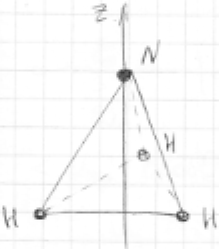
Задачи.

$\boxed{№1}$ Найти зависимость разности энергий основного и первого возбуждённого уровней молекулы NH_3 от внешнего эл. поля.



$\uparrow \vec{\xi} = \{0, 0, \xi\}$

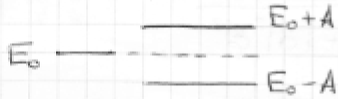
$$\hat{V} = -\vec{d}\vec{\xi}$$

$$[\hat{H}_0, \hat{P}_{xy}] = 0$$

$$\hat{P}_{xy}|\psi> = \lambda|\psi>, \quad \lambda^2 = 1$$

$$\hat{P}_{xy}|\psi\pm> = \pm|\psi\pm>$$

$$\hat{H}_0|\psi\pm> = E_\pm|\psi\pm>$$



$$\hat{H}_0|\psi+> = E_+|\psi+> = (E_0 - A)|\psi+>$$

$$\hat{H}_0|\psi-> = E_-|\psi-> = (E_0 + A)|\psi->$$

$$\hat{H}|\psi> = E|\psi>$$

пусть $|\psi> = |\psi^{(0)}> + |\psi^{(1)}> + \ldots$

$$|\psi^{(0)}> = a_1|\psi-> + a_2|\psi+>$$

$$<\psi-|\psi-> = <\psi+|\psi+> = 1 \ ; \ <\psi+|\psi-> = 0$$

$$<\psi^{(0)}|\psi^{(1)}> = 0 \Rightarrow <\psi\pm|\psi^{(1)}> = 0$$

$$\hat{H}_0(|\psi^{(0)}> + |\psi^{(1)}>) + \hat{V}|\psi^{(0)}> = E(|\psi^{(0)}> + |\psi^{(1)}>)$$

домножим ур-ние на $<\psi-|$ $(<\psi\mp|\hat{H}_0 = E_\mp<\psi\mp|)$:

$$\hat{H}_0(a_1|\psi_-> + a_2|\psi_+>) + \hat{V}(a_1|\psi_-> + a_2|\psi_+>) = E(a_1|\psi_-> + a_2|\psi_+>)$$

$$a_1<\psi_-|\hat{H}_0|\psi_-> + \cancel{a_2<\psi_-|\hat{H}_0|\psi_+>}^{0} + \cancel{a_1<\psi_-|\hat{V}|\psi_->}^{0} + a_2\underbrace{<\psi_-|\hat{V}|\psi_+>}_{\sim(-d\xi)} =$$

$$= E(a_1<\psi_-|\psi_-> + \cancel{a_2<\psi_-|\psi_+>}^{0})$$

$$I = <\psi_-|\hat{V}|\psi_-> = \int\psi_-(x_1,\ldots)\hat{V}\psi_-(x_1,\ldots)dx_1\ldots$$

если сделать отражение, то $I = -I \Rightarrow I = 0$.

$$a_1(E_0 + A) + a_2(-d\xi) = Ea_1$$

Аналогично, если домножить ур-ние на $\langle\psi^+|$, можно получить:

$$a_2(E_0 - A) + a_1(-d^*\xi) = Ea_2$$

$$\begin{cases} a_1(E_0 + A - E) + a_2(-d\xi) = 0, \\ a_2(E_0 - A - E) + a_1(-d^*\xi) = 0; \end{cases} \qquad |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

$$\begin{vmatrix} E_0 + A - E & -d\xi \\ -d^*\xi & E_0 - A - E \end{vmatrix} = 0$$

$$(E_0 + A - E)(E_0 - A - E) - dd^*\xi^2 = 0$$

$$\underbrace{(E_0 - E)}_{\Delta E}{}^2 - A^2 - |d|^2\xi^2 = 0$$

$$\Delta E = \sqrt{A^2 + |d|^2\xi^2}.$$

$\boxed{№2}$. В первом неисчезающем приближении найти коэффициент эл. поляризуемости атома водорода в осн. состоян

$$\hat{H}_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right); \quad \vec{\xi} = \{0, 0, \xi\}$$

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_B n^2}, \text{ где } a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_I &= -(\hat{\vec{d}}\hat{\vec{\xi}}) \\ \hat{\vec{d}} &= -e\hat{\vec{r}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\hat{H}_I = e\hat{z}\xi \\ &\vec{d} = \langle\psi|\hat{\vec{d}}|\psi\rangle = \alpha\vec{\xi} \end{aligned}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$$

$$E^{(1)} = \langle\psi_{1s}|ez\xi|\psi_{1s}\rangle$$

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = \{n=1, l=0, m=0\} = R_{1s}(r)Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$E^{(1)} = \frac{1\cdot 4}{4\pi a_B^3}e\xi\cdot\int e^{-2r/a_0}\cdot r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = 0$$

$$E^{(2)} = -\frac{\alpha\xi^2}{2}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|<\psi_m|\hat{V}|\psi_n>|^2}{E_n - E_m}$$

$$E_{1s}^{(2)} = \frac{|<\psi_{2p}|e r\cos\theta\,\xi|\psi_{1s}>|^2}{E_{1s} - E_{2p}} = \frac{e^2\xi^2}{-\frac{e^2}{2a_B} + \frac{e^2}{8a_B}} |<\psi_{2p}|r\cos\theta|\psi_{1s}>|^2 =$$

$$= \frac{-\xi^2}{\frac{3}{8a_B}} |<\psi_{2p}|r\cos\theta|\psi_{1s}>|^2$$

$$<\psi_{2p}|r\cos\theta|\psi_{1s}> = \int \frac{2}{a_B^{3/2}} e^{-r/a_B} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot r\cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{6}\,a_B^{3/2}} \frac{r}{a_B} e^{-r/2a_B} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \cdot$$

$$\cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{1}{a_B^4\, 4\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4 e^{-\frac{3r}{2a_B}} \cos^2\theta \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr =$$

$$= \frac{2\pi \cdot \frac{2}{3}}{a_B^4 \cdot 4\pi\sqrt{2}} \cdot \int_0^{+\infty} r^4 e^{-\frac{3}{2a_B}r} dr = \frac{1}{3\sqrt{2}\,a_B^4} \cdot 4!\left(\frac{2a_B}{3}\right)^5 =$$

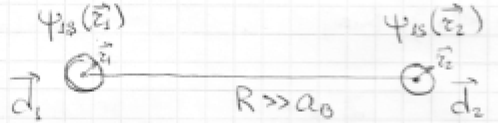
$$= \frac{24 \cdot 32 a_B^5}{3^6 \sqrt{2}\, a_B^4} = \frac{2^8}{3^5\sqrt{2}} a_B$$

$$|<\psi_{2p}|r\cos\theta|\psi_{1s}>|^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}\cdot 2} a_B^2 \Rightarrow E_{1s}^{(2)} = -\frac{8\xi^2 a_B}{3} \cdot \frac{2^{15}}{3^{10}} a_B^2 = -\frac{2^{18}}{3^{11}} \xi^2 a_B^3$$

$$-\frac{\alpha \cancel{\xi^2}}{2} = -\frac{2^{18}}{3^{11}} \cancel{\xi^2} a_B^3 \Rightarrow \alpha = \frac{2^{19}}{3^{11}} a_B^3 \approx 2{,}96 a_B^3 .$$

должен быть ответ: $\alpha = \frac{9}{2} a_B^3$
(если ∞-но суммировать по всем состояниям)

$\boxed{№3}$. В первом неисчезающем порядке теории возмущений найти энергию взаимодействия $2^х$ атомов водорода на больших расстояниях и её зависимость от обменных эффектов.



$$\hat{H}_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_1^2 - \frac{e^2}{r_1}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_2^2 - \frac{e^2}{r_2}\right)$$

$$E_0 = \varepsilon_{1s} + \varepsilon_{1s} = -2\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{e^2}{a_0}$$

$$|\psi_0\rangle = \psi_{1s}(r_1)\psi_{1s}(r_2)$$

$$\hat{V} = \frac{(\hat{\vec{d}}_1 \hat{\vec{d}}_2)}{R^3} - \frac{3(\hat{\vec{d}}_1\vec{R})(\hat{\vec{d}}_2\vec{R})}{R^5}, \text{ где } \vec{R} = \{0, 0, R\}$$

$$\vec{d}_1 = -e\vec{r}_1 \,;\; \vec{d}_2 = -e\vec{r}_2$$

$$\hat{V} = \frac{e^2}{R^3}\left((\vec{r}_1\vec{r}_2) - \frac{3}{R^2}R^2(z_1 z_2)\right) = \frac{e^2}{R^3}(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)$$

$$E^{(1)} = \langle\psi_{1s}|\hat{V}|\psi_{1s}\rangle = 0$$

$$E^{(2)} = \sum_{n_1 n_2 \neq 0} \frac{\left|\langle\psi_{n_1n_2}|\frac{e^2}{R^3}(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)|\psi_{1s1s}\rangle\right|^2}{E_0 - E_{n_1n_2}} = \ldots$$

$$E_0 = -e^2/a_B \,;\; E_{n_1n_2} = -\frac{e^2}{2n_1^2 a_B} - \frac{e^2}{2n_2^2 a_B}$$

$$\ldots = -\frac{e^2 a_B}{R^6}\sum_{n_1n_2\neq 0}\frac{|\langle\psi_{n_1n_2}|(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)|\psi_{1s1s}\rangle|^2}{\underbrace{1 - \left(\frac{1}{2n_1^2} + \frac{1}{2n_2^2}\right)}_{\text{меняется от } 1 \text{ до } 3/4}} =$$

$$= -\frac{e^2\eta a_B}{R^6}\sum_{n_1n_2\neq 0}|\langle\psi_{n_1n_2}|x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2|\psi_{1s1s}\rangle|^2, \text{ где } 1 \leq \eta \leq \frac{4}{3}.$$

$$E^{(2)} = -\frac{e^2 a_B}{R^6}\eta \cdot 6\,|\langle \psi_{1s}|z^2|\psi_{1s}\rangle|^2$$

$$\langle \psi_{1s}|z^2|\psi_{1s}\rangle = \int \frac{4}{a_B^3} e^{-2r/a_B}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi a_B^3}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{+\infty} r^4 e^{-2r/a_B}\, dr = \frac{2^2\cdot 3\cdot 2^3}{3 a_B^3}\left(\frac{a_B}{2}\right)^5 = a_B^2$$

$$E^{(2)} = -\frac{6e^2}{R^6}\eta a_B^5.$$

$\boxed{N4}$. Найти расщепление уровней энергии атома водорода в слабом по величине напряжённости однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$, когда $\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \ll |\Delta E_{jj'}|$ (нормальный эфф. Зеемана).

„Хорошие" квантовые числа: s, l, j, m_j, n.

$\hat{V}_z = \mu_B\mathcal{H}(\hat{l}_z + 2\hat{s}_z)$ — малое возмущение.

$E_z = \langle j, m_j, n|\mu_B\mathcal{H}(m_j + s_z)|j, m_j, n\rangle = \mu_B\mathcal{H}(m_j + \langle s\rangle)$

Вычислим $\langle s\rangle$.

а) $[\hat{j}^2, \hat{s}_\alpha] = j_l[j_l, s_\alpha] + [j_l, s_\alpha]j_l = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\hat{j}_\beta\hat{s}_\gamma + \hat{s}_\gamma\hat{j}_\beta)$

б) $[\hat{j}^2, [\hat{j}^2, \hat{s}_\alpha]] = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\{\hat{j}^2\hat{j}_\beta\hat{s}_\gamma + \hat{j}^2\hat{s}_\gamma\hat{j}_\beta - \hat{j}_\beta\hat{s}_\gamma\hat{j}^2 - \hat{s}_\gamma\hat{j}_\beta\hat{j}^2\} =$

$= -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\{\hat{j}_\beta[\hat{j}^2, \hat{s}_\gamma] + [\hat{j}^2, \hat{s}_\gamma]\hat{j}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\delta f\gamma}\{\hat{j}_\beta\hat{j}_\delta\hat{s}_f + \hat{j}_\beta\hat{s}_f\hat{j}_\delta +$

$+ \hat{j}_\delta\hat{s}_f\hat{j}_\beta + \hat{s}_f\hat{j}_\delta\hat{j}_\beta\} = (\delta_{\alpha f}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta f})\{2\hat{j}_\beta\hat{j}_\delta\hat{s}_f + i\varepsilon_{f\delta t}\hat{j}_\beta\hat{s}_t +$

$+ 2\hat{s}_f\hat{j}_\delta\hat{j}_\beta + i\varepsilon_{\delta f t}\hat{s}_t\hat{j}_\beta\} = 2\hat{j}^2\hat{s}_\alpha + 2\hat{s}_\alpha\hat{j}^2 - 2\hat{j}_\beta\hat{j}_\alpha\hat{s}_\beta - 2\hat{s}_\beta\hat{j}_\alpha\hat{j}_\beta +$

$+ 2i\varepsilon_{\alpha\beta t}\hat{j}_\beta\hat{s}_t + 2i\varepsilon_{\beta\alpha t}\hat{s}_t\hat{j}_\beta = 2\hat{j}^2\hat{s}_\alpha + 2\hat{s}_\alpha\hat{j}^2 - 2\hat{j}_\alpha(\hat{j}, \hat{s}) -$

$- \cancel{2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\hat{s}_\gamma\hat{j}_\beta} + \cancel{2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\hat{s}_\gamma\hat{j}_\beta} + 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{j}_\beta\hat{s}_\gamma - 2\hat{j}_\alpha\hat{s}_\beta\hat{j}_\beta =$

$= 2\hat{j}^2\hat{s}_\alpha + 2\hat{s}_\alpha\hat{j}^2 - 4\hat{j}_\alpha(\hat{\vec{j}}, \hat{\vec{s}})$

Имеем:

$$\langle n, j, m_j | [\hat{j}^2, [\hat{j}^2, \hat{s}_\alpha]] | n, j, m_j \rangle = 0$$

$$\langle | 2\hat{j}^2 \hat{s}_\alpha + 2\hat{s}_\alpha \hat{j}^2 - 4\hat{j}_\alpha (\hat{\vec{j}}, \hat{\vec{s}}) | \rangle = 0$$

$$4j(j+1)\, s_z = 4m_j \langle (\hat{\vec{j}}, \hat{\vec{s}}) \rangle = 4m_j \left\{ \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} + \right.$$

$$\left. + s(s+1) \right\}$$

$$\langle s_z \rangle = m_j \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

Тогда: $E_z = \mu_B \mathcal{H} m_j g_L$, где $g_L = 1 + \dfrac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$.

$\boxed{N5}$. Рассчитать расщепление ур-ней атома водорода в среднем по величине напряжённости однородном магн. поле $\vec{\mathcal{H}}$, когда $\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \simeq |\Delta E_{jj'}|$ (эфф. Пашена-Бака).

