

**Обязательные задачи по курсу КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
(2015 г., 6 семестр)**

Часть 1: Каноническое квантование и простейшие квантовые системы.

1. Доказать, что для пары операторов, удовлетворяющих условиям

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}, [\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$$

справедливы тождества:

$$a) [\hat{A}, f(\hat{B})] = \hat{C} \cdot f'(\hat{B}), f'(x) \equiv \frac{df}{dx} \quad \exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A}) \cdot \exp(\hat{B}) \cdot \exp(-\hat{C}/2)$$

2. Известно, что $[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{B}$, и при этом $\exp(z\hat{A})\hat{B}\exp(-z\hat{A}) = i\hat{B}$. Найти все возможные значения z .
3. Найти коммутатор:

$$[\hat{H}, \hat{P}] = ?, \quad \hat{P} \equiv \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \quad \hat{H} \equiv \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + U(\hat{r}_1 - \hat{r}_2),$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

4. Доказать, что спектр наблюдаемой, коммутирующей с двумя не коммутирующими между собой наблюдаемыми, является вырожденным.
5. Найти соотношение неопределенностей для дисперсий наблюдаемых e^x и p .
6. Построить гамильтониан точечной частицы в одномерном поле $U(x) = U_0 \cos(x/a)$ в пространствах координатных и импульсных волновых функций.
7. Найти, как преобразуются операторы координаты и импульса при унитарном преобразовании $\hat{U}(a, q) = \exp[i(a\hat{p} - q\hat{x})/\hbar]$.
8. Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса частицы в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\Psi_{Dp}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi D}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D} + i\frac{px}{\hbar}\right)$$

9. Пусть $\{|n\rangle\}$ – полный ортонормированный базис, составленный из собственных векторов наблюдаемой F с чисто дискретным спектром (f_n – соответствующие собственные значения). Найти среднее значение и дисперсию этой наблюдаемой в состоянии

$$\hat{\rho} = \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{8}|1\rangle\langle 2| - \frac{i}{8}|2\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|2\rangle\langle 2|.$$

10. Матрица плотности в координатном представлении имеет вид:

$$\rho(x, x') = \frac{1}{\sqrt{8\pi D}} \left(1 + \frac{xx'}{D}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + x'^2}{4D}\right)$$

Найти среднее значение и дисперсию координаты. Какое это состояние – чистое или смешанное?

11. Найти стационарную волновую функцию заряженной частицы в однородном и постоянном электрическом поле.
12. Найти гайзенберговы операторы координаты и импульса линейного гармонического осциллятора.
13. Найти волновую функцию частицы массы m в одномерном ящике с непроницаемыми стенками ($0 \leq x \leq L$) в момент времени t , если

$$\Psi(x, 0) = \frac{4}{\sqrt{5L}} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

14. Состояние точечной частицы массы m в одномерном ящике с непроницаемыми стенками ($0 \leq x \leq L$) в момент времени $t = 0$ задано матрицей плотности

$$\rho(x, x', 0) = \frac{1}{L} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x'}{L}\right) \left[1 + \frac{i}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{i}{2} \cos\left(\frac{\pi x'}{L}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x'}{L}\right)\right].$$

Найти $\rho(x, x', t)$.

15. Вычислить коэффициент отражения от одномерной прямоугольной ямы. При каком условии отражения не будет?

16. Найти спектр разрешенных значений энергий, собственные функции гамильтониана и коэффициенты отражения и прохождения для частицы массы m в «дираковской» потенциальной яме $U(x) = -V_0 \delta(x)$.
17. Вычислить плотность вероятности и плотность потока вероятности в момент времени t для свободной частицы, если $\Psi(x,0) = \Psi_{Dp}(x)$.
18. Определить средние значения и дисперсии координат, импульса и энергии линейного гармонического осциллятора в момент времени t , если при $t=0$ осциллятор находился в состоянии:

$$a) |\Psi_0\rangle \equiv (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2} \quad б) \hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$$

$$в) |\alpha\rangle \equiv \exp\left(-\frac{\alpha\alpha^*}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad з) \hat{\rho} = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \cdot \exp(-\beta\hat{H})$$

19. Найти явный вид координатных ВФ для состояния $|\alpha\rangle$.

