

# Вопросы и задачи к экзамену по курсу “Квантовая теория”

2-й поток; январь 2015 г.

## *Обозначения:*

В **первой** части (“Вопросы”) метки **L#** означают ссылки на лекционный материал.

Во **второй** части (“Задачи №1”) метка **S#** обозначает номер списка задач для семинарских занятий, а метка **L#** – ссылку на лекционный материал.

Во **третьей** части (“Задачи №2”) меткой **(#. #. #)** обозначен номер задачи в списке для семинарских занятий.

## ВОПРОСЫ К БИЛЕТАМ

### для экзамена по курсу «Квантовая теория»

январь 2015 г.

1. Соотношения неопределенностей (для операторов координаты и импульса, для компонент вектора момента). Когерентные состояния гармонического осциллятора. (L5, L17, L38)
2. Динамика квантовых систем в картине Гейзенберга. Теоремы Эренфеста. Эволюция волновых пакетов свободной частицы. (L7)
3. Динамика квантовых систем в картине Шредингера. Эволюция фиделити. Теорема Крылова – Фока. (L8)
4. Матричные элементы операторов координаты и импульса. Их связь, теоремы о суммах. Теорема соответствия для матричных элементов. (L8, L9, L15)
5. Одномерное стационарное уравнение Шредингера. Общие свойства волновых функций состояний дискретного спектра. Методы численного решения: метод стрельбы, расчет спектра диагонализацией гамильтониана. (L9, L11, L12)
6. Общие свойства дискретного спектра в одномерной потенциальной яме. Использование правила квантования Бора – Зоммерфельда для исследования дискретного спектра. (L9, L15)
7. Стационарные состояния электрона в однородном магнитном поле. (L10, L11, L19)
8. Одномерная задача рассеяния. Рассеяние волновых пакетов. (L12)
9. Состояния частицы в одномерном периодическом потенциале. Теорема Блоха. Закон дисперсии, эффективная масса. (L13)
10. Туннелирование в методе ВКБ. Применение к расчетам: автоионизация, время жизни метастабильных состояний в короткодействующих центральных потенциалах. (L13, L15, L21)
11. Квазиклассическое приближение: основы метода, пределы применимости. Теоремы соответствия для частот и матричных элементов. (L14, L15)
12. Свойства сферических гармоник как собственных функций оператора квадрата орбитального момента. Правила отбора для векторных операторов. (L18, L23)
13. Система двух спинов  $\frac{1}{2}$ . Операторы  $\hat{S}_{12} = \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2$  и  $\hat{T}_{12} = 3 \hat{\sigma}_1 \mathbf{n} \hat{\sigma}_2 \mathbf{n} - \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2$ , где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор, их спектры. (L19)
14. Состояния дискретного спектра частицы в кулоновском поле. Случайное вырождение. Зависимость пространственных размеров волновых функций от квантовых чисел. Ридберговские атомы. (L20, L21)
15. Состояния дискретного спектра частицы в короткодействующем центральном потенциале. Потенциал нулевого радиуса. (L20, L21)

16. Атом водорода в постоянном электрическом поле. Поляризуемость атома. Автоионизация. (L13, L23, L24)
17. Состояния частицы в одномерном периодическом потенциале. Приближение сильной связи. (L13, L25)
18. Стационарная теория возмущений для вырожденного случая. Гибридизация векторов. (L24, L25)
19. Атом в магнитном поле. Эффекты Зеемана и Пашена – Бака. Магнитная восприимчивость атома с нулевым магнитным моментом. (L25)
20. Метод линейных комбинаций: молекулярный ион водорода. (L25, L26)
21. Метод линейных комбинаций: одномерная цепочка сильной связи. Модель Андерсона. (L26, L27).
22. Условия применимости стационарной теории возмущений. (L27)
23. Запутанность состояний композитных систем. Матрица плотности. Редуцированная матрица плотности. (L28)
24. Принцип Паули и его следствия на примерах идеального ферми-газа и многоэлектронных атомов. Обменное взаимодействие. (L29, L30)
25. Модель идеального ферми-газа в применении к электронному газу в металлах. Теория холодной эмиссии. (L30, L31).
26. Модель идеального ферми-газа в применении к электронному газу в металлах. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. (L31).
27. Многоэлектронный атом: спектральные термы. Основные упрощения в теории многоэлектронных атомов. (L32)
28. Прямой вариационный метод и его связь с теорией возмущений. Метод Хартри для многоэлектронных атомов. (L22, L33)
29. Многоэлектронный атом: метод Хартри, метод Хартри – Фока. (L33, L34)
30. Многоэлектронный атом: уравнение Томаса – Ферми. (L34)
31. Нестационарная теория возмущений. Адиабатические и внезапные возмущения. (L33, L35, L36)
32. Нестационарная теория возмущений: полуклассическая теория фотоионизации атома. (L37)
33. Эволюция двухуровневой системы под воздействием постоянного возмущения и возмущения, гармонически зависящего от времени. (L19, L26, L38)

