
2) потом численно решить трансцендентное уравнение для нижнего

ченного уровня.

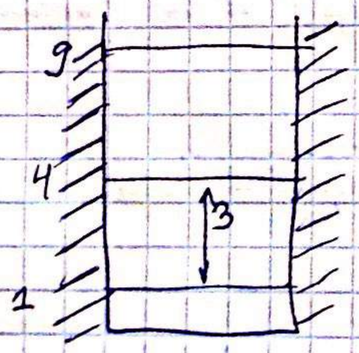
№4.б б) все то же самое : $U_0 = 0{,}1$ eV

$E_0 = ?$

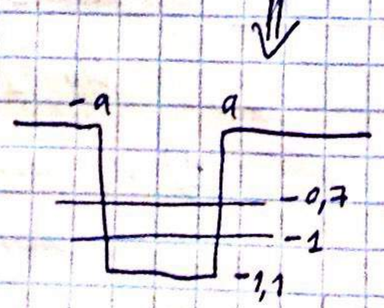
№4.в в) может ли Ямка, чтобы в ней были уровни:



$1 - 0{,}7 = 0{,}3$ маленькое по ф-ле с глубиной ямог → аналог



$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$



Если осн. сост. имеет ж. -1, то им. семейство значений a и U_0 и провести график:

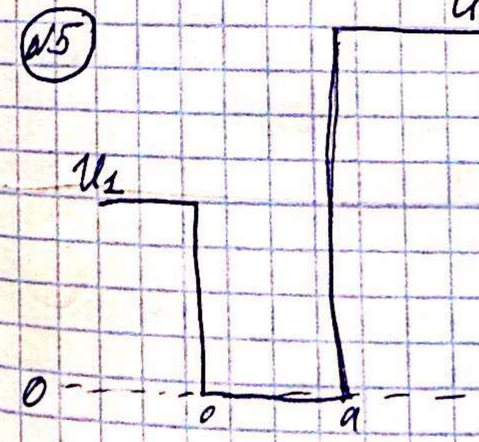


для -0,7 то же самое

Проверить пересек. кривые или нет, там где пересек → первой четн -1, первой нечетн -0,7

Проверить, есть ли 2-ой четного уровень (Mathematica)

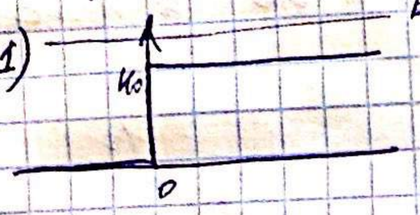
№5



- найти уровни энергии системы
- сказать, сколько их штук

№6 на рассеяние;

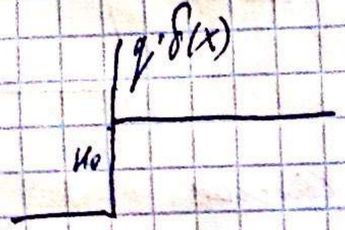
⊕ 1)



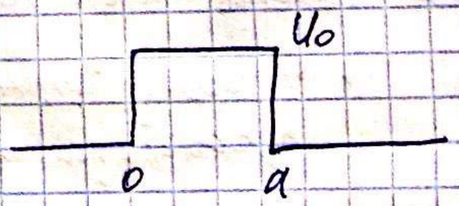
← найдем коэфф. прохожд. и отраж.

T-?
R-?
для всех

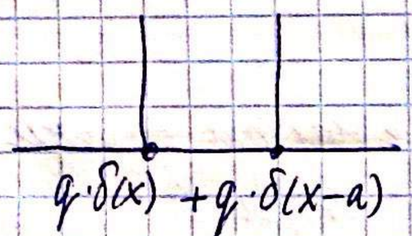
⊕ 2)



⊕ 3)



? 4)



$e^{ikx} + A\cdot e^{-ikx}$

↑ падает. волна — ↑ отр. волна

на $+\infty$ ассимптотика: $B\cdot e^{iqx}$

$R = |A|^2$ (отражение)

$T = \frac{q}{k}|B|^2$ (прохождение)

$R + T = 1$ (ЗС)

Сшивка:

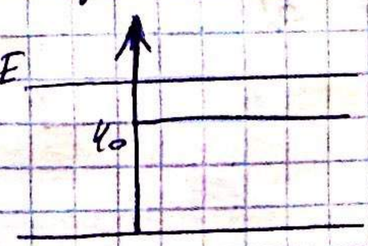
1) $\psi(-0) = \psi(+0)$

$\psi'(-0) = \psi'(+0)$

$ik(1-A) = iqB \rightarrow A = \frac{k-q}{k+q}$

$R = |A|^2 = \left|\frac{k-q}{k+q}\right|^2 = \left\{ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)} \right\} =$

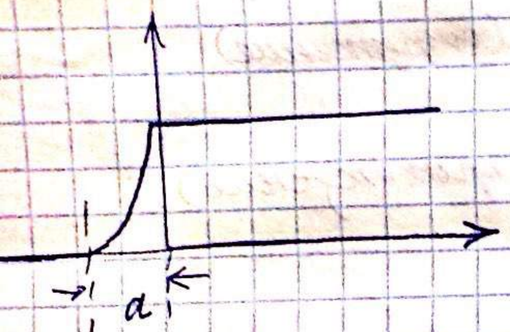
$= \left|\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}}\right|^2$



Почему это странно? ;

$\frac{5-3}{5+3} = \frac{1}{4} \rightarrow R = \frac{1}{16}$

т.к. в реальности:



классич. предел: $ka \gg 1$

$\forall$ малого a $\exists k$: $ka \gg 1$

(№7) 1) $-U_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ — потенциальная яма в форме гауссовой кривой

2) $-U_0 \cdot \left(\frac{x}{a}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ — 1-ый полином Эрмита

$\varepsilon = \frac{E}{U_0} = ?$ (численное)

Затем:

2) 1) промоделировать б-ямой } и сравнить с численным счетом

2) осц. $U = -\frac{m\omega^2 \cdot x^2}{2}$

3)

1)

2) $0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

найти мин.

аппрокс. низ потенциала параболой

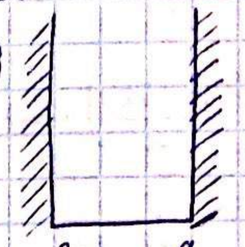
$B = 3$	1
	10
$B = 2$	

3) полуширина Гаусса

U_0

Домашняя работа №10.

(№1)



$\Delta x - ?$, $\Delta p - ?$

$$\langle x \rangle = \int_0^a \psi^* \cdot x \cdot \psi(x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^a x \cdot \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot dx = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \int_0^a x \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right) \cdot dx = \frac{1}{a} \int_0^a x \cdot dx -$$

$$- \frac{1}{a} \int_0^a x \cdot \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \cdot dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{a} \int_0^a x \cdot d\left(\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right) \cdot \frac{a}{2\pi n} =$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{2\pi n} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\Big|_0^{a \to 0} - \int_0^a \sin\frac{2\pi n x}{a} \cdot dx\right) =$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{2\pi n} \cdot \left(-\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \cdot d\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \cdot \frac{a}{2\pi n}\right) =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{a}{2\pi n} \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) \cdot d\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{4\pi^2 n^2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi n}{a} \cdot x\right)\right)\Big|_0^{a \to 0} = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{\langle x_n \rangle = \frac{a}{2}}$$

61

1 +
2 ++
3 ++
5
5+
+
+
+
7
4 а)
б)
в)

$$\langle x_n^2\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cdot dx = \frac{1}{a}\cdot\int_0^a x^2\cdot dx - \frac{1}{a}\cdot\int_0^a x^2\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2\pi n}\cdot\int_0^a x^2\cdot d\left(\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right) = \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2\pi n}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(x^2\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right)\Big|_0^a - \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot 2x\cdot dx\right) =$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{1}{2\pi n}\cdot 2\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot x\cdot dx =$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{1}{\pi n}\cdot\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot x\cdot dx = \frac{a^3}{3} + \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{a}{2\pi n}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^a x\cdot d\left(\cos\frac{2\pi n x}{a}\right) = \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2\pi^2 n^2}\left(\left(x\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right)\Big|_0^a -\right.$$

$$\left. -\underbrace{\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot dx}_{=0}\right) = \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2\pi^2 n^2}\cdot a =$$

$$= a^2\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right)$$

$$\boxed{\langle x_n^2\rangle = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right)}$$

$$\mathcal{D}x_n = \langle x_n^2\rangle - \langle x_n\rangle^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2 n^2} - \frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2}{12}\cdot\left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{D}x_n = \frac{a^2}{12}\cdot\left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right)}$$

$$\langle p_n\rangle = \int\psi_n^*\, p\,\psi_n\cdot dx = -i\hbar\cdot\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{-i\hbar}{a}\cdot 2\cdot\left(\sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\Big|_0^{a\to 0} - \frac{\pi n}{a}\int_0^a \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)}_{\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)}\cdot dx\right) =$$

$$= -\frac{i\hbar\cdot 2}{a}\left(-\frac{\pi n}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot d\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\cdot\frac{a}{2\pi n} =$$

$$= \ldots\cdot\int_0^a \sin(\xi)\cdot d\xi = \ldots\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\Big|_0^{a\to 0} = 0$$

$$\boxed{\langle p_n\rangle = 0}$$

$$\langle p^2\rangle = \int\psi^*\cdot\hat{p}^2\cdot\psi\cdot dx = -\hbar^2\cdot\frac{2}{a}\cdot\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\frac{\pi n x}{a}\right)dx =$$

$$= -\frac{\hbar^2 2}{a}\cdot\left(-\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\right)\cdot\underbrace{\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cdot dx}_{\text{м.к. } N^2\int|\psi_n(x)|^2\cdot dx = 1} = \left(\frac{a}{2}\right) =$$

$$\left(-\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2\cdot n^2}{a^2}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{a^2}$$

$$\boxed{\langle p^2\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{a^2}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}p_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{a^2}}$$

№2 $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$ - СФ оператора энергии

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

а) $x_{nm} = \langle \psi_n | x | \psi_m \rangle = \int_0^a \psi_n^* \cdot x \cdot \psi_m \cdot dx =$

$= \frac{2}{a} \int_0^a x \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot dx =$

$= \left\{ \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \right\} =$

$= \frac{2}{a} \cdot \int_0^a x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{a}\right)\right) \cdot dx =$

$= \frac{1}{a} \cdot \int_0^a x \cdot d\left(\sin\left(\frac{\pi(n-m)x}{a}\right)\right) \cdot \frac{a}{\pi(n-m)} -$

$- \frac{1}{a} \int_0^a x \cdot d\left(\sin\left(\frac{\pi(n+m)\cdot x}{a}\right) \cdot \frac{a}{\pi(n+m)}\right) =$

$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{\pi(n-m)} \cdot \left(\left(x \cdot \sin\left(\frac{\pi(n-m)x}{a}\right)\right)\Big|_0^a - \right.$

$\left. - \int_0^a \sin\left(\frac{\pi(n-m)\cdot x}{a}\right) \cdot dx\right) - \frac{1}{\pi(n+m)} \cdot$

$\cdot \left(\left(x \cdot \sin\left(\frac{\pi(n+m)\cdot x}{a}\right)\right)\Big|_0^a - \int_0^a \sin\left(\frac{\pi(n+m)\cdot x}{a}\right) \cdot dx =\right.$

$= \frac{1}{\pi(n-m)} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi(n-m)\cdot x}{a}\right)\right)\Big|_0^a \cdot \frac{a}{\pi(n-m)} -$

$- \frac{1}{\pi(n+m)} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi(n+m)\cdot x}{a}\right)\right)\Big|_0^a \cdot \frac{a}{\pi(n+m)} =$

$= \frac{a}{\pi^2 \cdot (n-m)^2} \left(\cos(\pi(n-m)) - 1\right) - \frac{a}{\pi^2 \cdot (n+m)^2} \cdot$

$\cdot \left(\cos(\pi(n+m)) - 1\right) \quad (=)$

$\cos(\pi(n-m)) = \cos(\pi n) \cdot \cos(\pi m) \underbrace{+ \sin(\pi n) \sin(\pi m)}_{=0} =$

$= (-1)^n \cdot (-1)^m$

$\cos(\pi(n+m)) = (-1)^n \cdot (-1)^m$

$(=) \quad ((-1)^n \cdot (-1)^m - 1) \cdot \frac{a}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2}\right) =$

