АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

ШИМАНЧУК Дмитрий Викторович
shymanchuk@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург — 2013г.

Определения

Определение

Линейным пространством или *линеалом*, называют множество $\mathbf{L} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{s}, \mathbf{p}, \ldots$ элементов произвольной природы, называемых векторами, для которого:
1) задано правило, по которому любым двум элементам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ сопоставляется элемент $\mathbf{s} \in \mathbf{L}$, называемый их суммой и обозначаемый $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;
2) задано правило, по которому каждому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и любому вещественному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ сопоставляется элемент $\mathbf{p} \in \mathbf{L}$, называемый произведением $\mathbf{x}$ на λ и обозначаемый $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x}$;
3) заданные правила при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{L}$ и любых вещественных числах $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ подчинены аксиомам:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3. Существует нулевой вектор $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4. Для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ существует $\mathbf{x}' \in \mathbf{L}$, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$;
5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;
7. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Линейная зависимость и независимость I

Пусть $\mathbf{L}$ — произвольный линеал, $\mathbf{a}_i \in L$, $i = 1, \ldots, n$ — его элементы (векторы).

Определение

Элемент (вектор) $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$, где $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ — произвольные вещественные числа, называется *линейной комбинацией элементов (векторов)* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Определение

Элементы (векторы) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0)$, что $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Определение

Элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ возможно лишь в случае, когда вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ одновременно равны нулю.

Теорема 1.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ является возможность разложения по крайней мере одного из этих элементов по остальным.

Теорема 2.

Если хотя бы один из элементов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ нулевой, то эти элементы линейно зависимы.

Теорема 3.

Если среди n элементов какие-либо $n-1$ элементов линейно зависимы, то и все n элементов линейно зависимы.

Следствие. Если система элементов линейно независима, то и любое непустое подмножество этой системы также линейно независимо.

Теорема 1.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов линейного векторного пространства $\mathbf{V}^2$ является их коллинеарность.

Следствие 1. Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны, то они линейно независимы.
Следствие 2. Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трёх векторов в линейном пространстве $\mathbf{V}^3$ является их компланарность.

Следствие 1. Если векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ некомпланарны, то они линейно независимы в $\mathbf{V}^3$.

Следствие 2. Среди трёх некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных.

Следствие 3. Каковы бы ни были два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ на плоскости, всякий другой вектор $\overrightarrow{c}$, компланарный с $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, может быть разложен по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в виде $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$

Теорема 3.

Любые четыре вектора линейного пространства $\mathbf{V}^3$ линейно зависимы.

Следствие. Каковы бы ни были три некомпланарных вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ пространства $\mathbf{V}^3$, любой вектор $\overrightarrow{d}$ пространства $\mathbf{V}^3$ может быть разложен по векторам $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ в виде $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Базис линейного пространства I

Определение

Упорядоченный набор линейно независимых элементов (векторов) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ленеала $\mathbf{L}$ называется *базисом линеала*, если для каждого элемента (вектора) $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ найдутся такие вещественные числа $x_i, i = 1, \ldots, n$, что

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

.

Определение

Это равенство называют *разложением элемента (вектора)* $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Определение

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, фигурирующие в разложении элемента $\mathbf{x}$ линеала $\mathbf{L}$ по заданному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, называются *координатами вектора* $\mathbf{x}$ относительно рассматриваемого базиса.

Теорема 1.

Всякий элемент линеала $\mathbf{L}$ может быть единственным образом разложен по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, тем самым его координаты относительно заданного базиса определяются однозначно.

Теорема 2.

При сложении элементов линеала $\mathbf{L}$ их координаты складываются, а при умножении элемента на вещественное число все его координаты умножаются на это число.

Теорема 3.

Если каждый из $n+1$ элементов $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ линеала $\mathbf{L}$ представим в виде линейной комбинации n линейно независимых элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ того же линеала, т. е.

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \mathbf{x}_i, \quad j = 0, \dots, n,$$

то элементы $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ линейно зависимы.

Следствие. Любые $n+1$ элементов в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы.

Определение

Линеал **L** называют *конечномерным (n-мерным)*, если в нём имеется линейно независимая система, состоящая из n элементов, а всякая система содержащая более n элементов, является линейно зависимой.

Определение

Число n называют *размерностью линеала* **L** и обозначают символом $dim(\mathbf{L}) = \mathbf{n}$.

Определение

Линеал **L** называется *бесконечномерным*, если для любого натурального числа N в нём найдётся линейно независимая система, состоящая из N элементов.

Теорема.

Для того чтобы линеал **L** был n-мерным, необходимо и достаточно, чтобы в нём существовал базис, состоящий из n элементов.

9. (аксиома размерности). Линейное пространство **L** конечномерно и его размерность равна n.

Изоморфизм линейных пространств I

Определение

Соответствие между элементами двух линеалов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу из $\mathbf{L}$ отвечает единственный элемент из $\mathbf{L}'$, причём каждый элемент из $\mathbf{L}'$ отвечает одному лишь элементу из $\mathbf{L}$.

Определение

Два элемента $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ называются *изоморфными* ($\mathbf{L} \approx \mathbf{L}'$), если между элементами этих линеалов можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : \mathbf{x} \in \mathbf{L} \to \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}'$, что $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}, \lambda$ — любое вещественное число. Данное взаимно однозначное соответствие называют *линейным изоморфизмом.*

Теорема 1.

Все линеалы одной и той же размерности изоморфны.

Следствие. Каждое n-мерное линейное пространство $\mathbf{L}^n$ изоморфно координатному пространству $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.

Изоморфные линеалы имеют одну и ту же размерность.

Следствие 1. Конечномерные линеалы разных размерностей неизоморфны.
Следствие 2. Бесконечномерный линеал не может быть изоморфен никакому конечномерному линеалу.