34. Нестационарная теория возмущений: золотое правило Ферми. Примеры постановки задач, условия применимости. (L37, L38)
35. Гармонический осциллятор. Области применения модели. Описание в картине Гейзенберга. Возбуждение гармонического осциллятора переменным однородным полем. (L5, L7, L39)
36. Функция Грина в аппарате квантовой теории. (L14, L26, L40)
37. Борновское приближение в теории рассеяния: стационарный и нестационарный подходы. Условия применимости приближения. (L39, L40)
38. Метод парциальных волн в теории рассеяния. Резонансное рассеяние медленных частиц. (L40, L41)
39. Квазистационарные состояния. (L8, L27, L42)
40. Квантование свободного электромагнитного поля. Оператор взаимодействия атомной системы с квантованным электромагнитным полем. (L42)
41. Спонтанное излучение атомов. Естественная форма линии. (L43)
42. Квантовая теория тормозного излучения. (L43, L44)
43. Взаимодействие атома с одной модой поля в резонаторе. Модель Джейнса – Каммингса. Учет затухания поля. Эффект Перселла, подавленное спонтанное излучение. (L44, L45)
44. Рассеяние фотона на электроне. (L45)
45. Рассеяние фотона на атоме. (L45)

16 DEC 14, 12:14 ■

**Задачи №1 к билетам**  
**для экзамена по курсу «Квантовая теория».**  
**Январь 2015 г.**

1. Оценить характерный масштаб силы в атомной системе единиц (S1).

2. Используя в качестве основных масштабов постоянную Планка, массу протона и размер ядра  $R = 1.25 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ , оценить характерный масштаб энергии ядерных процессов (S1).

3. Для рассеяния фотона видимого диапазона на свободном электроне оценить изменение длины волны фотона и скорости электрона (S1).

4. Оценить атомный масштаб электрического сопротивления (S1).

5. Оценить характерный масштаб действия для молекулы азота (L1).

6. Характерная энергия  $\alpha$ -частиц при  $\alpha$ -распаде составляет  $E \approx 5 \text{ МэВ}$ . Оценить характерный масштаб действия для ядерных процессов (L1).

7. Оценить масштаб длины в Планковской системе единиц (построенной на основе универсальных физических постоянных  $G$ ,  $c$ ,  $\hbar$ ) (L1).

8. Дано состояние  $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{83}}(-3|1\rangle + 5|2\rangle + 7|3\rangle)$ , где  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  образуют ортонормированный базис. Каковы возможные результаты измерения в этом базисе оператора  $\hat{Y} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$  и какова вероятность их реализации (S2)?

9. Низковольтная электронная пушка ELG-2A, выпускаемая компанией Kimball Physics, обладает минимальной шириной энергетического распределения пучка  $\Delta E = 0.3 \text{ эВ}$ . Считая среднюю энергию электронов равной  $E = 1 \text{ кэВ}$  и считая, что ширина энергетического распределения целиком связана с ограниченностью продольного размера волнового пакета электрона, оценить его наибольшую длину  $L$  (S3).

10. Оценить энергию основного состояния нейтрона, находящегося над непроницаемой горизонтальной плоскостью в поле тяжести Земли. Оценить высоту области пространственной локализации нейтрона в этом состоянии (S4).

11. Вычислить матричные элементы степеней координаты  $\langle 0|x^{2015}|2014\rangle$ ,  $\langle 0|x^{2015}|2015\rangle$  между стационарными состояниями гармонического осциллятора  $\varphi_n(x) \equiv |n\rangle$  (S4).