$= \frac{a}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2}\right) \cdot \left((-1)^{n+m} - 1\right)$

$x_{nm} = \frac{a}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2}\right) \cdot \left((-1)^{n+m} - 1\right), \quad n \neq m$

Если $n = m$: $x_{nn} = \int_0^a \psi_n^* \cdot x \cdot \psi_n \cdot dx = \frac{a}{2}$

б) $p_{nm} = \underset{a}{\langle} \psi_n | p | \psi_m \rangle = \int_0^a \psi_n^* \cdot \hat{p} \cdot \psi_m \cdot dx =$

$= \frac{2}{a}(-i\hbar) \int_0 \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\right) \cdot dx =$

$$= \left(-\frac{i2k}{a}\right) \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot d\left(\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\right) = \left(-\frac{i2k}{a}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\right)\Big|_0^a - \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \frac{\pi n}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cdot dx \right) =$$

$$= \left(\frac{i2k}{a}\right) \cdot \frac{\pi n}{a} \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{i2\pi n k}{a^2} \frac{1}{2} \left(\int_0^a \sin\left(\frac{\pi(m+n)x}{a}\right) \cdot dx + \int_0^a \sin\left(\frac{\pi(m-n)\cdot x}{a}\right) \cdot dx \right) =$$

$$= i \cdot \frac{\pi n k}{a^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi(m+n)} \cdot \cos\left(\frac{\pi(m+n)\cdot x}{a}\right)\Big|_a^0 + \frac{a}{\pi(m-n)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos\left(\frac{\pi(m-n)\cdot x}{a}\right)\Big|_a^0 \right) = \frac{i\pi n k}{a^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi(m+n)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left(1 - \cos(\pi(m+n))\right) + \frac{a}{\pi(m-n)} \cdot \left. \left(1 - \cos(\pi(m-n))\right) \right) =$$

$$= \frac{i\pi n k}{a^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi(m+n)} \cdot \left(1 - (-1)^{n+m}\right) + \frac{a}{\pi(m-n)} \cdot \right.$$

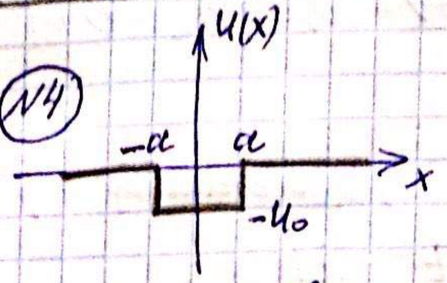
$$\left. \cdot \left(1 - (-1)^{n+m}\right) \right) = \frac{i\pi n k}{a^2} \cdot \left(1 - (-1)^{n+m}\right) \cdot \frac{a}{\pi} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{p_{nm} = \langle \psi_n | p | \psi_m \rangle = \frac{ink}{a} \cdot \frac{\left(1 - (-1)^{n+m}\right)}{(m^2 - n^2)} \cdot (-2n), \; n \neq m}$$

$$\boxed{p_{nn} = \langle p_x \rangle = 0}$$

(N4)



a) $a = 3 \cdot 10^{-8}$ см ; $U_0 = 10$ eV

1) Оценить E_0 – энергию основного состояния?

$E_0 - ?$ $\quad B = \frac{2mU_0 \cdot a^2}{\hbar^2} \cong 24$

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar \quad \Delta x = 2a \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{2a}$

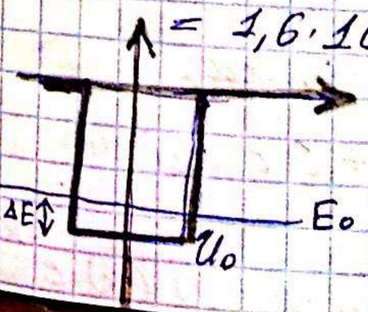
$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{2m} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \sim \frac{U_0}{B}$$

$$\Delta E = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{-16}} = 1{,}682 \cdot 10^{-13} \text{ эрг} \approx a)$$

$\approx 0{,}1$ eV

$U_0 = 10$ eV $= 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{7}$ эрг $=$

$= 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ эрг



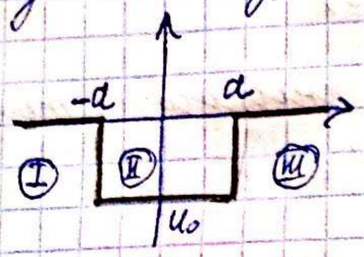
$$\boxed{|E_0| = U_0 - \Delta E \approx 9{,}9 \text{ eV}}$$

2) $a = 3 \cdot 10^{-8}$ см, $U_0 = 0{,}1$ eV

$E_0 = U_0 - \Delta E \cong 0{,}1\,eV - 0{,}1\,eV \approx 0$ eV

$\boxed{E_0 \approx 0\ eV}$

Численный расчет (с решением трансцендентного ур-я) $E = -|E|$



(I): $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$

$U = 0$

$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$

$\psi'' - \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{k^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi'' - k^2\psi = 0$

$\psi = A \cdot e^{kx}$

(II) $\psi'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)}_{>0}\psi = 0$, $\varkappa^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$

$\psi'' + \varkappa^2\psi = 0$

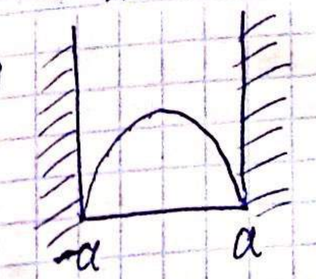
$\psi = B \cdot \cos(\varkappa x) + C \cdot \sin(\varkappa x)$

(III) $\psi = D \cdot e^{-kx}$

Г.У.:
$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} = B \cdot \cos(\varkappa a) + C \cdot (-\sin \varkappa a) \\ Ak \cdot e^{-ka} = -B \cdot \varkappa \cdot \sin(\varkappa a) + C \cdot \varkappa \cdot \cos(\varkappa a) \\ B \cdot \cos \varkappa a + C \cdot \sin \varkappa a = D \cdot e^{-ka} \\ B \cdot \varkappa \cdot (-\cos \varkappa a) + C \cdot \varkappa \cdot \sin \varkappa a = D \cdot (-k) \cdot e^{-ka} \end{cases}$$

Продолжение см. стр 78

№3



$\psi(x) = N(a^2 - x^2)$

1) $N - ?$

$\int |\psi|^2 \cdot dx = 1$

$N^2 \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 \cdot dx = 1$

$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 \cdot dx = \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\,dx = a^4 \cdot 2a - 2a^2 \cdot \frac{2a^3}{3} + 2 \cdot \frac{a^5}{5} = a^5 \cdot \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = a^5 \cdot \left(\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15}\right) = a^5 \cdot \frac{16}{15}$

$N^2 = \frac{15}{16a^5} \Rightarrow N = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{a}} = \frac{1}{4a^2} \cdot \sqrt{\frac{15}{a}} = \frac{\sqrt{15}}{4a^5}$

2) $\langle p \rangle = (-i\hbar) \cdot \frac{\sqrt{15}}{4 \cdot a^{5/2}} \cdot \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \cdot \frac{d}{dx}(a^2 - x^2) \cdot dx =$

$= \frac{(-i\hbar)\sqrt{15}}{4a^{5/2}} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \cdot (-2x) \cdot dx = (-\text{''}-) \cdot \left[(-2) \cdot \left(a^2 \int_{-a}^{a} x \cdot dx - \int_{-a}^{a} (-x^3) \cdot dx\right)\right] = 0$

$\langle p^2 \rangle = \frac{(-\hbar^2 \cdot \sqrt{15})}{4 \cdot a^{5/2}} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \cdot \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}(a^2 - x^2)}_{-2} \cdot dx =$

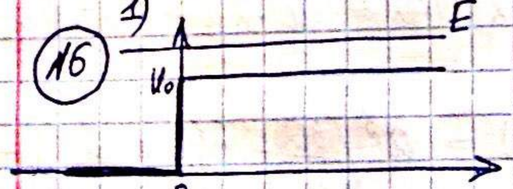
$= \frac{\hbar^2 \cdot \sqrt{15}}{2a^{5/2}} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \cdot dx = \frac{\hbar^2 \cdot \sqrt{15}}{2a^{5/2}} \cdot \left[a^2 \cdot 2a - \frac{2a^3}{3}\right] = \frac{2a^3}{3 \cdot a^{5/2}}$

$= \frac{2\hbar^2\sqrt{15a}}{3}$

$\langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2\sqrt{15a}}{3m}$

$D_H = \frac{\langle p^4 \rangle - \langle p^2 \rangle^2}{2m} > 0$

(16) 1)



слева:
$e^{ikx} + A \cdot e^{-ikx}$

справа:
$B \cdot e^{iqx}$

Сшивка:

$$\begin{matrix}\psi(-0) = \psi(+0) \\ \psi'(-0) = \psi'(+0)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 + A = B \\ k(1-A) = qB \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $A = ?$

$(1+A) \cdot q = k - kA$

$q - k = -kA - qA$

$k - q = (k+q)A$

$A = \frac{k-q}{k+q}$, $B = 1 + A = \frac{k+q+k-q}{k+q} = \frac{2k}{k+q}$

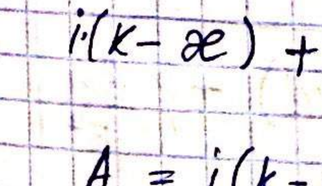
$R = |A|^2 = \left|\frac{k-q}{k+q}\right|^2 = \begin{cases} k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ q = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar} \end{cases} =$

$= \left|\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+U_0}}\right|^2$

$T = |B|^2 \cdot \frac{q}{k} = \left|\frac{2k}{k+q}\right|^2 \cdot \frac{q}{k} = \frac{4 \cdot (\sqrt{E})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0})^2} \cdot \frac{\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}} =$

$= \frac{4\sqrt{E-U_0} \cdot \sqrt{E}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0})^2}$, $R + T = 1$

2)



справа: $e^{ikx} + A \cdot e^{-ikx}$

слева: $B \cdot e^{ix\varkappa x}$

Сшивка:

$$\begin{matrix}\psi(-0) = \psi(+0) \\ \psi'(+0) - \psi'(-0) = \frac{2mq}{\hbar^2} B\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 + A = B \\ B \cdot i\varkappa - ik + ikA = \frac{2mqB}{\hbar^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ik - ikA - i\varkappa B + q \cdot \frac{2m}{\hbar^2} B = 0 \\ B = 1 + A \end{cases}$$

$ik - ikA - i\varkappa - i\varkappa A + q \cdot \frac{2m}{\hbar^2} + q \cdot \frac{2m}{\hbar^2} A = 0$

$i(k - \varkappa) + q \cdot \frac{2m}{\hbar^2} - A \cdot \left(ik + i\varkappa - q \cdot \frac{2m}{\hbar^2}\right) = 0$

$A = \frac{i(k-\varkappa) + q \cdot \frac{2m}{\hbar^2}}{i(k+\varkappa) - q \cdot \frac{2m}{\hbar^2}}$

$$B = 1 + A = 1 + \frac{i(k-\varkappa) + q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}}{i(k+\varkappa) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}} =$$

$$= \frac{i(k+\varkappa) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2} + i(k-\varkappa) + q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}}{i(k+\varkappa) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}} =$$

$$= \frac{i\cdot 2K}{i(k+\varkappa) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}}$$

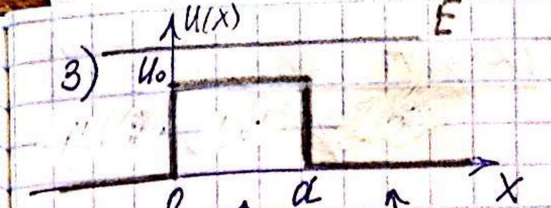
$$R = |A|^2 = \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \varkappa = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar} \end{array} \right\} =$$

$$= \left| \frac{i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\cdot\left(\sqrt{E} - \sqrt{E-U_0}\right) + q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}}{i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\cdot\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}\right) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}} \right|^2$$

$$T = |B|^2\cdot\frac{\varkappa}{K} = \left| \frac{i\cdot 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{E}}{i\cdot\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\cdot\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}\right) - q\cdot\frac{2m}{\hbar^2}} \right|^2 \cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{E-U_0}{E}}$$