„Хорошие" квантовые числа: l, m_l, s, m_s, n.
В таком базисе поправка на взаимодействие с магн. полем вычисляется элементарно, релятивистская поправка остаётся той же, что и в базисе $|j, m_j, n\rangle$, а поправку на спин-орбитальное взаимодействие вычислим отдельно:

$$\Delta E = \Delta E_z + \Delta E_{rel} + \Delta E_{ls}$$

$$\Delta E_{rel} = -\frac{E_n^2}{2mc^2}\left[\frac{4n}{l + 1/2} - 3\right]$$

$$\hat{V}_{ls} = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{m^2 c^2 r^3} (\vec{s}, \vec{L})$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1) n^3 a_B^3}$$

$$\langle (\vec{s}, \vec{L}) \rangle = \underbrace{\langle s_x \rangle \langle l_x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle s_y \rangle \langle l_y \rangle}_{=0} + \langle s_z \rangle \langle l_z \rangle = m_l m_s \hbar^2$$

$$\Delta E_{rel} + \Delta E_{ls} = \frac{2n E_n^2}{mc^2}\left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l+1/2}\right) + \frac{2n E_n^2}{mc^2}\cdot\frac{m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} =$$

$$= \frac{Ry\,\alpha^2}{n^3}\left[\frac{3}{4n} - \frac{l(l+1) - l_z s_z}{l(l+1/2)(l+1)}\right]$$

$$\Delta E_z = \mu_B \mathcal{H}(l_z + 2s_z)$$

$$\Delta E = \Delta E_z + \Delta E_{rel} + \Delta E_{ls}\,.$$

Если же воспользоваться базисом $|n, j, m_j\rangle$, то получили бы:

$$\Delta E = \mu_B \mathcal{H} m_j g_L + \frac{Ry\,\alpha^2}{n^3}\left[\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2}\right]$$

$\boxed{N6}$ Рассчитать расщепление ур-ней атома водорода в сильном по величине напряжённости однородном магн. поле $\vec{\mathcal{H}}$, когда $\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \gg |\Delta E_{jj'}|$ (аномальный эфф. Зеемана).

$\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \gg |\Delta E_{jj'}| \Rightarrow$ пренебрежём ls-взаимодействием. (в 1м приближении).

в этом случае $\hat{l}_z$ и $\hat{s}_z$ – сохраняющиеся величины, и энергия расщепления определяется ф-лой:

$$E^{(1)} = \frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H}(m_l + 2m_s) \longrightarrow$$ этого нб достаточно.

Во 2м приближении можно учесть ls-взаимодействие.

$$\longrightarrow E^{(2)} = \frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H}(m_l + 2m_s) + \frac{e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle m_l m_s\,.$$

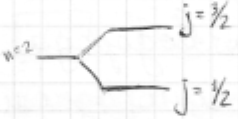
№7. Рассчитать расщепление ур-ня атома водорода с $n=2$ в слабом по величине напряжённости однородном эл. поле (эфф. Штарка мал по сравнению с $|\Delta E_{jj'}|$).

$n=2 \longrightarrow j = 1/2\,;\ 3/2$

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}$ $\qquad E_n = -\frac{e^2}{2a_B n^2}$

$\vec{\xi} = \{0, 0, \xi\}$

$\hat{V} = -(\vec{d}\,\vec{\xi}) = -(-e\vec{r}\,\vec{\xi}) = e\xi\hat{z}$



$\Big\}\ \Delta\mathcal{E}_{nj} \sim \alpha^2 \mathcal{E}_a$, где $\mathcal{E}_a = \frac{e^2}{a_B}$ $\qquad \Rightarrow \Delta \sim e\xi a_B$

$\alpha^2 \mathcal{E}_a \gg e\xi a_B$ — по условию.

Имеем следующие наборы квантовых чисел:

$|n=2,\ j=3/2,\ l=1,\ s=1/2,\ m_j = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2\rangle$

$|n=2,\ j=1/2,\ l=0,\ s=1/2,\ m_j = \pm 1/2\rangle$

$|n=2,\ j=1/2,\ l=1,\ s=1/2,\ m_j = \pm 1/2\rangle$

$V_{ij} = \langle \psi_i | \hat{V} | \psi_j \rangle$

$\det(V_{ij} - \delta_{ij} E^{(1)}) = 0$

1) $j = 3/2$:

$\langle n=2, j=3/2, l=1, m_j | e\xi\hat{z} | n=2, j=3/2, l=1, m_j \rangle$

$\int \psi^*_{l=1} \psi_{l=1} \hat{z}\, dV = 0$

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & & & \\ & -E^{(1)} & & \\ & & -E^{(1)} & \\ & & & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E^{(1)} = 0 \rightarrow \text{ур-нь не расщепляется.}$$

2) $j = 1/2$:

		$m_j = 1/2$: $\lvert l=0\rangle$	$m_j = 1/2$: $\lvert l=1\rangle$	$m_j = -1/2$: $\lvert l=0\rangle$	$m_j = -1/2$: $\lvert l=1\rangle$
$m_j = 1/2$	$\langle l=0\rvert$	$0 - E^{(1)}$	v'	0	0
$m_j = 1/2$	$\langle l=1\rvert$	v'^*	$0 - E^{(1)}$	0	0
$m_j = -1/2$	$\langle l=0\rvert$	0	0	$0 - E^{(1)}$	v''
$m_j = -1/2$	$\langle l=1\rvert$	0	0	v''^*	$0 - E^{(1)}$

$\circ \det = 0$

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & v' \\ v'^* & -E^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -E^{(1)} & v'' \\ v''^* & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

$$(E^{(1)2} - |v'|^2)(E^{(1)2} - |v''|^2) = 0$$

$$E^{(1)} = \pm|v'| \; ; \; \pm|v''|$$

$$v' \, (v'') = \langle n=2, j=1/2, l=0, m_j = 1/2 \; (m_j = -1/2) | e\xi\hat{z} | n=2, j=1/2, l=1, m_j = 1/2 \; (m_j = -1/2) \rangle$$

$$|j, l, s, m_j\rangle = \sum_{m+m_s = m_j} \langle l m s m_s | j m_j \rangle |l m\rangle |s = 1/2, m_s\rangle$$

$$|n=2, j=1/2, l=0, m_j = 1/2\rangle = |l=0, m=0\rangle |s=1/2, m_s = 1/2\rangle$$

$$|n=2, j=1/2, l=1, s=1/2, m_j = 1/2\rangle = \beta_1 |l=1, m=1\rangle |s=1/2, m_s = -1/2\rangle +$$

$$+ \beta_2 |l=1, m=0\rangle |s=1/2, m_s = 1/2\rangle \text{. Тогда:}$$

$$v' = \langle s=1/2, m_s = 1/2 | \langle n=2, l=0, m=0 | e\xi z | \Big(\cancelto{0}{\beta_1 |l=1, m=1\rangle |s=1/2, m_s = -1/2\rangle} +$$

$$+ \beta_2 |l=1, m=0\rangle |s=1/2, m_s = 1/2\rangle \Big) =$$

$= \langle n=2, l=0, m=0 | e\xi z | n=2, l=1, m=0 \rangle \cdot \beta_2$

$\beta_2 = \langle l=1, m=0, s=1/2, m_s = 1/2 | j=1/2, m_j = 1/2 \rangle = -1/\sqrt{3}$

$$\beta_2 \langle 200 | e\xi z | 210 \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 dr\, R_{2s}^* Y_{00}^* e\xi r\cos\theta\, R_{2p} Y_{10} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a_B^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right) e^{-r/2a_B} e\xi r\cos\theta \frac{1}{\sqrt{6a_B^3}} \frac{r}{a_B} e^{-r/2a_B} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \cdot$$

$$\cdot \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1 \cdot e\xi}{4\pi \cdot 2a_B^4 \cdot 2\sqrt{3}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^4 dr \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right) e^{-r/a_B} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{-e\xi \cdot 2\pi}{16\pi \sqrt{3} a_B^4} \cdot \frac{2}{3} \int_0^\infty \left(\frac{r}{a_B}\right)^4 \cdot a_B^4\, d\left(\frac{r}{a_B}\right) \cdot a_B \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right) e^{-r/a_B} =$$

$$= -\frac{e\xi a_B}{12\sqrt{3}} \int_0^\infty x^4 \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-x} dx = -\frac{e\xi a_B}{12\sqrt{3}} \cdot \left[\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty x^5 e^{-x} dx \right] = -\frac{e\xi a_B}{12\sqrt{3}} \left[\underbrace{\Gamma(5) - \frac{\Gamma(6)}{2}}_{=-36} \right] = -\frac{e\xi a_B}{12\sqrt{3}} \cdot (-36) =$$

$= \sqrt{3} e\xi a_B \Rightarrow v' = \sqrt{3} e\xi a_B$

$v'' = -v' \Rightarrow |v'| = |v''| = u = \sqrt{3} e\xi a_B$

$E^{(1)} = \pm u = \pm\sqrt{3} e\xi a_B.$

$\boxed{№9}$. Рассчитать расщепление ур-ня атома водорода с $n=2$ в $\perp$-х однородных эл. и магн. полях с учётом спинового магн. момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.

Нам понадобятся базисные ф-ции $|l, m_l, m_s\rangle$:

$|0,0,\pm 1/2\rangle, |1,0,\pm 1/2\rangle, |1,1,\pm 1/2\rangle, |1,-1,\pm 1/2\rangle$

пусть $\vec{\mathcal{H}} = (0,0,\mathcal{H})$, $\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E},0,0)$. Тогда:

$\Delta E_z = \mu_B \mathcal{H}(m_l + 2m_s) = \{\pm\mu_B\mathcal{H}; \pm 2\mu_B\mathcal{H}\}$

	$\|0,0\rangle$	$\|1,0\rangle$	$\|1,-1\rangle$	$\|1,1\rangle$
$\langle 0,0\|$	$-E^{(1)}$	$V_1=0$	V_2	V_3
$\langle 1,0\|$	$V_1^*=0$	$-E^{(1)}$	0	0
$\langle 1,-1\|$	V_2^*	0	$-E^{(1)}$	$V_4=0$
$\langle 1,1\|$	V_3^*	0	$V_4^*=0$	$-E^{(1)}$

$\circ$ det $=0$

$\Delta E_{sh} = e\mathcal{E}\langle|r\cos\theta\sin\theta|\rangle$

$$(V_1)_{rad} = (V_2)_{rad} = (V_3)_{rad} = \frac{e\mathcal{E}}{4\sqrt{3}a_B^3}\int_0^\infty\left(\frac{r^4}{a_B} - \frac{r^5}{2a_B^2}\right)e^{-r/a_B}dr =$$

$$= \frac{a_B e\mathcal{E}}{4\sqrt{3}}\left(4! - \frac{5!}{2}\right) = -3\sqrt{3}a_B e\mathcal{E}$$

$$V_1 = (V_1)_{rad}\langle 0,0||1,0\rangle = -3\sqrt{3}a_B\cdot\frac{e\mathcal{E}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot 2\pi\cdot\int_0^\pi\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = 0$$

$$V_2 = (V_2)_{rad}\langle 0,0||1,-1\rangle = -3\sqrt{3}a_B\cdot\frac{e\mathcal{E}}{4\pi}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, e^{-i\varphi}d\varphi\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{9a_B e\mathcal{E}}{4\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{3a_B}{\sqrt{2}}e\mathcal{E}$$

$$V_3 = (V_3)_{rad}\langle 0,0||1,1\rangle = -\frac{3a_B}{\sqrt{2}}e\mathcal{E} = -V_2$$

$$V_4 = \langle 1,-1||1,1\rangle = -\frac{3}{8\pi}\cdot\frac{1}{24a_B^3}\int_0^\pi\sin^4\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, e^{2i\varphi}d\varphi\int_0^\infty\frac{r^5}{a_B^2}e^{-r/a_B}dr = 0$$

Раскроем теперь наш определитель:

$$E^{(1)4} - 2E^{(1)2}V_2^2 = 0 \Rightarrow E_{sh}^{(1)} = \pm\sqrt{2}V_2 = \pm 3e\mathcal{E}a_B.$$

№10. Найти расщепление ур-ня атома водорода с $n=2$ в параллельных однородных эл. и магн. полях с учётом спинового магн. момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.

пусть $\vec{\mathcal{H}} = (0,0,\mathcal{H})$, $\vec{\xi} = (0,0,\xi)$. Тогда:

$$\Delta E_Z = \{\pm\mu_B\mathcal{H}, \pm 2\mu_B\mathcal{H}\}$$

$$\Delta E_{sh} = e\xi \langle | r\cos\theta | \rangle$$

		$m_s = 1/2$: $\vert 0,0\rangle$	$\vert 1,0\rangle$	$\vert 1,1\rangle$	$\vert 1,-1\rangle$	$m_s = -1/2$: $\vert 0,0\rangle$	$\vert 1,0\rangle$	$\vert 1,1\rangle$	$\vert 1,-1\rangle$
$m_s = 1/2$	$\langle 0,0\vert$	$-E^{(1)}$	V	0	0	0	0	0	0
	$\langle 1,0\vert$	V^*	$-E^{(1)}$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 1,1\vert$	0	0	$-E^{(1)}$	0	0	0	0	0
	$\langle 1,-1\vert$	0	0	0	$-E^{(1)}$	0	0	0	0
$m_s = -1/2$	$\langle 0,0\vert$	0	0	0	0	$-E^{(1)}$	V	0	0
	$\langle 1,0\vert$	0	0	0	0	V^*	$-E^{(1)}$	0	0
	$\langle 1,1\vert$	0	0	0	0	0	0	$-E^{(1)}$	0
	$\langle 1,-1\vert$	0	0	0	0	0	0	0	$-E^{(1)}$

$$\det(V_{ij} - \delta_{ij}E^{(1)}) = 0$$

$$E^{(1)}_{sh} = \pm|V|$$

$$V = \langle 0,0|\hat{V}|1,0\rangle = \langle 0,0|r\cos\theta|1,0\rangle e\xi = 3e\xi a_B$$

$$E^{(1)}_{sh} = \pm 3e\xi a_B.$$

№11. Найти вариационным методом Ритца энергию связи и волновую ф-цию основного состояния гелиеподобного атома с 2-мя электронами. Пробную ф-цию выбрать в виде произведения 1s-одноэлектронных кулоновских ф-ций с эфф. зарядом $\alpha = Z - \sigma$, играющим роль вариационного параметра.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i}\right) + \frac{e^2}{\underbrace{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}_{:=|\vec{r}_{12}|}} = \{\alpha = Z - \sigma\} =$$

$$= \left(\frac{\hat{p}_1^2}{2m} - \frac{\alpha e^2}{r_1}\right) + \left(\frac{\hat{p}_2^2}{2m} - \frac{\alpha e^2}{r_2}\right) + \frac{(\alpha - Z)e^2}{r_1} + \frac{(\alpha - Z)e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

Пробная ф-ция: $\psi(r_1, r_2) = \frac{\alpha^3}{\pi a_B^3} e^{-\alpha(r_1 + r_2)/a_B}$

Запишем функционал энергии:

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = -\frac{\alpha^2 \mathcal{E}_a}{2} - \frac{\alpha^2 \mathcal{E}_a}{2} + 2e^2(\alpha - Z)\left\langle\frac{1}{r_1}\right\rangle + e^2\left\langle\frac{1}{r_{12}}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{1}{r_1}\right\rangle = \frac{\alpha^3}{\pi a_B^3}\cdot 4\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha r_1/a_B}\cdot r_1 dr_1 = \frac{4\alpha^3}{a_B^3}\left(\frac{a_B}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha}{a_B}$$

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = -\alpha^2\mathcal{E}_a + 2\mathcal{E}_a\alpha^2 - 2Z\alpha\mathcal{E}_a + e^2\left\langle\frac{1}{r_{12}}\right\rangle =$$

$$= \alpha^2\mathcal{E}_a - 2Z\alpha\mathcal{E}_a + e^2\left\langle\frac{1}{r_{12}}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{1}{r_{12}}\right\rangle = 2\int_0^\infty dV_2 |\psi_2|^2 \frac{1}{r_2}\int_0^{r_2}|\psi_1|^2 dV_1 = \frac{\alpha^6}{\pi^2 a^6}\cdot 2\cdot 16\pi^2 \cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty r_2 e^{-2\alpha r_2/a_B} dr_2 \int_0^{r_2} r_1^2 e^{-2\alpha r_1/a_B} dr_1 = \frac{32\alpha^6}{a_B^6}\left(\frac{a_B}{\alpha}\right)^5 \cdot J = \frac{32\alpha}{a_B} J$$

$$J = \int_0^\infty y e^{-2y} \underbrace{\int_0^y x^2 e^{-2x} dx}_{= J_1}$$

$$J_1 = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2}\Big|_0^y + \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^y x e^{-2x} dx = -\frac{y^2 e^{-2y}}{2} - \frac{y e^{-2y}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^y e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\left\{-y^2 e^{-2y} - y e^{-2y} - \frac{1}{2}\left(e^{-2y} - 1\right)\right\}$$

$$J_{11} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty y^3 e^{-4y} dy = -\frac{1}{2}\cdot 3!\cdot 4^{-4} = -\frac{3}{2^8}$$

$$J_{12} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty y^2 e^{-4y} dy = -\frac{1}{2}\cdot 2!\cdot 4^{-3} = -\frac{1}{2^6}$$

$$\mathcal{I}_{13} = -\frac{1}{4}\int_0^\infty y e^{-4y}\,dy = -\frac{1}{4}\cdot 1!\cdot 4^{-2} = -\frac{1}{2^6}$$

$$\mathcal{I}_{14} = \frac{1}{4}\int_0^\infty y e^{-2y}\,dy = \frac{1}{4}\cdot 1!\cdot 2^{-2} = \frac{1}{2^4}$$

$$\mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{12} + \mathcal{I}_{13} + \mathcal{I}_{14} = \frac{5}{256} \Rightarrow \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle = \frac{5}{8}\frac{\alpha}{a_0}$$

Получаем:

$$E[\psi] = \alpha^2 \varepsilon_a - 2Z\alpha\varepsilon_a + \frac{5}{8}\alpha\varepsilon_a$$

усл. экстремума:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha\cancel{\varepsilon_a} - 2Z\cancel{\varepsilon_a} + \frac{5}{8}\cancel{\varepsilon_a} = 0 \Rightarrow \alpha = Z - \frac{5}{16}$$

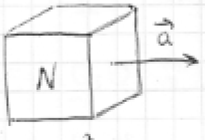
Таким образом, в основном состоянии:

$$E = -\varepsilon_a\left(Z - \frac{5}{16}\right)^2 ;$$

$$\psi(r_1, r_2) = \frac{(Z - 5/16)^3}{\pi a_0^3} e^{-\left(Z - \frac{5}{16}\right)\cdot\frac{r_1 + r_2}{a_0}} .$$

$\boxed{№13}$. Найти среднюю энергию электронов и давление вырожденного электронного газа ($T=0$).

Заключим газ в куб со стороной L:

а) 

$V \sim L^3$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

$x_\alpha \to x_\alpha + L \to$ ничего не изменится

$$e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} = e^{(ip_1x_1 + ip_2x_2 + ip_3x_3)/\hbar}$$

раз система безразлична к трансляционным преобразованиям, то множитель $e^{ip_jL/\hbar}$ ничего не изменит,

поэтому: $\frac{ip_jL}{\hbar} = 2\pi m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}(m_1; m_2; m_3)$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}.$$

Если $s = 1/2$, то существует 2 проекции m_j: $m_j = \pm 1/2$.

Тогда: $N = \frac{2V}{\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3} = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi p_F^3}{\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3} \Rightarrow p_F = \hbar(3n\pi^2)^{1/3}$

$$\downarrow$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n\pi^2)^{2/3}$$

$$\langle E \rangle = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \cdot 2\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \frac{dV}{\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3} = \frac{2}{N}\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m}\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \cdot 4\pi p^2 dp =$$

$$= \frac{p_F^5}{2m\pi^2 n\hbar^3 \cdot 5} = \frac{3}{5}E_F.$$

б) Найдём давление газа:

$$dW = pdV \Rightarrow dE = -pdV$$

$$E = \frac{3}{5}E_F \cdot N = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} \cdot N$$

$$p = -\frac{dE}{dV} = -\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}N^{5/3}(3\pi^2)^{2/3}\left(-\frac{2}{3}\right)V^{-5/3} = \frac{\hbar^2}{5m}n^{5/3}(3\pi^2)^{2/3} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2}{5}n(3n\pi^2)^{2/3} = \frac{2}{5}nE_F \longrightarrow p = \frac{2}{5}nE_F.$$

$\boxed{N14}$. Найти парамагнитную восприимчивость вырожденного электронного газа ($T = 0$).

$$s = 1/2, \quad \vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H})$$

$$M = \chi\mathcal{H}V$$

для электрона: $\hat{\vec{\mu}} = -2\mu_B\hat{\vec{s}}$, где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$

$$\hat{V} = -\hat{\vec{\mu}}\vec{\mathcal{H}} = 2\mu_B\mathcal{H}\hat{s}_z$$

$$|1/2, m_s = +1/2\rangle \longmapsto 2\mu_B\mathcal{H} \cdot \frac{1}{2}$$

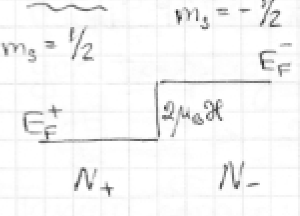
$$E_F^+ = \frac{p^2}{2m} + \mu_B \mathcal{H}$$

$$E_F^- = \frac{p^2}{2m} - \mu_B \mathcal{H}$$

$\mathcal{H} = 0:$ $\quad N_+ \quad \Big| \quad N_- = N/2$

$$E_F^+ = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \cdot \frac{2N_+}{V}\right)^{2/3} \quad \Big| \quad E_F^- = \frac{\hbar^2}{2m}\left(6\pi^2\,\frac{N/2}{V}\right)^{2/3}$$

$\mathcal{H} \neq 0:$



$N_- - N_+ = 2N_0$, где $N_0 \ll \frac{N}{2}$

$$N_+ = \frac{N}{2} - N_0$$

$$N_- = \frac{N}{2} + N_0$$

$$M = \mu_B (N_- - N_+)$$

$$\chi = \frac{\mu_B (N_- - N_+)}{\mathcal{H} V} = \frac{\mu_B \cdot 2N_0}{\mathcal{H} V}$$

$$E_F^- - E_F^+ = 2\mu_B \mathcal{H}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{V} N_-\right)^{2/3} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{V} N_+\right)^{2/3} = 2\mu_B \mathcal{H}$$

$$\left(\frac{N}{2} + N_0\right)^{2/3} - \left(\frac{N}{2} - N_0\right)^{2/3} = 2\mu_B\mathcal{H} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \left(\frac{V}{6\pi^2}\right)^{2/3}$$

$$\left(\frac{N}{2}\right)^{2/3}\left[\cancel{1} + \cancel{2} \cdot \frac{2N_0}{N} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} - \cancel{1}\right] = \frac{\cancel{4}\mu_B m \mathcal{H}}{\hbar^2}\left(\frac{V}{6\pi^2}\right)^{2/3}$$

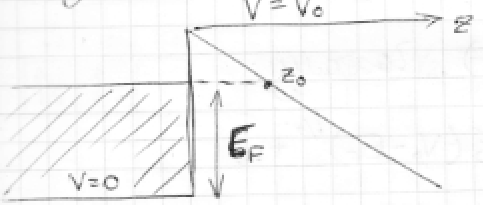
$$2N_0 = \frac{\mu_B m \mathcal{H}}{\hbar^2}\left(\frac{V}{6\pi^2}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^{2/3} \cdot N$$

Тогда:

$$\chi = \frac{\mu_B \cdot \mu_B m \cancel{\mathcal{H}} V^{2/3} \cdot \cancel{2^{2/3}}\, N}{\cancel{\mathcal{H}} V \hbar^2 (\cancel{6}_3\pi^2)^{2/3} N^{2/3}} = \frac{\mu_B^2 m n^{1/3}}{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}} = \frac{\mu_B^2 m}{\pi \hbar^2}\left(\frac{n}{9\pi}\right)^{1/3}$$

$$\chi = \frac{\mu_B^2 m}{\pi \hbar^2}\left(\frac{n}{9\pi}\right)^{1/3}.$$

№35 Найти зависимость тока холодной эмиссии электронов с поверхности металла от приложенного эл. поля (без учёта наведения зеркального заряда).



$$V(z) = \begin{cases} 0, & z<0, \\ V_0 - e\mathcal{E}z, & z>0. \end{cases}$$

пусть E_z – та часть энергии e^--на, которая соответствует z-компоненте его скорости. Тогда для коэф-та прохождения $\mathcal{D}$ можем записать:

$$\mathcal{D} = \exp\left\{-2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{z_0}\sqrt{V(z)-E_z}\,dz\right\}$$

$$E_z = \frac{mv_z^2}{2}\ ; \quad z_0 = \frac{V_0 - E_z}{e\mathcal{E}}\ .$$

$$\mathcal{D} = \exp\left\{-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar e\mathcal{E}}(V_0 - E_z)^{3/2}\right\}.$$

Плотность тока электронов можно определить по ф-ле:

$j = e\int v_z \mathcal{D}\, dn$, где dn – число e^--нов проводимости в элементе импульсного пр-ва $dp_x dp_y dp_z$.

для ферми-газа: $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2mE_F$

$$dn = 2\frac{dp_x dp_y dp_z}{2\pi\hbar} \quad \text{внутри ферми-сферы}$$

Введём в импульсном пр-ве цилиндрические координаты: $p_x = p\cos\varphi$; $p_y = p\sin\varphi$; $p^2 + p_z^2 \leq 2mE_F$. Тогда:

$$j = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{2mE_F}} dp_z \int_0^{\sqrt{2mE_F - p_z^2}} p\,\frac{p_z}{m}\mathcal{D}\,dp = \{\xi = E_F - E_z\} =$$

$$= \frac{4\pi e m}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{E_F} \xi \mathcal{D}(\xi) d\xi ,$$

где $\mathcal{D}(\xi) = \exp\left\{ -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar e \mathcal{E}_p} (V_0 - E_F + \xi)^{3/2} \right\}$.

$\mathcal{D}(\xi) = \max$ при $\xi = 0$ ($E_z = E_F$). Поэтому:

$$(V_0 - E_F + \xi)^{3/2} = (V_0 - E_F)^{3/2} + \frac{3}{2} \xi (V_0 - E_F)^{1/2} + \ldots$$

введём обозначение: $2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar e \mathcal{E}_p} (V_0 - E_F)^{3/2} = q$

Тогда: $\mathcal{D} = e^{-\frac{2}{3}q} \exp\left(-\frac{q\xi}{V_0 - E_F} \right)$

$$j = \frac{4\pi e m}{(2\pi\hbar)^3} \cdot e^{-\frac{2}{3}q} \cdot \int_0^{E_F} \xi \exp\left(-\frac{q\xi}{V_0 - E_F} \right) d\xi .$$

подынтегральное выражение быстро убывает с ростом ξ, поэтому, не внося заметной ошибки, интегрирование можно распространить до бесконечности, так что окончательно:

$$j = \frac{4\pi e m}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(V_0 - E_F)^2}{q^2} e^{-\frac{2}{3}q} , \text{ где } q = 2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar e \mathcal{E}_p} (V_0 - E_F)^{3/2} .$$

$\boxed{№17}$. Разложить электронную конфигурацию $(np)^3$ на термы.

$l = 1$

число мест в подоболочке: $2(2l + 1) = 6$.

+1	0	−1
↑	↑	↑

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 3/2 \\ L = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^4S$

+1	0	−1
↑	↑↓	

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1/2 \\ L = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^2P$

+1	0	−1
↑↓	↑	

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1/2 \\ L = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^2D$

$\boxed{№18}$. Разложить электронную конфигурацию $(nd)^2$ на термы.

$l = 2$

для $2^х$ эквивалентных электронов $(L+S)$ должно быть чётным.

$\Downarrow$

${}^1S,\ {}^3P,\ {}^1D,\ {}^1G,\ {}^3F.$

+2	+1	0	−1	−2
↑	↑			

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3F$

↑		↑		

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3D$

↑			↑	

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3P$

↑				↑

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3S$

↑↓				

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 0 \\ L = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^1G$

	↑↓			

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 0 \\ L = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^1D$

		↑↓		

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 0 \\ L = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^1S$

	↑	↑		

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3P$

	↑		↑	

$\longrightarrow \quad \begin{matrix} S = 1 \\ L = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad {}^3S$

$\boxed{№19}$. Найти явный вид волновых ф-ций термов в конфигурации $(np)^3$.

$^4S,\ ^2P,\ ^2D.$

а) ^4S: $L=0,\ S=3/2$

$$|L=0,\ M=0,\ S=3/2,\ M_S=3/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow\end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_-|L,M> = |L,M-1>\sqrt{(L+M)(L-M+1)}$$

$$\hat{S}_-|S,M_S> = |S,M_S-1>\sqrt{(S+M_S)(S-M_S+1)}$$

$$|0\ 0\ 3/2\ 1/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \downarrow & \uparrow & \uparrow\end{pmatrix}\right\}$$

$$|0\ 0\ 3/2\ -1/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \downarrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \downarrow & \uparrow & \downarrow\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}\right\}$$

$$|0\ 0\ 3/2\ -3/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}$$

б) ^2P: $L=1,\ S=1/2$

$$|L=1,\ M=1,\ S=1/2,\ M_S=1/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}\right\}$$

из усл. ортогональности ф-ций: $\alpha=1;\ \beta=-1.$

$$|1\ 1\ 1/2\ 1/2> = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}+\cancel{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}}-\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-\cancel{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ \uparrow & \downarrow & \uparrow\end{pmatrix}\right\}$$

б) ^2D: $L = 2$, $S = 1/2$

$$|L=2, M=2, S=1/2, M_S=1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}$$

$$|2\,1\,1/2\,1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}}^{\,0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}\right\}$$

$$|2\,0\,1/2\,1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left.+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{pmatrix}\right\}.$$

$\boxed{\text{№20}}$. Найти явный вид волновых ф-ций термов в конфигурации $(np)^4$.