12. Электрон находится в прямоугольной потенциальной яме  $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$  с параметрами  $a = 3 \cdot 10^{-8}$  см и  $U_0 = 10$  эВ. Оценить энергию основного состояния в такой системе (S4).

13. Электрон находится в прямоугольной потенциальной яме  $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$  с параметрами  $a = 3 \cdot 10^{-8}$  см и  $U_0 = 0.1$  эВ. Оценить энергию основного состояния в такой системе (S4).

14. Электрон находится в поле плоской монохроматической стоячей электромагнитной волны с электрическим полем  $E_y(x, t) = \mathcal{E} \cos kx \cos \omega t$  с параметрами  $\mathcal{E} = 10^3$  Гс,  $\omega = 1.77 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>. Определить эффективный потенциал медленного движения электрона и оценить для него борновский параметр (S4).

15. Оценить вероятность  $\alpha$ -распада тяжелого ( $Z \sim 100$ ) ядра, если энергия вылетающих  $\alpha$ -частиц  $E = 5$  МэВ (S5).

16. Оценить время жизни электрона в основном состоянии атома водорода, помещенного в постоянное однородное электрическое поле с напряженностью  $\mathcal{E} = 10^5$  Гс (L13, L16).

17. Атом водорода в состоянии с  $l = n - 1$  помещен в однородное постоянное магнитное поле с напряженностью  $\mathcal{H} = 10^4$  Гс. Найти значение  $n$ , при котором ширина зеемановского мультиплета будет равна частоте перехода между уровнями  $n$  и  $n - 1$  (S7).

18. Вычислить разность  $\Delta\lambda$  длин волн излучения, испускаемого при переходах между состояниями  $3p$  и  $2s$  в атомах водорода и дейтерия (S7).

19. Для атома щелочного металла, внешний электрон которого находится в состоянии с  $n = 63$ , оценить частоту перехода между соседними уровнями и максимальную величину матричного элемента координаты для такого перехода. (L44, L15)

20. Оценить, при какой напряженности однородного постоянного магнитного поля зеемановское расщепление уровней превысит доплеровское уширение (L16).

21. Оценить неопределенность координаты электрона, связанную с движением в однородном постоянном магнитном поле  $\mathcal{H} = 10^4 \text{ Гс}$  (L11).

22. Атом водорода, находящийся в основном состоянии, помещен в постоянное однородное электрическое поле  $\mathcal{E} = 10^4 \text{ Гс}$ . Оценить порядок величины сдвига энергетического уровня (S8).

23. Атом водорода, находящийся в основном состоянии, помещен в постоянное однородное магнитное поле  $\mathcal{H} = 10^4 \text{ Гс}$ . Оценить порядок величины сдвига энергетического уровня (S8).

24. Оценить диамагнитную восприимчивость атома гелия. (L25)

25. Пусть центр масс атома водорода в основном состоянии локализован и неподвижен. Оценить кинетическую энергию протона (S9).

26. Вычислить среднюю величину скорости нуклонов в ядре, считая протоны и нейтроны компонентами идеального ферми-газа (радиус ядра можно принять равным  $R = 1.25 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ ) (S9).

27. Оценить концентрацию электронов, при которой электронный ферми-газ в основном состоянии становится релятивистским (S9).

28. Оценить плазменную частоту для электронного газа в металле с энергией Ферми  $E_F = 3.23 \text{ эВ}$ . (L30)

29. Работа выхода электрона с поверхности железа  $E_{out} = 4.5 \text{ эВ}$ . Оценить напряженность электростатического поля, при которой реально наблюдать ток холодной эмиссии с поверхности железа (L30).

30. Используя приближение Томаса-Ферми, оценить характерную глубину проникновения однородного постоянного электрического поля в кристалл натрия. Концентрация свободных электронов в натрии  $n = 2.65 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  (L34).

31. Учитывая, что обменный интеграл для электронов на одном атоме  $J \sim 0.5 \text{ эВ}$  (для конфигурации  $(1s)_1(2s)_1$ ), оценить температуру Кюри ферромагнетиков (S10).