3)



Сшивка:

$$\psi(0-0) = \psi(0+0)$$

$$\psi'(0-0) = \psi'(0+0)$$

$$\psi(a-0) = \psi(a+0)$$

$$\psi'(a-0) = \psi'(a+0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + A = B + C \\ ik + (-ik)\cdot A = iqB - iqC \\ B\cdot e^{iqa} + C\cdot e^{-iqa} = D\cdot e^{ika} \\ B\cdot iq\cdot e^{iqa} - C\cdot iq\cdot e^{-iqa} = ik\cdot D\cdot e^{ika} \end{array} \right.$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad q = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

$A = ?$

$D = ?$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + A = B + C \\ k(1-A) = q\cdot(B-C) \\ B\cdot e^{iqa} + C\cdot e^{-iqa} = D\cdot e^{ika} \\ q\cdot\left(B\cdot e^{iqa} - C\cdot e^{-iqa}\right) = k\cdot D\cdot e^{ika} \end{array} \right.$$

$$B = 1 + A - C$$

$$k(1-A) = q\cdot(1 + A - 2C)$$

$$k + q\cdot 2C - q = (k+q)\cdot A$$

$$C = \frac{(k+q)\cdot A - (k-q)}{2q}$$

$$B = 1 + A - \frac{(k+q)A - (k-q)}{2q} = \frac{(q+k) + (q-k)A}{2q}$$

74

$$\left(\frac{(q+k)+A(q-k)}{2q}\right)\cdot e^{iqa}+\left(\frac{(k+q)A-(k-q)}{2q}\right)\cdot e^{-iqa}=$$

$$=\mathcal{D}\cdot e^{ika}$$

$$\frac{(q+k)+A(q-k)\cdot e^{iqa}}{2}-\frac{(q+k)\cdot A-(k-q)\cdot e^{-iqa}}{2}=kDe^{ika}$$

$$\frac{q+k+A(q-k)}{2q}\cdot e^{iqa}+\frac{(k+q)A-(k-q)}{2q}\cdot e^{-iqa}=$$

$$=\frac{(q+k+A(q-k)}{2k}e^{iqa}-\frac{(k+q)A-(k-q)}{2k}\cdot e^{-iqa}$$

$$A\left[\frac{(q-k)}{2q}\cdot e^{iqa}+\frac{(k+q)}{2q}\cdot e^{-iqa}-\frac{(q-k)}{2k}\cdot e^{iqa}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k+q)}{2k}\cdot e^{-iqa}\right]=\frac{q+k}{2k}\cdot e^{iqa}+\frac{k-q}{2k}\cdot e^{-iqa}-$$

$$-\frac{q+k}{2q}\cdot e^{iqa}+\frac{k-q}{2q}\cdot e^{-iqa}$$

$$A\cdot\left[\frac{e^{iqa}+e^{-iqa}}{2}-\frac{k}{q}\left(\frac{e^{iqa}-e^{-iqa}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{q}{k}\cdot\left(\frac{e^{iqa}-e^{-iqa}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{iqa}+e^{-iqa}\right)\right]=$$

$$=\frac{q}{k}\cdot\frac{e^{iqa}-e^{-iqa}}{2}+\frac{e^{iqa}+e^{-iqa}}{2}-\frac{k}{q}\cdot\frac{e^{iqa}-e^{-iqa}}{2}$$

75

$$-\frac{e^{iqa}+e^{-iqa}}{2}$$

$$A\cdot\left(\cos(qa)-\frac{k}{q}\cdot i\cdot\sin(qa)-\frac{q}{k}\cdot i\cdot\sin qa+\cos(qa)\right)$$

$$=\frac{q}{k}i\cdot\sin(qa)-\frac{k}{q}\cdot i\cdot\sin(qa)$$

$$A\cdot\left(2\cos(qa)-i\cdot\sin(qa)\cdot\frac{(k^2+q^2)}{kq}\right)=$$

$$=\frac{i\cdot\sin(qa)\cdot(q^2-k^2)}{kq}$$

(3)

$$A=\frac{-(q^2-k^2)\cdot\sin qa}{(k^2+q^2)\cdot\sin qa+2i\cdot\cos(qa)\cdot kq}=$$

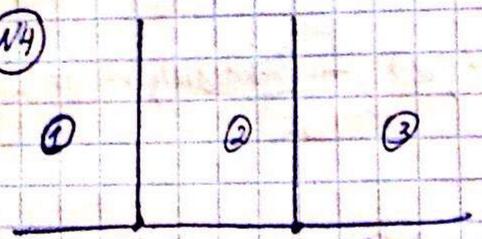
$$=\frac{(k^2-q^2)\cdot\sin qa}{(k^2+q^2)\cdot\sin qa+i\cdot 2kq\cdot\cos(qa)}\quad(1)$$

$$\mathcal{D}=\frac{2ikq\cdot e^{-ika}}{(k^2+q^2)\cdot\sin(qa)+i\cdot 2kq\cdot\cos(qa)}\quad(2)$$

$R = |A|^2$ $\quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$T = |\mathcal{D}|^2$ $\quad q = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$

(14)



$R = |A|^2$

$T = |\mathcal{D}|^2$

$U = q \cdot \delta(x) + q \cdot \delta(x-a)$

(?) ① : $e^{ikx} + A \cdot e^{-ikx}$

② : $B \cdot e^{ikx} + C \cdot e^{-ikx}$; $k = \frac{\sqrt{E \cdot 2m}}{\hbar}$

③ : $\mathcal{D} \cdot e^{ikx}$

Сшивка: $\begin{cases} \psi(0+0) = \psi(0-0) \\ \psi'(0+0) - \psi'(0-0) = \left(\frac{-2m}{\hbar^2} \cdot q\right) \cdot \psi(0) \\ \psi(a+0) = \psi(a-0) \\ \psi'(a+0) - \psi'(a-0) = \left(\frac{-2m}{\hbar^2} \cdot q\right) \psi(a) \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 + A = B + C \\ ikB + (-ik) \cdot C - ik + ikA = \left(-\frac{2mq}{\hbar^2}\right) \cdot (1+A) \\ B \cdot e^{ika} + C \cdot e^{-ika} = \mathcal{D} \cdot e^{ika} \\ ik\mathcal{D} \cdot e^{ika} - ikB \cdot e^{ika} + ikC \cdot e^{-ika} = \frac{-2m}{\hbar^2} \cdot q \cdot \mathcal{D} e^{ika} \end{cases}$$

$C = 1 + A - B$

$ik \cdot (B - (1 + A - B) - 1 + A) = \left(-\frac{2mq}{\hbar^2}\right) \cdot (1 + A)$

$$\left(\frac{B \cdot e^{ika} + (1 + A - B) \cdot e^{-ika}}{e^{ika}} = \mathcal{D} \quad (1) \right.$$

$B(ik) \cdot (1 + 1) - 2ik = \left(-\frac{2mq}{\hbar^2}\right) \cdot (1 + A)$

$$-\frac{2ik \cdot (B-1) \cdot \hbar^2}{2mq} = 1 + A$$

$A = \frac{(1-B) \cdot ik\hbar^2}{mq} - 1$, $A + 1 = \frac{(1-B) \cdot ik\hbar^2}{mq}$

$$(1) \rightarrow \frac{B \cdot \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2i} \cdot 2i + (1+A) \cdot e^{-ika}}{e^{ika}} = \mathcal{D}$$

$$\frac{B \cdot 2i \cdot \sin(ka) + \frac{(1-B) \cdot ik\hbar^2}{mq} \cdot e^{-ika}}{e^{ika}} = \mathcal{D} \quad (2)$$

$\mathcal{D} \cdot \left(ik \cdot e^{ika} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot q \cdot e^{ika}\right) = ik \cdot \left(B \cdot e^{ika} - C \cdot e^{-ika}\right)$

$\mathcal{D}\left(ik \cdot e^{ika} + \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{ika}\right) = ik\left(B \cdot e^{ika} - (1 + A - B) \cdot e^{-ika}\right)$

$$\mathcal{D}\left(ik\cdot e^{ika}+\frac{2mq}{\hbar^2}\cdot e^{ika}\right)=ik\left(B\cdot e^{ika}-\left(\frac{(1-B)ik\hbar^2}{mq}-B\right)e^{-ika}\right) \quad (3)$$

(2), (3) - система относительно $\mathcal{D}$, B

отсюда находим $\mathcal{D}$

$T=|\mathcal{D}|^2$

$R=1-T$

Продолжение (№4):

Отдельно рассм. случай четных и нечетных состояний:

1) <u>четные</u>

$\psi(-x)=\psi(x)$

(I) $\psi=A\cdot e^{kx}$

(II) $\psi=B\cdot\cos(\varkappa x)$

(III) $\psi=\mathcal{D}\cdot e^{-kx}$

$\psi(-x)=\psi(x) \Longrightarrow A=\mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} \text{I}: \psi=A\cdot e^{kx} \\ \text{II}: \psi=B\cdot\cos(\varkappa x) \\ \text{III}: A\cdot e^{-kx} \end{cases}$

Сшивка (на правой половине ямы $x=a$):

$$\begin{cases} A\cdot e^{-ka}=B\cdot\cos(\varkappa a) \\ -A\cdot k\cdot e^{-ka}=-B\cdot\varkappa\cdot\sin(\varkappa a) \end{cases} \quad (1)\ (2)$$

$k=\varkappa\cdot tg(\varkappa a) \longrightarrow ka=tg(\varkappa a)\cdot\varkappa a$

Связь k и $\varkappa$:

$$k^2=\frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

$$\varkappa^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)=-\underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{k^2}+\frac{2m|U|}{\hbar^2}=-k^2+\frac{2m|U|}{\hbar^2}$$

$$k^2a^2=-\varkappa^2a^2+\underbrace{\frac{2m|U|}{\hbar^2}}_{B}\cdot a^2=B-\varkappa^2a^2$$

$$\varkappa a\cdot tg(\varkappa a)=\sqrt{B-\varkappa^2a^2}$$

$\varkappa a=\xi$, $\quad \xi\cdot tg\xi=\sqrt{B-\xi^2}$

$$\boxed{tg\,\xi=\frac{\sqrt{B-\xi^2}}{\xi}}$$

Можно иначе (в иной форме)

$$\varkappa^2a^2=\frac{2m(E-U)a^2}{\hbar^2}=-\frac{2m|E|\cdot a^2}{\hbar^2}+\underbrace{\frac{2m|U|\cdot a^2}{\hbar^2}}_{B}=$$

$$=B-\frac{2ma^2}{\hbar^2}\underbrace{\frac{|E|}{|U|}}_{\varepsilon}\cdot|U|=B-B\varepsilon=B(1-\varepsilon)$$

$tg\,\varkappa a=tg\sqrt{B(1-\varepsilon)}$

$k=\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$, $\quad ka=\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}\cdot|E|}=\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}\cdot\frac{|E|}{|U|}\cdot|U|}=\sqrt{B\cdot\varepsilon}$

$\underbrace{\varkappa a \cdot \operatorname{tg} \varkappa a}_{\sqrt{B(1-\varepsilon)}} = ka$

$\sqrt{B(1-\varepsilon)} \cdot \operatorname{tg}\sqrt{B(1-\varepsilon)} = \sqrt{B\cdot\varepsilon}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\sqrt{B(1-\varepsilon)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}$$ для четных уровней

Аналогично для нечетных уровней:

$$\boxed{\operatorname{tg}\sqrt{B(1-\varepsilon)} = -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}}$$

Случаи:

1) $|U| = 10\,eV$

$B = \frac{2m|U|\cdot a^2}{\hbar^2}$ $\qquad 1\,эр^2 = 10^{-7}\,Дж$

$B = \frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-28}\cdot 10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-7}\cdot 9\cdot 10^{-16}}{(1{,}05\cdot 10^{-27})^2} =$

$= 237{,}7\cdot 10^{-1} = 23{,}8 \approx 24 \gg 1$

$B \approx 23{,}77$

Численный расчет: $\operatorname{tg}\xi = \frac{\sqrt{B-\xi^2}}{\xi}$

$\Downarrow$

$\xi_1 = 1{,}3$

$\varkappa a = \xi = 1{,}3$

(W7) u_0

$1{,}3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}\cdot a^2 - \frac{2mu}{\hbar^2}\cdot a^2}' = \sqrt{\frac{2m|U|}{\hbar^2}\cdot a^2 - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\cdot a^2}' =$ 81

