Ф. Р. ГАНТМАХЕР

ЛЕКЦИИ
ПО
АНАЛИТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

531
Г 19
УДК 531.011 (075.8)

АННОТАЦИЯ

Книга знакомит читателя с методами аналитической механики и их приложениями в теории устойчивости по Ляпунову, в теории колебаний и в динамике твердого тела. Наряду с классическими методами теории колебаний излагаются и основы современных частотных методов. Рассматриваются электромеханические аналогии, позволяющие распространить методы аналитической механики на электрические и электромеханические системы.

«Лекции» дают достаточно глубокий фундамент для изучения специальной теории относительности, квантовой механики и других разделов теоретической физики. В них подробно освещаются вариационные принципы и интегральные инварианты механики, канонические преобразования и уравнение Гамильтона — Якоби.

Книга предназначена для студентов и аспирантов механико-математических и физических факультетов университетов, а также для инженеров-исследователей и других специалистов, желающих расширить и углубить свои знания в области механики.

Феликс Рувимович Гантмахер

Лекции по аналитической механике

М., 1966 г., 300 стр. с илл.

Редактор *Г. М. Ильичева*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *О. А. Сигал*

Сдано в набор 20/IX 1965 г. Подписано к печати 5/II 1966 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 9,375. Условн. печ. л. 15,75. Уч.-изд. л. 14,89. Тираж 25 000 экз. Т-01459. Цена книги 62 коп. Заказ № 1975.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Гатчинская, 26.

2-4-2
34-66

Светлой памяти своего учителя
профессора механики
ГАВРИИЛА КОНСТАНТИНОВИЧА
СУСЛОВА
автор посвящает эту книгу

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В литературе по механике нет единого общепринятого толкования термина «аналитическая механика». Некоторые авторы отождествляют аналитическую механику с теоретической[1]. Другие считают, что определяющим признаком аналитической механики является изложение в обобщенных координатах. Третья точка зрения, из которой исходил автор этой книги, назвав ее «Лекциями по аналитической механике», состоит в том, что аналитическая механика характеризуется как системой изложения, так и определенным кругом вопросов, в ней рассматриваемых.

Характерным для системы изложения аналитической механики является то, что в ее основу кладутся общие принципы (дифференциальные или интегральные) и уже из этих принципов аналитическим путем получаются основные дифференциальные уравнения движения. Изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование самих уравнений и методов их интегрирования — все это составляет основное содержание аналитической механики.

Аналитическая механика входит как часть курса теоретической механики в программы механико-математических, физических и инженерно-физических факультетов университетов и педагогических институтов. В то же время общая программа по теоретической механике во втузах либо совсем не содержит аналитической механики, либо содержит только ее элементы. Между тем современная техника выдвигает задачи, для решения которых недостаточно основ курса теоретической механики, излагаемых в его традиционных разделах «статика», «кинематика» и «динамика точки и системы». Инженеры-исследователи, работающие в разнообразных

[1] Так, например, известные курсы теоретической механики Г. К. Суслова и Ш. Ж. Валле Пуссена были названы авторами курсами аналитической механики.

областях современной техники, должны владеть и общими методами аналитической механики, которые дают универсальный аналитический аппарат для исследования сложных задач, относящихся не только к чисто механическим, но и к электрическим и электромеханическим явлениям.

Настоящая книга не претендует на полноту охвата материала по аналитической механике. Книга возникла из курса лекций, читавшихся автором на протяжении последних шести лет на 4-м семестре Московского физико-технического института. Это обстоятельство определило отбор материала и характер его изложения.

Курс аналитической механики является фундаментом, на который опирается изучение таких разделов теоретической физики, как квантовая механика, специальная и общая теория относительности и др. Поэтому в книге подробно освещаются вариационные принципы и интегральные инварианты механики, канонические преобразования, уравнение Гамильтона — Якоби, системы с циклическими координатами (главы II, III, IV и VII). Следуя идеям А. Пуанкаре и Э. Картана, автор кладет в основу изложения материала интегральные инварианты механики, которые здесь являются не декоративным украшением теории, а ее рабочим аппаратом.

Технические приложения связаны с рассмотрением несвободных систем. Эти системы подробно изучаются в главе I. В специальном параграфе этой главы, посвященном электромеханическим аналогиям, выясняется возможность распространения аналитических методов механики на электрические и электромеханические системы. В главах V и VI даны приложения аналитической механики к теории устойчивости Ляпунова и теории колебаний. Наряду с классическими вопросами теории линейных колебаний излагаются и элементы современных частотных методов. Задачи из динамики твердого тела разбираются в отдельных примерах.

Книга предполагает у читателя знакомство с общими основами теоретической механики и высшей математики. Книга предназначается для студентов и аспирантов механико-математических, физических и инженерно-физических факультетов университетов, а также для инженеров-исследователей и других специалистов, желающих расширить и углубить свои знания в области механики.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание книги подготовлено к печати уже после смерти ее автора. Работа по подготовке этого издания была выполнена кафедрой механики Московского физико-технического института, которой в течение многих лет руководил Ф. Р. Гантмахер. Бо́льшая часть исправлений и дополнений, сделанных в процессе этой работы, отражает пожелания и замечания, высказанные автором сотрудникам кафедры. Некоторые исправления обусловлены стремлением сделать текст более доступным для студентов. Внося эти уточнения, кафедра стремилась полностью сохранить специфические особенности книги, в которой строгость выводов основных положений аналитической механики и лаконичность текста удивительным образом сочетаются с предельной ясностью изложения.

М. А. Айзерман

Август 1965 г.

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Свободные и несвободные системы. Связи и их классификация

Изучается движение системы материальных точек P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) относительно некоторой инерциальной (галилеевой) системы координат. На положения и скорости точек системы наложены ограничения геометрического или кинематического характера, называемые *связями*. Системы с такого рода связями называются *несвободными* в отличие от *свободных* систем, у которых подобные связи отсутствуют.

Аналитически связь выражается уравнением

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) = 0\,^{1)}, \tag{1}$$

где в левую часть входят время t, радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu$ и скорости $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ всех точек P_ν системы ($\nu = 1, \ldots, N$).

---

[1]) Точка, поставленная над буквой, обозначает дифференцирование соответствующей величины по времени. Все радиусы-векторы строятся из одного и того же полюса, неподвижного в данной системе координат. Далее, $f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ представляет собой сокращенное обозначение для функции $f(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N)$. Подобного рода сокращенные обозначения будут употребляться на протяжении всей книги. Если x_ν, y_ν, z_ν — декартовы координаты точки P_ν в рассматриваемой системе координат ($\nu = 1, \ldots, N$), то функцию f можно считать функцией от $6N + 1$ скалярных аргументов t, x_ν, y_ν, z_ν, $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Относительно функции f, как и относительно всех функций, встречающихся в дальнейшем тексте, предполагается (при отсутствии соответствующих оговорок), что эти функции непрерывны вместе с теми своими производными, которые фигурируют в соответствующих местах текста.

В частном случае, когда скорости $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ не входят в уравнение связи (1), связь называется *конечной* или *геометрической*. Ее аналитическая запись выглядит так:

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0. \tag{2}$$

В общем же случае связь (1) называется *дифференциальной* или *кинематической*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких дифференциальных связей, в уравнения которых скорости точек входят линейно:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D = 0. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{l}_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{l}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, а векторы $\boldsymbol{l}_\nu$ и скаляр D представляют собой заданные функции от t и всех $\boldsymbol{r}_\mu$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, N$). При этом предполагается, что векторы $\boldsymbol{l}_\nu$ не могут все одновременно обращаться в нуль.

При наличии конечной связи вида (2) система не может в каждый данный момент времени занимать произвольное положение в пространстве. Конечная связь накладывает ограничения на возможные положения системы в момент времени t. При наличии же только дифференциальной связи система в любой момент времени t может иметь произвольное положение в пространстве. Однако в этом положении скорости точек системы уже не могут быть произвольными. Дифференциальная связь накладывает ограничения на эти скорости.

Каждая конечная связь вида (2) влечет за собой как следствие дифференциальную связь, уравнение которой получается почленным дифференцированием равенства (2):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

где $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \operatorname{grad}_\nu f$ ($\nu = 1, \ldots, N$) [1]). Но такая дифференциальная связь не эквивалентна конечной связи (2). Она эквива-

---

[1]) Если $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — взаимно-ортогональные орты координатных осей, то

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \boldsymbol{k} \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

лентна конечной связи

$$f(t,\ \boldsymbol{r}_\nu)=c, \tag{5}$$

где c — произвольная постоянная. Поэтому конечная связь (4) называется *интегрируемой*.

Заметим, что в прямоугольных декартовых координатах уравнения связей (1) — (4) записываются так:

$$f(t,\ x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ \dot{x}_\nu,\ \dot{y}_\nu,\ \dot{z}_\nu)=0, \tag{1'}$$

$$f(t,\ x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)=0, \tag{2'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}(A_\nu\dot{x}_\nu+B_\nu\dot{y}_\nu+C_\nu\dot{z}_\nu)+D=0\ ^{1)}, \tag{3'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{4'}$$

Конечная связь (2) или (2′) называется *стационарной*, если t не входит явно в уравнение связи, т. е. если $\frac{\partial f}{\partial t}=0$. В этом случае левая часть уравнения дифференциальной связи (4) линейна и однородна относительно скоростей. По аналогии с этим дифференциальная связь (3) или (3′) называется *стационарной*, если $D=0$ и векторы $\boldsymbol{l}_\nu$ в уравнении (3) [соответственно коэффициенты A_ν, B_ν, C_ν в уравнении (3′)] не зависят явно от t.

Система материальных точек называется *голономной*, если на точки этой системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи. Таким образом, голономной является всякая свободная система материальных точек, а также несвободная система с конечными или дифференциальными, но интегрируемыми связями. У голономной системы все связи могут быть записаны в конечном виде.

При наличии дифференциальных неинтегрируемых связей система называется *неголономной* [2]).

Система называется *склерономной*, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется *реономной*.

---

[1]) A_ν, B_ν, C_ν $(\nu=1,\ \ldots,\ N)$ — скалярные функции от t, x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N.

[2]) Часто и сами дифференциальные неинтегрируемые связи называются неголономными. Иногда дифференциальные интегрируемые связи называются *полуголономными*.

Примеры. 1. *Материальная точка может двигаться только по поверхности.* Пусть уравнение этой поверхности задано в виде

$$f(\boldsymbol{r})=0 \tag{6}$$

или

$$f(x,\ y,\ z)=0. \tag{6'}$$

Это конечная стационарная связь.

Если поверхность подвижная или деформирующаяся, то в уравнение поверхности явно войдет время t:

$$f(t,\ \boldsymbol{r})=0 \tag{7}$$

или

$$f(t,\ x,\ y,\ z)=0. \tag{7'}$$

В этом случае связь конечная, но нестационарная.

2. *Две материальные точки соединены стержнем постоянной длины l.* В этом случае уравнение связи имеет вид

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-l^2=0 \tag{8}$$

или

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0. \tag{8'}$$

Это голономная склерономная система.

Заметим, что твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга, т. е. подчиненных связям вида (8). С этой точки зрения свободное твердое тело является частным случаем несвободной голономной склерономной системы материальных точек.

3. *Две материальные точки соединены стержнем переменной длины $l=f(t)$.* Уравнение связи записывается так:

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-f^2(t)=0 \tag{9}$$

или

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-f^2(t)=0. \tag{9'}$$

Это голономная реономная система.

4. *Две материальные точки в плоскости соединены стержнем постоянной длины l и могут двигаться только так, чтобы скорость середины стержня была направлена вдоль стержня (движение конька по плоскости).* Уравнения связей записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} z_1=0,\ z_2&=0,\\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2&=0,\\ \frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}&=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эта система неголономная, так как последнее из уравнений (10) определяет дифференциальную неинтегрируемую связь.

Наряду со связями вида (1), которые называются *удерживающими*, в механике рассматриваются также *неудерживающие* связи, которые записываются в виде неравенства

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) \geqslant 0. \tag{11}$$

В качестве примера можно рассмотреть две материальные точки, соединенные нитью длиной l. Эта связь выражается неравенством

$$l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Если в условии (11) имеет место знак равенства, то говорят, что *связь напряжена*.

Движение системы, на которую наложена неудерживающая связь, можно разбить на участки таким образом, чтобы на одних участках связь была напряжена и движение проходило так, как если бы связь была удерживающей, а на других участках связь была не напряжена и движение проходило так, как если бы этой связи не было. Таким образом, на отдельных участках неудерживающая связь либо заменяется удерживающей, либо совсем отбрасывается. Исходя из этого, мы *в дальнейшем будем рассматривать исключительно удерживающие связи*.

§ 2. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Пусть на материальную систему наложены d конечных связей

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{1}$$

и g дифференциальных [1])

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\boldsymbol{v}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{2}$$

Заменим конечные связи вытекающими из них дифференциальными:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{3}$$

---

[1]) В уравнениях дифференциальных связей мы вместо $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ пишем $\boldsymbol{v}_\nu$.

Систему векторов $\boldsymbol{v}_\nu$ будем называть *возможными скоростями* для некоторого момента времени t и для некоторого возможного в этот момент положения системы, если векторы $\boldsymbol{v}_\nu$ удовлетворяют $d+g$ линейным уравнениям (2) и (3).

Таким образом, *возможные скорости — это скорости, допускаемые связями.* Для каждого возможного положения системы в момент времени t существует бесчисленное множество систем возможных скоростей. При действительном движении системы в момент t реализуется одна из этих систем скоростей.

Систему бесконечно малых перемещений

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu\, dt \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{v}_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$ — возможные скорости, будем называть *возможными бесконечно малыми перемещениями* или для сокращения просто *возможными перемещениями.* Умножив уравнения (2) и (3) почленно на dt, получим уравнения, определяющие возможные перемещения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} d\boldsymbol{r}_\nu + D_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и для одного и того же положения системы:

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu dt \quad \text{и} \quad d'\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}'_\nu dt \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Как $d\boldsymbol{r}_\nu$, так и $d'\boldsymbol{r}_\nu$ удовлетворяют уравнениям (5), а разности

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

удовлетворяют однородным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Разности $\delta \boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu$ будем называть *виртуальными перемещениями*. Всякая система векторов $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая уравнениям (7), представляет собой систему виртуальных перемещений. Уравнения (7) для виртуальных перемещений отличаются от уравнений (5), определяющих возможные перемещения, отсутствием членов $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$ и $D_\beta dt$. Поэтому говорят, что *виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при «замороженных» связях*.

Действительно, при «замораживании» время t, входящее в уравнения конечных связей, фиксируется, т. е. связь как бы застывает в той конфигурации, которую она имела в момент t. Тогда при дифференцировании функций f_α члены $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$ не появляются и первые d уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7). Для дифференциальной связи «замораживание» означает придание ей стационарного характера, т. е. отбрасывание D_β в левой части уравнений связи и фиксирование t, явно входящего в коэффициенты $l_{\beta\nu}$. После этого и последние g уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7).

Можно еще сказать, что виртуальные перемещения представляют собой перемещения точек системы из одного возможного положения системы в момент t в другое бесконечно близкое, возможное *для того же самого момента времени* t положение системы.

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными.

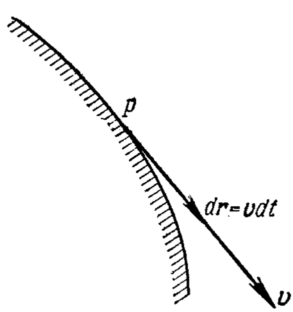

Рис. 1.

Примеры. 1. *Точка движется по неподвижной поверхности* (рис. 1).

В этом случае любой вектор $\boldsymbol{v}$, построенный из точки P и касательный к поверхности в этой точке, будет представлять собой возможную скорость. Соответствующее возможное перемещение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ также лежит в плоскости, касательной к поверхности в точке P. Разность $\delta \boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r}$ двух касательных векторов в свою очередь представляет собой вектор, касающийся поверхности в той же точке. Таким образом, любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, можно рассматривать как некоторое $d\boldsymbol{r}$ и как некоторое $\delta\boldsymbol{r}$. В данном примере связь стационарна и виртуальные перемещения совпадают с возможными.

2. Связь представляется *поверхностью S, которая сама движется* (как твердое тело) с некоторой скоростью $\boldsymbol{u}$ относительно исходной системы координат (рис. 2).

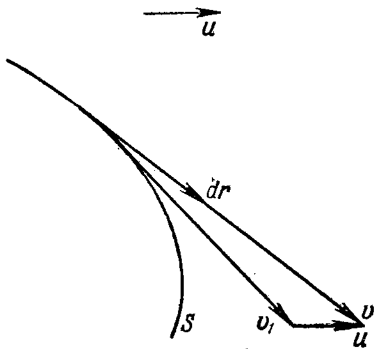

Рис. 2.

В этом случае возможная скорость $\boldsymbol{v}$ получается из произвольного вектора $\boldsymbol{v}_1$, касательного к поверхности, прибавлением к нему скорости $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}.$$

Поэтому

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{v}_1\,dt + \boldsymbol{u}\,dt.$$

Аналогично для другого возможного перемещения

$$d'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_1'\,dt + \boldsymbol{u}\,dt$$

и виртуальное перемещение

$$\delta\boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1)\,dt$$

представляет собой, в отличие от $d\boldsymbol{r}$, вектор, лежащий в плоскости, касательной к поверхности в точке P (рис. 3). Вектор $\delta\boldsymbol{r}$ представляет собой возможное перемещение для «остановленной» поверхности S.

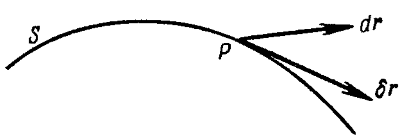

Рис. 3.

В декартовых координатах вектор $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ характеризуется тремя проекциями на оси δx_ν, δy_ν, δz_ν ($\nu = 1, \ldots, N$), и уравнения (7), определяющие виртуальные перемещения, могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\,\delta x_\nu + B_{\beta\nu}\,\delta y_\nu + C_{\beta\nu}\,\delta z_\nu) = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Если эти $d+g$ уравнений независимы, то среди $3N$ виртуальных приращений координат δx_ν, δy_ν, δz_ν будет

$n = 3N - d - g$ независимых. Число n называется *числом степеней свободы* данной системы материальных точек.

Пусть в точках P_ν системы приложены соответственно силы $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) [1]. Если бы связи отсутствовали, то, согласно второму закону Ньютона, между массами m_ν, ускорениями $\boldsymbol{w}_\nu$ и силами $\boldsymbol{F}_\nu$ имели бы место соотношения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$). При наличии связей ускорения $\boldsymbol{w}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ могут оказаться (в данный момент времени t, в данном положении точек системы $\boldsymbol{r}_\nu$ и при заданных скоростях $\boldsymbol{v}_\nu$) несовместимыми со связями. Действительно, продифференцировав почленно равенства (3) и (2) по времени, мы получим аналитическое выражение для ограничений, накладываемых связями на ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ точек системы [2]:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\right) \boldsymbol{v}_\nu + \frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{l}_{\beta\nu}}{dt} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ускорения $\boldsymbol{w}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ могут не удовлетворять этим соотношениям. Тогда материально осуществленные связи действуют на материальные точки системы P_ν с некоторыми дополнительными силами $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$); эти силы воздействия связей $\boldsymbol{R}_\nu$ носят название *реакций связей* [3]. Возникающие реакции таковы, что ускорения, определяемые из уравнений

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{9}$$

уже допускаются связями.

В отличие от реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) заранее заданные силы $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) называются *активными силами*.

[1]) Под $\boldsymbol{F}_\nu$ мы понимаем равнодействующую всех сил, приложенных непосредственно к материальной точке P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$).

[2]) Левые части в соотношениях (8) линейно зависят от ускорений $\boldsymbol{w}_\nu$. Эти левые части, как легко усмотреть после выполнения дифференцирования, зависят еще и от t, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

[3]) При наличии нескольких связей ($d + g > 1$) $\boldsymbol{R}_\nu$ есть равнодействующая всех реакций связей для точки P_ν ($\nu = 1, \ldots, N$).

Активные силы обычно задаются как известные функции от времени, положения и скоростей точек системы[1]):

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{10}$$

Основная задача динамики несвободной системы состоит в следующем.

Заданы активные силы $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$, *и даны совместимые со связями начальные положения* $\boldsymbol{r}_\nu^0$ *и начальные скорости* $\boldsymbol{v}_\nu^0$ *точек системы* $(\nu = 1, \ldots, N)$. *Требуется определить движение системы и реакции связей* $\boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$[2]).

Если относительно характера связей ничего неизвестно, кроме определяющих уравнений (1) и (2), и, следовательно, ничего неизвестно относительно вызываемых этими связями реакций $\boldsymbol{R}_\nu$, то сформулированная выше задача является неопределенной, так как число подлежащих определению скалярных величин $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$ большие числа имеющихся скалярных соотношений — уравнений $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}$, $m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}$, $m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$ и уравнений связей (1) и (2) $[6N > 3N + d + g]$.

Для того чтобы основная задача динамики стала определенной, необходимо иметь какие-то дополнительные $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$ независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения мы получим, если ограничимся важным классом *идеальных связей.*

Связи называются *идеальными, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т. е. если*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{11}$$

Это равенство можно переписать и в развернутом виде:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) = 0. \tag{11'}$$

---

[1]) В общем случае правые части в равенствах (10) зависят помимо t от всех $\boldsymbol{r}_\mu$ и $\boldsymbol{v}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, N)$.

[2]) В случае свободной системы задача определения реакций отпадает и остается только задача определения движения системы.