+1	0	−1
↑↓	↑	↑

$\longrightarrow$ $S = 1$, $L = 1$ $\Rightarrow$ ^3P в) ^3P: аналогично

+1	0	−1
↑↓	↑↓	

$\longrightarrow$ $S = 0$, $L = 2$ $\Rightarrow$ ^1D

+1	0	−1
↑↓		↑↓

$\longrightarrow$ $S = 0$, $L = 0$ $\Rightarrow$ ^1S

а) ^1S: $L = 0$, $S = 0$

$$|L=0, M=0, S=0, M_S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

б) ^1D: $L = 2$, $S = 0$

$$|L=2, M=2, S=0, M_S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$|2\,1\,0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}\right\}$$

$$|2000\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}\right\}.$$

$\boxed{№21}$. Найти характеристики терма основного состояния (S, L, J) валентной электронной конфигурации k электронов с орбитальным моментом l.

$(nl)^k$

правила Хунда:

а) $S = \max \rightarrow$ миним. энергия;

б) $L = \max \rightarrow$ миним. энергия;

в) $k \le 2l+1 \rightarrow J = |L-S|$

$\quad k > 2l+1 \rightarrow J = L+S$

1) $k \le 2l+1 \Rightarrow S = \frac{k}{2}$

$$M_L = \sum_{i=1}^{k}(l-i+1) = (2l-k+1)\cdot\frac{k}{2}$$

$$J = |L-S| = \frac{k}{2}|2l-k|$$

2) $k > 2l+1 \Rightarrow S = \frac{2l+1}{2} - \frac{1}{2}(k-(2l+1)) = l + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} + l + \frac{1}{2} =$

$$= 2l+1-\frac{k}{2}$$

$$M_L = \cancel{\sum_{i=1}^{2l+1} m_i}^{\,0} + \sum_{i=1}^{k-(2l+1)}(l-i+1) = \left((2l+1)-\frac{k}{2}\right)(k-(2l+1))$$

$$J = L+S = \left(2l+1-\frac{k}{2}\right)(\cancel{1}+k-2l-\cancel{1}) = \left(2l+1-\frac{k}{2}\right)(k-2l)$$

$\boxed{N23}$ Найти расщепление ур-ней энергии многоэлектронного атома в сильном однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$, когда $\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \gg |\Delta E_{JJ'}|$ (аномальный эффект Зеемана).

аналогично N6, но в базисе L, S.

$\boxed{N24}$. Найти расщепление ур-ней энергии многоэлектронного атома в слабом однородном магн. поле $\vec{\mathcal{H}}$, когда $\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H} \ll |\Delta E_{JJ'}|$ (нормальный эфф. Зеемана).

аналогично N4, но в базисе L, S.

$\boxed{N25}$. Найти расщепление ур-ней энергии многоэлектронного атома в слабом однородном эл. поле $\vec{\mathcal{E}}$ (эфф. Штарка мал по сравнению с $|\Delta E_{JJ'}|$).

см. дальше

$\boxed{N22}$. Показать, что оператор $\sum\limits_{i=1}^{Z} g(r_i)(\vec{l}_i\vec{s}_i)$ спин-орбитального взаимодействия приводит к расщеплению каждого терма с L, S на $(2L+1)$ или $(2S+1)$ подуровней.

Данный оператор можно переписать в виде:

$\sum\limits_{i=1}^{Z} g(r_i)(\vec{l}_i\vec{s}_i) = A(\vec{L}\vec{S}) - 2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{Z}(\vec{l}_i, \vec{s}_j)$, где второе слагаемое можно считать малым по сравнению с первым.

$\langle J'L'S'M_J' | A(\vec{L}\vec{S}) | JLSM_J \rangle \sim \dfrac{J^2 - L^2 - S^2}{2}$

при этом L и S постоянны для каждого конкретного терма, а J — разное:

а) $S < L$:

$L - S \leq J \leq L + S \Rightarrow N_{th} = 2S + 1$,

б) $S > L$:

$S - L \leq J \leq S + L \Rightarrow N_{th} = 2L + 1$

$\boxed{№27}$. Двухуровневая система с состояниями $|1\rangle, |2\rangle$, энергии которых есть $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$, подвергается действию не зависящего от времени возмущения W. Вычислить вер-ть обнаружить то или иное состояние в момент времени t, если в момент времени $t=0$ система находилась в основном состоянии.

$\hat{H}|1\rangle = \hbar\omega_1 |1\rangle$

$\hat{H}|2\rangle = \hbar\omega_2 |2\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = (\hat{H} + \hat{W})|\psi\rangle$$

решение можно выразить ч/з стационарные состояния:

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t) e^{-i\omega_2 t}|2\rangle$$

нач. условия для c_1 и c_2: $c_1(0) = 1$; $c_2(0) = 0$.

Подставим решение в ур-ние Шрёдингера и умножим это ур-ние почленно на $\langle 1|$ или на $\langle 2|$, тогда:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_1 e^{-i\omega_1 t} = \langle 1|\hat{W}|1\rangle c_1 e^{-i\omega_1 t} + \langle 1|\hat{W}|2\rangle c_2 e^{-i\omega_2 t} \\ i\hbar \dot{c}_2 e^{-i\omega_2 t} = \langle 2|\hat{W}|1\rangle c_1 e^{-i\omega_1 t} + \langle 2|\hat{W}|2\rangle c_2 e^{-i\omega_2 t} \end{cases}$$

обозначим $\langle \mu|\hat{W}|\nu\rangle = W_{\nu\mu}$,

тогда в силу эрмитовости оператора $\hat{W}$ матричные элементы W_{11} и W_{22} будут действительными, а $W_{12} = W_{21}^*$. Пусть также $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$. Значит полученную систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_1 = W_{11} c_1 + W_{21} e^{-i\omega_0 t} c_2 \\ i\hbar \dot{c}_2 = W_{12} e^{i\omega_0 t} c_1 + W_{22} c_2 \end{cases}$$

решение ищем в виде: $c_1(t) = A e^{-i\omega t}$
$c_2(t) = B e^{-i(\omega - \omega_0) t}$

$$\begin{cases} (W_{11} - \hbar\omega) A + W_{21} B = 0 \\ W_{12} A + (W_{22} - \hbar\omega + \hbar\omega_0) B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} W_{11} - \hbar\omega & W_{21} \\ W_{12} & W_{22} - \hbar\omega + \hbar\omega_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_{I,II} = \frac{W_{11}}{\hbar} + \frac{\gamma}{2} \pm \sigma,$$

где $\hbar\gamma = W_{22} - W_{11} + \hbar\omega_0$
$\hbar\sigma = \sqrt{\gamma^2/4 + |W_{12}|^2}$

Тогда:
$$B_{I,II} = \frac{\hbar\omega_{I,II} - W_{11}}{W_{21}} A_{I,II}$$, и, следовательно:

$$c_1(t) = A_I e^{-i\omega_I t} + A_{II} e^{-i\omega_{II} t}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{W_{21}} e^{i\omega_0 t} \left\{ (\hbar\omega_I - W_{11}) A_I e^{-i\omega_I t} + (\hbar\omega_{II} - W_{11}) A_{II} e^{-i\omega_{II} t} \right\}$$

пользуясь начальными условиями можно исключить A_I и A_{II}. Тогда:

$$c_1(t) = \exp\left(-i\left(\frac{W_{11}}{\hbar} + \frac{1}{2}\gamma\right)t\right)\left(\cos\sigma t + i\frac{\gamma}{2\sigma}\sin\sigma t\right)$$

$$c_2(t) = -i\frac{W_{12}}{\hbar\sigma} \exp\left(-i\left(\frac{W_{11}}{\hbar} + \frac{\gamma}{2} - \omega_0\right)t\right)\sin\sigma t$$

Отсюда для вер-ти обнаружить систему в возбуждённом состоянии получаем:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{|W_{12}|^2}{\hbar^2\sigma^2}\sin^2\sigma t = \frac{4|W_{12}|^2}{(\hbar\gamma)^2+4|W_{12}|^2}\sin^2\sigma t\ ,$$

а вер-ть обнаружить систему в исходном основном состоянии:

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\sigma t + \left(\frac{\gamma}{2\sigma}\right)^2\sin^2\sigma t = 1 - \frac{4|W_{12}|^2}{(\hbar\gamma)^2+4|W_{12}|^2}\sin^2\sigma t\ .$$

$\boxed{№28}$. —//—, подвергается действию периодического возмущения, которое описывается эрмитовым оператором $\hat{W}\cos\omega t$. —//—, и расстройка частот $\Delta\omega = |\omega_2-\omega_1-\omega|$ мала.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = [\hat{H} + \hat{W}\cos\omega t]|\psi\rangle$$

решение ищем в виде: $|\psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle$

нач. условия: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, или $c_1(0)=1$, $c_2(0)=0$.

$$\hat{H}|1\rangle = \hbar\omega_1|1\rangle\ ,\quad \hat{H}|2\rangle = \hbar\omega_2|2\rangle$$

аналогично №27:

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_1 e^{-i\omega_1 t} = \cos\omega t\,\{W_{11}c_1e^{-i\omega_1 t} + W_{21}c_2e^{-i\omega_2 t}\}\ , \\ i\hbar\dot{c}_2 e^{-i\omega_2 t} = \cos\omega t\,\{W_{12}c_1e^{-i\omega_1 t} + W_{22}c_2e^{-i\omega_2 t}\}\ ; \end{cases}$$

обозначим: $\left.\begin{matrix}\omega_0 = \omega_2-\omega_1 \\ \Delta\omega = \omega-\omega_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow |\Delta\omega| \ll \omega_0$.

Тогда:

$$\begin{cases} i\dot{c}_1 = \frac{1}{2\hbar}\{W_{11}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})c_1 + W_{21}(e^{i\Delta\omega t}+e^{-i(\omega+\omega_0)t})c_2\}\ , \\ i\dot{c}_2 = \frac{1}{2\hbar}\{W_{12}(e^{i(\omega+\omega_0)t}+e^{-i\Delta\omega t})c_1 + W_{22}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})c_2\}\ ; \end{cases}$$

Усреднение по временному интервалу $\frac{2\pi}{\omega}$ позволяет избавиться от высокочастотных членов. Заменим c_1 и c_2 усреднёнными величинами:

$$C_\mu(t) = \frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} c_\mu(t')\,dt', \text{ где } \tau = \frac{\pi}{\omega}$$

Будем также при усреднении считать, что (медленно меняющиеся) множители $\exp(\pm i\Delta\omega t)$ постоянны. Тогда система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = \frac{1}{2\hbar} W_{21} e^{i\Delta\omega t} C_2, \\ i\dot{C}_2 = \frac{1}{2\hbar} W_{12} e^{-i\Delta\omega t} C_1; \end{cases} \qquad (\star)$$

$$\begin{cases} \ddot{C}_1 - i\Delta\omega \dot{C}_1 + \frac{1}{4}\Omega^2 C_1 = 0, \\ \ddot{C}_2 + i\Delta\omega \dot{C}_2 + \frac{1}{4}\Omega^2 C_2 = 0; \end{cases}$$

здесь $\Omega^2 = \frac{1}{\hbar^2} W_{21} W_{12} = \frac{1}{\hbar^2} |W_{12}|^2$

Введём обозначение: $R = \sqrt{\Omega^2 + (\Delta\omega)^2}$,

тогда решение системы с учётом нач. условий можно записать в виде:

$$C_1 = e^{i\frac{\Delta\omega}{2}t}\left(\cos\frac{Rt}{2} + A\sin\frac{Rt}{2}\right)$$

$$C_2 = e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}t} B\sin\frac{Rt}{2}$$

A и B можно вычислить из $(\star)$: $A = -i\frac{\Delta\omega}{R}$; $B = -i\frac{W_{12}}{\hbar R}$.

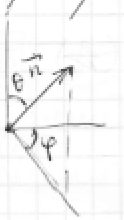
Итак:

$$|C_2|^2 = \frac{\Omega}{\Omega^2 + (\Delta\omega)^2}\sin^2\frac{Rt}{2},$$

$$|C_1|^2 = \cos^2\frac{Rt}{2} + \frac{(\Delta\omega)^2}{\Omega^2 + (\Delta\omega)^2}\sin^2\frac{Rt}{2}.$$

$\boxed{№30}$. При $t=0$ нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и магн. моментом $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$ находится в состоянии с проекцией спина $+1/2$ на некоторое направление $\vec{n}$. ∡ прецессию магн. момента в поле, направленном под углом θ к этому направлению и имеющем напряжённость $\mathcal{H}$. Найти направление, вдоль которого ориентирован спин в момент времени t.

$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$, $s = 1/2$



$$\vec{n} = (\underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{n_1} ; \underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{n_2} ; \underbrace{\cos\theta}_{n_3})$$

$t=0$: $$\hat{S}_{\vec{n}} = (\vec{n}\hat{\vec{S}}) = \frac{1}{2}(n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2 + n_3\hat{\sigma}_3)$$

Обозначим: $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha(0)\\ \beta(0)\end{pmatrix}$

$$\hat{S}_{\vec{n}}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

пусть $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H})$:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \\ |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle \quad ; \end{cases}$$

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}\vec{\mathcal{H}} = -\frac{\mu_0}{2}\hat{\sigma}_z\mathcal{H}$$

$$(\vec{n}(t)\cdot\vec{S})\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{\alpha}(t)\\ \dot{\beta}(t)\end{pmatrix} = -\frac{\mu_0\mathcal{H}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot\alpha(t)\\ \dot\beta(t)\end{pmatrix} = -\frac{\mu_0\mathcal{H}}{2}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ -\beta(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot\alpha(t) = -\frac{\mu_0\mathcal{H}}{2}\alpha(t), \\ i\hbar\dot\beta(t) = \frac{\mu_0\mathcal{H}}{2}\beta(t); \end{cases}$$

Получим начальное условие:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\cos\theta + \beta_0\sin\theta e^{-i\varphi}\\ \alpha_0\sin\theta e^{i\varphi} - \beta_0\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_0(\cos\theta - 1) + \beta_0\sin\theta e^{-i\varphi} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\beta_0\sin\theta e^{-i\varphi}}{1-\cos\theta}$$

Значит решение может быть записано в виде:

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \beta_0\begin{pmatrix}\sin\theta e^{-i\varphi}/(1-\cos\theta)\\ 1\end{pmatrix}, \text{ где } \beta_0 = \text{const}$$

Выберем β_0 в виде: $\beta_0 = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$. Тогда:

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{\cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}\,e^{-i\varphi/2}\sqrt{\cancel{1-\cos\theta}}}{\sqrt{2}\,\cancel{(1-\cos\theta)}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}\end{pmatrix}.$$

Теперь решим нашу систему:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = i\frac{\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}dt \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{\frac{i\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}t} = \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi(t)}{2}},$$

$$\text{где } \varphi(t) = \frac{\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}t - \varphi$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = -i\frac{\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}dt \to \beta(t) = \beta_0 e^{-\frac{i\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}t} = \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi(t)}{2}},$$

$$\text{где } \varphi(t) = \frac{\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}t - \varphi.$$

Итак:

$$\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta(t)}{2}e^{\frac{i\varphi(t)}{2}}\\ \sin\frac{\theta(t)}{2}e^{-\frac{i\varphi(t)}{2}}\end{pmatrix}, \text{ где } \varphi(t) = \frac{\mu_0\mathcal{H}}{2\hbar}t - \varphi.$$

$\boxed{№32}$. Найти вер-ть перехода атома трития H^3 из 1s состояния в 1s и 2s состояния иона He^{3+} при β-распаде одного из нейтронов ядра.

$$^3H \longrightarrow {}^3He + e^- + \tilde{\nu}_e$$

Влияние β-распада на атомный электрон заключается по существу в том, что за короткое время $t \ll \frac{\hbar^3}{\mu e^4}$ потенциальная энергия электрона в атоме изменяется с $U = -e^2/r$ на $U = -2e^2/r$.