$= \sqrt{B - B\varepsilon}' = \sqrt{B(1-\varepsilon)}'$

$1{,}3 = \sqrt{23{,}77\cdot(1-\varepsilon)}' \Rightarrow \varepsilon = 0{,}929 \approx 0{,}93 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\varepsilon = \frac{|E|}{|U|} \Rightarrow \boxed{|E| = 9{,}29\,eV}$

$\boxed{\text{Оценка дала } E = 9{,}9\,eV}$

2) $|U| = 0{,}1\,eV \Rightarrow B = 0{,}24$

Численной расчет: $\operatorname{tg}\sqrt{B(1-\varepsilon)}' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}'$

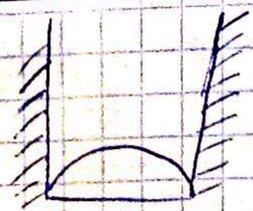
$\Downarrow$

$\varepsilon = 0{,}1834$

$\varepsilon = \frac{|E|}{|U|} \Rightarrow \boxed{|E| = 0{,}1834\cdot 0{,}1 \approx 0{,}018\,eV}$

Оценка дала: $\boxed{|E| \approx 0\,eV}$

Из Д/З, где

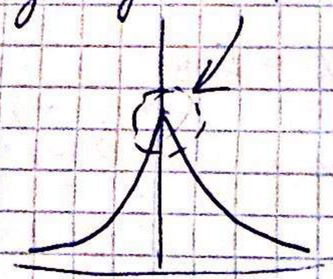


$\boxed{\partial U / \partial x < 0}$

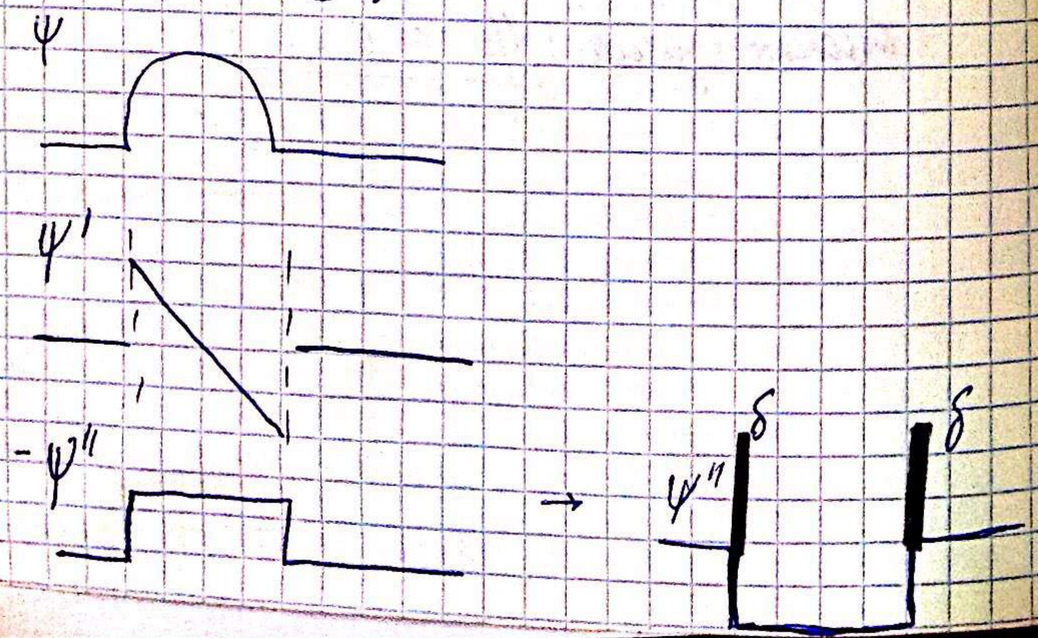
Считать: ← производная с минусом

$$\int \psi^* \overleftarrow{\frac{\hat{p}\hat{p}}{2m}} \overrightarrow{\psi} \cdot dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi'^* \cdot \psi' \cdot dx$$

Так лучше, потому что:
Из-за шумов:

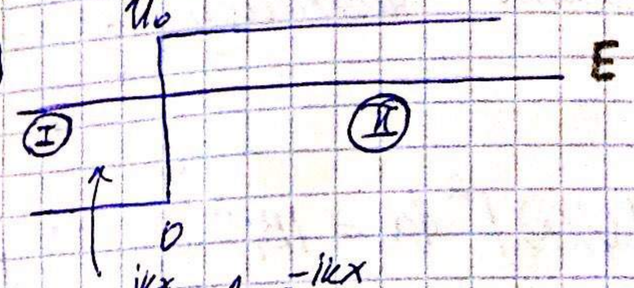


$$\langle p^4 \rangle = \int \psi^* \cdot \overleftarrow{\hat{p}^2} \cdot \overrightarrow{\hat{p}^2} \cdot \psi \cdot dx$$



Д/З

(N1)



(I) $e^{ikx} + A \cdot e^{-ikx}$

(II) $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0$

< 0

$-\varkappa^2$

справа: $B \cdot e^{-\varkappa x} + C \cdot e^{\varkappa x}$ → 0

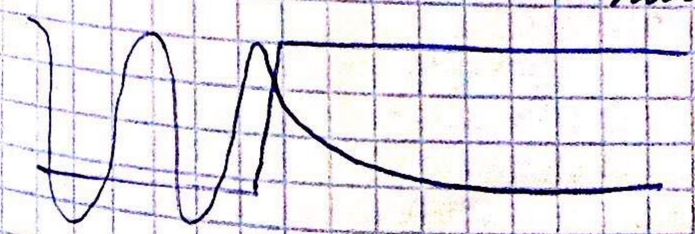
$C = 0$

задачка на полное внутреннее отражение

частица под барьер не заходит, полное отражение $\Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow A = e^{i\delta}$

можно показать, что это след. из непрерывности плотности вер-ти

$\delta(E) - ?$



вер-ть того, что частица

вер-ть обнаружить частицу под барьером:

$$P_{x>0} \overset{!!!}{\neq} \int_0^{+\infty} |\psi(x)|^2 \cdot dx = |B|^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\varkappa x} \cdot dx =$$

$$= \frac{|B|^2}{2\varkappa}$$

все дело в нормировке!!!

после $x>0$ - спектр непрерывный!!!

ВФ непрерывного спектра ненормируемы

также ф-ы применимы только для тех ВФ, которые нормируемы!!!

(№2) "Школьная" задача

есть $\psi(x)$ из гильбертова п-ва

$$\int dx \cdot |\psi(x)|^2 = 1$$

$\psi(p)$

$$\int dp |\psi(p)|^2 = 1$$

$\frac{M}{c^2} \cdot kr$

$$\psi(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$\psi(p) \sim \frac{1}{p^{1/2}}$$

$$\boxed{[\psi(x)] = L^{-\frac{1}{2}}}, \quad \boxed{[\psi(p)] = [p^{-\frac{1}{2}}]}$$

Теперь пусть:

$\psi(x), \psi(p)$ - принадлежат непрерывному спектру

$[\psi(x)]$ - ?

$[\psi(p)]$ - ?

Рассм. $H = \frac{p^2}{2m}$ решение $\frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \equiv \psi_p(x)$

$$\int dx \cdot \psi_{p'}^*(x) \cdot \psi_p(x) = \delta(p-p') \quad \text{(это нормировка на непрерывный спектр, откуда [ ] ?)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p-p') \cdot dp = 1 \quad , \Rightarrow \Rightarrow \left[\delta[p-p']\right] = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \left[\int dx \, \psi_{p'}^* \cdot \psi_p(x)\right] \Rightarrow [\psi(x)] = \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$\int dx\, \psi^*_{E'}(x)\, \psi_E(x) = \delta(E-E') =$$

$$= \delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m}\right) = \frac{\delta(p-p')}{\left|\frac{p}{m}\right|},$$

т.к.:

$f(x_0) = 0$

$$\delta(f(x)) = \delta(x-x_0)\cdot\frac{1}{|f'(x_0)|}$$

$$\Rightarrow \int dx\, \psi^*_{E'}(x)\, \psi_E(x) = \delta(p-p')\cdot\frac{m}{|p|}$$

$$\left[\delta(p-p')\cdot\frac{1}{|p|}\right] = \left[\frac{1}{p}\right], \quad \psi_E(x) \sim \frac{1}{\sqrt{+E}}, \quad \left[\delta(p-p')\cdot\frac{m}{|p|}\right] = \left[\frac{m}{p^2}\right] = \left[\frac{1}{E}\right]$$

Д/з Доделать для непр. спектра в (№5) импульсном представлении

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$\hat{P}\ \psi(x) = \psi(-x)$ – опер-р инверсии

$\hat{H}$ и $\hat{P}$ коммутируют

Задача: найти общие СВ.

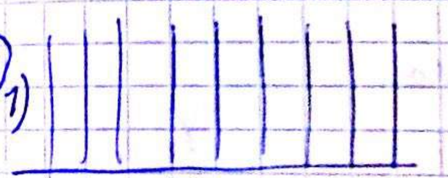
Взять ΛК $e^{\pm i\frac{px}{\hbar}}$:

$\cos\frac{px}{\hbar}$, $\sin\frac{px}{\hbar}$ — СФ оператора инверсии

$$\begin{cases} \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

$e^{\pm i\frac{px}{\hbar}}$ – СВ опер-ра импульса

(№4) 1)

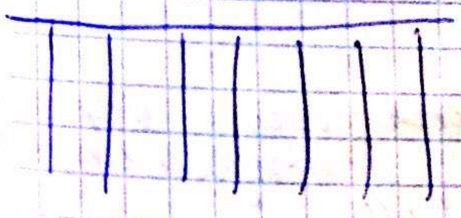


$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q\cdot\delta(x-na)$$

Дираковская гребенка (решение искать в виде блоховских волн)

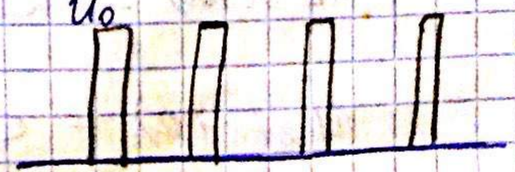
Далее стр. 78

(№5)

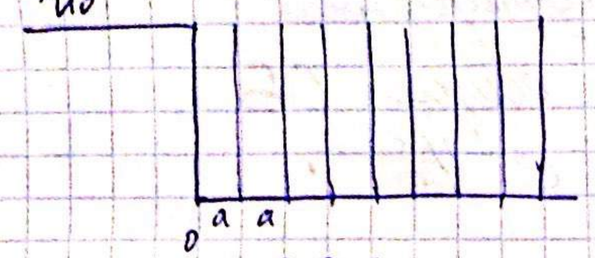


$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-q)\cdot\delta(x-na)$$

(№6) Кронига – Пенни



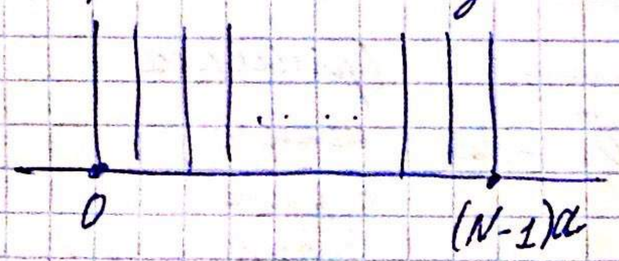
(N7)



Найти ВСС спектр системы:

1) однокр. вокр
2) двукр. вокр
3) Таммовские дискр. уровни

(N8) Гребенок N штук



$R = ?$

$T = ?$

К номеру (4):

по теореме Блоха:

блоховская волна, бегущая вправо: κ квазиимпульс

$$\begin{cases} U_1(x+a) = e^{\frac{i}{\hbar}pa} \cdot U_1(x) \\ U_2(x+a) = e^{-\frac{i}{\hbar}pa} \cdot U_2(x) \end{cases}$$