Среди $3N$ величин δx_ν, δy_ν, δz_ν имеется n независимых ($n = 3N - d - g$ — число степеней свободы данной системы). Поэтому в равенстве (11′) можно выразить $3N - n$ зависимых приращений δx_ν, δy_ν, δz_ν через n независимых приращений и приравнять нулю коэффициенты при этих независимых приращениях. Тогда мы получим недостающие n соотношений, благодаря которым основная задача динамики несвободной системы становится определенной.

Естественность и практическая важность выделенного нами класса связей станут ясными после рассмотрения следующих примеров идеальных связей.

Примеры. 1. Материальная точка вынуждена двигаться по *неподвижной гладкой поверхности* (рис. 4).

В этом случае любое возможное перемещение $d\boldsymbol{r}$, как и любое виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}$, лежит в плоскости, касательной

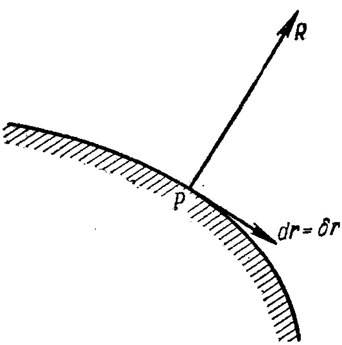

Рис. 4.

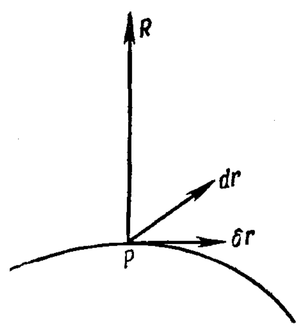

Рис. 5.

к поверхности в точке P, а реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности в этой точке; поэтому всегда

$$\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r} = 0.$$

2. Материальная точка вынуждена двигаться по *подвижной или деформирующейся гладкой поверхности* (рис. 5).

В этом случае возможная скорость материальной точки и, следовательно, бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ уже не лежит в касательной плоскости (см. пример 2 на стр. 18). Виртуальное же перемещение $\delta\boldsymbol{r}$, которое представляет собой бесконечно малое возможное перемещение для «остановленной», или «замороженной» поверхности, лежит в касательной плоскости. Поскольку реакция и в случае подвижной или деформирующейся гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности, то $\boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r}=0$ (в то время как $\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{r}\neq 0$).

Таким образом, *гладкая поверхность, как неподвижная, так и подвижная или деформирующаяся, представляет собой идеальную связь.*

Пример 2 наглядно поясняет, почему при определении нестационарных идеальных связей необходимо приравнивать нулю работу сил реакций на произвольных виртуальных, а не возможных перемещениях.

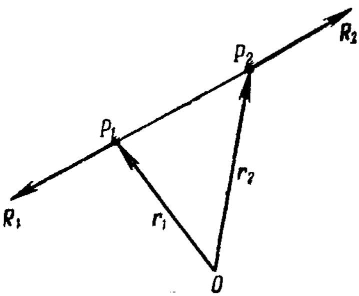

Рис. 6.

В дальнейших примерах мы встретимся уже только со стационарными связями[1]).

3. Две материальные точки *соединены стержнем неизменной длины с пренебрежимо малой массой* (рис. 6).

Обозначим через $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ реакции связи, приложенные к материальным точкам P_1 и P_2. Тогда согласно третьему закону Ньютона на стержень действуют силы $\boldsymbol{N}_1=-\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{N}_2=-\boldsymbol{R}_2$. Обозначая через m и $\boldsymbol{w}$ массу стержня и ускорение его центра инерции, а через I и ε — центральный момент инерции и угловое ускорение, будем иметь:

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2, \quad I\varepsilon=L,$$

где L — суммарный момент сил $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ относительно центра инерции. Но, по условию, $m=0$ и $I=0$. Следовательно, $\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2=0$ и $L=0$[2]). Из этих равенств следует, что силы $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, а значит, и $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ прямо противоположны, т. е. направлены вдоль стержня.

Далее,

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2 d\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_2(d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{R}_2 d(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1).$$

---

[1]) Из определения идеальных связей вытекает, что нестационарная связь является идеальной, если идеальными являются все ее конфигурации в различные моменты времени, рассматриваемые как стационарные связи.

[2]) Если движение стержня не плоскопараллельное, то скалярное равенство $I\varepsilon=L$ заменяется векторным $\frac{d}{dt}(\widehat{I}\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{L}$, где $\widehat{I}$ — тензор инерции, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Из равенства $\widehat{I}=0$ снова следует $\boldsymbol{L}=0$.

Пусть $\boldsymbol{R}_2 = c(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Тогда

$$\boldsymbol{R}_1 \delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta\boldsymbol{r}_2 = c(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\, d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{c}{2}\, d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = 0,$$

поскольку $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = \mathrm{const}$.

Можно считать, что абсолютно твердое тело является системой материальных точек, в которой на любые две точки наложена связь рассматриваемого типа. Поэтому твердое тело можно считать системой материальных точек, подчиненных идеальным связям. При отсутствии других связей, кроме связей, осуществляющих жесткое соединение точек тела между собой, твердое тело называется *свободным*.

4. Два твердых тела *шарнирно соединены в точке* A (рис. 7). Пренебрегая массой и размерами шарнира, можно утверждать (как и в предыдущем примере), что $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = 0$. Но тогда

$$\boldsymbol{R}_1 \delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}_2 \delta\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)\, \delta\boldsymbol{r} = 0.$$

5. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально гладкими поверхностями.* (Трением пренебрегаем!) (рис. 8). В этом случае снова $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = 0$. При этом $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ направлены по общей нормали к поверхностям. С другой стороны, относительная

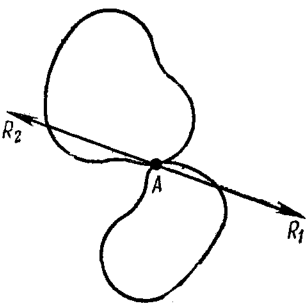

Рис. 7.

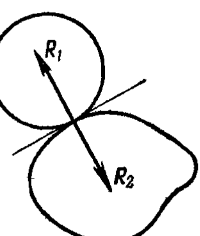

Рис. 8.

скорость этих тел в месте соприкосновения $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, а значит, и разность возможных перемещений $d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\, dt$ лежат в общей касательной плоскости. Поэтому

$$\boldsymbol{R}_1 \delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1\, d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\, d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2 (d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = 0.$$

6. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально шероховатыми поверхностями* («зубчатое зацепление»). В этом случае относительная скорость скольжения равна $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = 0$. Следовательно, и $d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\, dt = 0$. Поэтому и здесь

$$\boldsymbol{R}_1 \delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2 (d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = 0.$$

Сложный механизм можно рассматривать как систему твердых тел, которые попарно либо соединены между собой жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры — идеальными, все соприкасающиеся плоскости — идеально гладкими или идеально шероховатыми, то *любой сложный механизм можно трактовать как систему материальных точек, подчиненную идеальным связям.*

Заметим, что во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Так, например, пренебрежение силами трения может иногда существенным образом исказить физическую картину явления. В этом случае условие идеальности связей следует отбросить и вместо него взять другие условия, вытекающие из характера связей и законов трения.

Однако можно поступить иначе. Можно и в этих случаях считать связи идеальными, учитывая при этом только нормальные составляющие реакций негладких поверхностей и рассматривая силы трения как неизвестные активные силы. Появление новых неизвестных компенсируется дополнительными соотношениями, получаемыми из экспериментальных законов трения.

При такой трактовке понятия идеальных связей применимость этого понятия становится практически универсальной.

В дальнейшем всегда предполагается, что все связи, наложенные на систему, являются идеальными.

§ 3. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода

Для материальных точек несвободной системы имеют место уравнения

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

где m_ν — масса ν-й точки, $\boldsymbol{w}_\nu$ — ее ускорение, а $\boldsymbol{F}_\nu$ и $\boldsymbol{R}_\nu$ — соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку ($\nu = 1, \ldots, N$). Поскольку связи идеальны, то в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

Подставляя сюда вместо реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ их выражения из уравнений (1) и умножая обе части полученного равенства на — 1, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Равенство (3) называется *общим уравнением динамики*. Это равенство утверждает, что при движении системы в любой момент времени *сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Таким образом, общее уравнение динамики всегда выполняется для любого совместимого со связями движения, соответствующего заданным активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

Пусть теперь, наоборот, дано некоторое совместимое со связями движение системы, для которого выполняется общее уравнение динамики (3). Тогда, полагая

$$\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N),$$

будем иметь равенства (1) и (2). Таким образом, в любой момент времени можно подобрать такие реакции $\boldsymbol{R}_\nu$, которые в силу равенства (2) были бы допустимыми для данных связей и при которых имеют место полученные из второго закона Ньютона уравнения (1). Мы считаем, что эти реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ в действительности реализуются («гипотеза о реализации допустимых реакций») и что, следовательно, рассматриваемое движение соответствует данным активным силам $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Таким образом, *общее уравнение динамики выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы движение, совместимое со связями, соответствовало заданной системе активных сил* $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$[1].

Найдем выражения для реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ с помощью так называемых неопределенных множителей Лагранжа. Выпишем соотношения, определяющие виртуальные перемещения точек

---

[1]) При этом не следует забывать, что общее уравнение динамики (3) представляет собой, по существу, не одно уравнение, а систему уравнений, поскольку для любого момента времени t в уравнение (3) вместо $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ можно подставить *произвольные* виртуальные перемещения.

системы (см. § 2):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{5}$$

Умножая почленно равенства (4) и (5) на произвольные скалярные множители $-\lambda_\alpha$ и $-\mu_\beta$ и складывая почленно полученные равенства с равенством (2), получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\boldsymbol{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \right) \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{6}$$

В развернутом виде это соотношение запишется так:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta A_{\beta\nu} \right) \delta x_\nu + \{y\}_\nu \delta y_\nu + \{z\}_\nu \delta z_\nu = 0. \tag{6'}$$

Здесь мы через $\{y\}_\nu$ и $\{z\}_\nu$ сокращенно обозначили выражения, которые отличаются от выписанного в формуле (6') коэффициента при δx_ν заменой букв x, A на y, B или на z, C соответственно.

Соотношения (7') § 2 позволяют выразить $d+g$ из $3N$ виртуальных приращений δx_ν, δy_ν, δz_ν через остальные $n = 3N - d - g$ приращений. При этом определитель J, составленный из коэффициентов при «зависимых» приращениях в уравнениях (7') § 2, отличен от нуля.

Подберем $d+g$ множителей λ_α и μ_β так, чтобы в равенстве (6') коэффициенты при $d+g$ «зависимых» приращениях обратились в нуль. Это можно сделать, и притом единственным образом, ибо определитель J из коэффициентов при определяемых величинах λ_α, μ_β не равен нулю. После этого в равенстве (6') остаются только слагаемые с независимыми приращениями δx_ν, δy_ν, δz_ν. Но тогда и коэффициенты при этих независимых приращениях также должны быть равны нулю.

Иначе говоря, неопределенные множители λ_α и μ_β могут быть подобраны так, чтобы все скалярные коэффициенты в равенстве (6′) и, следовательно, все векторные коэффициенты в равенстве (6) обращались в нуль. Но тогда

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

Мы получили общее выражение для реакций идеальных связей через неопределенные множители Лагранжа λ_α, μ_β ($\alpha = 1, \ldots, d$; $\beta = 1, \ldots, g$).

Подставляя выражения (7) для $\boldsymbol{R}_\nu$ в уравнение (1), мы получим так называемые *уравнения Лагранжа первого рода*[1]:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнения связей:

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \;(\alpha = 1, \ldots, d;\; \beta = 1, \ldots, g). \tag{9}$$

Заменяя каждое векторное уравнение тремя скалярными, мы можем считать, что уравнения (8) и (9) составляют систему из $3N + d + g$ скалярных уравнений с $3N + d + g$ неизвестными скалярными величинами x_ν, y_ν, z_ν, λ_α, μ_β. Интегрируя эту систему, мы получаем конечные уравнения движения и одновременно из равенств (7) — величины реакций связей. Однако интегрирование такой системы обычно весьма затруднено из-за большого числа уравнений. Поэтому уравнения Лагранжа первого рода практически мало применяются.

В § 6 и § 10 мы получим уравнения Лагранжа второго рода для голономной системы и уравнения Аппеля для неголономной системы; в этих уравнениях число неизвестных скалярных величин (и, следовательно, число уравнений) равно $3N - d$, т. е. на $2d + g$ единиц меньше, чем в системе уравнений (8) и (9).

---

[1]) Эти уравнения были получены французским математиком и механиком Ж. Лагранжем в его знаменитом трактате «Аналитическая механика», опубликованном в 1788 г. (русский перевод т. I вышел в 1938 г., т. II — в 1950 г.). В этом трактате впервые были изложены основы аналитической механики.

Пример. Две весомые материальные точки M_1 и M_2 с одинаковой массой $m=1$ соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Определить движение точек M_1 и M_2.

Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты точек M_1 и M_2. Запишем уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2]=0,\\ &(x_2-x_1)(\dot y_2+\dot y_1)-(\dot x_2+\dot x_1)(y_2-y_1)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями λ и μ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_1&=-\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1),\\ \ddot y_1&=-g-\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_2&=\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1),\\ \ddot y_2&=-g+\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Из уравнений (11) с учетом первого уравнения (10) определим λ и μ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=-\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)-\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot x_1+(y_2-y_1)\ddot y_1],\\ \mu&=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot x_1-(x_2-x_1)\ddot y_1]. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Заметим, что уравнения (12) получаются из уравнений (11), если в последних заменить λ на $-\lambda$ и $\ddot x_1, \ddot y_1$ — на $\ddot x_2, \ddot y_2$. Поэтому, определяя λ и μ из уравнений (12), находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)+\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot x_2+(y_2-y_1)\ddot y_2],\\ \mu&=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot x_2-(x_2-x_1)\ddot y_2]. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Приравняв между собой соответствующие выражения для μ и λ в формулах (13) и (14), после элементарных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} (\ddot x_2-\ddot x_1)(y_2-y_1)-(\ddot y_2-\ddot y_1)(x_2-x_1)&=0,\\ (\ddot x_2+\ddot x_1)(x_2-x_1)+(\ddot y_2+\ddot y_1)(y_2-y_1)+2g(y_2-y_1)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Введем сокращенные обозначения:

$$u=x_2-x_1,\quad v=y_2-y_1,\quad P=\dot x_1+\dot x_2,\quad Q=\dot y_1+\dot y_2. \qquad (16)$$

Тогда уравнения (10) и (15) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2&=l^2,\\ \ddot{u}v-u\ddot{v}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$Pv-Qu=0, \tag{18}$$

$$\dot{P}u+\dot{Q}v+2gv=0. \tag{19}$$

Равенства (17) показывают, что в плоскости (u, v) точка с координатами u, v движется по кругу радиуса l с центром в начале координат, причем ее ускорение все время направлено к центру. Но тогда движение этой точки будет равномерным. Поэтому

$$u=l\cos\varphi,\quad v=l\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}=\alpha=\mathrm{const},\quad \varphi=\alpha t+\beta. \tag{20}$$

Согласно равенству (18) можно положить

$$P=\frac{f}{l}u,\qquad Q=\frac{f}{l}v. \tag{21}$$

Подставляя эти выражения в равенство (19) и учитывая равенства (17) и (20), найдем

$$\dot{f}+\frac{2g}{l}v=0,\quad \text{т. е.}\quad \dot{f}=-2g\sin\varphi.$$

Тогда

$$\frac{df}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{f}=-\frac{2g}{\alpha}\sin\varphi\quad \text{и}\quad f=\frac{2g}{\alpha}\cos\varphi+2\gamma.$$

Следовательно, в силу равенств (20) и (21), имеем

$$P=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\cos\varphi,\qquad Q=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\sin\varphi. \tag{22}$$

Интегрируя, находим

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=\int P\,dt=\frac{1}{\alpha}\int P\,d\varphi=\\ &=\frac{2\gamma}{\alpha}\sin\varphi+\frac{g}{\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{g}{\alpha^2}\varphi+2\delta,\\ y_1+y_2&=-\frac{2\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+2\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Из равенств (16), (20) и (23) окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_1 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi - \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_2 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
\varphi &= \alpha t + \beta
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

(α, β, γ, δ, ε — произвольные постоянные).

§ 4. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера

Положением равновесия называется такое положение системы, в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю.

Положение системы $\boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) будет положением равновесия в том и только в том случае, когда «движение» $\boldsymbol{r}_\nu(t) \equiv \boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) удовлетворяет общему уравнению динамики, т. е. когда в этом положении системы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \qquad (1)$$

Равенство (1) выражает собой *принцип виртуальных перемещений*.

Для того чтобы некоторое (совместимое со связями) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.

Обычно принцип виртуальных перемещений применяют к стационарным связям. Если связи стационарны, то термин «совместимое со связями» означает, что положение системы удовлетворяет конечным связям. Дифференциальные же связи, будучи линейными и однородными относительно скоростей, автоматически удовлетворяются, поскольку мы полагаем $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

Если связи нестационарны, то термин «совместимое со связями» означает, что они удовлетворяются *при любом* t, если в них положить $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^0$ и $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Заметим, что в этом случае при различных t могут быть различными и виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$).

В общем случае силы $\boldsymbol{F}_\nu$ зависят от t, $\boldsymbol{r}_\mu$, $\boldsymbol{v}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, N$): $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Тогда предполагается, что равенство (1) имеет место при любом значении t, если в выражении для $\boldsymbol{F}_\nu$ положить все $\boldsymbol{r}_\mu = \boldsymbol{r}_\mu^0$ и все $\boldsymbol{v}_\mu = 0$.

В простейших частных случаях принцип виртуальных перемещений (или как его иногда называют в применении к склерономным системам, принцип возможных перемещений) был известен еще во времена Галилея под названием «золотого правила механики»[1]).

Пусть на концы невесомого рычага, находящегося в равновесии, действуют силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Тогда, обозначая через F_1' и F_2' касательные (к возможным траекториям) составляющие этих сил, а через δl_1 и δl_2 — величины соответствующих элементарных возможных перемещений, мы в силу равенства (1) с точностью до знака будем иметь:

$$F_1'\,\delta l_1 = F_2'\,\delta l_2,$$

т. е.

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2} = \frac{F_2'}{F_1'}$$

(*выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот* — «золотое правило механики»).

Принцип виртуальных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы.

Примеры. 1. Выведем из равенства (1) условия равновесия свободного твердого тела, обычно получаемые в курсах механики из соображений геометрической статики. Обозначая через $\boldsymbol{v}_O$ скорость какой-либо точки твердого тела, через $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость тела, через $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}_O$ — главный вектор и главный момент относительно полюса O для системы внешних сил, действующих на твердое

[1]) Галилей приписывал обоснование «золотого правила механики» Аристотелю. В общей формулировке принцип виртуальных перемещений встречается впервые у Иоганна Бернулли в 1717 г.

тело, мы приравниваем нулю выражение[1]) для элементарной работы сил, приложенных к твердому телу на произвольном бесконечно малом перемещении этого тела:

$$\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})\,dt = 0. \tag{2}$$

В силу произвольности векторов $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ равенство (2) может иметь место тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{L}_O = 0. \tag{3}$$

Эти равенства представляют собой *необходимые и достаточные условия равновесия свободного тела.*

Аналогично получаются условия равновесия несвободного твердого тела. Пусть, например, точка O закреплена. Тогда $\boldsymbol{v}_O = 0$ и равенство (2) имеет вид $\delta A = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega}\,dt = 0$, откуда, в силу произвольности вектора $\boldsymbol{\omega}$, получаем искомое условие равновесия: $\boldsymbol{L}_O = 0$.

Если тело может только вращаться вокруг неподвижной оси u (с ортом $\boldsymbol{e}$), то равенства (2) принимают форму $\delta A = \boldsymbol{L}_O\omega\boldsymbol{e}\,dt = 0$, откуда, в силу произвольности величины ω, следует условие равновесия $L_u = 0$; здесь $L_u = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{e}$ — главный момент внешних сил относительно оси u.

2. Выведем условия равновесия произвольной несвободной *системы твердых тел, находящихся под действием силы веса.* Обозначим через M сумму масс всех тел и через z_c — вертикальную координату центра тяжести системы тел (считаем ось z направленной вертикально вниз). Тогда, согласно равенству (1), получим:

$$\delta A = Mg\,\delta z_c = 0,$$

и, следовательно, условия равновесия системы имеют вид

$$\delta z_c = 0. \tag{4}$$

Таким образом, положениями равновесия системы тяжелых тел будут положения, в которых центр тяжести занимает наинизшее,

---

[1]) Равенство $\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})\,dt$ может быть получено следующим образом. Обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ силы, действующие на точки твердого тела, через $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{v}_i$ — радиусы-векторы (проведенные из точки O тела) и скорости точек приложения сил $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) соответственно. Тогда, обозначая знаком $\times$ векторное умножение, найдем

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{v}_i\,dt = \sum_i \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\,dt = \left[\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right]dt$$

(замена $\delta\boldsymbol{r}_i$ на $d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i\,dt$ законна в силу того, что твердое тело является склерономной системой; см. стр. 14). Но в силу третьего закона Ньютона главный вектор и главный момент внутренних сил в твердом теле равны нулю. Поэтому $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ и $\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{L}_O$.

наивысшее или какое-либо другое «стационарное» положение по вертикали («принцип Торричелли»).