32. Масштабом обратного времени, характеризующим величину возмущения, вызывающего переходы, является частота Раби  $\Omega = V_{12}/\hbar$ , где  $V_{12}$  – матричный элемент оператора возмущения между начальным и конечным состояниями. Оценить  $\Omega$  для атома в поле излучения лазерной указки мощностью  $W = 3 \text{ мВт}$  и диаметром  $d = 1 \text{ мм}$  (S11).

33. Оценить скорость перехода из состояния  $1s$  атома водорода под воздействием излучения с интенсивностью  $I = 10^8 \text{ Вт см}^{-2}$  и частотой  $\omega = \omega_a/2 = 2.1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$  (где  $\omega_a$  - атомный масштаб частоты). (L37)

34. Оценить напряженность электромагнитного поля, находящегося в резонансе с частотой перехода двухуровневой системы, при которой длина  $\pi$ -импульса будет равна обратной естественной ширине линии (L38).

35. Интенсивность солнечного света на орбите Земли  $I_S = 0.14 \text{ Вт/см}^2$ . Оценить скорость перехода под действием солнечного света для атома с частотой перехода в видимом диапазоне (L38).

36. На гармонический осциллятор с частотой  $\omega_0$ , находящийся в основном состоянии, действует импульс электромагнитного излучения с частотой  $\omega$  (длина волны много больше длины локализации основного состояния). Найти максимальную вероятность перехода осциллятора в первое возбужденное состояние. Чему при этих условиях равна вероятность перехода осциллятора во второе возбужденное состояние? (L39)

37. В момент  $t = 0$  нейтрон попадает в ядро атома и застревает в нем. Используя для электрона в атоме модель  $\delta$ -ямы:  $U(x, t) = \begin{cases} -q\delta(x), & t < 0 \\ -q\delta(x - Vt), & t \geq 0 \end{cases}$ , оценить энергию нейтрона, при которой станут заметны эффекты возбуждения и ионизации атома (S11).

38. Оценить сечение рассеяния медленных нейтронов на протонах в триплетном состоянии, учитывая, что энергия связи дейтрона  $E_0 = 2.2 \text{ МэВ}$  (L41).

39. Оценить полное сечение рассеяния нейтронов с энергией  $E_0 = 50 \text{ МэВ}$  на протонах (L40).

40. Оценить концентрацию фотонов в поле электромагнитного излучения, представляющего собой плоскую монохроматическую волну с интенсивностью  $I = 10^8 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$  и частотой  $\omega = 1.77 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  (S13).

41. Принято считать, что одномодовый лазер излучает когерентное состояние поля. Оценить среднюю мощность импульса фемтосекундного лазера видимого диапазона длиной  $\tau = 100 \text{ фс}$ , при которой вероятность того, что в импульсе окажется более одного фотона, в 100 раз меньше того, что в нем окажется ровно один фотон (S13).



42. Оценить частоту Раби  $\Omega$  для молекулы (частота перехода  $\omega = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$ , дипольный матричный элемент  $d_{12} = 1.47 \cdot 10^{-18} \text{ ГГС}$ ), взаимодействующей с единственным фотоном резонансной частоты в резонаторе объемом  $V = 7.3 \text{ см}^3$  (S13).

43. Оценить скорость перехода между состояниями  $2p$  и  $1s$  в атоме водорода (L43).

44. Поток электронов с энергией  $E = E_a = 27.2 \text{ эВ}$  и плотностью  $J = 6.2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2} \text{ c}^{-1}$  падает на протон. Оценить среднее время испускания фотона видимого диапазона. (L44)

45. Оценить силу давления света на свободный электрон в поле излучения с интенсивностью  $I = 10^8 \text{ Вт см}^{-2}$  и частотой  $\omega = 3.5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ . (L45)

**Задачи №2 для экзаменационных билетов  
по курсу «Квантовая теория»,  
январь 2015 г.**

**Задача 1 (2.2.4)**

Эрмитовы операторы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{L}$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:  $[\hat{A}, \hat{L}] = [\hat{B}, \hat{L}] = 0$ ,  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ . Показать, что среди собственных значений оператора  $\hat{L}$  обязательно есть вырожденные.

**Задача 2 (2.6.3)**

Пусть оператор  $\hat{a}$  таков, что  $\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \hat{I}$ . Показать, что среди комплексных матриц – операторов в пространстве  $\mathbb{C}_2$  **нет** оператора, удовлетворяющего этому соотношению.