Замечание: не обязательно квазиимпульс вещественный

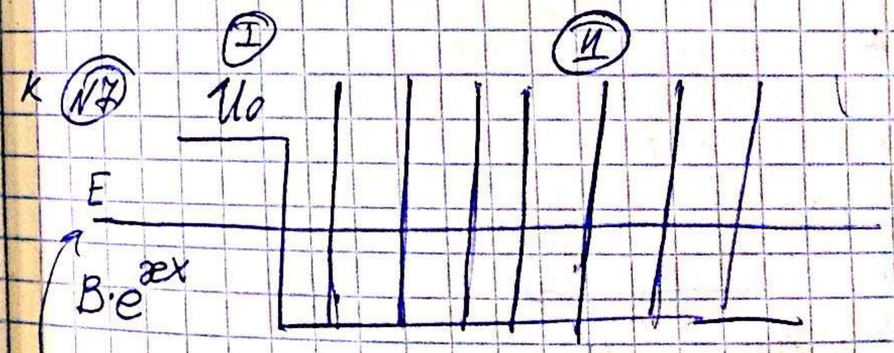
Могут строиться $p \in Im$

где $p \in Im$ — запрещ. зона

$$\begin{cases} U_1(x+a) = e^{\frac{1}{\hbar}pa} \cdot U_1(x) \\ U_2(x+a) = e^{-\frac{1}{\hbar}pa} \cdot U_2(x) \end{cases}$$

Задача в №4,5,6: найти обл-ти разреш. и запрещ. зон.

k (N7)



при таких E спектр не вырожден

(I) $B \cdot e^{\varkappa x}$

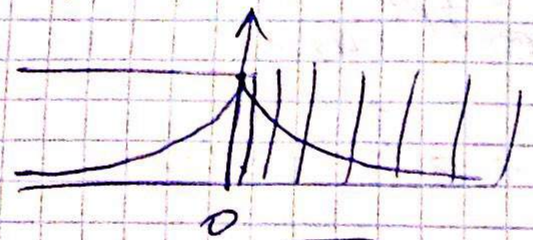
(II) $A U_1 + C \cdot U_2$ (ЛК блоховских волн)

$p \in Re$ (квазиимпул. вещ.)

блох. волны U_1, U_2 уже найдены в предыдущем номере №(4)

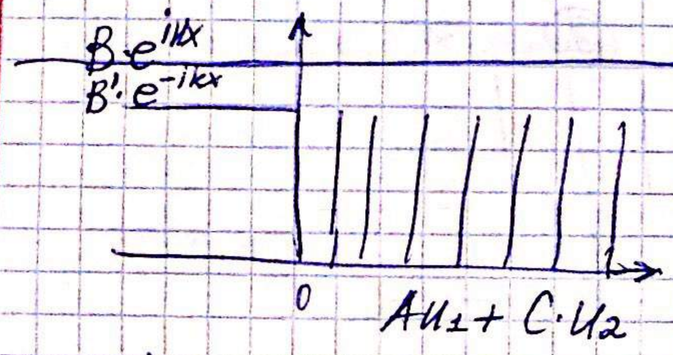
$u_1 \sim e^{\frac{1}{\hbar}pa}$ (расчетная ∞)

$u_2 \sim e^{-\frac{1}{\hbar}pa}$ (будет дискр. уровень энергии):



Это н.к. Таммовские уровни энергии

$E > U_0$:



Be^{ikx}

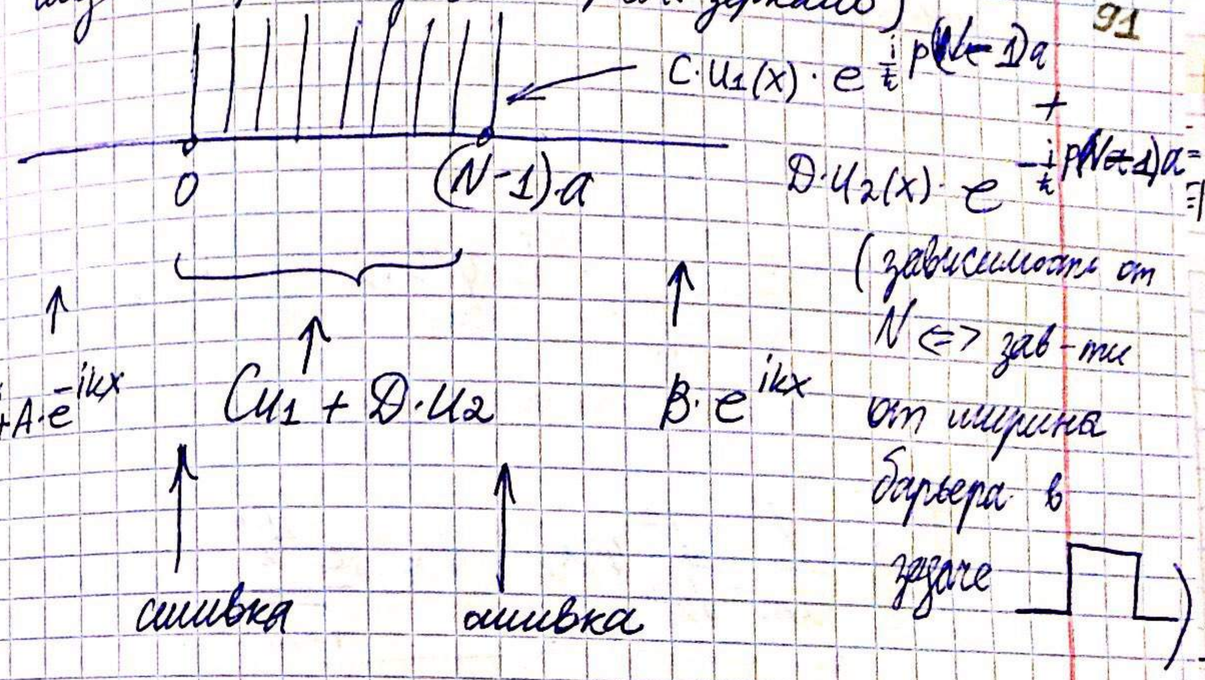
$B'e^{-ikx}$ искать отдельно!!!

Каждое реш. сшить с $Au_1 + Cu_2$

Блоховские волны:

u_1, u_2 брать из номера с блоховскими волнами. (учебника Дирака)

След. номер: (диэлектрич. зеркало)



Задачи на импульсное представление:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\psi''(x) + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\cdot\psi(x) + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$\psi(x) = \int dp \cdot \frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\psi(p) \quad \text{(прямое)}$$

$$\psi(p) = \int dx \cdot \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\psi(x) \quad \text{(обратное)}$$

1) интегр. $E\psi$

2) подст. $-\dots + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$

$$\int dx\ \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot E\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(p)$$

$$\int \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)}\ dx\cdot\underbrace{\frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p)$$

т.к. $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{p^2\cdot\psi(p)}{2m}$

$$\int dp'\int dx\cdot\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot V(x)\cdot\frac{e^{\frac{i}{\hbar}p'x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\psi(p') =$$

$$= \int dp'\left(\int dx\cdot\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}}{2\pi\hbar}V(x)\right)$$

$$= V(p'-p)$$

$$\boxed{\frac{p^2}{2m}\cdot\psi(p) + \int dp'\cdot V(p'-p)\cdot\psi(p') = E\cdot\psi(p)}$$

↑ УШ в импульсном представлении

№3 а) переписать это УР-е для период. потенциала

б) решить задачу для потенц. $-q\cdot\delta(x)$ (ответ для коорд. знаки)

в) решить для потенциала $F\cdot x$

Конец ③ и старого Д/З №10:

$D_H = ?$

$$\frac{\langle p^4\rangle}{(2m)^2} = \int \psi^*\cdot\frac{\overleftarrow{p^2}\cdot\overrightarrow{p^2}}{(2m)^2}\cdot\psi\cdot dx = \int\left\{\begin{array}{l}\psi(x) = \frac{\sqrt{15}}{4a^{5/2}}\cdot(a^2-x^2)\\ \hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\end{array}\right\} =$$

$$= \int_{-a}^{a}\frac{\hbar^4}{(2m)^2}\cdot\left\{\frac{\sqrt{15}}{4a^{5/2}}\cdot(-2)\right\}^2\cdot dx = \frac{\hbar^4}{(2m)^2}\cdot\frac{15}{16a^5}\cdot 4\cdot 2a =$$

$$= \frac{\hbar^4}{(m^2\cdot a^4)}\cdot\frac{15}{8}$$

$$\frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \int\psi^*\cdot\frac{\overleftarrow{p}\cdot\overrightarrow{p}}{2m}\cdot\psi\cdot dx = \frac{1}{2m}\cdot(-\hbar^2)\cdot\int_{-a}^{a}\frac{15}{16a^5}\cdot(-2x)^2 dx =$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2m}\cdot\frac{-15}{16a^5}\cdot 4\cdot\frac{2a^3}{3} = -\hbar^2\cdot\frac{5}{4a^2\cdot m}$$

$$\left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle^2 = \frac{\hbar^4}{m^2a^4}\cdot\frac{25}{16}\ ;\quad \left\langle\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\right\rangle = \frac{\hbar^4}{m^2a^4}\cdot\frac{15}{8}$$

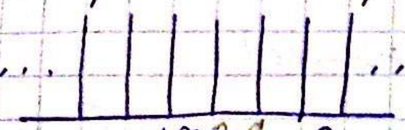
(x-a)

(a)

$$D_H = \left\langle \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{\hbar^4}{m^2 a^4}$$

Домашняя работа №11.

(№4) Дираковская гребёнка:



$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q \cdot \delta(x - na)$$

$0 \le x \le a$: $u(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$

$a \le x \le 2a$: по теореме Блоха

$$u(x) = e^{iK \cdot a} \cdot \left(A \cdot e^{ik(x-a)} + B \cdot e^{-ik(x-a)} \right)$$

Сшивка:

$$\begin{cases} u(a+0) = u(a-0) \\ u'(a+0) = u'(a-0) + \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot u(a) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} e^{iK \cdot a} \cdot (A + B) = A \cdot e^{ika} + B \cdot e^{-ika} \\ ik \cdot e^{iKa} (A - B) - ik \left(A \cdot e^{ika} - B \cdot e^{-ika} \right) = \\ = \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot \left(A \cdot e^{ika} + B \cdot e^{-ika} \right) \end{cases}$$

Эти ур-я - однородная система лин. уравнений относит. A и B.

$\det(\dots) = 0$ (чтобы $\exists$ нетривиальное реш.)

$$\begin{cases} A \cdot \left(e^{iK \cdot a} - e^{ika} \right) + B \cdot \left(e^{iK \cdot a} - e^{-ika} \right) = 0 \\ A \cdot \left(ik \cdot e^{iK \cdot a} - ik \cdot e^{ika} - \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{ika} \right) + B \cdot \\ \cdot \left(ik \cdot e^{-ika} - ik \cdot e^{iK \cdot a} - \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{-ika} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(e^{iK \cdot a} - e^{ika} \right) \cdot \left(ik \cdot e^{-ika} - ik \cdot e^{iKa} - \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{-ika} \right) -$$

$$- \left(e^{iK \cdot a} - e^{-ika} \right) \cdot \left(ik \cdot e^{iKa} - ik \cdot e^{ika} - \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{ika} \right) = 0$$

$$\underline{e^{iKa} \cdot ik \cdot e^{-ika}} - ik - ik \cdot e^{i2Ka} + \underline{ik \cdot e^{iKa} \cdot e^{ika}} -$$

$$- \underline{\frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{iKa} \cdot e^{-ika}} + \frac{2mq}{\hbar^2} - \left(ik \cdot e^{i2Ka} - \right.$$

$$\underline{- ik \cdot e^{-ika} \cdot e^{iKa}} \qquad \underline{- ik \cdot e^{iKa} \cdot e^{ika}} + ik - \underline{\frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{iKa}} \cdot$$

$$\left. \cdot e^{ika} + \frac{2mq}{\hbar^2} \right) = 0$$

$$ik \cdot e^{iKa} \cdot \left(\frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2} \cdot 2 \right) + \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{iKa} \cdot \left(e^{ika} - e^{-ika} \right) \cdot \frac{e^{i(x-a)}}{u(a)}$$

$$+ ik \cdot e^{iKa} \cdot \left(\frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2} \cdot 2 \right) - 2 \cdot ik \cdot \left(1 + e^{i2Ka} \right) = 0$$

$$2ik \cdot e^{iKa} \cdot \cos(ka) \cdot 2 + \frac{2mq}{\hbar^2} \cdot e^{iKa} \cdot \sin(ka) \cdot 2i - 2ik \cdot e^{iKa} \cdot \left(\frac{e^{iK\cdot a} + e^{-iKa}}{2}\right) \cdot 2 = 0$$

$$k \cdot e^{iKa} \cdot \cos(ka) + \frac{mq}{\hbar^2} \cdot e^{iKa} \cdot \sin(ka) - k \cdot e^{iKa} \cdot \cos(K\cdot a) = 0$$

$$\boxed{\cos(K\cdot a) = \cos(ka) + \frac{mq}{k\hbar^2} \cdot \sin(ka)}$$

Зоны разрешенных значений энергии:

$$\left|\cos(ka) + \frac{mq}{k\hbar^2} \cdot \sin(ka)\right| \le 1$$

или в виде:

$$\left|\cos\left(ka - \operatorname{arctg}\frac{mqa}{k\hbar^2 a}\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mqa}{\hbar^2 ka}\right)^2}}$$

$$\Omega = \frac{mq}{\hbar^2}$$

$$\left|\cos\left(ka - \operatorname{arctg}\left(\frac{\Omega a}{ka}\right)\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega a}{ka}\right)^2}}$$

$$\cos(Ka) = Q \cdot \frac{\sin(ka)}{ka} + \cos(ka) \quad (*)$$

$$Q = \frac{mqa}{\hbar^2}$$

Значения энергии: $E_n(K) = \frac{\hbar^2 \cdot K_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{(ka)^2}{a^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot (ka)^2$, где (ka) - корни $(*)$