3. *Форма равновесия тяжелой однородной цепи, закрепленной в двух точках.* Рассматривая тяжелую однородную цепь как систему твердых тел (звеньев), можно написать соотношение (4). Но (см. рис. 9, где Oxz — вертикальная плоскость, z — вертикаль)

$$z_c = \frac{\int z\,ds}{\int ds},$$

и поскольку длина однородной цепи при перемещениях не меняется, то условие (4) принимает вид

$$\delta \int z\,ds = 0. \qquad (5)$$

Это соотношение можно записать и так:

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz = 0. \qquad (5')$$

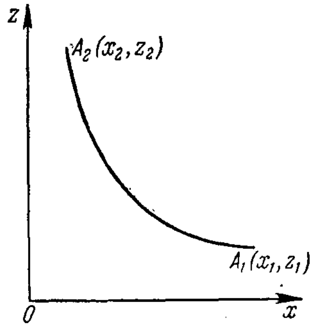

Рис. 9.

Как устанавливается в вариационном исчислении, в классе кривых $x = f(z)$, проходящих через заданные две точки, кривая, сообщающая интегралу

$$\int_{z_1}^{z_2} F\left(z, x, \frac{dx}{dz}\right) dz$$

экстремальное (точнее, стационарное) значение, для которого

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} F\,dz = 0,$$

должна удовлетворять дифференциальному уравнению [1])

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \left(x' = \frac{dx}{dz}\right). \qquad (6)$$

В нашем случае $F = z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$. Поэтому уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left[z \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} \right] = 0. \qquad (7)$$

[1]) Это уравнение было получено еще Эйлером. Относительно его вывода см. стр. 105 и замечание на стр. 107.

Отсюда

$$z \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} = c$$

и

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \tag{8}$$

где c — произвольная постоянная. Интегрируя, получаем уравнение цепной линии:

$$z = \frac{c}{2}\left[e^{(x-\alpha)/c} + e^{-(x-\alpha)/c}\right] = c \operatorname{ch} \frac{x-\alpha}{c}, \tag{9}$$

где значения произвольных постоянных c и α определяются из условий закрепления концов. Таким образом, *форма равновесия однородной тяжелой цепи представляет собой цепную линию*[1]).

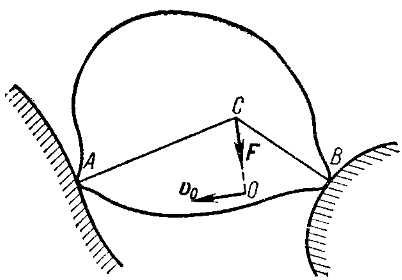

Рис. 10.

4. *Неизменная плоская фигура может скользить двумя своими точками A и B по неподвижным кривым, лежащим в той же плоскости.* Выясним, под действием какой силы F фигура может находиться в равновесии (рис. 10).

Помимо активной силы F на фигуру действуют еще две реакции, направленные по нормалям к кривым, и линии действия этих трех сил должны пересекаться в одной точке. Другими словами, линия действия силы F должна проходить через точку пересечения нормалей к кривым в точках A и B, т. е. *линия действия силы F должна проходить через мгновенный центр возможных скоростей C фигуры*[2]).

К этому же выводу можно прийти, исходя из принципа возможных перемещений. Действительно, обозначим через O какую-либо точку на линии действия силы F. Тогда из условия $\delta A = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_0\,dt = 0$ заключаем, что $\boldsymbol{v}_0 \perp \boldsymbol{F}$, откуда и следует, что мгновенный центр возможных скоростей фигуры расположен на линии действия силы F.

5. Некоторые *геометрические приложения*. Начнем с предварительного замечания. Пусть в плоскости даны некоторая кривая C

---

[1]) Галилей считал, что такой формой равновесия является парабола. Ошибка Галилея была исправлена Гюйгенсом.

[2]) При этом величина и направление силы F могут быть произвольными.

и точка P (в частном случае кривая C может выродиться в точку). Проведем из точки P нормаль к кривой C и обозначим через r расстояние по нормали от кривой C до точки P; таким образом, $r = P_0P$ (рис. 11). Приложим к точке P некоторую силу $\boldsymbol{F}$, направленную вдоль нормали P_0P, и будем считать $F > 0$, если направление силы $\boldsymbol{F}$ совпадает с направлением от P_0 до P, и $F < 0$ — в противном случае. Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$ равна $\delta A = \boldsymbol{F}(d\boldsymbol{r}_0 + d\boldsymbol{r})$. Но $d\boldsymbol{r}$ складывается из двух элементарных перемещений: из перемещения вдоль прямой P_0P (величина этого перемещения равна dr) и перемещения точки P, вызванного поворотом

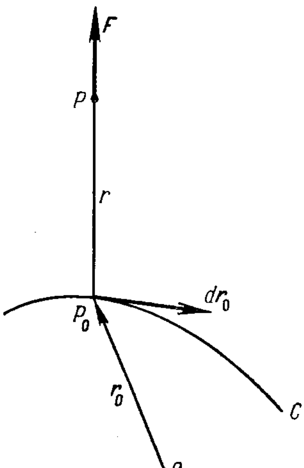

Рис. 11.

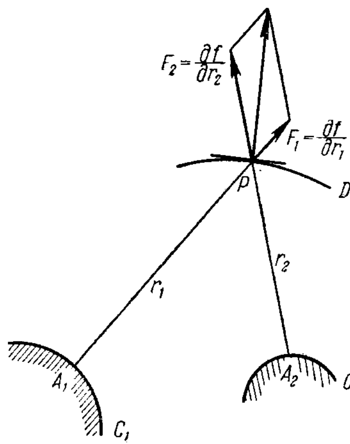

Рис. 12.

прямой P_0P. Последнее перемещение, как и $d\boldsymbol{r}_0$, перпендикулярно к прямой P_0P, т. е. к линии действия силы $\boldsymbol{F}$. Поэтому [1])

$$\delta A = F\,dr. \tag{10}$$

Пусть в одной и той же плоскости расположены n кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и точка P. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ расстояния (по нормалям) от точки P до этих кривых[2]) (рис. 12 соответствует случаю $n = 2$). Рассмотрим в той же плоскости кривую D, задаваемую уравнением [3])

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0. \tag{11}$$

[1]) В случае, когда кривая C вырождается в точку, формула (10) дает выражение для работы центральной силы.

[2]) Некоторые (или все) кривые $C_1, C_2, \ldots, C_n$ могут выродиться в точки.

[3]) Каждая из величин $r_1, r_2, \ldots, r_n$ является функцией от двух декартовых координат точки P. Поэтому уравнение (11) является уравнением некоторой кривой в плоскости.

Покажем, как по уравнению (11) *построить нормаль к кривой D в точке P.*

При любом бесконечно малом перемещении точки P вдоль кривой D получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i = 0. \tag{12}$$

Теперь приложим к точке P силы $F_i = \frac{\partial f}{\partial r_i}$, направленные вдоль нормалей r_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда равенство (12) запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \, dr_i = 0,$$

а это согласно предварительному замечанию означает, что сумма работ сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ при произвольном перемещении точки P вдоль кривой D равна нулю. Но тогда несвободная точка, которая может перемещаться вдоль гладкой кривой D, будет в равновесии под действием сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Поэтому *равнодействующая сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ направлена по нормали к кривой D.*

Мы получили очень простой способ геометрического построения нормали к кривой D, задаваемой уравнением (11).

Рассмотрим частные случаи:

а) D — эллипс. В этом случае C_1 и C_2 — точки (фокусы эллипса),

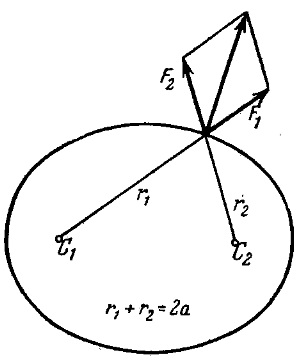

Рис. 13.

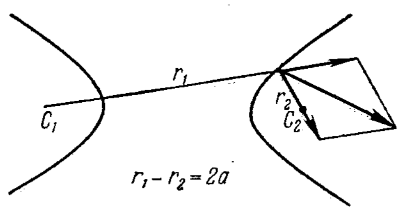

Рис. 14.

уравнение (11) имеет вид $r_1 + r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и *нормаль к эллипсу является биссектрисой угла между фокальными радиусами-векторами* (рис. 13).

б) D — гипербола. Уравнение гиперболы: $r_1 - r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = -1$, и из построения легко усмотреть (рис. 14), что *касательная к гиперболе есть биссектриса угла между фокальными радиусами-векторами* (а нормаль является биссектрисой смежного угла).

в) D — парабола (рис. 15), C_1 — прямая (директриса), а C_2 — точка (фокус). Уравнение параболы: $r_1 - r_2 = 0$. Как и в случае гиперболы, из построения следует, что *касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом-вектором* r_1 *и перпендикуляром* r_2, *опущенным на директрису.*

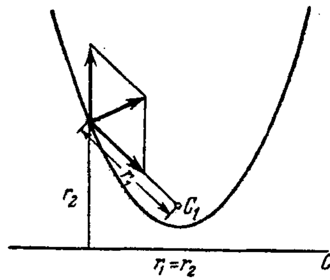

Рис. 15.

Уравнение (1) для принципа виртуальных перемещений представляет собой частный случай общего уравнения динамики [см. уравнение (3) на стр. 25]. Однако общее уравнение динамики можно рассматривать как уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений и характеризующее положение равновесия системы, которое получается если к активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ дополнительно причислить фиктивные силы инерции $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$). Таким образом, мы приходим к принципу Даламбера.

Принцип Даламбера. *При движении системы любое ее положение можно рассматривать как положение равновесия, если к активным силам, действующим на систему в этом положении, прибавить фиктивные силы инерции.*

Принцип Даламбера позволяет перенести приемы и методы решения статических задач на задачи динамики. В частности, он позволяет статическими методами определять динамические реакции. Действительно, в положении равновесия реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ отличаются только направлением от $\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$:

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = -\boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Но тогда

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N),$$

т. е. определенные с помощью принципа Даламбера реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ являются искомыми динамическими реакциями. Поэтому приведенную выше формулировку принципа Даламбера можно дополнить следующим положением:

Рассматривая силы инерции в качестве дополнительных активных сил, приложенных к точкам системы, мы заменяем данную динамическую задачу новой *статической задачей. Статические реакции в новой задаче совпадают с искомыми реакциями в исходной динамической задаче.*

Применение статических методов к решению задач динамики проиллюстрируем на следующих примерах.

Примеры. 1. *Тендер с водой движется с ускорением w. Требуется определить форму и положение поверхности воды.*

При отсутствии ускорения поверхность воды — горизонтальная плоскость. Данная плоскость в каждой своей точке перпендикулярна к направлению объемных сил веса, приложенных к воде. Это статическое положение может быть применено и к случаю ускоренного движения тендера, если к каждому элементу массы dm приложить дополнительно фиктивную силу инерции $dJ = -dmw$. Поверхность воды будет плоскостью, перпендикулярной к равнодействующей двух объемных сил: вертикальной силы веса dmg и горизонтальной силы инерции $-dmw$ (рис. 16). Поверхность воды будет наклонена к горизонту под углом φ, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{w}{g}$.

2. Напишем *дифференциальное уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси u* (рис. 17). К каждому элементу массы dm приложим фиктивную силу инерции $-dmw$.

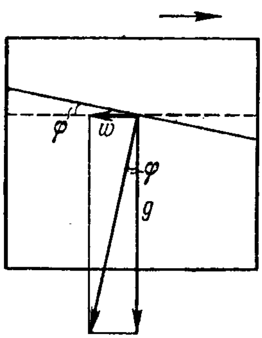

Рис. 16.

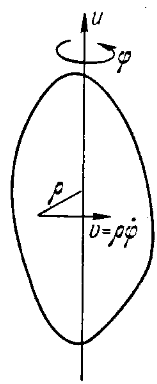

Рис. 17.

Вычислим главный момент сил инерции относительно оси вращения

$$-\int dm\rho\ddot{\varphi}\rho = -\ddot{\varphi}\int \rho^2 dm = -I_u\ddot{\varphi},$$

где $I_u = \int \rho^2 dm$ — момент инерции тела относительно оси вращения u. Обозначим через L_u главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси u [1]). Тогда согласно принципу Даламбера тело может находиться в равновесии под действием суммарного момента $L_u - I_u\ddot{\varphi}$. Поэтому (см. стр. 32) этот суммарный момент должен равняться нулю. Получаем:

$$I_u\ddot{\varphi} = L_u.$$

3. *Горизонтальный однородный вал равномерно вращается с угловой скоростью* ω. *Перпендикулярно к оси вала на равных расстояниях от подшипников на вал эксцентрично насажен однородный диск. Требуется определить давления на подшипники при вращении вала.*

Рассмотрим силы инерции $dm\omega^2\boldsymbol{r}$, соответствующие отдельным элементам dm диска (рис. 18). Это сходящиеся силы, направленные от оси вала. Равнодействующая этих сил равна $\boldsymbol{J} = \omega^2 \int \boldsymbol{r}\,dm = M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$, где M_1 — масса диска, а $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{OC}$ (O — точка пересечения плоскости диска с осью вала, а C — геометрический центр диска). Применяем принцип Даламбера и определяем статические давления на подшипники, считая, что к оси вала приложены три силы [2]): 1) сила веса вала Mg; 2) сила веса диска M_1g и 3) сила $\boldsymbol{J} = M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$.

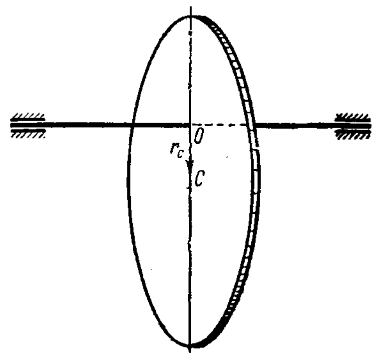

Рис. 18.

Давление N на каждый подшипник определяется формулой

$$N = \frac{1}{2}(M + M_1)g + \frac{1}{2}M_1\omega^2 r_C.$$

Сила N имеет максимальную величину

$$N_{max} = \frac{1}{2}(M + M_1)g + \frac{1}{2}M_1\omega^2 OC$$

в том положении диска, когда геометрический центр диска C расположен под точкой O.

---

[1]) Главный момент внутренних сил равен нулю.

[2]) Равнодействующая элементарных сил инерции для вала равна нулю и поэтому не учитывается.

§ 5. Голономные системы. Независимые координаты. Обобщенные силы

Пусть дана голономная система из N материальных точек P_ν с радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$[1]) ($\nu = 1, \ldots, N$), подчиненная конечным связям

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{1}$$

или (в эквивалентной записи)

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{1'}$$

Мы будем предполагать, что d функций f_α от $3N$ аргументов x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) независимы[2]); t здесь рассматривается как параметр. Поэтому мы можем из уравнений (1′) выразить d координат как функции $3N - d$ остальных и времени t и рассматривать эти $3N - d$ координат как независимые величины, определяющие положение системы в момент времени t.

Однако не обязательно в качестве таких независимых координат брать декартовы координаты. Можно все $3N$ декартовых координат выразить в виде функций от $n = 3N - d$ независимых параметров $q_1, \ldots, q_n$ и от t:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \quad y_\nu = \psi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \\ z_\nu &= \chi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти функции, будучи подставлены в уравнения связей (1′), обращают последние в тождества. Кроме того, мы будем предполагать, что любое положение системы, совместимое со связями в данный момент времени, может быть получено из равенств (2) при некоторых значениях величин $q_1, \ldots, q_n$.

Равенства (2) эквивалентны векторным равенствам

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

---

[1]) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz инерциальной системы координат.

[2]) В противном случае, при наличии, например, зависимости вида

$$f_d = \Omega(f_1, \ldots, f_{d-1}, t),$$

одна из связей (в данном случае $f_d = 0$) либо противоречила бы остальным [при $\Omega(0, \ldots, 0, t) \not\equiv 0$], либо была бы следствием остальных [при $\Omega(0, \ldots, 0, t) \equiv 0$].

Скалярные функции (2), а следовательно, и векторные функции (2') предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Минимальное число величин q_i, с помощью которых формулами (2) можно охватить все возможные положения голономной системы, совпадает с числом степеней свободы этой системы $n = 3N - d$ (см. стр. 19).

Величины $q_1, \ldots, q_n$ в формулах (2) или (2') (n — число степеней свободы) называются *независимыми обобщенными координатами* системы.

Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками некоторой области в n-мерном координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Каждому положению системы в момент времени t соответствует точка в пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, изображающая это положение системы. *Движению системы соответствует движение точки в координатном пространстве* $(q_1, \ldots, q_n)$.

Если все связи стационарны (склерономная система!), то время t не входит явно в уравнения (1'). Тогда всегда можно выбрать так координаты $q_1, \ldots, q_n$, чтобы и в уравнения (2) время t не входило. В дальнейшем предполагается, что для склерономной системы независимые координаты $q_1, \ldots, q_n$ выбраны именно таким образом. Тогда для склерономной системы формулы (2) и (2') принимают вид

$$x_\nu = \varphi_\nu(q_i), \quad y_\nu = \psi_\nu(q_i), \quad z_\nu = \chi_\nu(q_i)$$

$$(\nu = 1, \ldots, N), \tag{3}$$

или

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_i) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{3'}$$

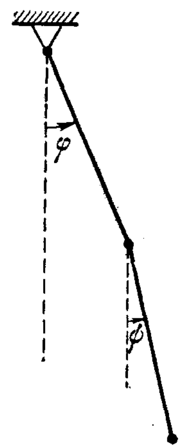

Рис. 19.

Примеры. 1. *Двойной маятник* (рис. 19), движущийся в плоскости, имеет две степени свободы. В качестве независимых координат q_1 и q_2 можно взять углы φ и ψ.

2. *Свободное твердое тело* имеет шесть степеней свободы. В качестве независимых координат можно взять три координаты x_A, y_A, z_A какой-либо точки A тела и три угла Эйлера ψ, θ и φ,

определяющие поворот системы осей $A\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с телом, относительно неподвижной системы осей координат $Oxyz$.

Углы Эйлера определяются следующим образом (рис. 20). Проводим через точку A оси Ax_1, Ay_1, Az_1, параллельные и одинаково направленные с осями Ox, Oy, Oz. Линия AN пересечения плоскостей Ax_1y_1 и $A\xi\eta$ называется линией узлов[1]). Тогда θ — «угол нутации» — угол между осями Az_1 и $A\zeta$; ψ — «угол прецессии» — угол между осями Ax_1 и AN; φ — «угол чистого вращения», образованный осями AN и $A\xi$.

Тремя параллельными сдвигами — вдоль осей Ox, Oy, Oz — соответственно на x_A, y_A, z_A триэдр осей $Oxyz$ переходит в положение $Ax_1y_1z_1$. Тремя последовательными поворотами — на угол ψ вокруг оси Az_1, на угол θ вокруг оси AN и на угол φ вокруг оси $A\zeta$ — триэдр $Ax_1y_1z_1$ переводится в положение $A\xi\eta\zeta$.

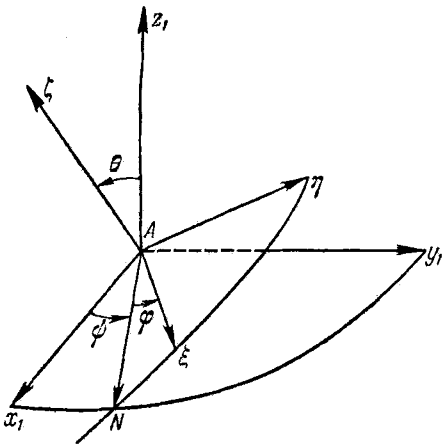

Рис. 20.

Таким образом, величины x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ определяют положение триэдра осей $A\xi\eta\zeta$ относительно триэдра $Oxyz$, т. е. определяют положение данного твердого тела относительно исходной системы осей координат.

Возьмем произвольную точку твердого тела. Она определяется заданием ее координат ξ, η, ζ. Тогда координаты x, y, z этой точки могут быть представлены как функции величин x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ. Так, например, из рис. 20 легко усмотреть, что

$$z = z_A + \xi \sin\varphi \sin\theta + \eta \cos\varphi \sin\theta + \zeta \cos\theta.$$

Аналогичные, несколько более сложные формулы имеют место для x и y[2]). Эти формулы представляют собой частный случай формул (2). Они не содержат явно t. *Свободное твердое тело является склерономной системой.*

---

[1]) Ось AN направляем так, чтобы поворот вокруг этой оси от оси Az_1 до $A\zeta$ по наименьшему углу совершался против часовой стрелки.

[2]) См., например, Суслов Г. К., Теоретическая механика, М. — Л., 1944, стр. 77 и 83.

Заметим, что при движении твердого тела величины x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ меняются и приведенное выше разложение перехода от $Oxyz$ к $A\xi\eta\zeta$ на три параллельных сдвига и три поворота дает представление произвольного движения твердого тела в виде сложного (составного) движения, состоящего из шести простых движений: трех поступательных (вдоль осей Ox, Oy, Oz) и трех чисто вращательных (вокруг осей Az_1, AN и $A\zeta$). Поскольку угловая скорость в сложном движении равна векторной сумме слагаемых угловых скоростей, то

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ направлены соответственно вдоль осей Az_1, AN, $A\zeta$, причем $\omega_\psi = \dot\psi$, $\omega_\theta = \dot\theta$, $\omega_\varphi = \dot\varphi$.

3. *Свободная материальная точка* M имеет три степени свободы. В качестве независимых координат можно взять декартовы или какие-либо другие координаты точки. В случае, когда

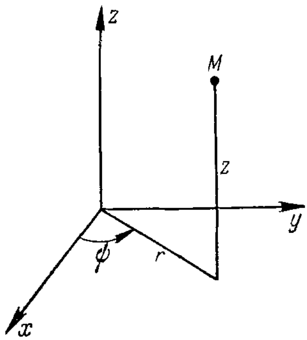

Рис. 21.