20. *Вычислить:

$$a) \langle \alpha | \hat{x} \hat{p}_x | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p}_x | \alpha \rangle \quad б) \langle \alpha | \hat{p}_x \hat{x} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{p}_x | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$$

$$в) \langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle^1 \quad з) \langle \alpha | \hat{p}_x | \beta \rangle$$

21. Ядро, находящееся в основном состоянии во внешнем осцилляторном потенциале, испускает фотон с импульсом $\hbar k$ (за счет изменения внутренней энергии на величину E_0). Найти вероятность испускания фотона «без отдачи», т.е. с сохранением исходного состояния ядра.

22. Определить спектр разрешенных значений энергии частицы массы m в потенциале

$$U(x) = V_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL)$$

23. Найти среднее значение и дисперсию l_x в состоянии $|l,m\rangle$.

$$24. \text{Найти } \hat{U} \hat{r} \hat{U}^+, \hat{U} \hat{l} \hat{U}^+, \quad \hat{U}(\Omega) \equiv \exp(i\vec{\Omega} \hat{l}).$$

25. Состояние частицы характеризуется вектором $|l,m\rangle = |1,0\rangle$. Найти вероятности того, что проекция орбитального момента на ось, составляющую с осью z угол θ , равна $+1, 0, -1$.

26. Найти уровни энергии для сферической тонкой оболочки $U(r) = -V_0 \delta(r-a)$.

27. Найти уровни энергии частицы в потенциале

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \leq a \\ U_0 b^2 / r^2, & r > a \end{cases}$$

28. Определить число s -состояний в потенциале $U(r) = -U_0 \Theta(R-r)$.

29. Вычислить для кулоновского потенциала $\langle nlm | r^{-k} | nlm \rangle, k=1,2,3$.

30. Показать, что если \hat{S} - скалярный оператор, то $\langle l' m' | \hat{S} | l m \rangle = \delta_{l'l'} \delta_{m'm} s(l)$.

Часть 2: Частицы со спином. Приближенные методы.

31. Проекция спина электрона на ось z равна $+1/2$. Какова вероятность обнаружить ориентацию спина вдоль или против оси, составляющей с осью z угол θ ?

32. Доказать формулу:

$$(\vec{a} \hat{\sigma}) \cdot (\vec{b} \hat{\sigma}) = (\vec{a} \vec{b}) + i \hat{\sigma} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]$$

33. Прибор Штерна-Герлаха разделяет пучок частиц спина $1/2$ в зависимости от проекции спина на ось $\vec{n}(\vartheta, \varphi)$. Найти отношение интенсивностей пятен на экране, если спиновое состояние частиц пучка:

$$a) \text{ описывается ВФ } \chi = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix};$$

$$б) \text{ (для } \vec{n}(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_z) \text{ описывается матрицей плотности } \hat{\rho} = (1 + \vec{\xi} \cdot \hat{\sigma}) / 2, \quad |\vec{\xi}| \leq 1.$$

При каком направлении $\vec{n}(\vartheta, \varphi)$ отношение интенсивностей «верхнего» и «нижнего» пятен максимально?

34. Построить матрицу оператора спина для $s=1$.

35. Как изменяется направление спина электрона в однородном и постоянном по направлению магнитном поле $B(t)$, если в начальный момент времени спин ориентирован под углом θ к полю?

36. Электрон находится в магнитном поле

$$\vec{B} = B_1 [\vec{e}_x \cos(\omega t) + \vec{e}_y \sin(\omega t)] + B_0 \vec{e}_z$$

и при $t=0$ его спин ориентирован вдоль оси z . Найти вероятность переворота спина к моменту времени t , исследовать резонансы.

37. *Доказать, что скалярное произведение двух векторных операторов является скалярным оператором, а векторное произведение – векторным оператором.

38. Для двух спиновых частиц найти собственные векторы операторов квадрата полного спина и его проекции на выделенную ось. Построить операторы проектирования на синглетное и триплетное состояния.

39. Спины двух спиновых частиц ориентированы под углом α друг к другу. Найти вероятность того, что их суммарный спин равен 0.