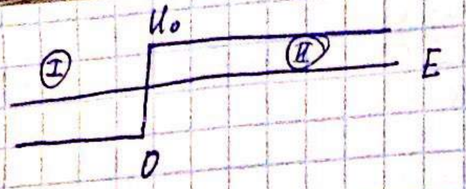
см. стр. 88 пояснение к (N4).

Нужно ли искать $\underline{\Delta E}$ блох. волны? (т.е. u_1, u_2)

Здесь найдено для волны, бегущей слева направо.

$$\begin{cases} u_1(x+a) = e^{\frac{i}{\hbar}pa} \cdot u_1(x) \\ u_2(x+a) = e^{-\frac{i}{\hbar}pa} \cdot u_2(x) \end{cases}$$

№1



Ⅰ : $e^{ikx} + A \cdot e^{-ikx}$

Ⅱ : $\psi'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)}_{<0} = 0$

$= -\varkappa^2$

$B \cdot e^{-\varkappa x} + \underbrace{C \cdot e^{\varkappa x}}_{=0}$

Полное отражение $|A| = 1 \Rightarrow A = e^{i\delta}$

Ⅰ $e^{ikx} + e^{i\delta} \cdot e^{-ikx} = e^{ikx} + e^{-(ikx - i\delta)}$

Ⅱ $B \cdot e^{-\varkappa x}$

Сшивка:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(-0) = \psi(+0) \\ \psi'(-0) = \psi'(+0) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} e^{i\delta} = B \\ ik - ik \cdot e^{i\delta} = -\varkappa \cdot B \end{cases}$$

$ik - ik \cdot e^{i\delta} = -\varkappa \cdot e^{i\delta}$

$ik = (ik - \varkappa) \cdot e^{i\delta}$

$$e^{i\delta} = \frac{ik}{ik - \varkappa} = \frac{1}{1 + i\frac{\varkappa}{k}}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

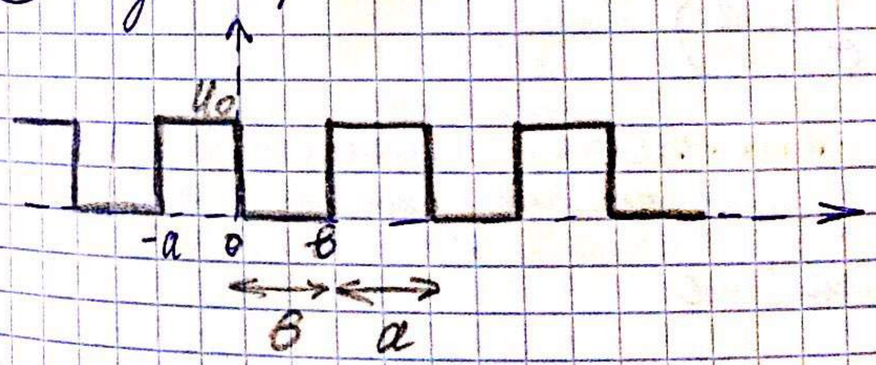
$$e^{i\delta} = \frac{1}{1 + i\cdot\sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}} = \frac{1 - i\cdot\sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}}{1 + \frac{U_0 - E}{E}}$$

$e^{i\delta} = \cos\delta + i \cdot \sin\delta$

$$\cos\delta(E) = Re\left(\frac{1}{1 + i\cdot\sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}}\right) = \frac{E}{U_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(E) = \begin{bmatrix} -\arccos\left(\frac{E}{U_0}\right) + 2\pi n \\ \arccos\left(\frac{E}{U_0}\right) + 2\pi m \end{bmatrix} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

№6 Модель Кронига - Пенни (Гольдман Кривченков стр 63)



$0 < x < b$: $\psi = C_1 \cdot e^{ik_1 x} + C_2 \cdot e^{-ik_1 x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$-a < x < 0$: $\psi = C_3 \cdot e^{ik_2 x} + C_4 \cdot e^{-ik_2 x}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$

$\Downarrow$

$b < x < b + a$: $\psi \overset{?}{=} e^{iK(a+b)} \cdot \left(C_3 \cdot e^{ik_2(x-(a+b))} + \right.$

$+C_4 \cdot e^{-ik_2(x-(a+b))}$.

Сшивка:

$$\begin{cases} \psi(0-0) = \psi(0+0) \\ \psi'(0-0) = \psi'(0+0) \\ \psi(b-0) = \psi(b+0) \\ \psi'(b-0) = \psi'(b+0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_3 + C_4 \\ C_1 \cdot e^{ik_1 \cdot b} + C_2 \cdot e^{-ik_1 \cdot b} = e^{iK(a+b)} \cdot (C_3 \cdot e^{-ik_2 a} + \\ + C_4 \cdot e^{ik_2 \cdot a}) \\ k_1(C_1 - C_2) = k_2(C_3 - C_4) \\ k_1(C_1 \cdot e^{ik_1 b} - C_2 \cdot e^{-ik_1 b}) = k_2 \cdot e^{iK(a+b)} \cdot (C_3 \cdot e^{-ik_2 a} + \\ + (-C_4) \cdot e^{ik_2 \cdot a}) \end{cases}$$

Система имеет нетрив. решение при

$\det(\text{система}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ e^{ik_1 b} & e^{-ik_1 \cdot b} & -e^{iK(a+b)} \cdot e^{-ik_2 a} & -e^{iK(a+b)} \cdot e^{ik_2 a} \\ k_1 & -k_1 & -k_2 & k_2 \\ k_1 \cdot e^{ik_1 b} & -k_1 \cdot e^{-ik_1 b} & -k_2 \cdot e^{iK(a+b)} \cdot e^{-ik_2 a} & k_2 \cdot e^{iK(a+b)} \cdot e^{ik_2 a} \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos(K(a+b)) = \cos(k_1 \cdot b) \cdot \cos(k_2 a) - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \cdot \sin(k_1 b) \cdot \sin(k_2 a)$$

Случаи:

а) $E < U_0$

$\Rightarrow k_2 \in Im$

$k_2 = i\varkappa$

$\operatorname{sh} x = -i \cdot \sin(ix)$

$\cos(ix) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(ix) = i \cdot \sin(x)$

$$\cos(K(a+b)) = \cos(k_1 \cdot b) \cdot \operatorname{ch}(\varkappa a) + \frac{\varkappa^2 - k_1^2}{2\varkappa k_1} \cdot \sin(k_1 \cdot b) \cdot \operatorname{sh}(\varkappa a) \quad (*)$$

Разрешенные зоны энергии определяются из неравенств: $-1 \le \cos(k_1 \cdot b) \cdot \operatorname{ch}(\varkappa a) + \frac{\varkappa^2 - k_1^2}{2\varkappa k_1} \cdot \sin(k_1 b) \operatorname{sh}(\varkappa a) \le 1$

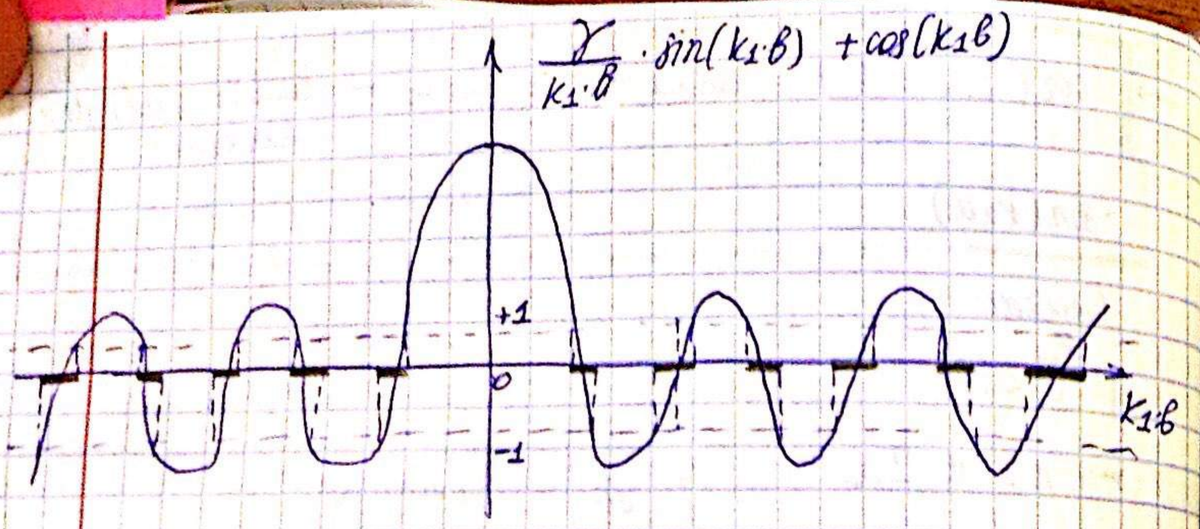
Рассм. предельный случай:

$\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} \cdot a \ll 1$, $b \gg a$, $E \ll U_0$

Обозначим: $\frac{mU_0 \cdot ab}{\hbar^2} = \gamma$

$(*)$ приближенно имеет вид:

$$\cos(K(a)) = \gamma \cdot \frac{\sin(k_1 \cdot b)}{k_1 \cdot b} + \cos(k_1 \cdot b)$$



— – разрешенные зоны энергии

б) $E > U_0$

Разрешенные зоны энергии определяются неравенствами:

$$-1 \le \cos(k_1 \cdot B) \cdot \cos(k_2 \cdot a) - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 \cdot k_2} \cdot \sin(k_1 B) \cdot \sin(k_2 a) \le 1$$

№9 а) $V(x) = V(x+B)$ (периодический потенциал)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \psi''(x) + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x), \quad \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \text{ и } \int \dots \cdot dx$$

$$\frac{p^2}{2m} \cdot \psi(x) + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x),$$

$$\int \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right) \cdot \psi'' \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx + \int V(x) \cdot \psi(x) \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx =$$

$$= E \cdot \underbrace{\int \psi(x) \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx}_{= \psi(p)}$$

$$\int \frac{p^2}{2m} \psi(x) \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx + \int V(x) \cdot \psi(x) \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx = E \cdot \psi(p)$$

$$\frac{p^2}{2m} \cdot \psi(p) + \int V(x) \cdot \psi(x) \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot dx = E \cdot \psi(p)$$

$V(x) = V(x+B)$

$\frac{2\pi\hbar}{B} = \omega \cdot n$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot e^{-i\frac{2\pi\hbar}{B}x} \Rightarrow V(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{B} \cdot x}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{k=-\infty} f(x)\, e^{-ikx} \cdot dx$$

$$V_n = V_{-n}^*$$

$$\int dx \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot V(x) \cdot \psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dx \cdot \frac{e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \psi(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi n x}{B}} \cdot V_n \overset{p}{=}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \int dx \cdot \psi(x) \cdot \frac{e^{-i\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{2\pi n}{B}\right)x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot \psi\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{2\pi n}{B}\right)$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot \psi\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{2\pi n}{b}\right) = E\cdot\psi(p)$$