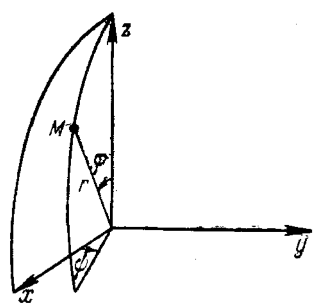

Рис. 22.

в качестве q_1, q_2, q_3 берутся цилиндрические координаты r, ψ, z, формулы (2) выглядят так (рис. 21):

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi, \quad z = z. \tag{5}$$

В случае сферических координат r, φ, ψ (рис. 22) вместо формул (5) имеем

$$x = r\cos\psi\sin\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi. \tag{6}$$

4. *Несвободная материальная точка* M *находится на подвижной сфере*

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = r^2.$$

Тогда $n=2$ и в качестве независимых координат можно использовать «долготу» и «широту» на сфере (рис. 23):

$$x = at + r\cos q_1 \cos q_2, \qquad y = bt + r\sin q_1 \cos q_2, \qquad z = ct + r\sin q_2.$$

Каждой координате q_i соответствует своя *обобщенная сила* Q_i ($i=1, \ldots, n$). Обобщенные силы определяются следующим образом. Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях

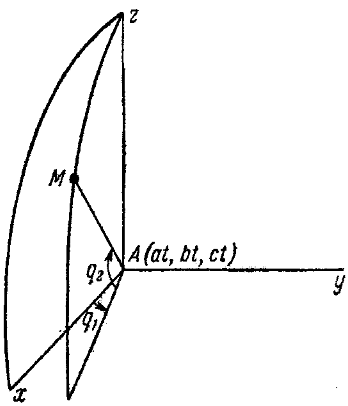

Рис. 23.

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu. \tag{7}$$

Но виртуальными перемещениями $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ являются виртуальные дифференциалы [т. е. дифференциалы при фиксированном («замороженном») t] от функции $\boldsymbol{r}_\nu(t, q_i)$ [1]:

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

Подставим выражения (8) в правую часть формулы (7) и выразим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях через произвольные элементарные прира-

[1] Действительно, функции $\boldsymbol{r}_\nu(t, q_i)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$, будучи подставлены в уравнения связей $f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, d)$, обращают эти уравнения в тождества. Продифференцируем почленно полученные тождества, предварительно зафиксировав t. Найдем:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{*}$$

где $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ — виртуальные дифференциалы. Но уравнения (*) совпадают с первыми d уравнениями (7) на стр. 16, которыми определялись виртуальные перемещения голономной системы. Следовательно, *виртуальные дифференциалы радиусов-векторов являются виртуальными перемещениями точек голономной системы.*

щения δq_i независимых координат q_i $(i=1, \ldots, n)$:

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i}\right)\delta q_i=\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i, \tag{9}$$

где коэффициенты при δq_i — «обобщенные силы Q_i» — определяются равенствами

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{10}$$

Заметим, что на практике при нахождении величины Q_i далеко не всегда пользуются формулой (10); вместо этого системе дают такое элементарное виртуальное перемещение, при котором только i-я координата q_i получает некоторое приращение, а остальные независимые координаты не изменяются. После этого вычисляют работу активных сил δA_i на таком специально выбранном перемещении. Тогда $\delta A_i = Q_i\,\delta q_i$ и

$$Q_i=\frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

Примеры. 5. *Твердое тело может двигаться только поступательно вдоль оси x.* Тогда $n=1$ и в качестве независимой координаты можно взять абсциссу x какой-либо точки тела A. При этом

$$\delta A = X\,\delta x, \tag{11}$$

где X — сумма проекций на ось x всех активных сил, действующих на тело. Очевидно, что X и есть обобщенная сила для координаты x:

$$Q=X. \tag{12}$$

6. *Твердое тело может только вращаться вокруг некоторой неподвижной оси u.* Соответствующий угол поворота φ может быть взят в качестве независимой координаты. Тогда

$$\delta A = L_u\,\delta\varphi, \tag{13}$$

где L_u — суммарный момент всех активных сил относительно оси вращения и

$$Q=L_u. \tag{14}$$

7. *Свободное твердое тело.* В качестве независимых координат возьмем три координаты x_A, y_A, z_A какой-либо точки A тела и три угла Эйлера ψ, θ, φ (см. пример 2 на стр. 41—42). Тогда, согласно равенству (9),

$$\delta A = Q_x\,\delta x + Q_y\,\delta y + Q_z\,\delta z + Q_\psi\,\delta\psi + Q_\theta\,\delta\theta + Q_\varphi\,\delta\varphi. \tag{15}$$

Для определения Q_x сообщим телу элементарное перемещение вдоль оси x. Тогда $\delta y_A = \delta z_A = 0$ и $\delta\psi = \delta\theta = \delta\varphi = 0$. Поэтому $\delta A = Q_x \delta x_A$. Сопоставление с равенством (11) дает

$$Q_x = X.$$

Аналогично $Q_y = Y$, $Q_z = Z$. Здесь X, Y, Z — проекции на неподвижные оси x, y, z главного вектора всех активных сил, действующих на тело.

Дадим теперь нашему телу такое элементарное перемещение, при котором изменяется только угол ψ, а величины x_A, y_A, z_A, θ и φ остаются неизменными. Тогда

$$\delta A = Q_\psi \delta\psi.$$

С другой стороны, рассматриваемое элементарное перемещение тела представляет собой поворот вокруг оси Az_1. Поэтому в соответствии с формулой (13)

$$Q_\psi = L_\psi,$$

где L_ψ — суммарный момент всех активных сил относительно оси Az_1, вокруг которой совершается поворот на угол ψ.

Совершенно аналогично $Q_\theta = L_\theta$ и $Q_\varphi = L_\varphi$, где L_θ и L_φ — суммарные моменты активных сил относительно осей AN и $A\zeta$.

К тем же выражениям для обобщенных сил можно прийти, если воспользоваться выражением для элементарной работы активных сил, приложенных к твердому телу (см. стр. 32) [1]):

$$\delta A = \boldsymbol{R}\,\delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{L}_A \boldsymbol{\omega}\, dt. \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{L}_A$ — главный вектор и главный момент системы сил относительно полюса A. Поскольку [см. формулу (4)] $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi$, где $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, и проекции вектора $\boldsymbol{L}_A$ на направления векторов $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ равны соответственно L_ψ, L_θ, L_φ, из формулы (16) находим

$$\delta A = X\delta x_A + Y\delta y_A + Z\delta z_A + L_\psi\delta\psi + L_\theta\delta\theta + L_\varphi\delta\varphi. \tag{17}$$

Сопоставление выражений (17) и (15) дает нам выражения для обобщенных сил.

Пусть теперь некоторое положение системы является положением равновесия. Согласно принципу виртуальных перемещений это возможно тогда и только тогда, когда

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i = 0. \tag{18}$$

---

1) Так как мы здесь имеем дело со склерономной системой, то вместо знака δ можно писать знак d, и наоборот. Поэтому $d\boldsymbol{r}_A = \delta \boldsymbol{r}_A$ и $\delta\psi = d\psi = \dot{\psi}dt$, $\delta\theta = \dot{\theta}dt$ и $\delta\varphi = \dot{\varphi}dt$.

Но приращения δq_i независимых координат q_i могут быть совершенно произвольными. Поэтому равенство (18) эквивалентно системе равенств

$$Q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Таким образом, *положение голономной системы является положением равновесия в том и только в том случае, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю.*

Примеры. 8. В соответствии с равенствами (19) условия равновесия свободного твердого тела запишутся так:

$$X = Y = Z = 0, \quad L_\psi = L_\theta = L_\varphi = 0 \tag{20}$$

(см. предыдущий пример). Здесь X, Y, Z — проекции на оси координат главного вектора $\boldsymbol{R}$ внешних сил, действующих на тело, а L_ψ, L_θ, L_φ — проекции главного момента $\boldsymbol{L}_A$ этих сил на три некомпланарных направления. Поэтому скалярные равенства (20) эквивалентны двум векторным:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{L}_A = 0.$$

Это необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, которые уже были установлены на стр. 32.

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых координатах

Приступая к выводу дифференциальных уравнений движения голономной системы в независимых координатах $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$, мы будем исходить из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\,\delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

Вспомним полученное в предыдущем параграфе выражение для элементарной работы активных сил

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\,\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i, \tag{2}$$

где

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Совершенно аналогично можно представить элементарную работу сил инерции $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$:

$$\delta A_J = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{i=1}^{n} Z_i \, \delta q_i, \tag{4}$$

где по аналогии с выражением (3)

$$Z_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} =$$
$$= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Но скорость

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \tag{6}$$

линейно зависит от $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Из этой формулы находим

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n; \quad \nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

С другой стороны, из того же равенства (6) получаем

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \tag{8}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \quad \nu = 1, \ldots, N).$$

Поэтому выражение (5) для Z_i может быть записано и так:

$$Z_i = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} =$$
$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

где T — кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2. \tag{10}$$

Общее уравнение динамики (1) нам дает

$$\delta A + \delta A_J = 0, \tag{11}$$

или, в силу равенств (2) и (4),

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - Z_i)\,\delta q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Так как q_i — независимые координаты и поэтому δq_i — совершенно произвольные приращения координат ($i = 1, \ldots, n$), то равенство (12) может иметь место тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δq_i в уравнении (12) равны нулю. Поэтому общее уравнение динамики (12) эквивалентно системе уравнений

$$Z_i = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

которые, согласно соотношениям (9), могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Уравнения (14) носят название *уравнений Лагранжа второго рода* или *уравнений Лагранжа в независимых координатах*.

Величины $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) называются *обобщенными скоростями*. Скорости точек системы $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ выражаются через обобщенные скорости (а также через независимые координаты и время) с помощью формул (6). Величины $\ddot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) называются *обобщенными ускорениями*.

В левые части уравнений Лагранжа (14) после выполнения операции $\frac{d}{dt}$ входят время t, обобщенные координаты q_i, обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и обобщенные ускорения $\ddot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Обобщенные силы Q_i ($i = 1, \ldots, n$), стоящие в правых частях уравнений Лагранжа, обычно задаются[1]) как функции от t, q_k, $\dot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, n$):

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

---

[1]) См. формулы (3) и (6) этого параграфа, а также формулу (10) на стр. 20 и формулу (2′) на стр. 40.

Уравнения Лагранжа (14) образуют систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями q_i от независимого переменного t. Порядок этой системы равен $2n$. Заметим, что система дифференциальных уравнений, определяющая движение голономной системы с n степенями свободы, не может иметь порядок, меньший $2n$, так как в силу произвольности начальных значений величин q_i и $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ решение системы должно содержать, по крайней мере, $2n$ произвольных постоянных. Таким образом, *система уравнений Лагранжа в независимых координатах имеет наименьший возможный порядок.*

В случае несвободной системы подлежат определению еще реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu=1, \ldots, N)$. Реакции не входят в уравнения Лагранжа. Это существенное преимущество уравнений Лагранжа. После того как уравнения Лагранжа проинтегрированы и найдены функции $q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, определяют [подстановкой этих функций в формулы (2′) на стр. 40] $\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t)$ и, следовательно, $\boldsymbol{v}_\nu=\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\boldsymbol{w}_\nu=\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ и $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ $(\nu=1, \ldots, N)$. После этого неизвестные реакции определяются из формул

$$\boldsymbol{R}_\nu=m_\nu \boldsymbol{w}_\nu-\boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu=1, \ldots, N). \tag{16}$$

В случае свободной системы материальных точек уравнения Лагранжа представляют собой компактную запись уравнений движения в произвольной системе координат.

Примеры. 1. *Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси u.* В качестве независимой координаты берем угол поворота φ. Соответствующая обобщенная сила Q (см. пример 6 на стр. 45) равна вращающему моменту L_u. С другой стороны, $T=\frac{1}{2} I_u \dot{\varphi}^2$, где I_u — момент инерции тела относительно оси вращения.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q$$

после подстановки

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=I_u \dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0, \qquad Q=L_u$$

принимает вид

$$I_u \ddot{\varphi}=L_u.$$

Это *дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

2. *Двойной математический маятник, движущийся в плоскости* (рис. 24). Составим выражение для элементарной работы

$$\delta A = m_1 g\,\delta z_1 + m_2 g\,\delta z_2,$$

где $z_1 = l_1 \cos\varphi_1, \quad z_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2$.

Вычисляя δz_1 и δz_2, находим:

$$\delta A = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1\,\delta\varphi_1 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2\,\delta\varphi_2$$

и

$$Q_1 = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1, \qquad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.$$

С другой стороны,

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2\dot\varphi_1^2 + l_2^2\dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2] =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2\dot\varphi_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2.$$

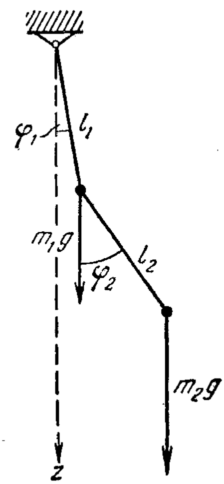

Рис. 24.

Первое уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_1} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q_1$$

имеет вид

$$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2) l_1^2\dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)] + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1.$$

Предоставляем читателю составить второе уравнение, соответствующее координате φ_2.

3. Требуется определить *дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в сферических координатах* (см. пример 3 на стр. 43 и рис. 22). Скорость точки равна векторной сумме скоростей: 1) радиальной; 2) вращательной от вращения радиуса в плоскости меридиана и 3) вращательной от вращения плоскости меридиана. Слагаемые скорости попарно ортогональны, и потому

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,\dot\psi^2).$$

Для нахождения обобщенной силы Q_r дадим точке перемещение вдоль радиуса. Тогда $\delta A_r = F_r\delta r$, где F_r — проекция приложенной силы F на направление радиуса. Отсюда $Q_r = F_r$.

Теперь дадим точке элементарное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\varphi = F_\varphi r\,\delta\varphi$, где F_φ — проекция силы F на касательную к меридиану [1]). Поэтому

$$Q_\varphi = F_\varphi r.$$

Аналогично

$$Q_\psi = F_\psi r \sin\varphi,$$

где F_ψ — проекция силы F на касательную к параллели.

Уравнение Лагранжа для координаты r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

принимает вид

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2 - r\sin^2\varphi\,\dot\psi^2) = F_r.$$

Для координат φ и ψ находим уравнения

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\psi^2) = F_\varphi,$$

$$m(r\sin\varphi\,\ddot\psi + 2\sin\varphi\,\dot r\,\dot\psi + 2r\cos\varphi\,\dot\varphi\,\dot\psi) = F_\psi.$$

Мы получили три дифференциальных уравнения движения свободной материальной точки в сферических координатах.

§ 7. Исследование уравнений Лагранжа

Для того чтобы составить уравнения Лагранжа, нужно предварительно найти выражение для кинетической энергии в виде функции от времени t, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot q_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Сделаем это в общем виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol r}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot q_i + a_0. \qquad (1)$$

[1]) Касательные к меридиану и параллели направляем в сторону возрастания соответствующих координат φ и ψ.

Здесь коэффициенты a_{ik}, a_i, a_0 — функции от t, $q_1, \ldots, q_n$, определяемые равенствами

$$a_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k} \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n)\,[1], \tag{2}$$

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{4}$$

Формула (1) показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой функцию (многочлен) второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{5}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = a_0. \tag{6}$$

В случае склерономной системы, как было выяснено в § 1, время t явно не входит в зависимость между $\boldsymbol{r}_\nu$ и q_i, и потому

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Но тогда, согласно равенствам (3) и (4),

$$a_0 = 0, \quad a_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Таким образом, *кинетическая энергия склерономной системы представляется в виде однородной функции второй степени (квадратичной формы) от обобщенных скоростей.*

---

[1]) Из формул (2) видно, что $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что у произвольной (склерономной или реономной) голономной системы форма T_2 является всегда невырожденной, т. е. определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля:

$$\det (a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0. \qquad (7)$$

Действительно, пусть

$$\det (a_{ik})_{i,k=1}^{n} \equiv 0.$$

Тогда система однородных линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (8)$$

имеет вещественное ненулевое решение.

Умножая систему (8) почленно на λ_i, суммируя по i от 1 до n и используя формулы (2), получаем:

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k} \right) \lambda_i\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \right)^2.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \qquad (9)$$

Эти N векторных равенств можно заменить $3N$ скалярными:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0 \qquad (9')$$

$$(\nu = 1, \ldots, N).$$

Равенства (9′) показывают, что в якобиевой функциональной матрице

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

столбцы линейно зависимы, т. е. ранг ρ этой функциональной матрицы меньше n. Тогда среди $3N$ функций $x_1, y_1, z_1, \ldots$ $\ldots, x_N, y_N, z_N$ от n аргументов $q_1, \ldots, q_n$ (t рассматривается как параметр) имеется ρ независимых, через которые могут быть выражены все остальные декартовы координаты точек системы. Мы пришли к противоречию, так как минимальное число независимых координат системы равно числу степеней свободы n, а $\rho < n$. Неравенство (7) установлено [1]).

Свойство коэффициентов квадратичной формы T_2, выражаемое неравенством (7), очень существенно и будет нами неоднократно использоваться в дальнейшем. Заметим, что поскольку всегда $T_2 \geqslant 0$ (T_2 — кинетическая энергия при «замороженных» связях!), то из неравенства (7) следует, что квадратичная форма $T_2 = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ является положительно определенной, т. е. $T_2 \geqslant 0$, причем $T_2 = 0$ только тогда, когда все $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) равны нулю. Поэтому

[1]) Ранг функциональной матрицы (10) может быть меньше n в отдельных (особых) точках. В этих особых точках возможно равенство $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} = 0$. В дальнейшем мы такие особые положения системы исключаем из рассмотрения.

для коэффициентов a_{ik} имеют место детерминантные неравенства Сильвестра [1]):

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (11)$$

Подставив выражение (1) для кинетической энергии в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i=1, \ldots, n), \qquad (12)$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + (**) = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j) \qquad (i=1, \ldots, n). \qquad (13)$$

Здесь через $(**)$ обозначена сумма членов, не содержащих вторых производных от координат по времени. Правые части также не содержат вторых производных, так как представляют собой в общем случае функции от величин t, q_j, $\dot{q}_j$ $(j=1, \ldots, n)$.

Поскольку $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$, то уравнения (13) можно разрешить относительно вторых производных и представить в виде

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i=1, \ldots, n). \qquad (14)$$

Но тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых предположениях относительно правых частей G_i, которые в механике всегда предполагаются выполненными [2]), существует одно и только одно решение уравнений Лагранжа при произвольных наперед заданных начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ для $t=t_0$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, движение голономной системы однозначно определяется заданием начального положения (q_i^0) и начальных скоростей $(\dot{q}_i^0)$.

---

[1]) См., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1953, стр. 248.

[2]) Например, при существовании непрерывных частных производных первого порядка у функций G_i $(i=1, \ldots, n)$.

§ 8. Теорема об изменении полной энергии. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы

Если обобщенные силы не зависят от обобщенных скоростей

$$Q_i = Q_i(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и существует функция $\Pi(t, q_1, \ldots, q_n)$ такая, что

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

то силы Q_i называются *потенциальными*, а функция Π — *потенциалом сил* или *потенциальной энергией*. Равенства (2), определяющие потенциал Π, можно записать так[1]:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i = -\delta\Pi. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом Π, на систему действуют еще непотенциальные силы

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \tag{5}$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение полную энергию E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + \Pi, \tag{7}$$

---

[1]) При вычислении виртуального дифференциала $\delta\Pi$ время t предварительно фиксируется. Поэтому $\delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$.

и вычислим производную $\frac{dE}{dt}$. Для этого сначала найдем

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+\frac{\partial T}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (8)$$

Замечая, что $T=T_2+T_1+T_0$ и используя уравнения Лагранжа (6), получаем [1])

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)+\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\tilde{Q}_i\right)\dot{q}_i=$$

$$=2\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\dot{q}_i. \qquad (9)$$

Отсюда с учетом равенства (7) окончательно находим

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\dot{q}_i+\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)-\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \qquad (10)$$

Стоящее в правой части выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\dot{q}_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i dq_i}{dt}=\frac{\delta\tilde{A}}{dt}, \qquad (11)$$

---

[1]) Для однородной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ m-й степени имеет место формула Эйлера $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf$. Применяя эту формулу к линейной форме T_1 и квадратичной форме T_2, находим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=T_1.$$

Справедливость этих тождеств следует также непосредственно из выражений для T_2 и T_1, приведенных на стр. 53.

где $\delta\tilde{A}$ — элементарная работа непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$, представляет собой *мощность* непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Слагаемое в правой части

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \tag{12}$$

отлично от нуля лишь для реономной системы (для склерономной системы $T_1 = T_0 = 0$ и $\left.\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$. Последнее же слагаемое отлично от нуля только тогда, когда потенциальная энергия П зависит явно от времени.

Формула (10) *определяет изменение полной энергии при движении произвольной голономной системы.* Рассмотрим частные случаи.

а) *Система склерономная.* Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{13}$$

б) *Система склерономная, и потенциальная энергия не зависит явно от времени.* Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \tag{14}$$

Для такой системы *производная от полной энергии по времени равна мощности непотенциальных сил.*

в) *Система консервативная,* т. е.: 1) система склерономная; 2) все силы потенциальные и 3) потенциальная энергия П не зависит явно от времени. Для консервативной системы, согласно равенству (10),

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{15}$$

т. е. при любом движении системы

$$E = \text{const} = h. \tag{16}$$

Полная энергия консервативной системы не изменяется при движении системы.