**Задача 3 (2.11.2)**

Вычислить матрицы  $\hat{\tau}_i = \sqrt{\hat{\sigma}_i}$ , где  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – матрицы Паули.

**Задача 4 (2.11.3)**

Показать, что для любых  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) верно соотношение:

$$(c_1\hat{\sigma}_1 + c_2\hat{\sigma}_2 + c_3\hat{\sigma}_3)^2 = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\hat{I},$$

где  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – матрицы Паули.

**Задача 5 (3.3.5)**

Вычислить значение разновременного коммутатора  $[\hat{p}(t), \hat{x}(t')]$  для (а) свободной частицы; (б) гармонического осциллятора.

**Задача 6 (3.3.7)**

Для одномерного гармонического осциллятора в основном состоянии вычислить корреляционную функцию  $C(t) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(0) \rangle$ , где  $\hat{x}(t)$  – оператор координаты в картине Гейзенберга.

### Задача 7 (3.4.1)

Частица находится в ящике, разделенном барьером на две части. Обозначим состояние, в котором частица с достоверностью находится в левой (правой) части ящика, как  $|L\rangle$  ( $|R\rangle$ ). «Туннелирование» частицы через барьер описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \Delta \cdot (|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|).$$

Как будет эволюционировать во времени состояние, имеющее в начальный момент времени вид  $|\psi(t=0)\rangle = \alpha |L\rangle + \beta |R\rangle$ ?

### Задача 8 (3.4.5)

Гармонический осциллятор находится при  $t = 0$  в состоянии с волновой функцией

$$\varphi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_1(x) + \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi_2(x),$$

где  $\varphi_n(x)$  – волновая функция  $n$ -го стационарного состояния. Вычислить  $\langle x(t) \rangle$ .

### Задача 9 (4.7.1)

Частица падает слева в потенциальном поле прямоугольной «ступеньки»:

$$U(x < 0) = 0, \quad U(x \geq 0) = U_0.$$

Для заданной энергии  $E$  нарисовать график зависимости коэффициента прохождения  $T$  от параметра  $\beta = U_0/E$ .

### Задача 10 (4.9.1)

Доказать, что

$$\langle p | \hat{v} | p \rangle = \frac{dE}{dp},$$

где  $\hat{v}$  – оператор скорости,  $|p\rangle$  – стационарное состояние частицы с квазиимпульсом  $p$  и энергией  $E$  в произвольном периодическом потенциале  $V(x+d) = V(x)$ .

### Задача 11 (4.10.3)

Найти в импульсном представлении вид стационарного уравнения Шредингера для частицы в поле периодического потенциала  $V(x + d) = V(x)$ .

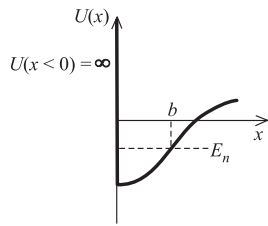
### Задача 12 (4.10.4)

Найти волновую функцию и значение энергии дискретного уровня для частицы в поле  $U(x) = -q \delta(x)$ , решая задачу в импульсном представлении.

### Задача 13 (4.10.5)

Найти вид волновых функций частицы в однородном поле  $U(x) = -Fx$  в импульсном представлении.

### Задача 14 (5.1.1)



Без использования правил квантования Бора-Зоммерфельда получить правило квантования энергетических уровней и найти соответствующие им квазиклассические волновые функции для потенциала, показанного на рисунке.

### Задача 15 (5.2.2)

Для частицы, находящейся в степенном потенциале  $U(x) = A|x|^\alpha$ , зависимость уровней энергии  $E_n$  от  $n$  имеет вид  $E_n \propto n^\nu$ . Методом ВКБ найти зависимость показателя  $\nu$  от  $\alpha$ .

### Задача 16 (5.2.5)

Используя квазиклассическое приближение, найти значения параметров потенциала

$$U(x) = -\frac{U_0 a^4}{(x^2 + a^2)^2},$$

отвечающих появлению новых состояний спектра при углублении ямы. Указать условия применимости результата.