б) $$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + \int dp' \cdot \frac{V(p-p')}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \psi(p') = E\cdot\psi(p),$$

где $V(x) = -q\cdot\delta(x)$

$$\int dx \cdot \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot V(x) = V(p'-p)$$

$$V(p) = \int dx \cdot \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot V(x) = \frac{-q}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int dx \cdot e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \cdot \delta(x) =$$

$$= \frac{-q}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\right)\Big|_{x=0} = \frac{-q}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad V(p-p') = \frac{-q}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-q}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right) \cdot \frac{\psi(p)\cdot dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} = E\cdot\psi(p)$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + \left(\frac{-q}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p)\cdot dp}_{=C} = E\cdot\psi(p)$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) - \frac{q}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\cdot C = E\psi(p), \quad E = -|E|$$

$$\psi(p)\cdot\left(\frac{p^2}{2m} + |E|\right) = C\cdot\frac{q}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2} = \frac{Cq}{2\pi\hbar}$$

$$\psi(p) = \frac{2mq}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\cdot\frac{C}{p^2+2m|E|} = \frac{2mq}{2\pi\hbar}\cdot\frac{C}{p^2+2m|E|} = \frac{mq}{\pi\hbar}\cdot\frac{C}{p^2+2m|E|}$$

$$\int \psi(p)\cdot dp = C \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2mq}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\cdot\frac{1}{p^2+2m|E|}\cdot dp = 1$$

$$\frac{2mq}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2m|E|} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a} = \frac{\sqrt{a}}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{2mq}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m|E|}}\cdot\frac{\pi\cdot 2}{2} = 1$$

$$\frac{\sqrt{m}\cdot q}{\sqrt{2|E|}\cdot\hbar} = 1 \quad \Rightarrow |E| = \frac{mq^2}{2\hbar^2}$$

$$\boxed{E = -|E| = -\frac{mq^2}{2\hbar^2}}$$

$$\psi(p) = \frac{mq}{\pi\hbar}\cdot\frac{C}{p^2+2m|E|}, \quad \int|\psi(p)|^2\cdot dp = 1 \Rightarrow C^2 = \frac{1}{\int \frac{m^2q^2}{\pi^2\hbar^2}\left(\frac{1}{\dots}\right)^2 dp}$$

$$C^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{m^2q^2}\cdot\frac{2}{\pi\left(\frac{\hbar}{mq}\right)} \Rightarrow C^2 = \frac{2mq\pi}{\hbar} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2m\pi q}{\hbar}}$$

в) $U(x) = F\cdot x$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + \int dp'\cdot V(p-p')\cdot\psi(p') = E\cdot\psi(p),$$

где $V(p'-p) = \int dx\cdot\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}}{2\pi\hbar}\cdot V(x)$

E
} δC

$$V(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\cdot\int V(x)\cdot e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\cdot dx = \frac{1}{2\pi\hbar}\int F\cdot x\cdot e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx =$$

$$= \frac{F}{2\pi\hbar}\frac{d}{dp}\left(\int \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{2\pi\hbar}\cdot dx\right)\cdot 2\pi\hbar\cdot\left(\frac{\hbar}{-ip}\right) =$$

$$= i\hbar\cdot F\cdot\frac{d}{dp}\psi(p) \quad , \quad V(p'-p) = -i\hbar\cdot F\cdot\frac{d\psi(p)}{dp}$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) - i\hbar F\cdot\frac{d\psi(p)}{dp} = E\psi(p)$$

$$\left(\frac{p^2}{2m}-E\right)\psi(p) = i\hbar F\cdot\frac{d\psi(p)}{dp}$$

$$\left(\frac{p^2}{2m}-E\right)\cdot dp = i\hbar F\cdot\frac{d\psi(p)}{\psi(p)}$$

$$\frac{-i}{\hbar F}\left(\frac{p^3}{6m}-Ep\right) = \ln\psi + \ln C$$

$$\psi = C\cdot e^{\frac{-i}{\hbar F}\left(\frac{p^3}{6m}-E\cdot p\right)}$$

Нормируем $\psi(p)$ на $\delta(E-E')$:

$$\int\psi_E^*(p)\cdot\psi_{E'}(p)\,dp = \delta(E-E')$$

$$CC^*\cdot\int e^{\frac{-ip}{\hbar F}\overbrace{(E-E')}^{x}}\cdot dp = CC^*$$

$$\cdot\delta(E-E') \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC^*\cdot 2\pi\hbar\cdot F = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}$$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar F}\left(\frac{p^3}{6m}-Ep\right)}}$$

(№2) $\psi(p)$

$$\int dp\cdot\psi_{E'}^*(p)\cdot\psi_E(p) = \delta(E-E') = \frac{\delta(p-p')}{\left|\frac{p}{m}\right|} =$$

$$= \frac{\delta(p-p')\cdot m}{|p|} \quad , \quad \left[\frac{\delta(p-p')\cdot m}{|p|}\right] = \left[\frac{m}{p^2}\right] = \left[\frac{1}{E}\right]$$

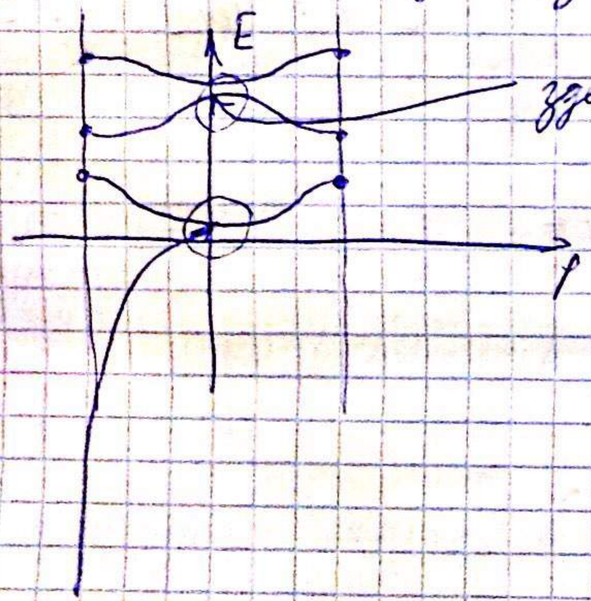
$$[\psi_E(p)] = \frac{1}{\sqrt{pE}}$$

(№1) Есть блоховская волна $u(x)$ с p.
(с энергией E.

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \langle u | \frac{\hat{p}}{m} | u \rangle$$

Брать импульсное представление.
Продифф. ур-е Ш. в импульсном представлении.

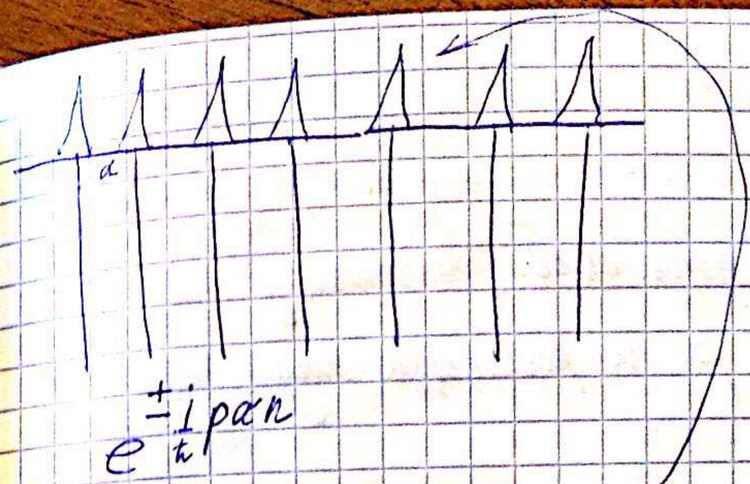
*(№2) Есть блоховская волна. Энергия зависит от квазиимпульса.



здесь эффективная масса $\tilde{m} < 0$

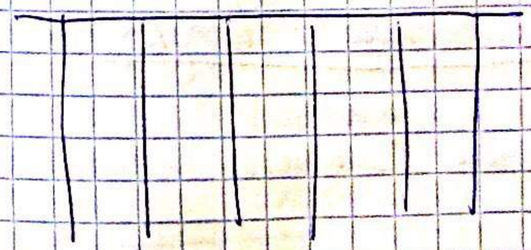
$E = E_0 + \frac{p^2}{2\tilde{m}}$ - энергия блоховской волны

$\tilde{m}$ - эффективная масса



Если не интересуемся деталями, то в этом приближении это свободное движение. Отсюда: эта квантовомех. сист. $\Leftrightarrow$ свободному движению, прибор будет срабатывать аналогично в этих случаях.

Накладываем внешний потенциал
$W(x+a) \cong W(x)$



$\psi(x, t=0) = u(x)$ с квазиимпульсом p
$\uparrow$ одна из блоховских волн

Гамильтониан пост. внешней силой;

$H_{част} = -F \cdot \hat{x}$

$\psi(x,t) = ?$

Подсказка: взять своб. частицу с импульсом p и решить эту задачу

* (N3) тот же самый гладкий потенциал

$W(x+a) \equiv W(x)$

Доказать, что решение можно строить в виде: $\psi(x) = \int d\varphi \; U_\varphi(x) \cdot F(\varphi)$

эта ВФ - решение УШ в имп. представл. с $W(x+a) \equiv W(x)$

Квазиклассич. приближение WKB

Решая СУШ, решение можно искать в виде:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \cdot e^{i\int k(x)\,dx} + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \cdot e^{-i\int k(x)\,dx}$$

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))} \qquad E > V(x)$$

Условие применимости:

$$(k'(x) \ll k^2(x))$$

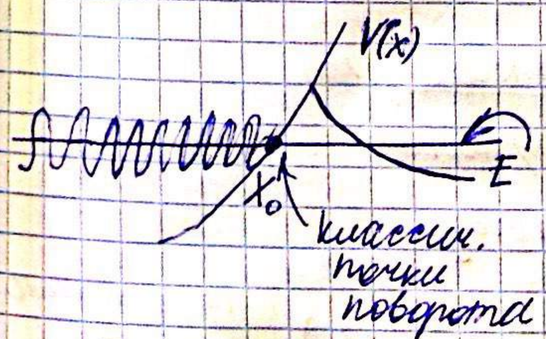
$$\frac{dk(x)}{dx} \ll k^2(x)$$

Если $p \in Im$:

$$\varkappa(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)}$$

$$\frac{d}{dx}\varkappa(x) \ll \varkappa^2(x)$$

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{\varkappa(x)}} \cdot e^{\int \varkappa(x)\,dx} + \frac{B}{\sqrt{\varkappa(x)}} \cdot e^{-\int \varkappa(x)\,dx}$$



ВКБ годится везде, кроме точек поворота

Способы: 1) прямой см. Лоскутов, Соколов
2) Смокс (см. лекции ГВ)
~~3)~~ 11

Условия сшивания:

$$\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\cdot\sin\left(\int_{x}^{x_0}k(x)\,dx+\frac{\pi}{4}\right)\longleftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\varkappa(x)}}\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}\varkappa(x)\,dx}$$

x_0 — классич. точка поворота

$$\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\cdot\cos\left(\int_{x}^{x_0}k(x)\,dx+\frac{\pi}{4}\right)\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\varkappa(x)}}\cdot e^{+\int_{x_0}^{x}\varkappa(x)\,dx}$$

Задачи:

1) туннелирование
2) квантование Бора-Зоммерфельда

Если потенциал гладкий, то можно применять правило квантования Бора – Зоммерфельда

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\cdot(E_n-V(x))}\,dx=\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

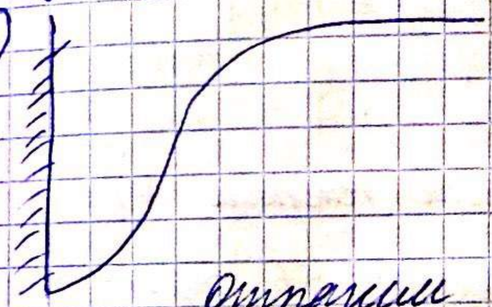
применим, тогда и только тогда, когда

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_n-V(x))}\,dx\gg 1\quad\Rightarrow\quad n\gg 1$$

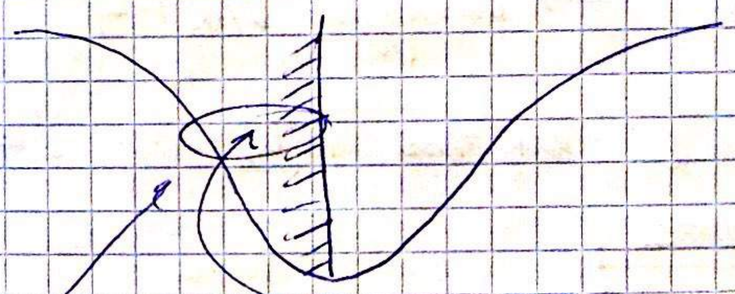
Применимо для только волноподобных уровней энергии! Для Г.О. все точно решает (только для Г.О.)

