Часть I

1. Матрица плотности

a) Условие нормировки для матрицы плотности $\hat{\rho}$

$$Tr\hat{\rho} = 1$$

b) Среднее значение наблюдаемой $\langle\hat{A}\rangle$, если система находится в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}$

$$\langle\hat{A}\rangle_\rho = Tr(\hat{A}\hat{\rho})$$

c) Необходимое и достаточное условие чистоты состояния, если система находится в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}$. Связь $\hat{\rho}$ с соответствующей волновой функцией $|\psi\rangle$.

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \qquad \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

2. Волновая функция

a) Условие нормировки волновой функции $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

b) Среднее значение наблюдаемой $\langle\hat{A}\rangle$, если система находится в состоянии с волновой функцией $|\psi\rangle$

$$\langle\hat{A}\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

c) Вероятность пребывания в другом чистом состоянии $|\xi\rangle$, если система находится в состоянии с волновой функцией $|\psi\rangle$

$$P_{|\xi\rangle} = |\langle\xi|\psi\rangle|^2$$

3. Составные системы:

a)Матрица плотности подсистемы

$$\rho_1 = Tr_2\rho \qquad \rho_2 = Tr_1\rho$$

4. Динамика

a)Уравнение Гайзенберга для произвольного оператора $\hat{A}$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t) + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}(t)]$$

b)Нестационарное уравнение Шредингера (общий случай) $\hat{H}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$$

c)Стационарное уравнение Шредингера (общий случай) $\hat{H}$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

5. Одномерное движение материальной точки

a)Каноническое коммутационное соотношение

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

b) Нестационарное уравнение Шредингера для одномерного движения материальной точки в координатном представлении

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x))\Psi(x,t)$$

c) Стационарное уравнение Шредингера для одномерного движения материальной точки в координатном представлении

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\Psi(x) = 0$$

d) Уравнение непрерывности для одномерного движения материальной точки в координатном представлении

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}j = 0$$

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\frac{\partial}{\partial x}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi)$$

6. Гармонический осциллятор

a) $[\hat{a}, \hat{a}^+] =?$

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1$$

b) $\hat{a}|n\rangle =?$ $\qquad \hat{a}^{+}|n\rangle =?$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\ |n-1\rangle$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\ |n+1\rangle$$

c) Выражение для гамильтониана осциллятора через операторы $\hat{a}$ $\hat{a}^{+}$.
Уровни энергии $E_n =?$

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2})$$

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

d) Выражение для волновой функции когерентного состояния $|\alpha\rangle =?$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{\alpha\alpha^*}{2}} e^{\alpha a^{+}} |0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{\alpha\alpha^*}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

e) $\hat{a}|\alpha\rangle =?$ и $\langle\alpha|\hat{a}^{+} =?$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|\hat{a}^{+} = \langle\alpha|\alpha^*$$

7. Квазиклассическое приближение

a) Правило квантования Бора - Зоммерфельда

$$\int_{x_1}^{x_2} k(x)dx = \pi(n + \frac{1}{2}); \quad k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))}$$

Условие его применимости: $|\frac{dk(x)}{dx}| \ll k^2(x)$

b) Коэффициент туннелирования сквозь потенциальный барьер

$$T = e^{-2\int\limits_{x_1}^{x_2} \kappa(x)dx} \quad , \quad \kappa(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}$$

Условие применимости этой формулы: $|\frac{d\kappa(x)}{dx}| \ll \kappa^2(x)$

8. Трехмерное движение материальной точки

a) Канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$
$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$$
$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

c)Стационарное уравнение Шредингера в координатном представлении для трехмерного движения материальной точки

$$\triangle\Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r}))\Psi(\vec{r}) = 0$$

11.Момент

a) Определение момента
Момент - три любых оператора, удовлетворяющие соотношениям:

$$[l_i, l_j] = i\epsilon_{ijk}l_k$$

b) $\langle l'm'|lm\rangle =?$ $\quad \vec{l}^2|lm\rangle =?$ $\quad l_z|lm\rangle =?$ $\quad l_+|lm\rangle =?$ $\quad l_-|lm\rangle =?$

$$\langle l'm'|lm\rangle = \delta_{l\,l'} \cdot \delta_{m\,m'}$$
$$\vec{l}^2|lm\rangle = l(l+1)|lm\rangle$$
$$l_z|lm\rangle = m|lm\rangle$$
$$l_+|lm\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\ |l\ m+1\rangle$$
$$l_-|lm\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\ |l\ m-1\rangle$$

c) Определение скалярного и векторного операторов
Скалярный оператор - оператор, коммутирующий со всеми тремя моментами

$$[l_i, \hat{A}] = 0$$

Векторный оператор - вектор с тремя компонентами, при повороте преобразующийся как вектор:

$$[l_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k$$

d) Матричные элементы скалярного оператора A: $\langle l'm'|A|lm\rangle =?$

$$\langle l'm'|A|lm\rangle = \delta_{l\,l'} \cdot \delta_{m\,m'} \cdot a(l)$$

12. Формулы для операторов

a) $exp(\hat{A})\ \hat{B}\ exp(-\hat{A}) =?$

$$exp(\hat{A})\ \hat{B}\ exp(-\hat{A}) = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + ...$$

b) $[A,B] = \lambda \qquad [\hat{A}, f(\hat{B})] =?$

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = \lambda f'(\hat{B})$$

c) Явный вид матриц Паули $\sigma_i =?$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) $(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) =?$