Волновая ф-ция электрона не успевает измениться за время t, что следует из ур-ния Шрёдингера:

$$\delta\psi \sim \frac{e^2}{r}\frac{t}{i\hbar}\psi \ll \psi .$$

Разложим волновую ф-цию электрона по СФ электрона в поле $Z = 2$:

$$\psi = \sum_n c_n\psi_n + \int c_k \psi_k d\vec{k} ,$$

где $c_n = \int \psi\psi_n d\tau$, - определяет вер-ть возбуждения;

$c_k = \int \psi\psi_k d\tau$; - определяет вер-ть ионизации.

$$w_n = \sum_n |c_n|^2 ; \; w_{ион} = \int |c_k|^2 d\vec{k} .$$

Поскольку ψ - сферически-симметрична, то $(c_n \text{ и } c_k) \neq 0$ лишь в том случае, когда состояния n, k являются s - состояниями ($l = 0$).

$$R_{n0}^{(Z)} = 2\left(\frac{Z}{n}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{n}} \cdot F\left(-n+1, 2, \frac{2Zr}{n}\right)$$

Отсюда находим:

$$c_n = \int_0^\infty R_{n0}^{(Z)} R_{10}^{(Z')} r^2 dr = \frac{8}{\left(Z' + \frac{Z}{n}\right)^3}\left(\frac{ZZ'}{n}\right)^{3/2} F\left(-n+1, 3, 2, \frac{2Z}{nZ' + Z}\right).$$

$Z = 2; \ Z' = 1.$

$1s \to 1s: \quad n = 1$

$$C_1 = \frac{16\sqrt{2}}{27} \Rightarrow W_{1s\to 1s} = |C_1|^2 = \frac{2^9}{3^6} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}7$$

$1s \to 2s: \quad n = 2$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow W_{1s\to 2s} = |C_2|^2 = 0{,}25.$$

$\boxed{№33}$. Найти дифференциальное и полное сечение неупругого рассеяния частицы на неподвижном сферическом гармоническом осцилляторе с переходом последнего из основного в первое возбуждённое состояние при контактном взаимодействии м/у частицей и осциллятором $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0\,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

$$\cancel{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \vec{k}|V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)|\vec{k}_0\rangle\right|^2 =}$$

$$\cancel{= \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left\{\left|\int e^{-i\vec{k}\vec{r}_2} V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\, e^{i\vec{k}_0\vec{r}_2}\, d^3\vec{r}_2\right|\right\}^2 =}$$

$$\cancel{= \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} V_0^2 \left\{\left|\int_0^\infty e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}_2}\, d\vec{r}_2\right|\right\}^2 \cdot 16\pi^2 = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}\left\{\left|\int_0^\infty e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}_2}\, d(-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}_2)\right.\right.}$$

$$\cancel{\left.\left.\cdot \frac{1}{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)}\right|\right\}^2 = \frac{4m^2V_0^2}{(\vec{k}-\vec{k}_0)^2\hbar^4}}$$

для неупругого рассеяния:

$$f_n(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\sqrt{\frac{p'}{p}}\,\langle \Phi'|V|\Phi\rangle$$

$$\langle \Phi'|V|\Phi\rangle = \int\left[\int \varphi'^*(\vec{\xi})V(\vec{r},\vec{\xi})\varphi(\vec{\xi})\,d\vec{\xi}\right] e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\, d\vec{r}$$

$$\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |f_n|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$|000\rangle \longrightarrow \{|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle\} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{q_0}} e^{-x^2/2q_0^2}, \quad \text{где} \quad q_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{q_0}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{x}{q_0} e^{-x^2/2q_0^2}$$

$$f_B(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\sqrt{\frac{p'}{p}}\Big\{\int\Big[\int \psi_1(y_1)\psi_0(y_2)\psi_0(y_3) V_0 \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3) \cdot$$

$$\cdot \psi_0(y_1)\psi_0(y_2)\psi_0(y_3)dy_1 dy_2 dy_3\Big] e^{i((k_1-k_1')x_1 + (k_2-k_2')x_2 + (k_3-k_3')x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int\Big[\int \psi_0(y_1)\psi_1(y_2)\psi_0(y_3) V_0 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \psi_0(y_1)\psi_0(y_2)\psi_0(y_3) dy_1 dy_2 dy_3\Big] \cdot$$

$$\cdot e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} d\vec{x} + \int\Big[\int \psi_0(y_1)\psi_0(y_2)\psi_1(y_3) V_0 \delta(\vec{x}-\vec{y})\psi_0(y_1)\psi_0(y_2)\psi_0(y_3)dy_1 dy_2 dy_3\Big]$$

$$\cdot e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} d\vec{x}\Big\} = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{q_0}}\right)^6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{q_0}$$

$$\cdot\Big\{\int e^{-x_1^2/q_0^2} e^{-x_2^2/q_0^2} e^{-x_3^2/q_0^2} x_1 e^{i((\vec{k}-\vec{k}'))\vec{x}} dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int e^{-x_1^2/q_0^2} e^{-x_2^2/q_0^2} e^{-x_3^2/q_0^2} x_2 e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int e^{-x_1^2/q_0^2} e^{-x_2^2/q_0^2} e^{-x_3^2/q_0^2} x_3 e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} dx_1 dx_2 dx_3\Big\} =$$

$$= -\frac{mV_0}{\sqrt{2}\pi\hbar^2 q_0} \cdot \frac{1}{\pi^{3/2} q_0^3}\sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 e^{-x_1^2/q_0^2} e^{i(k_1-k_1')x_1} dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2/q_0^2} e^{i(k_2-k_2')x_2} dx_2 \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_3^2/q_0^2} e^{i(k_3-k_3')x_3} dx_3 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 e^{-x_2^2/q_0^2} e^{i(k_2-k_2')x_2} dx_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2/q_0^2} e^{i(k_1-k_1')x_1} dx_1 \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_3^2/q_0^2} e^{i(k_3-k_3')} dx_3 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_3 e^{-x_3^2/q_0^2} e^{i(k_3-k_3')x_3} dx_3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2/q_0^2} e^{i(k_1-k_1')x_1} dx_1 \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2/q_0^2} e^{i(k_2-k_2')x_2} dx_2\Big\} = -\frac{imV_0 q_0}{2\sqrt{2}\pi\hbar^2}\sqrt{\frac{p'}{p}} e^{-\frac{q_0^2}{4}|\vec{k}-\vec{k}'|^2} \cdot \sum_{j=1}^{3}(k_j - k_j')$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(\theta)|^2 = \left(\frac{mV_0 q_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\hbar^4}\,\frac{p'}{p}\, e^{-\frac{q_0^2}{2}|\vec{k}-\vec{k}'|^2}\left(\sum_{j=1}^{3}(k_j-k_j')\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{mV_0 q_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\hbar^4}\cdot\frac{p'}{p}\, e^{-\frac{q_0^2}{2\hbar^2}(p'^2+p^2-2pp'\cos\theta)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{3}(k_j-k_j')\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{mV_0 q_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\hbar^6}\cdot\frac{p'}{p}\, e^{-\frac{q_0^2}{2\hbar^2}(p'^2+p^2)}\cdot e^{\frac{q_0^2}{\hbar^2}pp'\cos\theta}\cdot\left(\sum_{j=1}^{3}(p_j-p_j')\right)^2$$

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \frac{d\sigma}{d\Omega} = (mV_0 q_0)^2\cdot\frac{1}{4\pi\hbar^6}\,\frac{p'}{p}\, e^{-\frac{q_0^2}{2\hbar^2}(p'^2+p^2)}\left(\sum_{j=1}^{3}(p_j-p_j')\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{q_0^2}{\hbar^2}pp'\right)}{\frac{q_0^2}{\hbar^2}pp'} = \left(\frac{mV_0}{p\hbar^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{3}(p_j-p_j')\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{q_0^2}{2\hbar^2}(p'^2+p^2-2pp')}\,-\right.$$

$$\left.- e^{-\frac{q_0^2}{2\hbar^2}(p'^2+p^2+2pp')}\right] = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mV_0}{p\hbar^2}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{3}(p_j-p_j')\right)^2\left[e^{-\frac{q_0^2(p-p')^2}{2\hbar^2}} - e^{-\frac{q_0^2(p+p')^2}{2\hbar^2}}\right]$$

где $p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega}$.

$\boxed{№34}$. В борновском приближении вычислить дифф. и полное сечение неупругого рассеяния мюона на неподвижном атоме водорода с возбуждением атомного электрона из 1s в 2s.

$$\frac{p^2}{2m} + E_{1s} = \frac{p'^2}{2m} + E_{2s}$$

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{2a_B} = \frac{p'^2}{2m} - \frac{e^2}{8a_B} \qquad \hat{V} = -\frac{e^2}{r}$$

$$p'^2 = p^2 - \frac{3me^2}{4a_B}$$

$$f_B(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\sqrt{\frac{p'}{p}}\int\left[\int \varphi_{2s}^*(\vec{\xi})\left(-\frac{e^2}{r}+\frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{\xi}|}\right)\varphi_{1s}(\vec{\xi})\,d\vec{\xi}\right]e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\,d\vec{r} =$$

$$= \ldots = \frac{8me^2}{\hbar^2\sqrt{2}\,a_B^4}\cdot\frac{1}{\left(|\vec{k}'-\vec{k}|^2+\frac{9}{4a_B^2}\right)^3}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32 m^2 e^4}{\hbar^4 a_B^8} \cdot \frac{1}{\left(|\vec{k}' - \vec{k}|^2 + \frac{9}{4a_B^2}\right)^6}$$

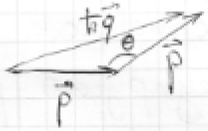
$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \, .$$

$\boxed{№37}$. Найти точную амплитуду для упругого кулоновского рассеяния частицы на неподвижном точечном кулоновском источнике.

Чтобы найти амплитуду кулоновского рассеяния воспользуемся вычислением для потенциала Юкавы, совершив предельный переход $\alpha \to 0$:

$$\lim_{\alpha \to 0} f_B^{\text{Юкава}} = \lim_{\alpha \to 0} \left(- \frac{2mg}{\hbar^2 (q^2 + \alpha^2)} \right) = - \frac{2mg}{\hbar^2 q^2} \text{ , где } g = e_1 e_2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| - \frac{2mg}{\hbar^2 q^2} \right|^2 = \frac{4m^2 (e_1 e_2)^2}{(4p^2 \sin^2 \theta/2)^2}$$



$\boxed{№38}$. В борновском приближении вычислить дифф. и полное сечение упругого рассеяния на потенциале Юкавы $V(r) = g \frac{\exp(-\alpha r)}{r}$.

$$\hbar q = 2p \sin\theta/2$$

$$f_B = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot g \int_0^{+\infty} \frac{\sin qr}{q} \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{r} r dr = -\frac{2mg}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin qr}{q} e^{-\alpha r} dr \, .$$

$+ \frac{d\sigma}{d\Omega}$ и σ.

№40 В борновском приближении выразить амплитуду упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на локализованном сферическом распределении заряда ч/з его плотность $\rho(r)$.

$$V(\vec{x}) = e\int \frac{\rho(r_1)d\vec{r}_1}{|\vec{x}-\vec{r}_1|} \quad , \ \vec{x} - \text{р.-в. налетающей частицы.}$$

$$f_Б = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{x}}V(\vec{x})d\vec{x} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{x}}\cdot e\int\frac{\rho(r_1)d\vec{r}_1}{|\vec{x}-\vec{r}_1|}d\vec{x} =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iint e^{-i\vec{q}\vec{x}}\frac{\rho(r_1)}{|\vec{x}-\vec{r}_1|}d\vec{r}_1 d\vec{x} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iint\frac{e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{r}_1+\vec{r}_1)}}{|\vec{x}-\vec{r}_1|}\rho(r_1)d\vec{r}_1 d\vec{x} =$$

$$= \left\{\vec{x}-\vec{r}_1 = \vec{y}\right\} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iint\frac{e^{-i\vec{q}\vec{y}}e^{-i\vec{q}\vec{r}_1}}{y}\rho(r_1)d\vec{r}_1 d\vec{y} =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{-i\vec{q}\vec{y}}}{y}d\vec{y}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}_1}\rho(r_1)d\vec{r}_1 = f_B^{кул}(q)\cdot F(q) \ ,$$

где $F(q) = \int e^{-i\vec{q}\vec{r}_1}\rho(r_1)d\vec{r}_1 = 4\pi\int_0^\infty \rho(r_1)\frac{\sin(qr_1)}{q}r_1 dr_1$ – формфактор.

$$f_Б^{кул}(q) = -\frac{2me}{\hbar^2 q^2}$$

$$f_Б = -\frac{2me}{\hbar^2 q^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}_1}\rho(r_1)d\vec{r}_1 .$$

№41. В борновском приближении найти формфактор, дифф. и полное сечение упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на равномерно заряженном шаре радиуса R.

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi R^3} \ , & r \le R \ , \\ 0 \ , & r > R \ . \end{cases}$$

$$F(q) = 4\pi \int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{\sin(qr)}{q} r\,dr = \frac{3Q}{q^3 R^3} \int_0^R \sin(qr)(rq)\,d(qr) =$$

$$= \frac{3Q}{q^3 R^3} [\sin qR - qR\cos qR]$$

$$f_B(q) = f_B^{\text{кул}}(q) \cdot F(q) = -\frac{2me}{\hbar^2 q^2} \cdot \frac{3Q}{q^3 R^3} [\sin qR - qR\cos qR]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B|^2 = \frac{36 m^2 e^2 Q^2}{\hbar^4 q^{10} R^6} (\sin qR - qR\cos qR)^2$$

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \, \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

$\boxed{№42}$. Вычислить амплитуду и сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме $V(r) = -V_0$, $r < a$, $V(r) = 0$, $r > a$. Объяснить резонансный характер такого рассеяния.