задача

(v4)



отражим $V(x)$

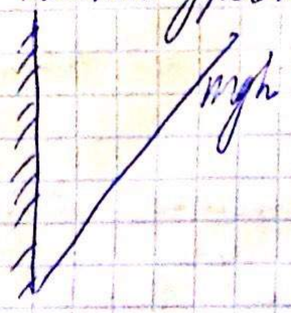


учесть то, что $\int$-а в исходной области.

Применять сюда правила кв-я Бора-Зоммерфельда, оставлять только нечетное уровни.

Зам. Не перепутайтесь с двойками

№5 Найти уровни энергии



№6 Для потенциала $V(x) = C \cdot |x|^{\alpha}$

Дано: $E_n = D \cdot n^{\nu}$

В WKB приближении найти $\nu(\alpha)$ - ?

* подставить всё данное в Бора-Зоммерфельда → оттуда $\nu(\alpha)$ - ?

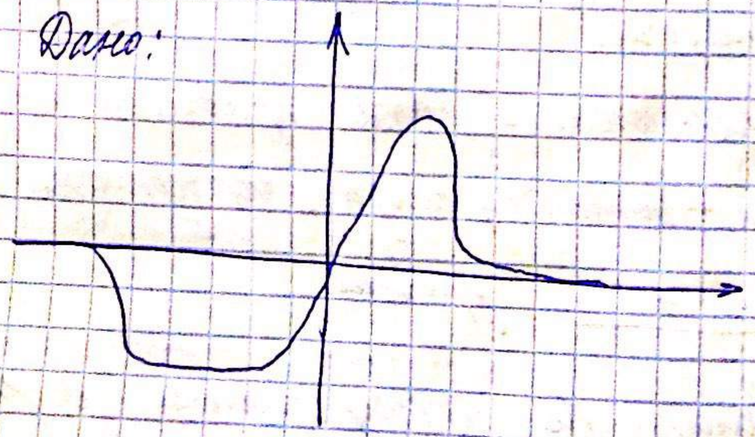
Способ про

Если $\alpha = 2$, то это Г.О. $\Rightarrow \nu = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\nu(2) = 1}$

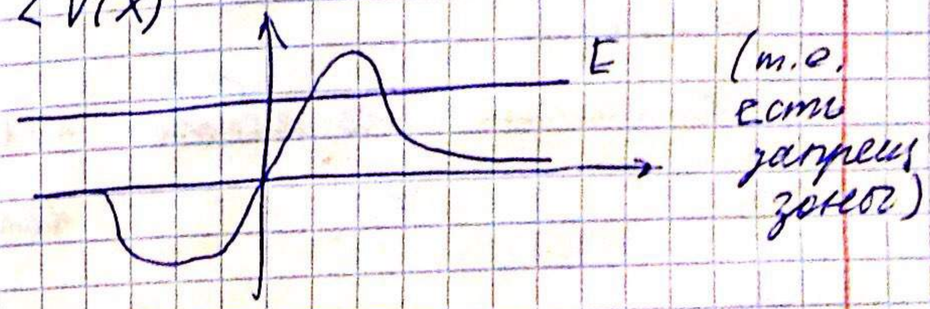
проверить!

№7 Дано:



Случаи: 1) $E > V(x) \quad \forall x$

2) $E < V(x)$



(т.е. есть запрещ. зоны)

в WKB приближении

№8 $V(x) = U_0 \cdot \dfrac{a^4}{(x^2+a^2)^2}$, $U_0 < 0$

Пользуясь правилами кв-я Бора-Зоммерфельда: Задача: при каких U_0 и a появляются новые уровни. ?

Условие появления нового уровня - ?

(задача решается в элементарных функциях)

№9 пусть есть ВФ соотв. WKB-шная

слева: $\dfrac{1}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_x^{x_0} k(x)\,dx + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\Big|_{x_0}^{x}$ точка поворота

$\dfrac{1}{2\sqrt{\varkappa(x)}} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \varkappa(x)\,dx}$

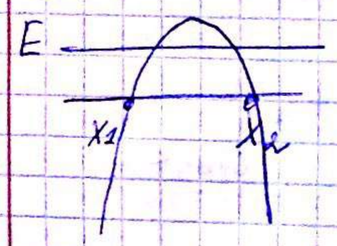
Найти V(x): просто из ур-я Шредингера

Убедиться, что в т. x_0 "творится безобразие"

Замечание: не забыть $k(x_0)=0$

$x(x_0)=0$

(N10)



$$T = e^{-2\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}\cdot dx}$$

↑ безразмерный

т.к. запрещ. область $V > E$

Условие применимости:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\cdot(V(x)-E)}\cdot dx \gg 1$$

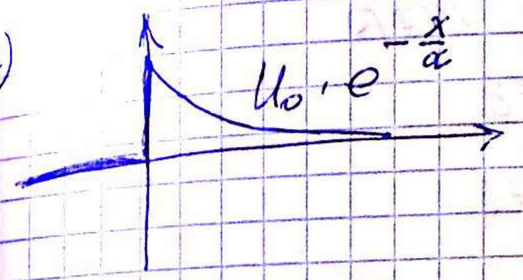
(N11) Барьеры:

а) $V(x) = U_0 \cdot \frac{x^2}{x^2+a^2}$ Найти коэфф. прохожд. сквозь барьер $T-?$

б) $V(x) = U_0 \cdot \frac{1}{ch^2\left(\frac{x}{a}\right)}$

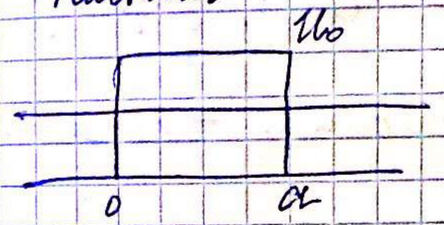
в) $V(x) = -\frac{kx^2}{2}$

г)



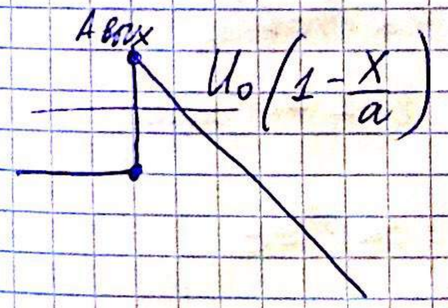
(N12)

Найти T и сравнить с точным ответом. и понять при каких U_0 и a WKB можно применять, при каких нельзя



(N13). 1

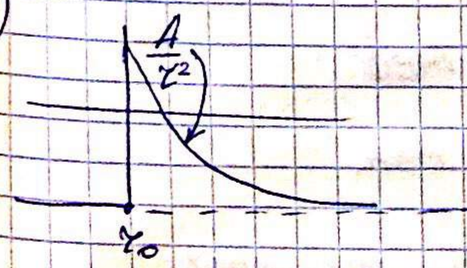
1)



$T-?$ (на самом деле:)



2)



$T-?$

↑ α распад

$A = (z-2)\cdot z\cdot e^2$

$U(r) = \frac{(z-2)\cdot z\cdot e^2}{r^2}$

(№13.2) ^{232}Th : $E_\alpha = 4{,}01$ МэВ

^{226}Ra : 4,78

^{212}Po : 8,78

$r_0 = 1{,}25 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см (радиус ядра)

Известно, что $T = 1602$ г. $= \pi \cdot 10^9$ секунд

$T_{Th} = ?$

P_o

(№14) ^{238}U $E = 4{,}2$ MeV

$T = 4{,}51 \cdot 10^9$ лет

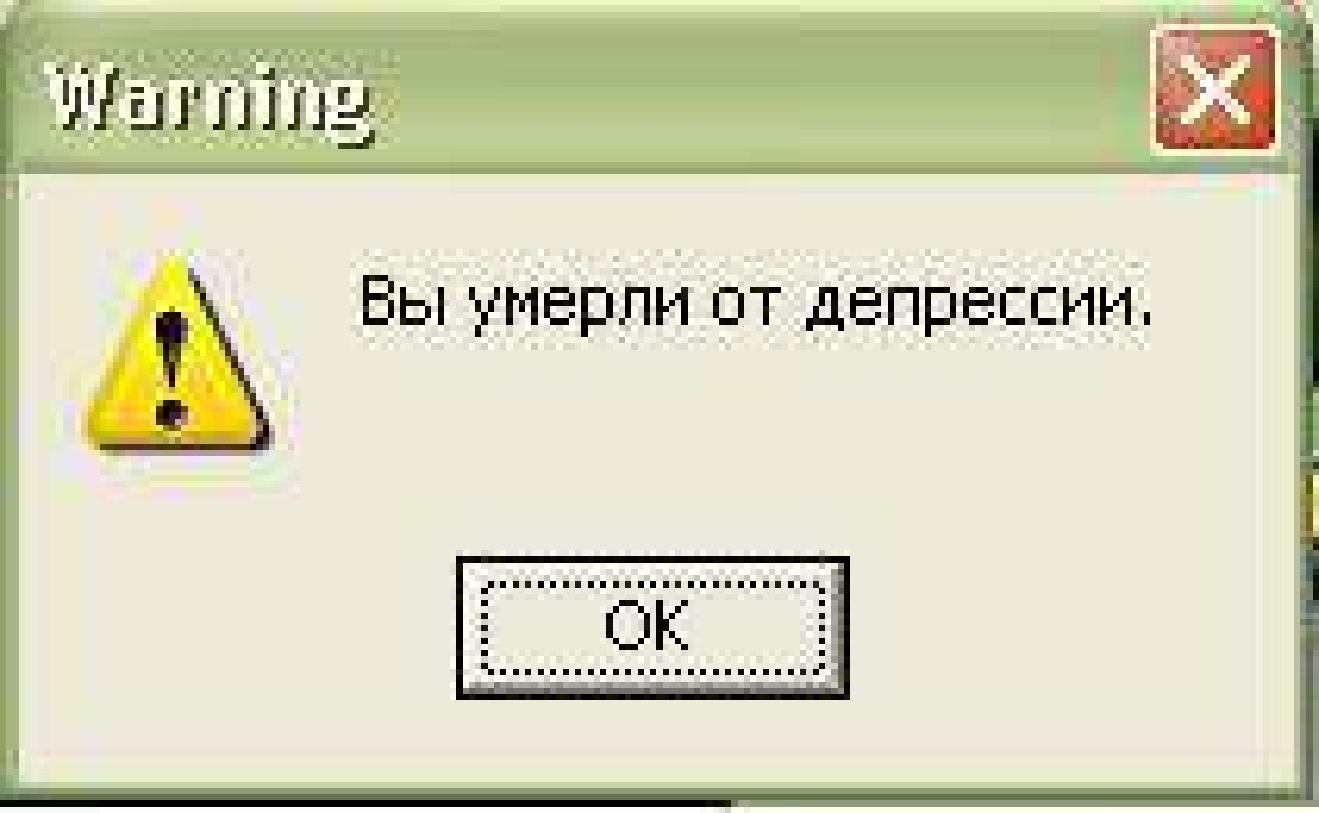
^{232} 5,32 МэВ

τ 2 года

^{227} 6,8 MeV

1,3 мин.

Найти $r_0 = ?$ (предполагая $r_0/_{238} = r_0/_{232} = r_0/_{227}$)


Warning
Вы умерли от депрессии.
OK