40. Система из двух частиц со спином $\frac{1}{2}$ находится в чистом состоянии $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle]$. Найти матрицы плотности смешанных спиновых состояний, в которых находится каждая из частиц по отдельности.

41. Система двух спиновых частиц находится в состоянии

$$|X\rangle = \exp(i\varphi \hat{S}_x) |\uparrow\uparrow\rangle.$$

Найти вероятности реализации возможных значений \hat{S}_z .

42. Для электрона в атоме водорода найти вероятности реализации допустимых значений l_z и s_z и их средние значения в состоянии $|n, j, l, m_j\rangle$. Каково направление спина в этом состоянии в точке $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$?

43. Вычислить все ненулевые коэффициенты Клебша-Гордана для сложения моментов $l_1 = l_2 = 1$.

44. Гамильтониан системы двух закрепленных частиц со спином $\frac{1}{2}$, помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид: $\hat{H} = -(\mu_1 \hat{s}_1 + \mu_2 \hat{s}_2) \vec{H} + \lambda \hat{s}_1 \hat{s}_2$. Найти уровни энергии системы.

45. Пользуясь правилом Бора-Зоммерфельда, найти спектр энергий

а) линейного гармонического осциллятора;

б) частицы в однородном поле тяжести над абсолютно отражающей поверхностью;

в)* атома водорода.

46. Найти зависимость тока холодной эмиссии электронов из металла от прилагаемого электрического поля.

47. Оценить значение постоянной α -распада ядра с зарядом Z и радиусом R .

48. Для частицы, совершающей малые колебания вблизи минимума потенциала $U(x)$ найти поправки к уровням энергии, обусловленные слабой ангармоничностью. Указать условие применимости результата.

49. В первом порядке теории возмущений найти поправки к значениям уровней энергии водородоподобного атома, обусловленные неточностью ядра.

50. Рассматривая слагаемое $\lambda x_1 x_2$ в гамильтониане плоского осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)}{2} + \lambda \hat{x}_1 \hat{x}_2$$

как возмущение, найти поправки к энергетическим уровням. Сравнить с точным решением.

51. Найти расщепление энергетического уровня с $n=2$ атома водорода в сильном однородном постоянном электрическом поле.

52. Вариационным методом вычислить энергию основного и низшего возбужденного состояний частицы массы m в потенциале $U(x) = gx^4$.

Вопросы теоретического минимума:

1. Собственные значения и собственные векторы наблюдаемых, их основные свойства. Измерение в квантовой теории. Полный набор наблюдаемых.
 2. Аксиома соответствия и канонические коммутационные соотношения. Соотношение неопределенностей для некоммутирующих наблюдаемых.
 3. Координатное и импульсное представления наблюдаемых и векторов состояний.
 4. Эволюция квантовых систем: картины Шредингера и Гейзенберга. Уравнение непрерывности для плотности вероятности. Интегралы движения.
 5. Нормировка векторов состояний, принадлежащих дискретному и непрерывному спектру. Плотность числа состояний в непрерывном спектре.
 6. Чистые и смешанные состояния. Оператор (матрица) плотности. Среднее значение и дисперсия наблюдаемой в смешанном состоянии.
 7. Линейный гармонический осциллятор: спектр, собственные функции, повышающий и понижающий операторы.
 8. Орбитальный момент количества движения: коммутационные соотношения, спектр и собственные функции.
 9. Стационарные состояния в центрально-симметричном поле. Спектр изотропного осциллятора и атома водорода.
-
10. Частицы спина $\frac{1}{2}$. Матрицы Паули, их свойства.
 11. Уравнение Паули. Частицы со спином в однородном магнитном поле.
 12. Правило сложения моментов в квантовой теории. Коэффициенты Клебша-Гордана.
 13. Правило квантования Бора-Зоммерфельда.
 14. Коэффициент прохождения для одномерного барьера. Туннельный эффект. Проницаемость квазиклассического потенциального барьера.
 15. Первый порядок стационарной теории возмущений (в отсутствие и при наличии вырождения).
 16. Вариационный принцип и «прямой» вариационный метод.

Примечание: при ответе требуется знание основных понятий, определений и формул без вывода; для приближенных формул необходимо указание условий применимости. Ответ на вопросы теорминимума – необходимое условие получения положительной оценки на экзамене.