### Задача 17 (5.3.4)

Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности барьера:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0 \exp(-x/a), & x \geq 0 \end{cases}$$

### Задача 18 (6.3.3)

Модельный гамильтониан для спин-орбитального взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\hat{H} = \frac{V(r)}{\hbar^2} \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}.$$

Считая, что электрон находится в состоянии с  $l = 1$ , найти собственные значения данного гамильтониана.

### Задача 19 (6.3.4)

Имеются две слабо взаимодействующие подсистемы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами полного момента и его проекции на ось  $z$ :  $(l_1, m_1)$  и  $(l_2, m_2)$  соответственно. Указать возможные значения полного момента  $\hat{L}$  совокупной системы 1 + 2 и вычислить среднее значение  $\langle \hat{L}^2 \rangle$  в рассматриваемом состоянии.

### Задача 20 (6.4.4)

Рассмотрим систему из трех расположенных в углах правильного треугольника частиц со спином 1/2, взаимодействие между которыми опи-

сывается гамильтонианом

$$\hat{H} = J \cdot (\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \hat{\mathbf{s}}_3 + \hat{\mathbf{s}}_3 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1),$$

где  $J > 0$ .

(а) Показать, что гамильтониан можно переписать с использованием оператора квадрата полного спина системы  $\hat{S}^2 = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_3)^2$ .

(б) Каково основное состояние для данной системы и кратность его вырождения?

### Задача 21 (7.1.1)

Показать, что в центральном поле в случае дискретного спектра минимальное значение энергии при заданном  $l$  ( $l$  – орбитальное квантовое число) растет с увеличением  $l$ .

### Задача 22 (7.1.3)

Определить уровни энергии сферического осциллятора (частица в поле  $U(r) = m\omega^2 r^2/2$ ), кратности их вырождения, и возможные значения орбитального момента в соответствующих стационарных состояниях.

### Задача 23 (7.2.8)

Определить средний потенциал электрического поля, создаваемый атомом водорода в основном состоянии.

### Задача 24 (8.1.2)

Используя пробную функцию Ферми

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\alpha}, & |x| \leq \alpha \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases},$$

найти оценку сверху для энергии основного состояния частицы в дельта-яме  $U(x) = -q\delta(x)$ .

### Задача 25 (8.1.6)

Доказать, что фиделити  $\mathfrak{F}$  пробной функции  $\theta(x)$  и точной волновой функции основного состояния  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет неравенству

$$\mathfrak{F} \geq 1 - \frac{\bar{E} - E_0}{E_1 - E_0}.$$

### Задача 26 (8.2.4)

Вычислить поправки 1-го и 2-го порядков к уровням энергии гармонического осциллятора при наличии возмущения  $\hat{V} = \varepsilon x^2$ . Оценить радиус сходимости ряда теории возмущений.

### Задача 27 (8.2.11)

Вычислить поляризуемость заряженной частицы, связанной в одномерном потенциале дельта-ямы.

### Задача 28 (8.3.2)

Пусть  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{V}$ , где  $\hat{H}_0$  – гамильтониан двумерного изотропного гармонического осциллятора, а  $\varepsilon \hat{V} = \varepsilon xy$ . Найти поправки первого порядка к энергиям  $E_n^{(0)}$  основного и первого возбужденного уровней системы  $\hat{H}_0$ .

### Задача 29 (8.3.3)

Используя теорию возмущений для вырожденного случая, найти дискретный спектр частицы в поле

$$U(x) = -q [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

### Задача 30 (9.1.4)

Кубит находится в состоянии, описываемом матрицей плотности общего вида

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} \end{pmatrix}.$$

Какова вероятность получить исходы  $+1$  и  $-1$  при измерении наблюдаемых, описываемых матрицами Паули  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  и  $\hat{\sigma}_z$ ?

### Задача 31 (9.2.2)

Два атома водорода, находящиеся в основном состоянии, расположены на расстоянии  $R$  друг от друга. Считая ядра атомов покоящимися, показать, что в первом порядке теории возмущений энергия взаимодействия атомов равна нулю и что учет второго порядка теории возмущений приводит к силам притяжения Ван-дер-Ваальса.

### Задача 32 (9.2.7)

Вычислить плотность состояний  $\rho(E)$  для частиц с законом дисперсии  $E = cp$  (ультрарелятивистский случай) в непроницаемом  $d$ -мерном ящике при  $d = 1, 2$  и  $3$ . Нарисовать графики  $\rho(E)$ .