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) = (\vec{a}\vec{b}) + i[\vec{a} \times \vec{b}]\vec{\sigma}$$

Часть II

1. Стационарная теория возмущений

a) Условие применимости

$$|E_n^{(0)} - E_m^{(0)}| \gg |\langle\psi_n^{(0)}|H_I|\psi_m^{(0)}\rangle|$$

b) Невырожденный уровень. Поправка к энергии, 1-й порядок.

$$E_n^{(1)} = \langle\psi_n^{(0)}|H_I|\psi_n^{(0)}\rangle$$

c) Невырожденный уровень. Поправка к энергии, 2-й порядок.

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^{(0)} | H_I | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

d) Невырожденный уровень. Поправка к волновой функции, 1-й порядок.

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H_I | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle$$

e) Вырожденный уровень. Поправка к энергии, 1-й порядок.

$$H_{ab} = \langle \psi_{na}^{(0)} | H_I | \psi_{nb}^{(0)} \rangle$$
$$\sum_{b=1}^{A} H_{ab} c_b = \lambda c_a$$
$$E_n^{(1)} = \lambda$$

2. Потенциально рассеяние

a) Волновая функция, описывающая рассеяние, амплитуда рассеяния.

$$\psi(\vec{x})|_{|x| \to \infty} = e^{i\vec{k}\vec{x}} + \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} f(\theta)$$

b) Амплитуда рассеяния в 1-м Борновском приближении. Условия применимости 1-го Борновского приближения.

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int d\vec{y}\, e^{-i\vec{k}'\vec{y}}\, \frac{2m}{h^2} V(\vec{y}) \psi(\vec{y})$$
$$|V| \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

c) Парциальное разложение плоской волны

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = e^{ikrcos(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(cos\theta) i^l j_l(kr)$$
$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$

d) Парциальное разложение волновой функции, описывающей рассеяние

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(cos\theta)\cdot R_l(r)$$

e) Парциальное разложение амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(cos\theta)\cdot f_l$$

f) Парциальное разложение сечения рассеяния

$$\sigma_{tot} = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi(2l+1)|f_l|^2$$

g) Условие унитарности для парциальных амплитуд рассеяния

$$Im\ f_l(k) = |f_l(k)|^2$$

h) Выражение для парциальной амплитуды рассеяния через фазу рассеяния

$$f_l = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_l} - 1)$$

3. Переходы

a) Представление взаимодействия (Дирака)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \psi_S = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\psi_D, \quad \hat{V}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{V}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

$$i\hbar\frac{d\psi_D}{dt} = \hat{V}(t)\psi_D(t)$$

b)Уравнение эволюции операторов в представлении взаимодействия(Дирака)

$$\hat{F}_D = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{F}_S = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{F}_H e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

c) Уравнение эволюции волновой функции в представлении взаимодействия(Дирака)

$$\psi_D = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\psi_S$$

$$\psi_S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi_S(0)$$

d) Связь представления взаимодействия (Дирака) с представлениями Шредингера и Гайзенберга.

$$\psi_D = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\psi_S$$
$$\hat{F}_D = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$
$$\psi_S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi_H$$
$$\hat{F}_S = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{F}_H e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

e) Золотое правило Ферми.

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_f |\langle\psi_f|H_I|\psi_i\rangle|^2 \cdot \delta(E_f - E_i - h\Omega)$$

5. Излучение

a) Канонические коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения.

$$[\hat{a}_{\vec{k},p}\hat{a}^+_{\vec{k}',p'}] = \delta_{\vec{k}\ \vec{k}'}\delta_{p\ p'}$$
$$[\hat{a}_{\vec{k},p}\hat{a}^+_{\vec{k},p}] = 0$$

c) Энергия и импульс поля излучения

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},p}\hbar\omega_{\vec{k}}\ \hat{a}^+_{\vec{k},p}\ a_{\vec{k},p}$$
$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k},p}\hbar\vec{k}\ \hat{a}^+_{\vec{k},p}\ a_{\vec{k},p}$$

c) Оператор вектор-потенциала

$$\hat{\vec{A}}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k},p}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k L^3}}[e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}\hat{a}_{\vec{k},p} + e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}\hat{a}^+_{\vec{k},p}]\vec{e}_{\vec{k},p}$$

d) Формула для электрического дипольного излучения.

$$\frac{I_p}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^4}{2\pi c^3}|\langle\psi_2|\vec{x}|\psi_1\rangle\vec{e}_{\vec{k},p}|^2$$

e) Правила отбора для электрического дипольного излучения

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0; \pm 1$$

6. Уравнение Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c(\alpha \hat{p}) + mc^2 \beta]\psi$$

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$