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Найдём асимптотический вид радиальных ф-ций, удовлетворяющих ур-ниям:

$r > a$: $\quad \chi_l'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$r < a$: $\quad \chi_l'' + \left[k'^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l = 0, \quad k'^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$

граничное условие: $\chi_l(0) = 0$.

Т.к. частица медленная, то длина волны де Бройля значительно больше размеров ямы, а значит основной вклад в рассеяние вносит S-волна. Решение χ_0, удовлетворяющее граничному условию, имеет вид:

$r<a: \ \chi_0^{r<a} = A\sin k'r$

$r>a: \ \chi_0^{r>a} = \sin(kr+\delta_0)$

A и δ_0 определяются из условия: $\chi_0^{r<a}(a) = \chi_0^{r>a}(a)$
$\chi_0^{r<a\,\prime}(a) = \chi_0^{r>a\,\prime}(a)$

$$\delta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{tg}k'a\right) - ka$$

Итак, сечение для S-волны ($l=0$):

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{tg}k'a\right) - ka\right].$$

при малых скоростях падающей частицы ($k\to 0$):

$$\delta_0 \approx ka\left(\frac{\operatorname{tg}k_0a}{k_0a} - 1\right), \text{ где } k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2},$$

$\sin\delta_0 \approx \delta_0$, тогда:

$$\sigma \approx 4\pi a^2\left(\frac{\operatorname{tg}k_0a}{k_0a} - 1\right)^2$$

если яма неглубока ($k_0a \ll 1$), то:

$$\sigma = 4\pi a^2\frac{k_0^2a^4}{9} = \frac{16\pi}{9}\frac{a^6V_0^2m^2}{\hbar^4}$$

$$f_0(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r)r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{2m}{\hbar^2}V_0\frac{a^3}{3}.$$

Если значение k_0a близко к целому кратному $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}k'a\to\infty$, но по-прежнему $ka \ll 1$. Значит:

$$\delta_0 = \operatorname{arctg}\left[\frac{k}{k'}\operatorname{tg}k'a\right]$$

$$\sigma_0 = \frac{4\pi(1+O(\varkappa a))}{\varkappa^2+k^2}, \quad \text{где } \varkappa = \frac{k'}{\operatorname{tg} k'a} \ll \frac{1}{a}$$

Эта формула для резонансного рассеяния даёт зависимость сечения от k при малых k, если потенциальная яма такова, что малым изменением её глубины (или размера) можно добиться появления или исчезновения дискретного уровня.

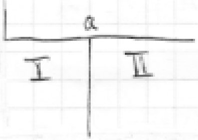
$\boxed{№43}$. Вычислить амплитуду и сечение упругого резонансного рассеяния медленной частицы для s-волны на потенциале $V(r)=V_0\delta(r-a)$, $V_0>0$, энергию и время жизни метастабильных состояний, соответствующих этим резонансам.

$\boxed{№44}$. Найти характеристики резонансного рассеяния медленной частицы для s-волны на потенциале $V(r)=-V_0\delta(r-a)$, $V_0>0$. Установить, для каких значений V_0 резонанс будет обусловлен наличием дискретного или виртуального уровней.

<u>Совместное решение №43 и №44.</u>

$$V(r)=\frac{\hbar^2}{2m}\Omega\,\delta(r-a), \quad \text{где } \Omega = \pm\frac{2mV_0}{\hbar^2} = \pm\Omega_0$$

№44



Возможны 2 варианта асимптотик:

а) $u_0(r)\big|_{r\to\infty} \approx A\sin(kr+\delta_0(r))$

б) $u_0(r) = Be^{ikr}$

$k = k_1 + ik_2$

а) $\psi_I = A\sin kr$

$\psi_{II} = B\sin(kr+\delta_0)$

Сшивка: $\begin{cases} \psi_I(a) = \psi_{II}(a), \\ \dfrac{\psi_{II}'(a)}{\psi_{II}(a)} - \dfrac{\psi_I'(a)}{\psi_I(a)} = \Omega; \end{cases}$

$$\begin{cases} A\sin ka = B\sin(ka+\delta_0), \\ \dfrac{Bk\cos(ka+\delta_0)}{B\sin(ka+\delta_0)} - \dfrac{Ak\cos ka}{A\sin ka} = \Omega; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_0 = -ka + \operatorname{arctg}\left(\frac{ka}{ka/\operatorname{tg}ka + \Omega a}\right) = -ka + \operatorname{arctg}\left(\frac{ka}{\frac{ka}{\operatorname{tg}ka} - \Omega_0 a}\right)$$

резонанс при $k \to 0$: $\delta_0 \approx \operatorname{arctg}\left(\dfrac{ka}{1-\Omega_0 a}\right)$

$\Omega_0 a \sim 1$ → наличие дискретного уровня

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\delta_0} = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1-\Omega_0 a}{ka}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi a^2}{(ka)^2 + (1-\Omega_0 a)^2} = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1-\Omega_0 a}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi \frac{\hbar^2}{2m}}{E + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(1-\Omega_0 a)^2}{a^2}}_{|\varepsilon| \text{ — энергия связанного состояния.}}}$$

б) $\psi_I = A\sin kr$

$\psi_{II} = Be^{i\tilde{k}r}$

из сшивки: $i\tilde{k} - k\operatorname{ctg}ka = -\Omega_0$

$k \to 0 \Rightarrow i\tilde{k} = \dfrac{1}{a} - \Omega_0$

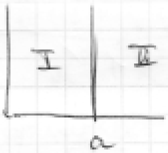
$$\tilde{k} = \left(\Omega_0 - \frac{1}{a}\right)i$$

$$E = \frac{\hbar^2\tilde{k}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Omega_0 - \frac{1}{a}\right)^2$$

$a\Omega_0 > 1$ → наличие виртуального уровня.

если $a\Omega_0 < 1$, то связанного состояния нет.

№43



$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\Omega_0\,\delta(r-a)$$

$$a = \frac{n\lambda}{2} \Rightarrow ka = \pi n$$

$$E_n = \frac{\hbar^2(\pi n)^2}{2ma^2}$$

аналогично №44:

$$\delta_0 = -ka + \operatorname{arctg}\left(\frac{ka}{\frac{ka}{\operatorname{tg} ka} + \Omega_0 a}\right)$$

$$k \to 0: \quad \delta_0 \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{ka}{1+\Omega_0 a}\right)$$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1+\Omega_0 a}{a}\right)^2} = \frac{4\pi\frac{\hbar^2}{2m}}{E + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{(1+\Omega_0 a)^2}{a^2}}$$

берём асимптотику типа δ):

$$\psi_I = A\sin kr$$

$$\psi_{II} = Be^{ikr}$$

из сшивки: $i\tilde{k} - k\operatorname{ctg} ka = \Omega_0$

$$i\tilde{k} = k\operatorname{ctg} ka + \Omega_0$$

$$i\tilde{k} \approx \frac{1}{a} + \Omega_0 \Rightarrow \tilde{k} = -i\left(\frac{1}{a} + \Omega_0\right)$$

$$e^{-iEt/\hbar}|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle = e^{-iE_1 t/\hbar}\, e^{-\Gamma/2\hbar\, t}$$

E_1 – энергия метастабильного состояния

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_1)^2 + \Gamma^2/4}$$ – ф-ла Брейта-Вигнера.

Отсюда находятся E_1 и Γ, а $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$.

№457. В приближении эйконала найти амплитуду и полное сечение рассеяния частиц высокой энергии на сферически-симметричном потенциале $V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$,

если дебройлевская длина волны частиц $\lambda \ll a$, а их энергия $E \gg V_0$.

Приближение эйконала: $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V_0$

пусть v - скорость налетающих частиц.

$$\delta(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{\rho}, z)\, dz$$

$$S(\vec{\rho}) = e^{2i\delta(\vec{\rho})}$$

$$f = -\frac{2ik}{4\pi}\int d\vec{\rho}'\, e^{-i(\vec{q}\vec{\rho}')}\left(S(\vec{\rho}') - 1\right)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(0) = 4\int d\vec{\rho}\, \sin^2\delta(\vec{\rho})$$

$$\delta(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} V_0\, dz = -\frac{V_0\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{2\hbar v}$$

$$S(\vec{\rho}) = e^{-i\frac{V_0\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\hbar v}} = e^{-i\frac{V_0\sqrt{a^2-\rho^2}}{\hbar v}}$$

$$f = -\frac{2ik}{4\pi}\int dx'dy'\, e^{-iq_1x'}e^{-iq_2y'}\left(e^{-i\frac{V_0\sqrt{a^2-\rho^2}}{\hbar v}} - 1\right) =$$

$$= -\frac{2ik}{4\pi}\int \rho\, d\rho\, d\varphi\, e^{-iq_1\rho\cos\varphi}\, e^{-iq_2\rho\sin\varphi}\left(e^{-i\frac{V_0}{\hbar v}\sqrt{a^2-\rho^2}} - 1\right) = \ldots$$

$$\sigma = 4\int \rho\, d\rho\, d\varphi\, \sin^2\left(\frac{V_0}{2\hbar v}\sqrt{a^2-\rho^2}\right) = 8\pi\int_0^a \rho\, d\rho\, \sin^2\left(\frac{V_0 m a}{2\hbar p}\sqrt{1-(\rho/a)^2}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-(\rho/a)^2} = x \\ \rho\, d\rho = -a^2 x\, dx\ ;\ x \in (1;0) \end{array} \right\} = -8\pi a^2\int_1^0 x\, dx\, \sin^2\Big(\underbrace{\frac{V_0 m a}{2\hbar p}}_{\gamma}\, x\Big) =$$

$$= \frac{8\pi a^2}{\gamma^2}\int_0^1 (\gamma x)\, d(\gamma x)\, \sin^2\gamma x = \frac{8\pi a^2}{\gamma^2}\int_0^\gamma t\sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{8\pi a^2}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{8} \left(2\gamma^2 - 2\gamma \sin 2\gamma - \cos 2\gamma + 1 \right) = \{\text{пусть } \xi = 2\gamma\} =$$

$$= \frac{4\pi a^2}{\xi^2} \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi \sin\xi - \cos\xi + 1 \right) = 2\pi a^2 \left(1 - \frac{2}{\xi^2} \left(\xi \sin\xi + \cos\xi - 1 \right) \right)$$

где $\xi = 2\gamma = \frac{2 V_0 m a}{2\hbar p} = \frac{V_0 m a}{\hbar p}$.

$\boxed{N 46}$. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для быстрых частиц, дебройлевская длина волны которых $\lambda \ll a$.

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases};$$

Борновское приближение в данном случае несостоятельно, т.к. имеем сингулярный потенциал. Поэтому будем использовать метод разложения по парциальным волнам.

$\forall l$ радиальная волновая ф-ция вне жёсткой сферы имеет вид:

$$\chi_l(r) = j_l(kr)\cos\delta_l - n_l(kr)\sin\delta_l \longrightarrow \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right),$$

где $j_l(r) = \sqrt{\frac{\pi r}{2}}\, J_{l+1/2}(r)$; $n_l(r) = \sqrt{\frac{\pi r}{2}}\, N_{l+1/2}(r) =$

$$= (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi r}{2}}\, J_{-(l+1/2)}(r)$$

граничное условие: $\chi_l(a) = 0$.

Таким образом имеем: $\operatorname{tg}\delta_l = \frac{j_l(x)}{n_l(x)}$, $x = ka$,

и, следовательно, сечение рассеяния будет равно:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sin^2\delta_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{j_l^2(x)}{j_l^2(x) + n_l^2(x)}$$

при $x \gg 1$ сумму можно разбить на 2 части:

$l < x$: описываются частицы, сталкивающиеся со сферой ($\hbar l < mva$)

$$j_l(x) \approx \sin\left(x - \frac{\pi l}{2}\right)$$

$$n_l(x) \approx -\cos\left(x - \frac{\pi l}{2}\right)$$

$l > x$: описываются частицы, пролетающие мимо сферы ($\hbar l > mva$)

$$j_l \sim x^{l+1} \qquad n_l \sim x^{-l}$$

но этими вкладами, в силу их малости, в сумме можно пренебречь.

Значит:
$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{[x]}(2l+1)\sin^2\left(x - \frac{\pi l}{2}\right)$$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi l}{2}\right) = \sin^2 x + \sin^2\frac{\pi l}{2}\cos 2x$$. Тогда:

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\left\{\sin^2 x\sum_{l=0}^{[x]}(2l+1) + \cos 2x \sum_{l=1,3,5,\ldots}^{[x]}(2l+1)\right\}$$

$$\sum_{l=0}^{[x]}(2l+1) = (x+1)^2 \quad ; \quad \sum_{l=1,3,5,\ldots}^{[x]}(2l+1) = \frac{1}{2}(x+1)(x+2)$$

Поэтому:
$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\left\{-(x+1)\sin^2 x + \frac{1}{2}(x+1)(x+2)\right\}$$

т.к. $x \gg 1$, то достаточно удержать только основной член:

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{1}{2}x^2 = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{k^2a^2}{2} = 2\pi a^2$$

№47. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для медленных частиц, дебройлевская длина волны которых $\lambda \gg a$.

аналогично №46 получается:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{j_l^2(x)}{j_l^2(x)+n_l^2(x)}, \quad x = ka$$

при $x \ll 1$:

$$j_l \sim x^{l+1} \qquad n_l \sim x^{-l}$$

Тогда: $$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{x^{2l+2}}{x^{2l+2}+x^{-2l}} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot\frac{1}{1+\underbrace{x^{-4l-2}}_{\gg 1}} \approx$$

$$\approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)x^{4l+2} = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{x^2(x^4+1)}{(x^4-1)^2} \approx \frac{4\pi}{k^2}x^2$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}k^2a^2 = 4\pi a^2.$$

№48. Найти вер-ть того, что рассеянный на протоне медленный нейтрон изменит ориентацию своего спина, если до столкновения спин нейтрона был направлен по оси z, а спин протона — в противоположном направлении. Амплитуда рассеяния системы протон-нейтрон в синглетном состоянии — f_0, в триплетном — f_1.

спиновое состояние нейтрона и протона до взаимодействия описывается ф-цией: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p$.

Разложим эту ф-цию по спиновым ф-циям синглетного и триплетного состояний:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_p\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_p\Big\}\Big]$$

Рассеянная волна имеет вид:

$$\frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[f_1\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_p\Big\} +$$

$$+ f_0\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_p\Big\}\Big] =$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\Big\{\frac{f_1+f_0}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_p + \frac{f_1-f_0}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_p\Big\}$$

Отсюда следует, что вероятность переориентации:

$$w_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2}\frac{(f_1-f_0)^2}{f_1^2+f_0^2}.$$

$\boxed{№49}$. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния двух α-частиц с учётом интерференции фаз (в системе центра масс).