Равенство (16), не содержащее $\ddot{q}_i$ и включающее произвольную постоянную h, определяет первый интеграл уравнений движения. Оно называется *интегралом энергии.*

Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0, \tag{17}$$

и *диссипативными*, если их мощность [1]) отрицательна или равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leqslant 0. \tag{18}$$

Если потенциальная энергия не зависит явно от t, то из равенств (14) и (17) следует $\frac{dE}{dt} = 0$ и, таким образом, *для склерономной системы при гироскопических силах также имеет место интеграл энергии*

$$E = \mathrm{const}.$$

---

[1]) В случае склерономной системы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, d\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dq_i,$$

откуда после почленного деления на dt находим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i. \tag{*}$$

Поэтому равенство (17) выражает условие гироскопичности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = 0,$$

а равенство (18) — условие диссипативности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu \leqslant 0.$$

В случае реономной системы равенство (*) может не иметь места. В этом случае $\delta \boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} dt$ и из равенства $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i$ следует $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i$.

Если же на такую систему действуют диссипативные силы, то при движении системы

$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$

т. е. полная энергия убывает во время движения [1]. В этом случае саму систему мы будем называть *диссипативной.*

В соотношениях (17) и (18) обобщенные силы $\tilde{Q}_i$ в общем случае зависят от обобщенных скоростей. Рассмотрим важные частные случаи, в которых эта зависимость линейна и однородна.

1°. Пусть

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \quad (i=1, \ldots, n) \tag{19}$$

и матрица коэффициентов γ_{ik} является кососимметрической:

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \quad (i,\ k=1, \ldots, n)\ ^{2)}. \tag{20}$$

Тогда силы (19) являются гироскопическими.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\dot{q}_i = \sum_{i,\,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik}+\gamma_{ki})\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

Последнее равенство показывает, что кососимметричность матрицы коэффициентов γ_{ik} является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы приложенные к склерономной системе силы (19) были гироскопическими.

Примеры. 1. *Кориолисовы силы инерции для склерономной системы являются гироскопическими силами.* Действительно, кориолисова сила инерции, прикладываемая к точке P_ν системы, определяется формулой

$$\boldsymbol{F}_\nu = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu).$$

Здесь m_ν — масса точки P_ν, $\boldsymbol{v}_\nu$ — ее скорость в рассматриваемой неинерциальной системе осей координат, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость

---

[1]) При диссипативных силах происходит рассеивание (диссипация) энергии. Отсюда и термин «диссипативные силы».

[2]) У кососимметрической матрицы $\|\gamma_{ik}\|$ всегда $\gamma_{ii}=0$ $(i=1, \ldots, n)$.

вращения этой системы относительно некоторой инерциальной системы координат ($\nu = 1, \ldots, N$). Но тогда

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu v_\nu = 0.$$

2. Пусть на твердое тело с неподвижной точкой O действуют силы с главным моментом $L_O = I(\omega_1 \times \omega_2)$, где I — скаляр, и пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2$ — угловая скорость тела. Тогда приложенные к телу силы являются гироскопическими, так как их мощность равна нулю:

$$L_O\,\omega = 0.$$

Если твердое тело обладает динамической симметрией, I — момент инерции относительно оси симметрии, ω_2 — угловая скорость «чистого вращения», направленная по оси симметрии, а ω_1 — угловая скорость прецессионного движения, то момент $L_O = I(\omega_1 \times \omega_2)$ называется *гироскопическим*. Таким образом, силы, создающие гироскопический момент, являются гироскопическими[1].

2°. Пусть

$$\tilde{Q}_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

где матрица коэффициентов b_{ik} является симметрической

$$b_{ik} = b_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{21'}$$

и пусть квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ положительна:

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда для склерономной системы мощность сил равна

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \leqslant 0 \tag{23}$$

и силы $\tilde{Q}_i$ являются диссипативными.

В этом случае квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{24}$$

---

[1]) Отсюда и происхождение термина «гироскопические силы».

называется *диссипативной функцией Релея*. Легко видеть, что обобщенные силы (21) получаются из диссипативной функции Релея с помощью формул

$$\tilde{Q}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Если система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени, то в силу равенств (14), (23) и (25)

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R. \tag{26}$$

Последняя формула указывает на физический смысл функции Релея: *удвоенная функция Релея равна скорости убывания полной энергии.*

Если функция Релея (24) является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей, то говорят о *полной диссипации энергии*. В этом случае систему мы будем называть *определенно-диссипативной*. У такой системы, согласно формуле (26), полная энергия строго убывает.

В качестве примера рассмотрим приложенные к точкам системы силы сопротивления среды, пропорциональные первым степеням скоростей точек:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -\beta \boldsymbol{v}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{27}$$

В этом случае

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = -2R, \tag{28}$$

где

$$R = \frac{1}{2} \beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{29}$$

§ 9. Электромеханические аналогии

В этом параграфе мы покажем, каким образом уравнения аналитической механики могут быть применены не только к механическим, но и к электрическим и электромеханическим системам.

Рассмотрим контур, в котором индуктивность L, омическое сопротивление R и конденсатор с емкостью C

соединены последовательно (рис. 25). Для этих элементов связь между напряжением u (разность между значениями потенциала на концах элемента) и величиной тока i $\left(i=\frac{dq}{dt}\right.$, где q — заряд) будет соответственно равна

$$u=L\frac{di}{dt},\quad u=Ri,\quad u=\frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{1}$$

Если в контуре имеется еще внешний источник э. д. с. $e(t)$, то, записывая, что величина э. д. с. равна сумме напряжений для отдельных элементов, будем иметь

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e(t), \tag{2}$$

или

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e(t). \tag{3}$$

Это уравнение является аналогом уравнения механических колебаний

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+b\frac{dq}{dt}+cq=Q(t). \tag{4}$$

При этом индуктивности L отвечает инерционный коэффициент (обобщенная масса) a, омическому сопротивлению

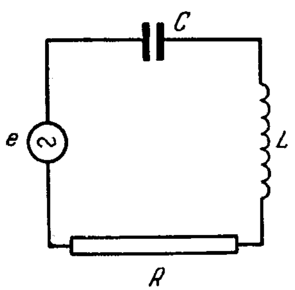

Рис. 25.

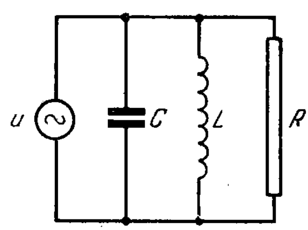

Рис. 26.

R — диссипативный коэффициент b, коэффициенту $\frac{1}{C}$, где C — емкость, отвечает приведенный коэффициент упругой силы c, заряд q соответствует обобщенной координате q, э. д. с. $e(t)$ — обобщенной силе $Q(t)$.

С другой стороны, в контуре, изображенном на рис. 26, складываются токи, проходящие через индуктивный элемент, сопротивление и конденсатор, поэтому

$$\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u\,dt+C\frac{du}{dt}=i(t). \qquad (5)$$

Почленно дифференцируя, получаем:

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=\frac{di}{dt}.$$

Здесь мы имеем другую систему аналогий, в которой координате q соответствует напряжение u и механические коэффициенты a, b, c заменяются на C, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{L}$; обобщенной силе $Q(t)$ здесь отвечает величина $\frac{di}{dt}$.

Две электрические системы, имеющие одинаковые (с точностью до обозначений) *уравнения, представляют собой две разные электрические модели одной и той же механической системы.*

Кинетической и потенциальной энергиям, функции Релея, обобщенной силе у механической системы с одной степенью свободы

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2, \quad \tilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2, \quad \Pi=\frac{1}{2}cq^2, \quad Q=Q(t)$$

в первой системе аналогий соответствуют величины

$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2, \quad \tilde{R}=\frac{1}{2}R\dot{q}^2, \quad \Pi=\frac{1}{2C}q^2, \quad e=e(t),$$

а во второй

$$T=\frac{1}{2}C\dot{u}^2, \quad \tilde{R}=\frac{1}{2R}\dot{u}^2, \quad \Pi=\frac{1}{2L}u^2, \quad \frac{di}{dt}.$$

Таким образом, системы электромеханических аналогий определяются следующей таблицей:

Мех.: q	a	b	c	Q	$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$	$\tilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$	$\Pi=\frac{1}{2}cq^2$
1-я эл.: q	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2C}q^2$
2-я эл.: u	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2R}\dot{u}^2$	$\frac{1}{2L}u^2$

Рассмотрим в качестве более сложного примера электрическую цепь, изображенную на рис. 27.

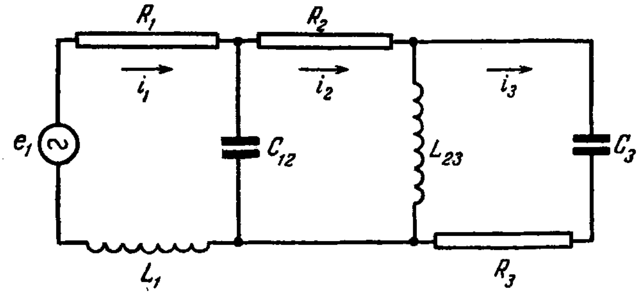

Рис. 27.

Составим уравнения Лагранжа, придерживаясь первой системы аналогий; предварительно вычислим

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_{23} (\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2,$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} R_3 \dot{q}_3^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2C_3} q_3^2 + \frac{1}{2C_{12}} (q_1 - q_2)^2.$$

Кроме того, $e_2 = e_3 = 0$. Положим

$$e_1 = A \sin \Omega t.$$

Теперь выпишем уравнения Лагранжа

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 - \frac{1}{C_{12}} q_2 = A \sin \Omega t,$$

$$L_{23} \ddot{q}_2 - L_{23} \ddot{q}_3 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{12}} q_2 - \frac{1}{C_{12}} q_1 = 0,$$

$$L_{23} \ddot{q}_3 - L_{23} \ddot{q}_2 + R_3 \dot{q}_3 + \frac{1}{C_3} q_3 = 0.$$

Эти уравнения и будут уравнениями электрической цепи, изображенной на рис. 27.

§ 10. Уравнения Аппеля для неголономных систем. Псевдокоординаты

В этом параграфе мы выведем уравнения Аппеля, определяющие движение неголономной системы. Пусть на неголономную систему наложены d конечных и g дифференциальных связей (см. § 1). Использовав сначала только d конечных связей, мы выразим радиусы-векторы точек системы через $m=3N-d$ независимых координат $q_1, \ldots, q_m$ и время t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_m) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

Отсюда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

и

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

Однако $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют еще дифференциальным связям [1])

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{l}_{\beta\nu}$ и D_β являются функциями от t и $\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

Подставив выражения (1) и (2) для $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ в уравнения связей (3), мы представим эти уравнения в виде

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i} \dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{4}$$

где коэффициенты $A_{\beta i}$ при $\dot{q}_i$ и свободные члены A_β являются функциями от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Таким образом, для неголономной системы координаты $q_1, \ldots, q_m$ могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ уже не могут быть

[1]) Функции (1), будучи подставлены в уравнения конечных связей, обращают их в тождества. Поэтому при использовании представления (1) нужно учитывать только дифференциальные связи.

произвольными; они связаны между собой соотношениями (4). Считая g связей (4) независимыми, мы можем из уравнений (4) выразить g обобщенных скоростей, например $\dot q_{n+1}, \ldots, \dot q_m$ через остальные $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ ($n = m - g = 3N - d - g$ — число степеней свободы системы; см. стр. 19). Скоростям $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ можно давать произвольные значения, и тогда уже определятся значения остальных скоростей.

Однако мы пойдем по более общему пути и в качестве независимых величин возьмем не n (n — число степеней свободы) обобщенных скоростей, а некоторые n независимых линейных комбинаций этих скоростей [1])

$$\dot\pi_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot q_i \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где f_{si} — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

На линейные формы (5) нужно наложить лишь одно условие: эти n линейных форм вместе с g линейными формами

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot q_i \qquad (\beta = 1, \ldots, g)$$

должны образовать полную систему из $m = n + g$ линейно независимых форм, т. е. определитель, составленный из коэффициентов этих m форм, должен быть отличен от нуля. Тогда величины $\dot\pi_s$ ($s = 1, \ldots, n$) смогут принимать произвольные значения, так как при любых значениях этих величин мы найдем соответствующие $\dot q_i$ ($i = 1, \ldots, m$), разрешая систему линейных уравнений (4) и (5). При этом получим

$$\dot q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\dot\pi_s + h_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

где h_{is} и h_i — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Величины $\dot\pi_s$, являющиеся линейными формами от обобщенных скоростей, будем называть *псевдоскоростями*, а символы π_s — *псевдокоординатами* ($s = 1, \ldots, n$). В частности, $\dot\pi_s$ могут совпадать с некоторыми обобщенными скоростями.

---

[1]) Нам удобно обозначать линейные комбинации (5) через $\dot\pi_s$, хотя сам символ π_s может не иметь смысла, так как правая часть равенства (5) может не быть полной производной.

В общем же случае $m+n$ величин $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны зависимостями (5) и (6).

Для того чтобы найти ограничения, налагаемые дифференциальными связями на виртуальные перемещения δq_i, нужно (см. § 2) в уравнениях (4) отбросить свободные члены A_β и заменить $\dot{q}_i$ на δq_i ($i=1, \ldots, n$). Тогда мы получим

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\,\delta q_i = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{4'}$$

В соответствии с равенствами (5) вводим обозначения [1])

$$\delta\pi_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\,\delta q_i \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{5'}$$

По предположению формы (4′) и (5′) линейно независимы. Поэтому $\delta\pi_s$ могут принимать произвольные значения, а соответствующие δq_i определятся из системы уравнений (4′) и (5′):

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\delta\pi_s \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{6'}$$

Выражение для работы элементарных сил на виртуальных перемещениях можно представить в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,\delta q_i, \tag{7}$$

где, как и для голономной системы,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, m).$$

Теперь, подставив в равенство (7) вместо δq_i выражения (6′), найдем

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \sum_{s=1}^{n} h_{is}\,\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} h_{is}Q_i\right)\delta\pi_s,$$

т. е.

$$\delta A = \sum_{s=1}^{n} \Pi_s\,\delta\pi_s, \tag{8}$$

[1]) В случае склерономной системы $\delta q_i = dq_i = \dot{q}_i\,dt$ и потому, согласно формулам (5) и (5′), $\delta\pi_s = \dot{\pi}_s\,dt$.

где

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} h_{is} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \boldsymbol{F}_\nu \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Величины Π_s будем называть *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам* π_s $(s=1, \ldots, n)$.

С другой стороны, подставляя в равенства (2) выражения (6) для $\dot{q}_i$, мы получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \dot{\pi}_s + \boldsymbol{e}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{e}_{\nu s}$ и $\boldsymbol{e}_\nu$ $(\nu=1, \ldots, N;\ s=1, \ldots, n)$ — некоторые вектор-функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Из равенств (10) находим [1])

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \delta\pi_s \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{11}$$

и

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, N); \tag{12}$$

при этом в правых частях формул (12) выделены лишь члены, содержащие *псевдоускорения* $\ddot{\pi}_s$ $(s=1, \ldots, n)$.

С помощью равенств (8) и (11) запишем общее уравнение динамики

$$\delta A - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \tag{13}$$

в таком виде:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\Pi_s - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} \right) \delta\pi_s = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Величины $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны соотношениями (2), (4) и (5). Исключив из этих соотношений величины $\dot{q}_i$, мы получим формулы (10). Величины $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, $\delta\pi_s$ и δq_i удовлетворяют однородным соотношениям (2′), (4′) и (5′), которые отличаются от соотношений (2), (4) и (5) только отсутствием свободных членов. Поэтому и формулы (11), являющиеся результатом исключения δq_i из соотношений (2′), (4′) и (5′), получаются из формул (10) заменой $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ на $\delta\pi_s$ и отбрасыванием свободных членов $\boldsymbol{e}_\nu$.

Так как $\delta\pi_s$ — совершенно произвольные множители, то отсюда следует:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} = \Pi_s \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Введем в рассмотрение «энергию ускорений»

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s). \tag{16}$$

Замечая, что на основании формул (12)

$$\boldsymbol{e}_{\nu s} = \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_s} \qquad (\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

мы уравнения (15) можем записать так:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}_s} = \Pi_s \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Уравнения (18) были впервые получены Аппелем и носят название *уравнений Аппеля.*

Эти $n = 3N - d - g$ дифференциальных уравнений совместно с g уравнениями связей

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i} \dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g) \tag{19}$$

и с n дифференциальными соотношениями

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si} \dot{q}_i \tag{20}$$

образуют систему дифференциальных уравнений, определяющих движение неголономной системы.

Запишем уравнения Аппеля в развернутом виде, для чего в формулу (15) подставим вместо $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ выражения (12). Тогда получим

$$\sum_{s=1}^{n} u_{\rho s} \ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_\rho \qquad (\rho = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

где

$$\Pi_\rho = \Pi_\rho(t, q_i, \dot{\pi}_s), \quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t, q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu e_{\nu s} e_{\nu \rho} \tag{22}$$

$$(\rho, s = 1, \ldots, n).$$

Через $(**)$ в уравнениях (21) обозначены члены, не содержащие псевдоускорений $\ddot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Можно доказать, что определитель, составленный из коэффициентов $u_{\rho s}$, не равен тождественно нулю:

$$\det (u_{\rho s})^n_{\rho, s=1} \neq 0\,[1]. \tag{23}$$

Тогда уравнения (21) можно разрешить относительно псевдоускорений

$$\ddot{\pi}_s = H_s(t, q_i, \dot{\pi}_\rho) \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

С другой стороны, соотношения (19) и (20) также можно представить в виде, разрешенном относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ [см. формулы (6)].

Таким образом, движение неголономной системы определяется системой $n + m$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $q_1, \ldots, q_m$, $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n$, причем эти уравнения разрешены относительно производных. Тогда задание начальных данных $q_1^0, \ldots, q_m^0$, $\dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$ однозначно определяет движение системы. Но с помощью этих начальных данных формулами (1) и (6) задаются совместимые со связями произвольное начальное положение и произвольные начальные скорости. Поэтому *задание начального положения системы и начальных скоростей, не противоречащих конечным и дифференциальным связям, однозначно определяет движение неголономной системы.*

З а м е ч а н и е 1. Если в частном случае в качестве псевдоскоростей взяты n независимых обобщенных скоростей, например $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, то для определения соответствующих

---

[1] В отдельных точках этот определитель может равняться нулю. Эти особые точки исключаются из рассмотрения. Обоснование неравенства (23) аналогично обоснованию неравенства $\det (a_{ik})^n_{i, k=1} \neq 0$ на стр. 54—55.

обобщенных сил $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ нужно в равенстве (7) выразить $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ через $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \,\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} Q_s^* \,\delta q_s. \tag{25}$$

В этом случае энергию ускорений U можно представить в виде функции $B(t, q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n)$ и уравнения Аппеля принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{26}$$

Замечание 2. Уравнения Аппеля можно, в частности, применить и к голономной системе. В этом случае все скорости $\dot{q}_i$ будут независимыми, $Q_i = Q_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ и уравнения (26) представляют собой другую запись уравнений Лагранжа второго рода[1]).

Примеры. 1. При помощи уравнений Аппеля определим движение системы, описанной в примере § 3 (см. стр. 28). Это позволит читателю сопоставить два метода отыскания движения неголономной системы — с помощью множителей Лагранжа и с помощью уравнений Аппеля — и убедиться в преимуществах второго. Введем в качестве независимых координат координаты центра стержня x, y и угол φ, образованный отрезком M_1M_2 с горизонтальной осью x (рис. 28). Тогда

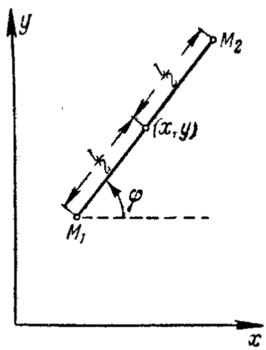

Рис. 28.

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

Уравнение дифференциальной связи в новых координатах принимает вид

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

---

[1]) Однако уравнения Аппеля в псевдокоординатах применительно к голономной системе уже дают иные формы уравнений движения.

Энергия ускорений U, как легко проверить, выразится следующим образом:

$$U=\frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2+\ddot{y}_1^2+\ddot{x}_2^2+\ddot{y}_2^2)=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4).$$

Введем псевдоскорость $\dot{\pi}$, полагая

$$\dot{x}=\dot{\pi}\cos\varphi,\qquad \dot{y}=\dot{\pi}\sin\varphi;$$

тогда

$$U=\ddot{\pi}^2+\frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2+\ldots,$$

где невыписанные члены не содержат ускорений. Определим обобщенные силы. Для этого напишем

$$\delta A=\Pi\,\delta\pi+\Phi\,\delta\varphi=-2g\,\delta y=-2g\sin\varphi\,\delta\pi.$$

Отсюда

$$\Pi=-2g\sin\varphi,\qquad \Phi=0.$$

Составим уравнения Аппеля

$$\frac{\partial U}{\partial\ddot{\pi}}=\Pi,\qquad \frac{\partial U}{\partial\ddot{\varphi}}=\Phi.$$

В данном случае эти уравнения не содержат координат x, y и имеют вид

$$\ddot{\pi}=-g\sin\varphi,\qquad \ddot{\varphi}=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\varphi=\alpha t+\beta,$$

$$\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\ddot{\pi}=-\frac{g}{\alpha}\sin\varphi,\qquad \dot{\pi}=\frac{g}{\alpha}\cos\varphi+\gamma.$$

Найдем x и y:

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{x}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\cos\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{y}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\sin\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi.$$

Отсюда

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}\varphi+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi+\delta,$$

$$y=-\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi+\varepsilon,$$

Подставляя $\alpha t+\beta$ вместо φ, получаем конечные уравнения движения, содержащие пять произвольных постоянных: α, β, γ, δ и ε:

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t+\beta)+\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\sin(\alpha t+\beta)+\delta,$$

$$y=-\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\cos(\alpha t+\beta)+\varepsilon,\quad \varphi=\alpha t+\beta.$$

2. Покажем, каким образом из уравнений Аппеля могут быть получены динамические уравнения Эйлера для твердого тела с закрепленной точкой O.