### Задача 33 (9.3.3)

Эмпирическая формула Вайцеккера для энергии связи ядер содержит член, учитывающий протон-нейтронную асимметрию:

$$T_A = -\varepsilon \frac{(A - 2Z)^2}{A},$$

где  $\varepsilon = 23.7$  МэВ. Вычислить этот коэффициент, считая протоны и нейтроны в ядре компонентами идеального ферми-газа.

### Задача 34 (10.1.10a)

Найти энергию основного состояния системы двух тождественных частиц с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \mathbf{r}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_2^2 + \mathbf{r}_2^2) + \frac{k}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2.$$

Найти точное решение уравнения Шредингера.

### Задача 35 (10.1.10b)

Найти энергию основного состояния системы двух тождественных частиц с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \mathbf{r}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_2^2 + \mathbf{r}_2^2) + \frac{k}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2.$$

Решить задачу с помощью приближения Хартри.



### Задача 36 (11.1.5)

Вычислить в первом порядке нестационарной теории возмущений зависимость вероятности  $W_{12}$  перехода между уровнями 1 и 2 под действием нестационарного возмущения, представляющего собой импульс неизменной формы:

$$\hat{V}(t) = \hat{V}(t)_0 f\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

от параметра  $\gamma = \omega_{12}\tau$  ( $\tau$  – характерная длительность импульса).

### Задача 37 (11.2.7)

Двухуровневая система находится в основном состоянии. При  $t > 0$  она подвергается действию постоянного возмущения с недиагональным матричным элементом  $V$ . Вычислить зависимость от времени вероятности  $w(t)$  перехода в возбужденное состояние.

### Задача 38 (11.2.10)

Частица находится в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ). В некоторый момент времени правая стенка ямы за короткий интервал времени  $\tau$  смещается в точку  $b$  ( $b > a$ ). Найти вероятности возбуждения различных стационарных состояний частицы после остановки стенки. Указать условия применимости полученных результатов. Рассмотреть случай  $b = 2a$ .

### Задача 39 (11.2.11)

Частица находится в основном состоянии в мелкой прямоугольной потенциальной яме шириной  $a$ . Внезапно ширина ямы изменяется до значения  $b \sim a$ , глубина ямы при этом не меняется. Какова вероятность того, что при этом частица покинет яму? Какова средняя энергия частицы, покидающей яму?

### Задача 40 (12.1.4)

Вычислить в борновском приближении полное сечение рассеяния в поле с потенциалом

$$U(\mathbf{r}) = -Q [\delta(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})]$$

(вектор  $\mathbf{a}$  направлен вдоль оси  $z$  – направления потока падающих частиц).

### Задача 41 (12.2.7)

При выполнении каких условий сечение рассеяния на совокупности большого количества центров будет равняться сумме сечений рассеяния на отдельных центрах?

### Задача 42 (13.1.2)

Когерентным состоянием  $|\alpha\rangle$  гармонического осциллятора называется нормированное собственное состояние оператора уничтожения:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 1,$$

где  $\alpha$  - комплексное число. Представить когерентное состояние в виде суперпозиции энергетических состояний  $|n\rangle$ . Для двух когерентных состояний вычислить их скалярное произведение  $\langle \alpha | \beta \rangle$ .

### Задача 43 (13.1.3)

Найти результат воздействия оператора смещения  $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a})$  на вакуумное состояние моды электромагнитного поля  $|0\rangle$ . Найти состояние  $\hat{D}(\beta) \hat{D}(\alpha) |0\rangle$ .

### Задача 44 (13.1.6)

Найти зависимость от времени среднего значения и дисперсии оператора напряженности электрического поля для квантованного электромагнитного поля в одномодовом когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .

### Задача 45 (13.3.2)

Гамильтониан резонансного взаимодействия одномодового излучения с двухуровневой системой (модель Джейнса – Каммингса) имеет вид

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-),$$

где  $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$ ,  $\hat{\sigma}_i$  – матрицы Паули. Найти вероятность обнаружить систему в момент времени  $t$  на нижнем уровне с  $m$  фотонами, если в момент 0 система находилась на верхнем уровне с  $n$  фотонами.