амплитуда резерфордовского рассеяния в ЦМ:

$$f(\theta) = -\frac{\varkappa^*}{2k^*}e^{2i\eta_0}\frac{e^{-i\varkappa^*\ln\sin^2\theta/2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \text{ где } \eta_0 = \Gamma(1+i\varkappa^*)$$

$$\varkappa^* = \frac{e^2}{\hbar v}, \quad k^* = \frac{m^* v}{\hbar}, \quad E^* = \frac{1}{2}E, \quad m^* = \frac{m}{2}, \ \varkappa^* = \varkappa, \ k^* = \frac{k}{2}$$

Значит: $f(\theta) = -\frac{\varkappa}{k}e^{2i\eta_0}\frac{e^{-i\varkappa\ln\sin^2\theta/2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad \eta_0 = \Gamma(1+i\varkappa)$

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^4\theta/2}, \text{ где } \frac{\varkappa}{k} = \frac{e^2}{mv^2} = \frac{e^2}{2E}.$$

Пусть $u(\vec{r})$ – несимметризованная волновая ф-ция в СЦМ, а $\vec{r}$ – радиус-вектор относительного положения час-

$$u(\vec{r}) \overset{as}{\approx} e^{ik^*z} + f(\theta)\frac{e^{ik^*z}}{z}$$

симметризация: $u(\vec{r}) \longrightarrow u(\vec{r}) + \varepsilon u(-\vec{r})$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Это означает, по сути, замену: $f(\theta) \to f(\theta) + \varepsilon f(\pi - \theta)$.

Тогда:

$$f(\theta) + \varepsilon f(\pi-\theta) = -\frac{e^2}{mv^2} e^{2i\eta_0}\left\{\frac{e^{-i\varkappa \ln \sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \varepsilon\frac{e^{-i\varkappa\ln\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\left|\frac{e^{-i\varkappa\ln\sin^2\theta/2}}{\sin^2\theta/2} + \varepsilon\frac{e^{-i\varkappa\ln\cos^2\theta/2}}{\cos^2\theta/2}\right|^2 =$$

$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} + \varepsilon\frac{2\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v}\ln \mathrm{tg}^2\theta/2\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

В нашем случае 2х α-частиц:

$e^2 \to 4e^2$

$m \to M_\alpha$

и $\varepsilon = +1$ (т.к. α-частицы явл. бозонами с $s=0$, т.е. возможно только пространственно симм. состояние с $\varepsilon = +1$)

$\boxed{№ 50}$. —//— для электронов (синглетное и триплетное состояния по полному спину).

аналогично № 49, но при:

$m \to m_e$

$e^2 \to e^2$

обе сталкивающиеся частицы явл. фермионами с $s = 1/2$, поэтому полная волновая ф-ция должна быть антисимметричной. Следовательно, симметричное по спину и антисимметричное по пространству триплетное состояние будет участвовать в рассеянии с весом 3/4, а обладающее противоположной симметрией синглетное состояние — с весом 1/4.

$$d\sigma = \frac{3}{4} d\sigma_- + \frac{1}{4} d\sigma_+ \Rightarrow \mathcal{E}_{eff} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{E} \to \mathcal{E}_{eff}.$$

$\boxed{№51}$. —//— для неполяризованных пучков электронов. Я случаи быстрых ($e^2 \ll \hbar v$) и медленных ($e^2 \gg \hbar v$) частиц.

из №50: $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v} \ln tg^2 \theta/2\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \right\}$$

а) $\underline{e^2 \ll \hbar v} \Rightarrow \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1 \Rightarrow \cos\left(\underbrace{\frac{e^2}{\hbar v}}_{\ll 1} \underbrace{\ln tg^2 \theta/2}_{\text{мало}}\right) \approx 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right\}$$

б) $\underline{e^2 \gg \hbar v} \Rightarrow \frac{\hbar v}{e^2} \ll 1 \to$ ф-ла остаётся самой собой.

$\boxed{№52}$. Найти средние значения и дисперсию эл. и магн. напряжённостей квантованного э/м поля излучения в одномодовом когерентном состоянии $|\alpha\rangle$.

Когерентным состоянием $|\alpha\rangle$ гармонического осциллятора наз. нормированное собственное состояние оператора уничтожения $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

$$\hat{\vec{E}} = i\sum_{\vec f,\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec f}}{V}\right)^{1/2} e_\lambda(\vec f)\, e^{i\vec f\vec r}\left(a_{\vec f,\lambda} - a^{+}_{-\vec f,\lambda}\right),$$

$$\hat{\vec{B}} = i\sum_{\vec f,\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec f}}\right)^{1/2} [\vec f\times e_\lambda(\vec f)]\, e^{i\vec f\vec r}\left(a_{\vec f,\lambda} - a^{+}_{-\vec f,\lambda}\right),$$

где $\vec f e_\lambda(\vec f) = 0$, $e_{\lambda_1}(\vec f)e_{\lambda_2}(\vec f) = \delta_{\lambda_1\lambda_2}$, $\lambda_{1,2} = 1,2,3$.

компоненты волнового вектора $\vec f$ пробегают бесконечный ряд дискретных значений:

$f_l = 2\pi V^{-1/3}\nu_l$, где $l = 1,2,3$; $\nu_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$e_\lambda(\vec f)$ - единичные вещественные векторы поляризации.

Вычислим искомые параметры:

$$\langle\alpha|\hat{\vec E}|\alpha\rangle = i\sum_{\vec f,\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar c\,\omega_{\vec f}}{V}\right)^{1/2} e_\lambda(\vec f)\, e^{i\vec f\vec r}(\alpha - \alpha^*)$$

$\cancel{\langle\alpha|\hat{\vec E}^2|\alpha\rangle = ?}$

$$\langle\alpha|\hat{\vec B}|\alpha\rangle = i\sum_{\vec f,\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec f}}\right)^{1/2} [\vec f\times e_\lambda(\vec f)]\, e^{i\vec f\vec r}(\alpha - \alpha^*).$$

$\boxed{№54}$. Рассчитать угловое распределение фотоэлектронов при фотоэффекте на основном состоянии водородоподобного иона, индуцированном поляризованной плоской э/м волной, считая конечное состояние электрона свободной частицей. Спиновый магн. момент электрона не учитывать.

Световую волну зададим так:

$$A_x = \frac{c}{\omega} \mathcal{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right], \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Тогда: $$\mathcal{E}_x = -\frac{1}{c}\dot{A}_x = \mathcal{E}_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\delta\right]$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = \mathcal{E}_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\delta\right].$$

Усреднённый вектор Умова-Пойнтинга:

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}\overline{\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y} = \frac{c}{8\pi}\mathcal{E}_0^2$$

Тогда: $n = \frac{c\mathcal{E}_0^2}{8\pi\hbar\omega}$ – число фотонов за 1с на 1см².

Энергия взаимодействия м/у световой волной и атомным электроном имеет вид:

$$W = -\frac{e\hbar}{mc} i(\vec{A}\vec{\nabla}) = We^{-i\omega t} + W^+ e^{i\omega t},$$

где $$W = -\frac{e\hbar}{2m\omega}\mathcal{E}_0 i e^{-i\delta}\frac{\partial}{\partial x}$$

положим $x = \frac{1}{2}(\omega_f - \omega_i - \omega)t$, тогда:

$$|a_f(t)|^2 = \frac{4}{\hbar^2}|\langle f|W|i\rangle|^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_f = \frac{2\pi}{\hbar}\rho_f |\langle f|W|i\rangle|^2, \text{ где } \rho_f = \frac{mV}{8\pi^3\hbar^2}k_f d\Omega_f \\ d\Omega_f = \frac{P_f}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{e^2 V}{2\pi m c\omega} k_f d\Omega_f \left|\langle f|\frac{\partial}{\partial x}|i\rangle\right|^2.$$

Мы имеем дело с центральным взаимодействием, поэтому: $\frac{\partial|i\rangle}{\partial x} = \frac{d|i\rangle}{dr}\sin\theta\cos\varphi \sim Y_1 \Rightarrow$ матричный элемент не исчезает только в случае p-состояния фотоэлектрона.

$$|f\rangle = V^{-1/2} e^{ik_f r\cos\gamma} = \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(k_f r)P_l(\cos\gamma) ,$$

где $\gamma = (\widehat{\vec{k}_f, \vec{r}})$

p-сост. $\Rightarrow l = 1$:

$$\langle f|\frac{\partial}{\partial x}|i\rangle = \frac{3i}{\sqrt{V}}\int_0^{\infty}\frac{j_1(kr)}{kr}\cdot\frac{d|i\rangle}{dr}r^2dr\oint\cos\gamma\sin\theta\cos\varphi\, d\Omega .$$

$\cos\gamma = \cos\theta\cos\Theta + \sin\theta\sin\Theta(\cos\varphi\cos\Phi + \sin\varphi\sin\Phi)$,
где Θ, Φ и θ, φ — сфер. углы векторов $\vec{k}_f$ и $\vec{r}$

$$\sin\Theta\cos\Phi\oint\sin^2\theta\cos^2\varphi\, d\Omega = \frac{4\pi}{3}\sin\Theta\cos\Phi .$$

Таким образом:

$$\langle f|\frac{\partial}{\partial r}|i\rangle = \frac{4\pi i}{\sqrt{V}}\sin\Theta\cos\Phi\int_0^{\infty}\frac{j_1(k_f r)}{k_f r}\frac{d|i\rangle}{dr}r^2dr$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{8\pi e^2}{mc\omega k_f}\left\{\int_0^{\infty} r j_1(k_f r)\frac{d|i\rangle}{dr}dr\right\}^2\sin^2\Theta\cos^2\Phi .$$

$\boxed{N57}$. Установить, м/у какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны э/м переходы в дипольном приближении. Вычислить время жизни 1го возбуждённого состояния осциллятора в этом приближении.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{3}\hbar\omega\left(\hat{a}_i^+\hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{a}|n\rangle = |n-1\rangle\sqrt{n}$$
$$\hat{a}^+|n\rangle = |n+1\rangle\sqrt{n+1} , \quad x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{\hat{a}_i + \hat{a}_i^+}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|\langle\psi_{a'}|\hat{\vec{x}}|\psi_a\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{3}|\langle\psi_{a'}|\hat{x}_i|\psi_a\rangle|^2$$

$$E = \hbar\omega(\underbrace{n_1 + n_2 + n_3}_{N} + \frac{3}{2})$$

$\langle n_i' | x | n_i \rangle \neq 0$

$n_i' = n_i \pm 1$

тогда $\langle n_1' n_2' n_3' | \hat{x} | n_1 n_2 n_3 \rangle$

$$\left.\begin{matrix} n_1' = \pm 1 & & n_1' = n_1 & & n_1' = n_1 \\ n_2' = n_2 & \text{или} & n_2' = \pm 1 & \text{или} & n_2' = n_2 \\ n_3' = n_3 & & n_3' = n_3 & & n_3' = \pm 1 \end{matrix}\right\} \text{правила отбора}$$

$N' = N \pm 1$ – поглощение или излучение фотона.

Осн. состояние: $|0,0,0\rangle \Rightarrow E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

1^e возб. состояние: $|0,0,1\rangle$, $|0,1,0\rangle$, $|1,0,0\rangle$ $\Rightarrow E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$\omega_f = \omega$:

$$w_0 = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left|\langle 0,0,0|\hat{\vec{d}}|1,0,0\rangle\right|^2 = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}e^2\sum_i\left|\langle 000|\vec{x}_i|100\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\omega^3 e^2}{\hbar c^3}\left\{\left|\langle 000|x_1|100\rangle\right|^2 + \underbrace{\left|\langle 000|x_2|010\rangle\right|^2}_{=0} + \underbrace{\left|\langle 000|x_3|001\rangle\right|^2}_{=0}\right\} =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\omega^3 e^2}{\hbar c^3}\left|\langle 000|x_1|100\rangle\right|^2 = \frac{4}{3}\frac{\omega^3 e^2}{\hbar c^3}\left|\langle 000|\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{a_1 + a_1^+}{\sqrt{2}}\right)|100\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\omega^3 e^2}{\hbar c^3}\left|\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle 0|0\rangle + \underbrace{\sqrt{2}\langle 0|2\rangle}_{=0,\ \text{т.к. сост. с разным числом квантов ортогональны}}\right]\right|^2 =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{4}{3}\frac{\omega^3 e^2}{\hbar c^3} = \frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\cdot\frac{\hbar\omega^2}{mc^2} = \frac{2\alpha}{3}\frac{\hbar\omega^2}{mc^2}$$

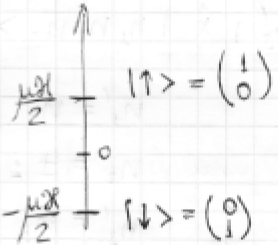
Тогда: $\tau_1 = \frac{1}{w_0} = \frac{3}{2\alpha}\frac{mc^2}{\hbar\omega^2}$.

$\boxed{\text{№60}}$. Нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и маг. моментом $\mu\vec{s}$ находится в однородном магн. поле $\vec{\mathcal{H}}$. Найти время жизни возбуждённого состояния и угловое распределение излучения при его распаде.

$$\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H})$$

$$\vec{\mu} = \mu\vec{s}$$

$$V = -(\vec{\mu}\vec{\mathcal{H}}) = -\mu\hat{s}_z\mathcal{H}$$



$$w_0 = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\left|\langle a'|\hat{\vec{s}}|a\rangle\right|^2 = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\left|\vec{s}_{a'a}\right|^2$$

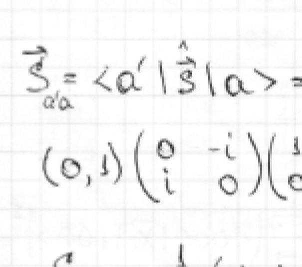
$$\hat{\vec{s}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{s}_{a'a} = \langle a'|\hat{\vec{s}}|a\rangle = (0,1)\,\hat{\vec{s}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Big((0,1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$(0,1)\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, (0,1)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{2}(1, i, 0)$$

$$\vec{s}_{a'a} = \frac{1}{2}(1, i, 0)$$

$$w_0 = \frac{4\omega^3\mu^2}{3\hbar c^3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{2}{3}\frac{\omega^3\mu^2}{\hbar c^3} \Rightarrow \tau = \frac{3\hbar c^3}{2\mu^2\omega^3}$$

Найдём распределение излучения:



$\vec{e}_1$ в плоскости $\vec{H}, \vec{f}$ $\qquad w_{\vec{f},1} \sim \left|(e_1(\vec{f}), \vec{s}_{a'a})\right|^2$

$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

$$|e_{1x}| = \cos\theta$$
$$|e_{1y}| = 0$$
$$|e_{1z}| = \sin\theta$$

$$w_{\vec{f},1} \sim \left|e_1(\vec{f})\vec{s}_{a'a}\right|^2 = \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

$$w_{\vec{f},2} \sim \left|e_2(\vec{f})\vec{s}_{a'a}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$w = \frac{1}{4}(1 + \cos^2\theta).$$

№67. Найти явный вид волновой ф-ии свободной дираковской частицы с определённым импульсом и спиральностью, ток переноса для свободного движения волнового пакета с энергией фиксированного знака.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(c\alpha\hat{\vec{p}} + \beta mc^2\right)\Psi = H_D\Psi$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \hat{\Theta} & \sigma_i \\ \sigma_i & \hat{\Theta} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{\Theta} \\ \hat{\Theta} & -\hat{I} \end{pmatrix}$$

будем искать решение в виде:

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}\right)$$

$$\mathcal{E}\Psi(\vec{r}) = H_D\Psi(\vec{r})$$

пусть $\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$, где $\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$ и $\chi = \begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$.