Пусть p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на главные оси инерции $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Они, как известно, представляют собой линейные комбинации обобщенных скоростей $\dot\psi$, $\dot\theta$, $\dot\varphi$, где ψ, θ, φ — углы Эйлера (см. стр. 42—43)[1]). Поэтому мы можем принять p, q, r за три псевдоскорости. Вычислим энергию ускорений[2]):

$$\begin{aligned}2U&=\int \boldsymbol{w}^2\,dm=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})^2\,dm=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\,dm+\ldots=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\boldsymbol{\varepsilon}\int[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})]\,dm+\ldots=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\boldsymbol{\varepsilon}\left[\boldsymbol{\omega}\times\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,dm\right]+\ldots\end{aligned}\qquad(27)$$

Заметим, что $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=\frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{dt}$. Здесь $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\delta}{dt}$ означают соответственно дифференцирование в неподвижной системе осей и в системе осей, неизменно связанных с телом[3]). Поэтому $\dot p$, $\dot q$, $\dot r$ — проекции углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Тогда по аналогии с выражением для кинетической энергии[4])

$$2T=\int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\,dm=Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

---

[1]) Выражения для p, q, r мы получаем, проектируя почленно на оси координат векторное равенство $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_\psi+\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\varphi$, где $\omega_\psi=\dot\psi$, $\omega_\theta=\dot\theta$, $\omega_\varphi=\dot\varphi$.

[2]) Мы здесь используем известное тождество

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})=0;$$

последнее слагаемое в левой части равно нулю, так как $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$. Невыписанные члены в формуле (27) не содержат углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$.

[3]) См., например, Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1954, т. I, § 73.

[4]) См. Суслов Г. К., Теоретическая механика, М. — Л., 1944, § 259.

(A, B и C — моменты инерции относительно главных осей инерции $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$) мы можем написать

$$\int (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r})^2\, dm = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2.$$

С другой стороны, кинетический момент $\boldsymbol{G} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\, dm$ имеет компоненты Ap, Bq, Cr. Поэтому окончательно получаем следующее выражение для $2U$:

$$2U = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2\,[(C - B)\, qr\dot{p} + (A - C)\, rp\dot{q} + (B - A)\, pq\dot{r}] + \ldots$$

С другой стороны, для элементарной работы внешних сил имеем

$$\delta A = \boldsymbol{L}_O \boldsymbol{\omega}\, dt = L_\xi\, p\, dt + L_\eta\, q\, dt + L_\zeta\, r\, dt.$$

Поэтому уравнения Аппеля непосредственно дают уравнения Эйлера

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = L_\xi,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = L_\eta,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = L_\zeta.$$

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 11. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Обобщенный потенциал. Ненатуральные системы

Пусть обобщенные силы Q_i являются потенциальными, т. е. пусть существует потенциал сил (потенциальная энергия) $\Pi = \Pi(t, q_i)$ (см. § 8) и

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

записываются в виде[1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где

$$L = T - \Pi. \tag{3}$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*.

Кинетический потенциал L, так же как и кинетическая энергия T, представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{4}$$

---

[1]) Поскольку потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей, а $L = T - \Pi$, то $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, а $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

где

$$L_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad L_1=\sum_{i=1}^{n} c_i\dot{q}_i, \qquad L_0=c_0. \tag{4'}$$

Здесь коэффициенты c_{ik}, c_i, c_0 являются функциями от координат $q_1, \ldots, q_n$ и времени t (i, $k=1, \ldots, n$). Сопоставление формулы (3) с формулой (5) на стр. 53 дает

$$L_2=T_2, \quad L_1=T_1, \quad L_0=T_0-\Pi. \tag{5}$$

Заметим, что в случае, когда действующие на материальные точки активные силы $\boldsymbol{F}_\nu=X_\nu\boldsymbol{i}+Y_\nu\boldsymbol{j}+Z_\nu\boldsymbol{k}$ ($\nu=1, \ldots, N$) имеют потенциал $\Pi(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ в декартовых координатах x_ν, y_ν, z_ν ($\nu=1, \ldots, N$), т. е.

$$X_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_\nu} \qquad (\nu=1, \ldots, N),$$

эти силы и в независимых координатах q_i ($i=1, \ldots, n$) имеют потенциал (обратное утверждение в общем случае неверно!) и этим потенциалом является тот же потенциал Π, но только выраженный через координаты $q_1, \ldots, q_n$ и время t. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i=\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu\,\delta x_\nu+Y_\nu\,\delta y_\nu+Z_\nu\,\delta z_\nu)=-\delta\Pi=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\,\delta q_i,$$

откуда и следуют равенства (1).

Рассмотрим теперь тот случай, когда вместо обычного потенциала $\Pi(t, q_k)$ существует *обобщенный потенциал* $V(t, q_k, \dot{q}_k)$, через который обобщенные силы Q_i выражаются с помощью формул

$$Q_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{6}$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n)$$

снова записываются в виде (2), где теперь

$$L=T-V. \tag{7}$$

Из формул (6) следует:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где $(**)$ обозначает сумму членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Поскольку в механике мы рассматриваем только тот случай, когда обобщенные силы Q_i не зависят явно от обобщенных ускорений, а зависят лишь от времени, координат и обобщенных скоростей

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

то, согласно формулам (8), в этом случае все частные производные второго порядка от V по обобщенным скоростям должны быть тождественно равны нулю, т. е. *обобщенный потенциал V линейно зависит от обобщенных скоростей:*

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \dot{q}_i + \Pi = V_1 + \Pi, \tag{10}$$

где Π_i $(i = 1, \ldots, n)$ и Π — функции от координат $q_1, \ldots, q_n$ и времени t. Но тогда, согласно равенству (7), L снова будет квадратичной функцией относительно скоростей $\dot{q}_i$ и вместо равенств (5) будем иметь[1])

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{11}$$

Подставляя выражение (10) для V в формулу (6), получаем

$$Q_i = \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{n} \Pi_k \dot{q}_k + \Pi\right] =$$
$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \tag{12}$$

---

[1]) Коэффициенты в выражениях для L и T связаны между собой. Действительно, при обычном потенциале $c_i = a_i$, а при обобщенном потенциале $c_i = a_i - \Pi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. В обоих случаях $c_{ik} = a_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, $c_0 = a_0 - \Pi$ и $L_2 = T_2$ — положительно определенная квадратичная форма.

Формулы (12) показывают, что в случае, когда линейная часть V_1 обобщенного потенциала не зависит явно от времени t $\left[\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}=0 \ (i=1, \ldots, n)\right]$, *обобщенные силы* Q_i *складываются из потенциальных сил* $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i=1, \ldots, n)$ *и гироскопических сил*

$$\tilde{Q}_i=\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{13}$$

где

$$\gamma_{ik}=-\gamma_{ki}=\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k}-\frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i} \qquad (i, k=1, \ldots, n). \tag{13'}$$

Важность рассмотрения обобщенного потенциала подтверждается следующим примером.

Пример. На точечный электрический заряд в электромагнитном поле действует *сила Лоренца*

$$\boldsymbol{F}=e\left[\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times \boldsymbol{H}\right], \tag{14}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точки, e — заряд, c — величина скорости света, а $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей. Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются через скалярный потенциал φ и векторный $\boldsymbol{A}$ с помощью формул [1])

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{15}$$

Найдем обобщенный потенциал V для силы Лоренца $\boldsymbol{F}$.

Из формул (14) и (15) находим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}&=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A})= \\ &=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{e}{c}[(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]= \\ &=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{e}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}), \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) См., например, Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, М.-Л., 1948, стр. 55.

где скорость $\boldsymbol{v}$ в выражении grad $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})$ считается вектором, не зависящим от точки поля[1]).

Отсюда, выбирая в качестве независимых координат декартовы координаты точки x, y, z и полагая

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}), \tag{17}$$

т. е.

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z),$$

имеем:

$$F_x = -\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Аналогичные формулы имеют место для F_y и F_z. Таким образом, *обобщенный потенциал силы Лоренца* (14) *определяется формулой* (17). Для функции Лагранжа L имеем выражение

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}). \tag{18}$$

Классические системы, в которых силы имеют обычный потенциал $\Pi(t, q_i)$ или обобщенный потенциал $V(t, q_i, \dot{q}_i)$, мы будем называть *натуральными*. Для таких систем функция Лагранжа L является функцией второй степени от обобщенных скоростей, т. е. представляется выражением (4), где L_2 — положительно определенная квадратичная форма относительно обобщенных скоростей.

В качестве примера ненатуральной системы можно рассмотреть движение материальной точки в релятивистской теории при отсутствии силового поля. В этом случае движение точки определяется уравнениями Лагранжа, в которых

$$L = -mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

---

[1]) Здесь для выражения $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} = v_x\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}$ используется известная формула векторного анализа

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}),$$

в которой $\boldsymbol{v}$ рассматривается как постоянный вектор. В справедливости этой формулы легко убеждаемся, сравнивая между собой проекции на оси x, y, z левой и правой частей равенства. Действительно, для оси x

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}).$$

Аналогичные формулы имеют место для проекций на оси y и z.

где $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, а c — величина скорости света. Здесь L уже не является функцией второй степени относительно скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Если в выражении для функции L разложить $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ в ряд по степеням $\frac{v}{c}$ и отбросить члены второго и более высокого порядка относительно $\frac{v}{c}$, т. е. положить $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, то получится «классическое» выражение функции Лагранжа для изолированной материальной точки, а именно:

$$L = \frac{1}{2} mv^2 + \text{const}.$$

В этой и следующей главах мы будем вести изложение для систем общего типа [1]), движение которых определяется уравнениями Лагранжа (2) с произвольной функцией $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Мы будем лишь предполагать, что гессиан функции L относительно обобщенных скоростей не равен тождественно нулю [2]):

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{19}$$

Уравнения (2) в развернутом виде могут быть записаны так:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) = 0, \tag{20}$$

где через (**) мы обозначили сумму членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поскольку определитель системы линейных (относительно $\ddot{q}_k$) уравнений (20) отличен от нуля [см. неравенство (19)], то систему (20) можно разрешить относительно обобщенных ускорений и записать в виде

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

---

[1]) Те положения, которые справедливы только для натуральных систем, будут специально оговорены.

[2]) Для натуральных систем $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k} = a_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ и потому по доказанному в § 7 (стр. 54—55) неравенство (19) выполняется.

Поэтому сделанный в § 7 вывод об однозначном определении движения системы путем задания начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i=1, \ldots, n)$ справедлив не только для натуральных систем, но и для рассматриваемых здесь систем более общего типа.

§ 12. Канонические уравнения Гамильтона

Лагранж показал, как выписываются дифференциальные уравнения движения системы, если известен кинетический потенциал (функция Лагранжа) $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Будем называть переменные t, q_i, $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, через которые выражается функция Лагранжа, *переменными Лагранжа.* Система значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек. Как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, задание функции Лагранжа и начального состояния однозначно определяет движение системы.

Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять величины t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$, где p_i $(i=1, \ldots, n)$ — *обобщенные импульсы,* определяемые равенствами

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Переменные t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ будем называть *переменными Гамильтона.*

Поскольку якобиан правых частей равенств (1) по переменным $\dot{q}_i$ является отличным от нуля гессианом функции L [см. условие (19) на стр. 82], то уравнения (1) могут быть разрешены относительно $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$:

$$\dot{q}_i=\Phi_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Таким образом, *переменные Гамильтона могут быть выражены через переменные Лагранжа и наоборот* и состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.

В случае натуральной системы L — квадратичная функция (см. стр. 77—79) относительно обобщенных скоростей и, согласно равенствам (1), обобщенные импульсы линейно выражаются через обобщенные скорости:

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k + c_i \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно $\dot{q}_1$ [1]), получаем для $\dot{q}_i$ снова линейные выражения

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}p_k + b_i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{4}$$

где b_{ik} и b_i — функции от $t, q_1, \ldots, q_n$.

Если в натуральной системе силы Q_i $(i=1, \ldots, n)$ имеют обычный потенциал $\Pi(t, q_i)$, то из равенства $L = T - \Pi$ следует [2]):

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5}$$

Заметим, что любая функция от переменных Лагранжа

$$F = F(t, q_i, \dot{q}_i)$$

после подстановки в нее вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ выражений (2) или (4) превращается в некоторую функцию $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ от переменных Гамильтона. Функцию $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ будем называть *союзным выражением* для функции $F(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Пример. Для свободной материальной точки декартовы координаты x, y, z являются независимыми и в потенциальном поле $\Pi = \Pi(t, x, y, z)$ функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(t, x, y, z).$$

---

[1]) Как было установлено в § 7, $\det(a_{ik})^n_{i,k=1} \neq 0$.

[2]) При силах, имеющих обобщенный потенциал, формулы (5) неверны. В этом случае [см. равенства (7) и (10) на стр. 78—79]

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \Pi_i \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Декартовым координатам соответствуют импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = m\dot{y}, \qquad p_z = m\dot{z}. \tag{6}$$

Если мы отсюда определим $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и полученные выражения подставим в L, то получим союзное выражение для L

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \Pi(t, x, y, z). \tag{7}$$

Если вместо $\Pi(t, x, y, z)$ имеем обобщенный потенциал

$$V = \Pi_1\dot{x} + \Pi_2\dot{y} + \Pi_3\dot{z} + \Pi,$$

где Π_1, Π_2, Π_3, Π — функции от t, x, y, z, то из равенства

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi_1\dot{x} - \Pi_2\dot{y} - \Pi_3\dot{z} - \Pi$$

находим

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \Pi_1, \qquad p_y = m\dot{y} - \Pi_2, \qquad p_z = m\dot{z} - \Pi_3, \tag{6'}$$

и союзное выражение $\widehat{L}$ имеет вид

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2) - \Pi. \tag{7'}$$

Гамильтон ввел в рассмотрение функцию $H(t, q_i, p_i)$, определяемую равенством

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L}, \tag{8}$$

и показал, что с помощью этой функции уравнения движения могут быть записаны в виде следующей системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Эти уравнения называются *каноническими* уравнениями или уравнениями *Гамильтона*[1]. Функция $H(t, q_i, p_i)$, определяемая равенством (8), называется *функцией Гамильтона*.

Вывод канонических уравнений Гамильтона будет опираться на следующую математическую теорему.

Теорема Донкина[2]. *Пусть дана некоторая функция $X(x_1, \ldots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:*

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0, \tag{10}$$

и пусть имеется преобразование переменных, «порождаемое» функцией $X(x_1, \ldots, x_n)$:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Тогда существует преобразование, обратное преобразованию (11), *которое также порождается некоторой функцией $Y(y_1, \ldots, y_n)$:*

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{12}$$

при этом порождающая функция Y обратного преобразования связана с порождающей функцией X прямого преобразования формулой[3]

$$Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X. \tag{13}$$

Если функция X содержит параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, т. е. $X = X(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то Y также содержит эти параметры, т. е. $Y = Y(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Доказательство. Гессиан функции X совпадает с якобианом правых частей в уравнениях (11). Поэтому условие (10) показывает, что из уравнений (11) можно выразить

---

[1]) Впервые эти уравнения в общем виде были получены английским математиком У. Гамильтоном в 1834 г.

[2]) Philosoph. Trans., 1854. Переход от переменных x_i к переменным y_i $(i = 1, \ldots, n)$, о котором идет речь в теореме Донкина, часто называют *преобразованием Лежандра*.

[3]) Предполагается, что в левой части формулы (13) все x_i выражены через y_i, т. е. что $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$.

переменные $x_1, \ldots, x_n$ через $y_1, \ldots, y_n$:

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Пусть функция $Y(y_1, \ldots, y_n)$ определяется формулой (13), в которой переменные x_i заменены выражениями (15). Тогда

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Но, согласно равенствам (11), две суммы, стоящие в правой части этого равенства, взаимно уничтожаются и, следовательно, имеют место формулы (12).

Пусть теперь X содержит помимо переменных $x_1, \ldots, x_n$ еще параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда эти параметры фигурируют в прямом преобразовании (11), а следовательно, и в обратном:

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Функция Y определяется равенством (13), в котором x_i заменены на $f_i(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; поэтому[1])

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Теорема Донкина доказана полностью.

Используем теорему Донкина для перехода от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона, заменяя в теореме функцию X на L, переменные $x_1, \ldots, x_n$ — на $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — на $q_1, \ldots, q_n$, t, переменные $y_1, \ldots, y_n$ — на $p_1, \ldots, p_n$ и, наконец (с учетом примечания 3 на стр. 86), функцию $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$ — на $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L}$. Тогда

---

[1]) При вычислении производной $\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$ величины $y_1, \ldots, y_n$ рассматриваются как постоянные.

по теореме Донкина (гессиан функции L относительно $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ не равен нулю!) из формул (1) следует:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{17}$$

Равенства (16) и (17) представляют собой тождества, являющиеся следствием связи (1) между обобщенными скоростями и обобщенными импульсами. Но уравнения Лагранжа могут быть, в силу (1), записаны так:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{18}$$

Эти уравнения совместно с равенствами (16) и приводят нас к каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{19}$$

Помимо уравнений Гамильтона мы получили тождество (17), которое будет использовано в дальнейшем.

Из уравнений (19) следует тождество

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{20}$$

Назовем систему *обобщенно-консервативной*, если функция Гамильтона H не зависит явно от t, т. е. если

$$H = H(q_i, p_i).$$

В этом случае $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ [1]) и, следовательно, в силу тождества (20), $\frac{dH}{dt} = 0$, т. е. *при движении системы*

$$H(q_i, p_i) = \text{const} = h, \tag{21}$$

[1]) Из равенства (17) следует, что для обобщенно-консервативной системы и $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, т. е. t не входит явно и в функцию Лагранжа L.

где h — произвольная постоянная. Функцию H будем называть *обобщенной полной энергией*, а соотношение (21), не содержащее $\dot{q}$ или $\dot{p}$ и включающее произвольную постоянную h, — *обобщенным интегралом энергии*.

Для того чтобы пояснить эту терминологию, рассмотрим натуральную систему. Тогда L является квадратичной функцией [см. равенство (4), § 11]

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

и

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}} - \widehat{L} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} - \widehat{L} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i} - \widehat{L}_2 - \widehat{L}_1 - L_0.$$

Но по теореме Эйлера об однородных функциях[1])

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L_1. \tag{22}$$

Поэтому окончательно для произвольной натуральной системы

$$H = \widehat{L}_2 - L_0. \tag{23}$$

Пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$. Если силы имеют обычный потенциал $\Pi = \Pi(t, q_i)$ или обобщенный потенциал $V = V_1 + \Pi$, то $L_2 = T_2$, $L_0 = T_0 - \Pi$, и поэтому

$$H = \widehat{T}_2 - T_0 + \Pi. \tag{24}$$

Если система склерономна, то $T = T_2$, $T_0 = 0$, и потому

$$H = \widehat{T} + \Pi. \tag{25}$$

Таким образом, *для склерономной натуральной системы функция Гамильтона H представляет собой полную энергию*[2]), *выраженную через переменные Гамильтона.*

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. натуральную склерономную голономную систему с не зависящим явно от времени обычным потенциалом сил.

---

[1]) См. примечание на стр. 58.

[2]) При наличии обобщенного потенциала $V = V_1 + \Pi$ мы по-прежнему называем полной энергией величину $T + \Pi$, а не $T + V$.

В этом случае время t не входит явно в выражение (25) для полной энергии H и потому, согласно равенству (21), имеет место закон сохранения энергии

$$T + \Pi = h. \tag{26}$$

Консервативная система является частным случаем обобщенно-консервативной, и в этом частном случае обобщенный интеграл энергии переходит в обычный.

Если система склерономна и силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + \Pi$, в котором Π не зависит явно от времени t $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0\right)$, то снова функция H определяется формулой (25) и не зависит явно от t. Поэтому и в этом случае система является обобщенно-консервативной и имеет место интеграл энергии (26) [1]).

Пример. Горизонтальная рейка вращается около вертикальной оси, а вдоль рейки движется груз массы m. Сила, действующая на груз, имеет потенциал $\Pi(r)$, где r — расстояние груза до оси вращения.

Обозначим через φ угол поворота рейки, а через $I = md^2$ — ее момент инерции относительно вертикальной оси вращения. Тогда r и φ — независимые координаты системы и

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2].$$

Отсюда

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi}.$$

Поскольку система консервативна, то

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2}\right) + \Pi(r).$$

Канонические уравнения в данном случае имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{m(r^2 + d^2)},$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{rp_\varphi^2}{m(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r), \qquad \frac{dp_\varphi}{dt} = 0,$$

а интеграл энергии записывается так:

$$p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + 2m\Pi(r) = h_1 \qquad (h_1 = 2mh).$$

---

[1]) См. примечание 2 на стр. 89.

§ 13. Уравнения Рауса

Раус предложил взять в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы в момент времени t, часть переменных Лагранжа и часть переменных Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha \qquad (i=1,\ \ldots,\ m;\ \alpha=m+1,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

(здесь m — произвольное фиксированное число, меньшее n).

Для того чтобы от переменных Лагранжа перейти к этим переменным, нужно все $\dot{q}_\alpha$ выразить через величины p_α $(\alpha=m+1,\ \ldots,\ n)$, используя для этой цели соотношения

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Допустим, что гессиан функции L относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha$ («малый гессиан») отличен от нуля[1]):

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1} \neq 0. \tag{3}$$

Тогда, применив доказанную в предыдущем параграфе теорему Донкина, получим преобразование, обратное преобразованию (2), а именно

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha=m+1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

---

[1]) В общем случае это неравенство не следует из неравенства (19) на стр. 82, а является дополнительным условием. Для натуральной же системы неравенство (3) вытекает из того, что $L_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$ — положительно определенная квадратичная форма. В этом случае главный минор, составленный из коэффициентов квадратичной формы:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1}=\det\left(a_{\alpha\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1},$$

должен быть положителен.

где $R = R(t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha)$ — *функция Рауса*, определяемая равенством

$$R = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \widehat{\dot{q}}_\alpha - \widehat{L}; \tag{5}$$

здесь знак $\frown$ означает, что все $\dot{q}_\alpha$ выражены через p_α.

При этом переменные $t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) рассматриваются как параметры и потому, в силу той же теоремы Донкина,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

Уравнения Лагранжа для координат q_i в соответствии с равенствами (6) перепишутся так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{9}$$

Уравнения Лагранжа для координат q_α

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n)$$

совместно с формулами (4) и (7) дают

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 && (i = 1, \ldots, m), \\ &\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} && (\alpha = m+1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

образуют систему *уравнений Рауса*. Она состоит из m дифференциальных уравнений второго порядка типа Лагранжа и

$2(n-m)$ дифференциальных уравнений первого порядка типа Гамильтона, причем функция Рауса в первых уравнениях играет роль функции Лагранжа, а во вторых — функции Гамильтона[1]).

§ 14. Циклические координаты

Координата q_α называется *циклической*, если она не входит явно в функцию Лагранжа L, т. е. если $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$.

При выводе уравнений Гамильтона и уравнений Рауса были установлены равенства

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \qquad (1)$$

Из этих равенств следует, что частные производные $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ и $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ могут обращаться в нуль только одновременно. Поэтому циклическая координата может быть также определена как координата, не входящая явно в функцию Гамильтона H или в функцию Рауса R. Все эти определения эквивалентны.

Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате q_α, во время движения сохраняет постоянное значение. Действительно, из канонических уравнений следует:

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0,$$

т. е. $p_\alpha=\mathrm{const}=c_\alpha$.

Допустим теперь, что имеется $r=n-m$ циклических координат q_α $(\alpha=m+1, \ldots, n)$. Циклические координаты q_α не входят явно в H, а соответствующие этим координатам

---

[1]) Если мы хотим сохранить связь между обобщенными импульсами и функцией Лагранжа, то следует считать, что в первых уравнениях (11) роль функции Лагранжа играет функция $-R$, поскольку, согласно формулам (6):

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, \ldots, m).$$

импульсы p_α могут быть заменены постоянными c_α. Тогда[1])

$$H = H(t,\ q_i,\ p_i,\ c_\alpha). \tag{2}$$

Выпишем канонические уравнения для нециклических координат

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ m). \tag{3}$$

Из структуры (2) функции H следует, что уравнения (3) представляют собой систему из $2m$ дифференциальных уравнений первого порядка с $2m$ неизвестными функциями q_i, p_i $(i = 1,\ \ldots,\ m)$. Проинтегрировав эту систему, найдем

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t,\ c_\alpha,\ c_i,\ c_i'), \\ p_i &= \psi_i(t,\ c_\alpha,\ c_i,\ c_i') \end{aligned} \quad (i = 1,\ \ldots\ m), \right\} \tag{4}$$

где c_i, c_i' $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ — новые $2m$ произвольных постоянных. После подстановки выражений (4) в H мы можем определить q_α из уравнений

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} \quad (\alpha = m + 1,\ \ldots,\ n) \tag{5}$$

при помощи квадратур

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha}\, dt + c_\alpha' \quad (\alpha = m + 1,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

Таким образом, по существу все свелось к интегрированию системы (3), порядок которой $2m$ меньше порядка исходной системы $2n$ на $2r$ единиц, где $r = n - m$ — число циклических координат, т. е. *наличие r циклических координат дало возможность понизить порядок системы на $2r$ единиц.*

Система уравнений (3) гамильтонова. Покажем, как при помощи уравнений Рауса можно получить автономную систему[2]) из m дифференциальных уравнений второго

---

[1]) Индекс i пробегает значения $1,\ \ldots,\ m$, а индекс α — значения $m + 1,\ \ldots,\ n$.

[2]) Автономной системой мы здесь называем систему дифференциальных уравнений, не содержащую «лишних» неизвестных функций, которые должны были бы быть определены предварительно до интегрирования данной системы уравнений.

порядка типа уравнений Лагранжа. Действительно, заменив обобщенные импульсы p_α, соответствующие циклическим координатам q_α, через постоянные c_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$), мы функцию Рауса запишем в виде функции от t, q_i, $\dot{q}_i$ и c_α ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$):

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, c_\alpha). \tag{7}$$

Тогда уравнения Рауса для нециклических координат

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

образуют искомую автономную систему, а циклические координаты q_α определяются из соответствующих уравнений Рауса (11) предыдущего параграфа с помощью квадратур

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}\,dt + c'_\alpha. \tag{9}$$

При этом предварительно в $\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$ все q_i и $\dot{q}_i$ заменяются функциями от $2m+1$ аргументов t, c_i и c'_i ($i = 1, \ldots, m$), получаемыми в результате интегрирования системы (8).

Пример. В примере, рассмотренном в конце § 12,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2] - \Pi(r),$$

φ — циклическая координата и

$$p_\varphi = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} = \text{const} = c_\varphi.$$

Составим функцию Рауса:

$$R = p_\varphi \widehat{\dot{\varphi}} - \widehat{L} = \frac{1}{2} m [-\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\widehat{\dot{\varphi}}^2] + \Pi(r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2m}\frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + \Pi(r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{c_\varphi^2}{2m}\frac{1}{r^2 + d^2} + \Pi(r).$$

Определение движения сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

которое в развернутом виде выглядит так:

$$m\ddot{r} = \frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2} - \Pi'(r).$$

Заметим, что это уравнение относительного движения груза вдоль рейки, поскольку в правой части стоит центробежная сила

$$\frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2} = mr\dot{\varphi}^2 \qquad (c_\varphi = p_\varphi).$$

Циклические координаты иногда называют *игнорируемыми* или *скрытыми* координатами. Это название объясняется тем, что при интегрировании системы уравнений (3) или (8) мы как бы забываем о существовании циклических координат, считая p_α постоянными параметрами.

В разобранном примере игнорирование циклической координаты привело к игнорированию вращательного движения рейки и мы получили дифференциальное уравнение для относительного движения вдоль рейки.

Само название «циклическая координата» связано с тем, что во многих задачах механики угол φ, характеризующий движение по замкнутым траекториям (циклам), не входит явно в выражение для L и потому является циклической координатой.

Отметим некоторую аналогию между голономной системой, имеющей циклическую координату, и обобщенно-консервативной системой. Для первой системы $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$, для второй $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Для первой имеет место интеграл $p_\alpha = \text{const}$, для второй системы имеет место интеграл $H = \text{const}$. Корни этой аналогии будут обнаружены в дальнейшем при рассмотрении основного интегрального инварианта механики.

В заключение заметим, что более глубокое исследование движения систем с циклическими координатами будет проведено в гл. VII.

§ 15. Скобки Пуассона

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства интегралов гамильтоновой системы уравнений движения.

Некоторая функция $f(t, q_i, p_i)$ называется *интегралом* уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{1}$$

если для любого движения данной системы эта функция сохраняет постоянное значение c[1]:

$$f(t, q_i, p_i)=c. \tag{2}$$

Иногда интегралом называют само соотношение (2).

Для обобщенно-консервативной системы интегралом является функция $H(q_i, p_i)$. Если q_α — циклические координаты, то интегралом будет p_α.

Очевидно, что если функции $f_1, \ldots, f_l$ являются интегралами уравнений движения, то произвольная функция от этих интегралов

$$F(f_1, \ldots, f_l)$$

будет также интегралом. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать только независимые интегралы.

Если известна «полная» система интегралов, состоящая из $2n$ независимых интегралов $f_1, \ldots, f_{2n}$ (n — число степеней свободы системы), то, разрешая соотношения

$$f_k(t, q_i, p_i)=c_k \qquad (k=1, \ldots, 2n) \tag{3}$$

относительно q_i и p_i, получаем конечные уравнения движения

$$q_i=\varphi_i(t, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad p_i=\psi_i(t, c_i, \ldots, c_{2n}), \tag{4}$$

содержащие $2n$ произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_{2n}$.

Таким образом, если известны $2n$ независимых интегралов, то известны все движения системы. Если нам известны l независимых интегралов $f_1, \ldots, f_l$, где $l<2n$, то мы имеем лишь частичное представление о движениях системы, и чем больше l, тем более полным является это представление.

[1]) Это значение c может меняться, когда мы переходим от одного движения системы к другому.

Поэтому мы всегда заинтересованы в нахождении возможно бо́льшего числа независимых интегралов.

Мы познакомимся здесь с методом нахождения интегралов уравнений движения, предложенным Пуассоном и Якоби.

Пусть $f(t, q_i, p_i)$ — интеграл уравнений (1). Тогда при подстановке вместо q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ любого решения гамильтоновой системы (1) функция f превращается в постоянную c, т. е., согласно уравнениям (1)

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0. \tag{5}$$

Пуассо́н ввел специальное обозначение — *скобки Пуассона* — для следующего выражения, составленного из частных производных двух произвольных функций $\varphi(t, q_i, p_i)$ и $\psi(t, q_i, p_i)$:

$$(\varphi\,\psi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

При помощи скобок Пуассона равенство (5) — необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(t, q_i, p_i)$ была интегралом уравнений (1) — записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f\,H)=0. \tag{7}$$

Отметим следующие свойства скобок Пуассона:

Для любых функций $\varphi(t, q_i, p_i)$, $\psi(t, q_i, p_i)$, $\chi(t, q_i, p_i)$:

1°. $(\varphi\,\psi)=-(\psi\,\varphi)$;

2°. $(c\varphi\;\psi)=c(\varphi\,\psi)$ (c — постоянная);

3°. $(\varphi+\psi\;\chi)=(\varphi\,\chi)+(\psi\,\chi)$;

4°. $((\varphi\,\psi)\,\chi)+((\psi\,\chi)\,\varphi)+((\chi\,\varphi)\,\psi)=0$;

5°. $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\,\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\psi\right)+\left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

Тождества 1°, 2°, 3°, 5° получаются непосредственно из определения (6) скобок Пуассона.

Тождество 4°, которое называют *тождеством Пуассона*, устанавливается при помощи специальных соображений. Пусть X и Y — дифференциальные операторы первого порядка над функцией $f(x_1, \ldots, x_m)$:

$$Xf = \sum_{k=1}^{m} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad Yf = \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{8}$$

где X_k, Y_k $(k=1, \ldots, m)$ — функции от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда «коммутатор» $Z = XY - YX$ также будет оператором первого порядка [1])

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{k=1}^{m} [X(Y_k) - Y(X_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{9}$$

Вернемся к скобкам Пуассона (φf). Эти скобки можно рассматривать как результат применения линейного оператора Φ вида (8) к функции f от переменных q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$:

$$\Phi f = (\varphi f) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \tag{10}$$

Этот дифференциальный оператор первого порядка вполне определяется функцией φ. Аналогичные операторы Ψ, X определяются функциями ψ и χ.

Перейдем теперь непосредственно к установлению тождества Пуассона 4°. После раскрытия сложных скобок любой член в левой части 4° будет содержать в качестве множителя частную производную второго порядка от одной из функций φ, ψ, χ. Но $((\varphi\psi)\chi)$ не содержит частных производных второго порядка от χ, а сумма

$$((\psi\chi)\varphi) + ((\chi\varphi)\psi) = (\psi(\varphi\chi)) - (\varphi(\psi\chi)) = (\Psi\Phi - \Phi\Psi)\chi$$

представляет собой дифференциальный оператор первого порядка относительно χ. Таким образом, в левую часть тождества Пуассона не входят частные производные второго порядка от χ, а значит, в силу симметрии, отсутствуют и частные производные второго порядка от φ и ψ. Другими словами, все члены в левой части 4° взаимно уничтожаются, что и требовалось доказать.

---

[1]) Непосредственные вычисления показывают, что в правой части равенства (9) все члены содержащие частные производные второго порядка от функции f, взаимно уничтожаются.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема Якоби — Пуассона. *Если f и g — интегралы уравнений движения, то (fg) — также интеграл этих уравнений.*

Доказательство. Требуется доказать, что для функции (fg) выполняется соотношение (7):

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg) H) = 0, \tag{11}$$

когда такое же соотношение имеет место для каждой из функций f, g:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial t} + (gH) = 0. \tag{12}$$

Действительно, согласно 5°

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, g\right) + \left(f\, \frac{\partial g}{\partial t}\right) = -((fH)\, g) - (f\, (gH)) =$$
$$= ((Hf) g) + ((gH) f).$$

Поэтому, используя тождество Пуассона, получаем

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg) H) = ((fg) H) + ((gH) f) + ((Hf)\, g) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема дает автоматическое правило, позволяющее из двух интегралов $f(t, q_i, p_i)$, $g(t, q_i, p_i)$ при помощи алгебраических операций и операции дифференцирования получить третий интеграл:

$$(fg) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right).$$

Взяв скобки Пуассона, например, от f и (fg), мы снова получим интеграл и т. д. Однако не следует забывать, что новый интеграл может оказаться или тождественно равным нулю или функцией от предыдущих известных нам интегралов. Таким образом, только при специальном выборе независимых интегралов $f_1, \ldots, f_l$ $(l < 2n)$ можно быть уверенным, что при помощи скобок Пуассона можно получить недостающие (до полной системы) интегралы $f_{l+1}, \ldots, f_{2n}$.

В качестве примера [1]) рассмотрим интегралы количеств движения и моментов количеств движения для свободной и изолированной от внешних воздействий системы материальных точек [2]):

$$P_x=\sum p_x,\quad P_y=\sum p_y,\quad P_z=\sum p_z,$$

$$M_x=\sum m_x=\sum(yp_z-zp_y),\quad M_y=\sum m_y=\sum(zp_x-xp_z),$$

$$M_z=\sum m_z=\sum(xp_y-yp_x),$$

где

$$p_x=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z}.$$

Функции P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z являются интегралами, т. е. имеют место «интегралы сохранения»

$$P_x=c_1,\quad P_y=c_2,\quad P_z=c_3,\quad M_x=c_4,\quad M_y=c_5,\quad M_z=c_6, \tag{13}$$

если система изолирована. При наличии же внешнего силового поля с главным вектором $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ и главным моментом $\boldsymbol{L}_O(L_x, L_y, L_z)$ любой из этих интегралов имеет место, если соответствующая из величин X, Y, Z, L_x, L_y, L_z равна нулю.

Составим скобки Пуассона для величин, связанных с одной точкой:

$$(p_x p_y)=0,\quad (p_x m_y)=-\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial m_y}{\partial x}=p_z,$$

$$(m_x m_y)=\frac{\partial m_x}{\partial z}\frac{\partial m_y}{\partial p_z}-\frac{\partial m_x}{\partial p_z}\frac{\partial m_y}{\partial z}=xp_y-yp_x=m_z.$$

Заметим, что скобки Пуассона, в которых одна величина (p или m) относится к одной точке, а вторая к другой, всегда равны нулю; поэтому

$$\left.\begin{aligned}
&(P_x P_y)=\sum(p_x p_y)=0,\\
&(P_x M_y)=\sum(p_x m_y)=\sum p_z=P_z,\\
&(M_x M_y)=\sum(m_x m_y)=\sum m_z=M_z.
\end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Циклической перестановкой букв x, y, z получаем аналогичные соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&(P_y P_z)=0, && (P_z P_x)=0,\\
&(P_y M_z)=P_x, && (P_z M_x)=P_y,\\
&(M_y M_z)=M_x, && (M_z M_x)=M_y.
\end{aligned}\right\} \tag{14''}$$

---

[1]) См. Ландау Л. и Пятигорский Л., Механика, М. — Л., 1940, стр. 151.

[2]) Здесь и далее в этом примере суммирование проводится по всем точкам системы.

Шесть законов сохранения (13) не являются независимыми. Из соотношений (14′) и (14″), следует, что если имеют место интегралы

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \tag{15}$$

то имеют место и интегралы

$$P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_z = c_6. \tag{16}$$

Конечно, все это верно для *потенциального* силового поля. В непотенциальном силовом поле из равенств

$$X = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0 \tag{17}$$

не следуют равенства

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad L_z = 0\,[1]. \tag{18}$$

---

[1]) Интегралы сохранения (15) имеют место лишь при выполнении равенств (17). Аналогично интегралы (16) имеют место лишь при наличии равенств (18).

ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 16. Принцип Гамильтона

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ и функцией Лагранжа $L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \qquad (1)$$

называется *действием (по Гамильтону)* за промежуток времени (t_0, t_1), а выражение $L\,dt$ — *элементарным действием*[1]).

Так как функция L имеет вид $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$, то для вычисления действия (1) необходимо задать функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ в интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Другими словами *действие W есть функционал, зависящий от движения системы.*

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то получим некоторое кинематически возможное (т. е. допускаемое связями) движение. В расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, где координатами являются величины q_i и время t, это движение изображается некоторой кривой. Мы будем рассматривать всевозможные такие кривые—

---

[1]) Для натуральных систем $L = T - \Pi$ имеет размерность энергии. Поэтому размерность действия есть энергия $\times$ время $\equiv$ сила $\times$ длина $\times$ время.

«пути», проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_i^0)$ и $M_1(t_1, q_i^1)$ (см. рис. 29 для $n=2$), т. е. все возможные движения, переводящие систему из данного начального положения (q_i^0), которое она занимала в момент времени t_0, в данное конечное положение (q_i^1), которое она занимает в момент времени t_1. При этом заранее фиксируется начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положения системы. В остальном движения произвольны.

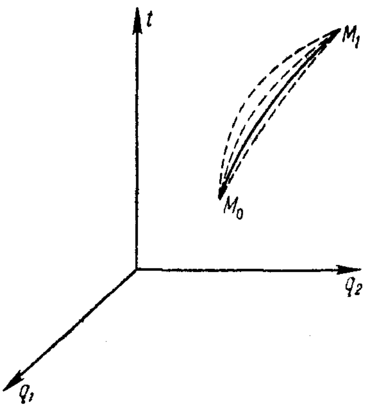

Рис. 29.

Если система натуральная и несвободная, то рассматриваемые здесь движения подчиняются лишь одному ограничению: при движении системы наложенные на точки системы связи не должны нарушаться. Это условие выполняется автоматически, когда мы задаем движение в независимых координатах, полагая $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Допустим, что среди рассматриваемых путей имеется так называемый «прямой» путь, т. е. путь, по которому может двигаться система при заданной функции L (т. е. в данном силовом поле). Для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Все остальные пути, проходящие через точки M_0 и M_1, будем называть «окольными» путями. (На рис. 29 прямой путь изображен сплошной линией, а окольные пути пунктирными линиями.)

Мы докажем, что *действие W имеет для прямого пути экстремальное (точнее, стационарное) значение* *по сравнению с окольными путями.* В этом и заключается принцип Гамильтона [1]).

Рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство путей

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad -\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n),$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ данный прямой путь; при $\alpha \neq 0$ получаются окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1:

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, \quad q_i(t_1, \alpha) = q_i^1 \quad (-\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n).$$

Действие W, вычисленное вдоль пути, принадлежащего этому семейству, представляет собой функцию параметра α

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L\,[t, q_i(t,\alpha), \dot{q}_i(t,\alpha)]\,dt.$$

Вычислим *вариацию* действия W, т. е. дифференциал по α:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i\right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\,dt. \qquad (3)$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям, использовав для этого перестановочность

---

[1]) Этот принцип содержится в работах У. Гамильтона, опубликованных в 1834—1835 гг. (см. сборник «Вариационные принципы механики», М., 1959, стр. 239). При этом Гамильтон предполагал, что исходная система склерономна (он исходил из представления кинетической энергии T в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей). Для общего случая нестационарных связей этот принцип был сформулирован и обоснован М. В. Остроградским в 1848 г. (там же, стр. 770—771, 829). В связи с этим данный принцип иногда называют принципом Гамильтона — Остроградского.

операции варьирования δ и операции дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\delta\dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt} q_i(t,\alpha)\,\delta\alpha = \\ = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} q_i(t,\alpha)\,\delta\alpha\right] = \frac{d}{dt}\delta q_i.$$

Прямой и все окольные пути проходят через фиксированные начальную и конечную точки в расширенном координатном пространстве. Поэтому при $t=t_0$ и при $t=t_1$ вариации $\delta q_i = 0$ и проинтегрированная часть обращается в нуль.

Из равенства (3) видно, что для прямого пути, т. е. при $\alpha=0$, выражение, стоящее под знаком преобразованного интеграла, в силу уравнений Лагранжа, равно нулю. Поэтому

$$\textit{для прямого пути}\ \delta W = 0. \tag{4}$$

Это и есть математическое выражение принципа Гамильтона.