Тогда: $\begin{cases} (mc^2 - \mathcal{E})\varphi + c(\vec{\sigma}\vec{p})\chi = 0, \\ c(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi - (mc^2+\mathcal{E})\chi = 0; \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} mc^2-\mathcal{E} & c(\vec{\sigma}\vec{p}) \\ c(\vec{\sigma}\vec{p}) & -(mc^2+\mathcal{E}) \end{vmatrix} = -(mc^2)^2 + \mathcal{E}^2 - c^2(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p}) = 0$$

$$(mc^2)^2 - \mathcal{E}^2 + c^2(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p}) = 0$$

$$(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p}) = \sum_{ij}\sigma_i p_i \sigma_j p_j = \sum_{ij} p_i p_j \delta_{ij}\hat{I} +$$

$$+ i\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}p_i p_j \sigma_k = (\vec{p}\vec{p})\hat{I} + i\cancel{\left(\vec{\sigma}[\vec{p}\times\vec{p}]\right)}^{0} = \vec{p}^2\hat{I}$$

$$(mc^2)^2 - \mathcal{E}^2 + c^2\vec{p}^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \pm\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$$

Тогда из системы: $\chi = \dfrac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{mc^2+\mathcal{E}}\varphi$

пусть $\varphi = N\exp\left(\dfrac{i(\vec{p}\vec{r})}{\hbar}\right)u$, где $u = \begin{pmatrix}u_1 \\ u_2\end{pmatrix}$

$$\Psi(\vec{r}) = N\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{mc^2+\lambda\mathcal{E}_p}u\end{pmatrix}\exp\left(\frac{i(\vec{p}\vec{r})}{\hbar}\right),$$

здесь $N = \dfrac{\sqrt{\dfrac{mc^2+\lambda E_p}{\lambda E_p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ – нормировочный множитель,

λ – спиральность $(\lambda = \pm 1)$, $E_p = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$.

Итак:

$$\Psi(\vec{r},t) = N \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{c(\vec{\sigma}\vec{p})u}{mc^2+\lambda E_p} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i(\vec{p}\vec{r})}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\lambda E_p t}{\hbar}\right).$$

для плотности тока имеем:

$$\vec{j} = ce(\varphi^+ \sigma \chi + \chi^+ \sigma \varphi) = \frac{e\hbar}{2mi}(\varphi^+ \vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^+) + \frac{e\hbar}{2m}\mathrm{rot}(\varphi^+ \sigma \varphi).$$

Остались не разобраны:

№ ~~26~~, ~~32~~, ~~36~~, ~~39~~, 58, 59, 64

$\boxed{№36}$. В приближении эйконала найти парциальные фазы рассеяния на потенциале $\dfrac{A}{r^2}$ для $l \gg 1$. Сравнить с точным ответом.

Радиальные ф-ии подчиняются ур-нию:

$$\begin{cases} \chi_l'' + \left[k^2 - \dfrac{l(l+1)}{r^2} - \dfrac{2\mu A}{\hbar^2 r^2}\right]\chi = 0, \\ \chi_l(0) = 0 \quad \text{и} \quad |\chi_l(\infty)| < \infty; \end{cases}$$

$$\chi_l = \sqrt{r}\, J_\lambda(kr),$$

где $\lambda = \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\mu A}{\hbar^2}}$

Из формул для асимптотического поведения $J_\lambda(kr)$ находим фазы:

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2}\left(\lambda - l - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left\{\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\mu A}{\hbar^2}} - \left(l+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

при $l \gg 1$:

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2l+1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8\mu A}{\hbar^2(2l+1)^2}} - 1\right) \approx$$

$$\approx -\frac{\pi(2l+1)}{4}\left(1 + \frac{8\mu A}{2\hbar^2(2l+1)^2} - 1\right) = -\frac{\pi\mu A}{(2l+1)\hbar^2}$$

$$\delta_l = -\frac{\pi\mu A}{(2l+1)\hbar^2} \ll 1.$$

$\boxed{N39}$. Без учёта обменных эффектов вычислить дифф. и полное сечение упругого рассеяния быстрых электронов на атоме водорода, находящемся в основном состоянии.

Вычисляем атомный формфактор для водорода:

$$F(q) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}} n(\vec{r})\, d\tau = \frac{1}{\pi a_B^3}\int e^{i\vec{q}\vec{r} - \frac{2r}{a_B}} d\tau = \frac{1}{\left(1+\frac{q^2a_B^2}{4}\right)^2}$$

Тогда:

$$d\sigma = \frac{4a_B^2(8+q^2a_B^2)^2}{(4+q^2a_B^2)^4}\, d\Omega, \text{ где } q = 2k\sin\frac{\theta}{2}.$$

Тогда полное сечение:

$$\sigma = \frac{\pi a_B^2}{3}\,\frac{7(ka_B)^4 + 18(ka_B)^2 + 12}{((ka_B)^2+1)^3}$$

т.к. задача решена в борновском приближение для быстрых электронов, то $ka_B \gg 1$, поэтому:

$$\sigma = \frac{7\pi}{3k^2}.$$

$\boxed{№25}$. Найти расщепление ур-ней энергии многоэлектронного атома в слабом однородном эл. поле (эфф. Штарка мал по сравнению с $|\Delta E_{TS}|$).

$\vec{\xi} = (0, 0, \xi)$

$\hat{V} = e\xi\hat{z}$

пусть E_{nj} – некоторый уровень электрона в невозмущенном атоме, вырожденный по l ($l = j \pm 1/2$).

$E^{(1)} = \langle nljm_j|\hat{V}|nljm_j\rangle$

Все $(2j+1)$ состояния $|nljm_j\rangle$ соответствуют этому уровню имеют одинаковую чётность $(-1)^l$. Поэтому любые матричные элементы оператора $\hat{\vec{d}} = e\hat{\vec{z}}$ в обкладках этих состояний строго равны 0: $\langle nlm_l|\vec{d}|nlm_l'\rangle = 0$ =>

=> не наблюдается линейного эфф. Штарка.

$$E^{(2)} = \sum \frac{|\langle n'l'j'm_j'|-e\xi\hat{z}|nljm_j\rangle|^2}{E_{nj} - E_{n'j'}}$$

$\langle n'l'j'm_j'|\hat{z}|nljm_j\rangle \neq 0$, если $l' = l \pm 1$ и $m_l' = m_l$.

Преобразуем матричный элемент:

$$\langle n'l'j'm_j'|\hat{z}|nljm_j\rangle = \langle n'l'|\langle l'm_l'|\langle sm_s'|\hat{z}|nl\rangle|lm_l\rangle|sm_s\rangle \cdot$$

$$\cdot \sum_{m_l'm_s'} \langle j'm_j'|l'm_l'sm_s'\rangle$$

$$E_{nj}^{(2)} = e^2\xi^2 \sum_{n', l'=l\pm1} \frac{|\langle n'l'm_l sm_s|\hat{z}|nlm_l sm_s\rangle|^2}{E_{n'j'} - E_{nj}} \cdot$$

$$\underbrace{\cdot \left(\sum_{m_l'm_s'} \langle j'm_j'|l'm_l'sm_s'\rangle\right)^2 \left(\sum_{m_l m_s} \langle jm_j|lm_l sm_s\rangle\right)^2}_{=A^2} \Rightarrow$$

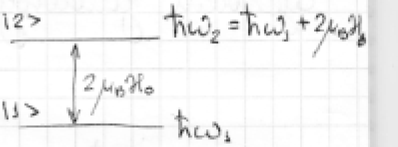
$$\Rightarrow E^{(2)}_{nj} = e^2 \mathcal{E}^2 A^2 \cdot \sum_{n',\, l'=l\pm1} \frac{|\langle n'l'm_l|\hat{z}|nlm_l\rangle|^2}{E_{n'j'} - E_{nj}} .$$

$\boxed{№29}$. Найти зависимость интенсивности сигнала в идеальном ЭПР-эксперименте от угла α м/у векторами поляризующего (постоянного) и возбуждающего (переменного) магнитных полей $\vec{\mathcal{H}}_0$ и $\vec{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}\cos\omega t$.

Интенсивность перехода м/у уровнями пропорциональна вер-ти перехода м/у уровнями.

$$\vec{\mathcal{H}}_0 = (0, 0, \mathcal{H}_0)$$

$$E^{(1)} = 2\mu_B(\hat{\vec{s}}\,\vec{\mathcal{H}}_0) \Rightarrow E^{(1)} = \pm\mu_B \mathcal{H}_0$$



$$\hat{V}(t) = \frac{2\mu_B \mathcal{H}\cos\omega t}{2}\left(\hat{\sigma}_1 \sin\alpha\cos\varphi + \hat{\sigma}_2 \sin\alpha\sin\varphi + \hat{\sigma}_3\cos\varphi\right) =$$

$$= \mu_B\mathcal{H}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\alpha e^{-i\varphi} \\ \sin\alpha e^{-i\varphi} & -\cos\varphi \end{pmatrix}\cos\omega t = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1(t) = e^{-i\omega_1 t} b_1(t) = e^{-i\omega_2 t + i\omega_0 t} b_1(t), \text{ где } \omega_0 = \dfrac{2\mu_B\mathcal{H}_0}{\hbar}, \\ c_2(t) = e^{-i\omega_2 t} b_2(t) = e^{-i\omega_1 t - i\omega_0 t} b_2(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\hbar(-i\omega_1)c_1(t) + i\hbar e^{-i\omega_1 t}\dot{b}_1(t) = c_1(t)(\hbar\omega_1 + V_{11}) + e^{-i\omega_1 t}e^{-i\omega_0 t} b_2(t) V_{12}, \\ i\hbar(-i\omega_2)c_2(t) + i\hbar e^{-i\omega_2 t}\dot{b}_2(t) = c_1(t)V_{21} + e^{-i\omega_2 t}(V_{22} + \hbar\omega_2) b_2(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{b}_1(t) = b_1(t)\dfrac{V_{11}}{\hbar} + b_2(t)\dfrac{V_{12}}{\hbar}e^{-i\omega_0 t}, \\ i\dot{b}_2(t) = b_1(t)e^{i\omega_0 t}\dfrac{V_{21}}{\hbar} + b_2(t)\dfrac{V_{22}}{\hbar}. \end{cases}$$

т.к. $\hat{V}(t) \sim \cos\omega t$, то обозначим:

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0_{11}} & V_{0_{12}} \\ V_{0_{21}} & V_{0_{22}} \end{pmatrix}\cos\omega t$$

$$\begin{cases} i\dot{b}_1(t) = b_1(t)\dfrac{V_{011}}{\hbar}\left(\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right) + b_2(t)\dfrac{V_{012}}{\hbar}\left(\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)e^{-i\omega_0 t}, \\ i\dot{b}_2(t) = b_1(t)\dfrac{V_{021}}{\hbar}\left(\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)e^{i\omega_0 t} + b_2(t)\dfrac{V_{022}}{\hbar}\left(\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right); \end{cases}$$

ω и $\omega+\omega_0$ – быстроосциллирующие частоты, поэтому их из ур-ния уберём.

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(t) = B_2(t)\dfrac{V_{012}}{2\hbar}e^{i(\omega-\omega_0)t} = B_2(t)\dfrac{V_{012}}{2\hbar}e^{i\Delta\omega t}, \\ i\dot{B}_2(t) = B_1(t)\dfrac{V_{021}}{2\hbar}e^{-i(\omega-\omega_0)t} = B_1(t)\dfrac{V_{021}}{2\hbar}e^{-i\Delta\omega t}; \end{cases}$$

сделаем замену: $\begin{aligned} B_1(t) &= e^{\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_1(t) \\ B_2(t) &= e^{-\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_2(t) \end{aligned}$. Тогда:

$$\begin{cases} i\left(\dfrac{i\Delta\omega}{2}\right)e^{\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_1(t) + ie^{\frac{i\Delta\omega t}{2}}\dot{d}_1(t) = e^{\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_2(t)\dfrac{V_{012}}{2\hbar}, \\ i\left(-\dfrac{i\Delta\omega}{2}\right)e^{-\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_2(t) + ie^{-\frac{i\Delta\omega t}{2}}\dot{d}_2(t) = e^{-\frac{i\Delta\omega t}{2}}d_1(t)\dfrac{V_{021}}{2\hbar}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{d}_1(t) = \dfrac{\Delta\omega}{2}d_1(t) + \dfrac{V_{012}}{2\hbar}d_2(t), \\ i\dot{d}_2(t) = -\dfrac{\Delta\omega}{2}d_2(t) + \dfrac{V_{021}}{2\hbar}d_1(t). \end{cases}$$

Ищем решение в виде: $d = e^{-iWt}A$

$$\begin{cases} WA_1 = \dfrac{\Delta\omega}{2}A_1 + \dfrac{V_{012}}{2\hbar}A_2, \\ WA_2 = -\dfrac{\Delta\omega}{2}A_2 + \dfrac{V_{021}}{2\hbar}A_1; \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta\omega}{2} - W & V_{012}/2\hbar \\ V_{021}/2\hbar & -\dfrac{\Delta\omega}{2} - W \end{vmatrix} = 0$$

$$W^2 - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 - \frac{|V_{12}|^2}{4\hbar^2} = 0$$

$$W_{1,2} = \pm\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \frac{|V_{12}|^2}{4\hbar^2}}}_{\Omega^2} = \pm\Omega$$

$$\begin{cases} d_1(t) = \beta_1 \cos\Omega t + \beta_2 \sin\Omega t, \\ d_2(t) = \alpha_1 \cos\Omega t + \alpha_2 \sin\Omega t; \end{cases}$$

пусть $w_1(0) = 1$, тогда $i\alpha_2 \Omega = \frac{V_{0_{21}}}{2\hbar}$. Значит:

$$w_2(t) = |d_2(t)|^2 = \frac{|V_{0_{21}}|^2}{4\hbar^2\Omega^2} \sin^2 \Omega t,$$

где $|V_{0_{21}}|^2 = \sin^2\alpha \, \mu_0^2 \mathcal{H}^2$

$$w_1(t) = 1 - \frac{|V_{0_{21}}|^2}{4\hbar^2\Omega^2} \sin^2 \Omega t,$$

$I_1 \sim w_1(t)$, $I_2 \sim w_2(t)$.

Теория.

① Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шрёдингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции $U(t_2, t_1)$, его общий вид и основные свойства.

С помощью унитарных преобразований можно выражать изменение состояния системы с течением времени. Это можно осуществить несколькими способами, которые наз. представлениями изменения состояния.

а) представление Шрёдингера:

Если спектр СЗ оператора не меняется с течением времени, то можно пользоваться операторами, матричная форма которых не зависит от времени. В этом случае изменение состояния с течением времени определяется изменением вектора состояния:

$$\psi(\xi, t) = \hat{U}(t, t_0)\, \psi(\xi, t_0),$$

где $\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right)$ – оператор эволюции системы.