Имеет место и обратное утверждение: если для некоторого пути $\delta W = 0$, то этот путь является прямым. Действительно, вследствие произвольности вариаций δq_i $(i=1,\ldots,n)$ (они на концах равны нулю, в остальных же точках пути совершенно произвольны) из условия $\delta W = 0$, в силу равенства (3), следуют равенства (2), т. е. уравнения Лагранжа для прямого пути.

Поскольку из принципа Гамильтона вытекают уравнения Лагранжа в независимых координатах (и наоборот), то *принцип Гамильтона может быть положен в основу динамики голономных систем*[1].

Прямые пути, т. е. «истинные» движения при заданной функции L, могут быть охарактеризованы как при помощи дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа, так и при помощи вариационного принципа Гамильтона. Однако между дифференциальными уравнениями движения и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие.

---

[1]) Приведенная выше формулировка принципа Гамильтона предполагает (в случае натуральной системы) существование потенциала сил. Более общая формулировка принципа, охватывающая и случай непотенциальных сил, будет дана ниже [формула (9) на стр. 109].

Дифференциальные уравнения движения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой момент времени t, положение системы, скорости и ускорения ее точек в этот момент. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого пути, то этот путь является прямым. Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует экстремальное (стационарное) свойство некоторого функционала, выделяющее прямой путь среди других кинематически возможных путей. Вариационные принципы имеют более обозримую и компактную форму и часто используются в качестве фундамента для новых (неклассических) областей механики.

Замечание. Дифференциальные уравнения (2) представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы равнялась нулю первая вариация δW, где интеграл W имеет вид (1). В вариационном исчислении уравнения (2) называются *дифференциальными уравнениями Эйлера* для вариационной задачи

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ q_i,\ \dot{q}_i)\,dt = 0.$$

Для обоснования принципа Гамильтона были использованы уравнения Лагранжа в независимых координатах. Сами же эти уравнения в случае натуральной системы были получены из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)\,\delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{5}$$

Покажем, как *принцип Гамильтона может быть непосредственно обоснован с помощью общего уравнения динамики* (5). Тогда уравнения Лагранжа сразу получаются из принципа Гамильтона.

Если в выражениях для $\boldsymbol{r}_\nu$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t,\ q_i) \qquad (\nu = 1,\ \ldots,\ N)$$

вместо q_i подставить функции $q_i(t,\ \alpha)$, то $\boldsymbol{r}_\nu$ станет сложной функцией от t и α. Продифференцируем ее по α, т. е. вычислим вариации

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i \qquad (\nu = 1,\ \ldots,\ N). \tag{6}$$

Эти формулы совпадают с формулами (8) на стр. 44, определяющими виртуальные перемещения точек голономной системы. Таким образом, *вариации радиусов-векторов при любом t являются виртуальными перемещениями точек системы.*

В справедливости этого положения можно убедиться и не прибегая к формуле (6), а исходя только из определения вариации и виртуального перемещения. Действительно, вариация $\delta\boldsymbol{r}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial\alpha}\delta\alpha$ представляет собой бесконечно малое перемещение точки системы P_ν, переводящее точку траектории, получающейся при некотором фиксированном значении α (для прямого пути $\alpha=0$), в точку смежной траектории, соответствующей значению параметра $\alpha+\delta\alpha$ (рис. 30). При этом *обе точки берутся для одного и того же момента времени t*, так как при дифференцировании по α значение t фиксируется. Следовательно $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ осуществляет переход из одного возможного положения точки P_ν в момент времени t в другое возможное положение для того же момента t, т. е. $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ — виртуальное перемещение точки системы P_ν.

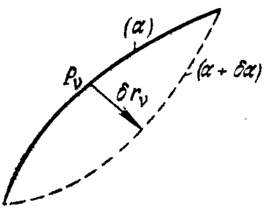

Рис. 30.

Таким образом, в общем уравнении динамики (5) мы можем считать $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ вариацией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_\nu$. Но тогда можно изменить последовательность выполнения операции $\frac{d}{dt}$ и операции δ дифференцирования по α:

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}\boldsymbol{r}_\nu(t,\ \alpha)\,\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu(t,\ \alpha)\,\delta\alpha = \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu - \delta T, \quad (7)$$

где δT — вариация кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2$.

Обозначая по-прежнему через δA элементарную работу активных сил $\boldsymbol{F}_\nu$ на виртуальных перемещениях $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$), мы с помощью преобразования (7) записываем уравнение (5) в виде

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по t в пределах от $t=t_0$ до $t=t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)\,dt-\Big[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol r}_\nu \delta \boldsymbol r_\nu\Big]_{t=t_0}^{t=t_1}=0. \tag{8}$$

Здесь $[\ \ ]_{t=t_0}^{t=t_1}$ означает разность между значениями (при $t=t_1$ и $t=t_0$) выражения, стоящего в квадратных скобках. Но при $t=t_0$ и $t=t_1$ радиус-вектор $\boldsymbol r_\nu$ не варьируется, поскольку начальное и конечное положения системы заранее фиксированы:

$$\boldsymbol r_\nu(t_0,\alpha)=\boldsymbol r_\nu^0,\quad \boldsymbol r_\nu(t_1,\alpha)=\boldsymbol r_\nu^1\qquad (\nu=1,\ \dots,\ N).$$

Поэтому $\delta\boldsymbol r_\nu=0$ при $t=t_0$ и при $t=t_1$. Второй член в равенстве (8) равен нулю, и это равенство принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)\,dt=0. \tag{9}$$

Рассмотрим тот случай, когда силы имеют потенциал $\Pi=\Pi(t,q_i)$. В этом случае

$$\delta A=-\delta\Pi,$$

где $\delta\Pi$ — виртуальный дифференциал (вариация) функции $\Pi(t,\ q_i)$ [1], и равенство (9) записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T-\delta\Pi)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0,$$

откуда

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0.$$

Таким образом, основное уравнение динамики (5) привело нас к принципу Гамильтона $\delta W=0$, а отсюда, как было указано выше, сразу получаются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\qquad (i=1,\ \dots,\ n).$$

---

[1]) То есть $\delta\Pi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i$.

В случае непотенциальных сил Q_i для получения уравнений Лагранжа следует исходить из равенства (9) [вместо равенства (4)]. Применяя к интегралу $\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta T\,dt$ формулу (3) [с заменой функции L функцией $T(t, q_i, \dot{q}_i)$] и используя выражение для элементарной работы активных сил $\delta A = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$, мы найдем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\,dt = 0. \tag{10}$$

Отсюда, в силу произвольности величин δq_i $(i = 1, \ldots, n)$, должны быть равны нулю выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла (10), т. е. для прямого пути должны выполняться уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

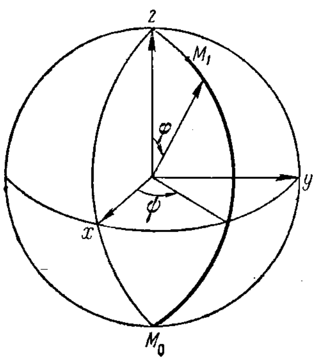

Рис. 31.

Выясним, *является ли значение действия для прямого пути наименьшим по сравнению с окольными путями.*

Рассмотрим в качестве примера *движение несвободной материальной точки, вынужденной двигаться по сфере при отсутствии силового поля* (движение по инерции на сфере). Пусть масса точки $m = 1$. В сферических координатах (рис. 31)

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\,\dot{\psi}^2).$$

Для прямого пути

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const}$$

(ψ — циклическая координата), т. е.

$$\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\psi}^2 = 0, \qquad \sin^2\varphi\,\dot{\psi} = \sin^2\varphi_0\,\dot{\psi}_0.$$

Без нарушения общности можем считать, что для прямого пути начальная скорость v_0 направлена по меридиану ($\psi = \text{const}$), т. е. $\dot\psi_0 = 0$; тогда

$$\dot\psi = 0, \quad \dot\varphi = \text{const} \quad \text{и} \quad v^2 = R^2\dot\varphi^2 = \text{const}.$$

Таким образом, прямой путь представляет собой равномерное движение по дуге большого круга. При этом

$$\begin{aligned} W_{\text{ок}} - W_{\text{пр}} &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(v^2 - v_0^2)\,dt = \\ &= v_0\int_{t_0}^{t_1}(v - v_0)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(v - v_0)^2\,dt \geqslant \\ &\geqslant v_0\int_{t_0}^{t_1}(v - v_0)\,dt = v_0(\sigma_{\text{ок}} - \sigma_{\text{пр}}). \end{aligned}$$

Длина дуги большого круга $\sigma_{\text{пр}}$ меньше длины $\sigma_{\text{ок}}$ любой другой кривой на сфере, соединяющей те же точки M_0 и M_1. Поэтому

$$W_{\text{пр}} < W_{\text{ок}}.$$

Однако это справедливо лишь тогда, когда $\sigma_{\text{пр}} = \smile M_0M_1 < \pi R$. Если $\sigma_{\text{пр}} > \pi R$, то $W_{\text{пр}}$ уже не всегда будет меньше $W_{\text{ок}}$, а наименьшее значение действия W будет достигаться на дополнительной дуге большого круга, которая в этом случае будет представлять собой кратчайшее расстояние между M_0 и M_1. Если будем двигать точку M_1 по дуге большого круга, увеличивая эту дугу, то критической точкой M_0^* (до этой точки $W_{\text{пр}}$ будет минимумом, а после перехода точки M_1 через M_0^* уже не будет таковым) является точка, диаметрально противоположная точке M_0.

Аналогично обстоит дело и в общем случае. Доказывается[1]), что если точка M_1 выбрана достаточно близко к M_0, то через M_0 и M_1 проходит один прямой путь. Но при достаточном удалении точки M_1 от M_0 через M_0 и M_1 может

[1]) См. Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа, Приложение к т. LXI Зап. Ак. наук, СПб, 1889.

проходить два прямых пути или даже целый пучок прямых путей. Такое положение M_0^* точки M_1 называют *сопряженным кинетическим фокусом* для M_0. Установлено, что *действие вдоль прямого пути* M_0M_1 *имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на дуге* M_0M_1 *нет сопряженного для* M_0 *кинетического фокуса* M_0^*.

§ 17. Вторая форма принципа Гамильтона

Остановимся еще на одной форме вариационного принципа Гамильтона. Вместо $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве рассмотрим прямой путь, проходящий через две точки $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ и $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$, а также всевозможные другие кривые, соединяющие эти точки («окольные» пути; см. рис. 32, $n=1$).

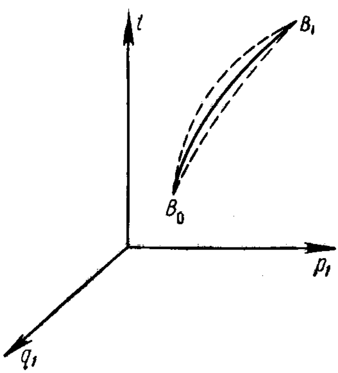

Рис. 32.

Функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, задающие прямой путь, удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функцию от $4n+1$ независимых переменных $L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)$, определяемую равенством [1])

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(t, q_i, p_i). \tag{2}$$

С помощью этой функции канонические уравнения Гамильтона (1), как легко видеть, могут быть записаны в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}=0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial p_i}=0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

---

[1]) В правую часть равенства (2) величины $\dot{p}_i$ фактически не входят. Поэтому функция L^* в данном случае от этих величин не зависит и $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}=0$ $(i=1, \ldots, n)$.

Так как прямой путь характеризуется уравнениями (3) типа Лагранжа, то как было установлено ранее, прямой путь в расширенном фазовом пространстве выделяется среди окольных путей тем, что для него интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)\, dt \tag{4}$$

имеет стационарное значение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{5}$$

С первого взгляда может показаться, что вторая форма (5) для принципа Гамильтона ничем не отличается от первой $\delta W = 0$, поскольку, согласно формуле (8) на стр. 85, выражение L^* совпадает с функцией L. Однако это не всегда так. Это справедливо лишь для движений системы, т. е. для таких путей $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ связаны соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Однако при второй форме принципа Гамильтона (в отличие от первой!) к сравнению допускаются в качестве окольных путей *произвольные кривые* $(2n+1)$-*мерного расширенного фазового пространства*, проходящие через точки B_0 и B_1. Для этих путей соотношения (6) могут не выполняться, и потому в общем случае для них $L^* \neq L$. Если же в формуле (5) ограничиться только теми окольными путями, для которых имеют место равенства (6), то вторая форма принципа Гамильтона переходит в первую $\delta W = 0$.

Заметим еще, что в отличие от точек M_0 и M_1 в первой форме принципа Гамильтона точки B_0 и B_1 не могут быть выбраны произвольно, так как через две произвольные точки расширенного фазового пространства в общем случае прямой путь провести нельзя. Точки B_0 и B_1 выбираются на том прямом пути, для которого формулируется принцип Гамильтона.

§ 18. Основной интегральный инвариант механики (интегральный инвариант Пуанкаре — Картана)

Выведем формулу для вариации действия δW в общем случае, когда начальные и конечные моменты времени, так же как и начальные и конечные координаты, не фиксированы, а являются функциями параметра α:

$$\left. \begin{array}{ll} t_0 = t_0(\alpha), & q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 = t_1(\alpha), & q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{array} \quad (i = 1, \ldots, n). \right\} \tag{1}$$

В этом случае, дифференцируя интеграл $W=\int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt$ по параметру α и интегрируя по частям, находим

$$\delta W=\delta\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt=$$
$$=L_1\,\delta t_1-L_0\delta t_0+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt=$$
$$=L_1\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}p_i^1\,[\delta q_i]_{t=t_1}-L_0\delta t_0-\sum_{i=1}^{n}p_i^0\,[\delta q_i]_{t=t_0}+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt; \tag{2}$$
$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda}=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_i(t,\ \alpha)\right]_{t=t_\lambda}\delta\alpha \qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ \lambda=0,\ 1). \tag{3}$$

С другой стороны, для вариаций конечных координат $q_i^1=q_i^1\,[t_1(\alpha),\ \alpha]$ имеем формулы

$$\delta q_i^1=\dot q_i^1\,\delta t_1+\left[\frac{\partial q_i(t,\ \alpha)}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha$$

или

$$\delta q_i^1=[\delta q_i]_{t=t_1}+\dot q_i^1\,\delta t_1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда

$$[\delta q_i]_{t=t_1}=\delta q_i^1-\dot q_i^1\,\delta t_1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Совершенно аналогично

$$[\delta q_i]_{t=t_0}=\delta q_i^0-\dot q_i^0\,\delta t_0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) и (5) для $]\delta q_i]_{t=t_1}$ и $[\delta q_i]_{t=t_0}$ в выражение (2) для δW, выражая, как обычно, $\dot q_i$ через p_i и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\widehat{\dot q}_i-\widehat{L}=H,$$

получаем следующую формулу для вариации действия δW в общем случае:

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i \, dt, \tag{6}$$

где

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 = \\ = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q_i^0 + H_0 \delta t_0.$$

В частном случае, когда для любого α соответствующий путь является прямым, т. е. когда $q_i = q_i(t, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — семейство прямых путей, интеграл в правой части равенства (6) равен нулю при любом α и формула для вариации действия принимает следующий простой вид:

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1. \tag{7}$$

Вместо расширенного координатного $(n+1)$-мерного пространства возьмем расширенное фазовое $(2n+1)$-мерное пространство, в котором координатами точки будут величины q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве возьмем произвольную замкнутую кривую C_0 с уравнениями

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \tag{8}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant l).$$

Здесь при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ имеем одну и ту же точку кривой C_0. Из каждой точки кривой C_0, как из начальной, проведем соответствующий прямой путь. Такой путь однозначно определяется (после задания начальной точки) из системы канонических уравнений Гамильтона. Получим замкнутую трубку прямых путей (см. рис. 33, $n = 1$)

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant l), \tag{9}$$

где

$$q_i(t, 0) \equiv q_i(t, l), \quad p_i(t, 0) \equiv p_i(t, l) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

На этой трубке произвольно выберем вторую замкнутую кривую C_1, охватывающую трубку и имеющую с каждой образующей лишь одну общую точку. Уравнения кривой C_1 можно записать в виде[1])

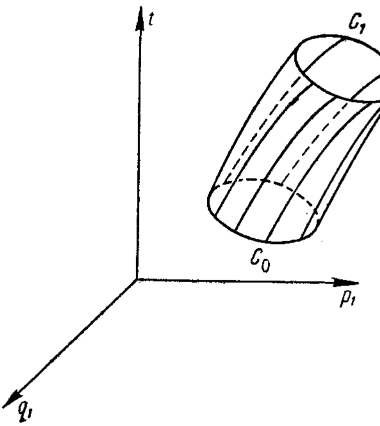

Рис. 33.

$$q_i = q_i^1(\alpha),\ p_i = p_i^1(\alpha),\quad t = t_1(\alpha). \tag{10}$$

Рассмотрим действие W вдоль образующей трубки от кривой C_0 до кривой C_1:

$$W = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt.$$

Тогда при любом α, согласно формуле (7),

$$\delta W = W'(\alpha)\,\delta\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]_0^1.$$

Интегрируя это равенство почленно по α в пределах от $\alpha=0$ до $\alpha=l$, получаем

$$0 = W(l) - W(0) = \int\limits_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]_0^1 =$$
$$= \int\limits_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^1\,\delta q_i^1 - H_1\,\delta t_1\right] - \int\limits_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,\delta q_i^0 - H_0\,\delta t_0\right] =$$
$$= \oint\limits_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] - \oint\limits_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right],$$

т. е.

$$\oint\limits_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = \oint\limits_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]. \tag{11}$$

---

[1]) Каждому значению α из интервала $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ соответствует определенная «образующая» трубки (прямой путь), а на этой образующей имеется только одна точка кривой C_1. Поэтому каждому значению α отвечает только одна точка кривой C_1, т. е. координаты точки кривой C_1 являются функциями параметра α.

Таким образом, установлено, что криволинейный интеграл

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \delta t \right], \tag{12}$$

взятый вдоль произвольного замкнутого контура, не меняет своего значения при произвольном смещении (с деформацией) этого контура вдоль трубки прямых путей, т. е. является *интегральным инвариантом*. Интеграл I мы будем называть *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана*.

Докажем теперь обратное предложение. Пусть известно, что прямые пути определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j, p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Такое предположение является естественным, поскольку движение системы должно определяться однозначно по начальным данным q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть, кроме того, дано, что интеграл Пуанкаре — Картана (12) является интегральным инвариантом по отношению к прямым путям, определяемым системой уравнений (13), т. е. что для любой трубки этих путей интеграл Пуанкаре — Картана, вычисленный вдоль охватывающего трубку замкнутого контура, не изменяет своей величины при произвольном смещении точек контура вдоль образующих трубки. Тогда мы докажем, что между функцией H и функциями Q_i, P_i имеют место зависимости

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

т. е. докажем, что уравнения (13) являются каноническими уравнениями Гамильтона с той функцией H, которая входит в выражение под знаком интеграла I.

Для доказательства введем вспомогательную переменную (параметр) μ, дополнив систему (13) еще одним уравнением:

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{1} = \pi \, d\mu. \tag{15}$$

Здесь $\pi = \pi(t, q_i, p_i)$ — произвольная функция от точки расширенного фазового пространства. Интегрируя систему

(15), мы находим выражения для q_i, p_i и t в виде функций от переменной μ и от произвольных начальных данных q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$ и t_0 (при $\mu=0$):

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \\ p_i &= \psi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \qquad (i=1, \ldots, n). \\ t &= \chi(\mu;\ q_i^0,\ p_i^0,\ t_0) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Мы получили параметрические уравнения для семейства всех прямых путей. Так как нам нужны только те прямые пути, которые образуют данную трубку, то мы должны выбирать начальную точку $M_0(q_j^0,\ p_j^0,\ t_0)$ на кривой C_0, т. е. в уравнения (16) вместо q_j^0, p_j^0 и t_0 следует подставить

$$q_j^0(\alpha), \qquad p_j^0(\alpha), \qquad t_0(\alpha).$$

Сделав это, мы найдем параметрические уравнения для прямых путей, образующих данную трубку,

$$q_i = q_i(\mu,\ \alpha), \quad p_i = p_i(\mu,\ \alpha), \quad t = t(\mu,\ \alpha) \tag{17}$$
$$(i=1, \ldots, n;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant l);$$

здесь значение α выделяет определенный прямой путь («образующую» трубки), а значение параметра μ фиксирует определенную точку на этом прямом пути.

Полагая $\mu=\mathrm{const}$, мы на каждой образующей получаем точку, а на трубке — замкнутую кривую. Будем считать, что в интеграле (12) вместо q_i, p_i и t подставлены их выражения (17). Тогда интеграл I будет представлять собой функцию параметра μ и при каждом фиксированном значении μ будет криволинейным интегралом вдоль соответствующей замкнутой кривой $\mu=\mathrm{const}$.

В силу инвариантности

$$dI = 0,$$

где буква d означает дифференцирование по параметру μ. Проводя дифференцирование под знаком интеграла, находим:

$$0 = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} (dp_i\, \delta q_i + p_i\, d\, \delta q_i) - dH\, \delta t - H\, d\delta t \right].$$

Написав $\delta\, dq_i$ и $\delta\, dt$ вместо $d\,\delta q_i$ и $d\,\delta t$ и проинтегрировав по частям вдоль замкнутого контура, получим [1]:

$$0=\oint\left[\sum_{i=1}^{n}(dp_i\,\delta q_i-\delta p_i\,dq_i)-dH\,\delta t+\delta H\,dt\right]=$$

$$=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}dt\right)\delta q_i+\left(-dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)\delta p_i\right]+\right.$$
$$\left.+\left(-dH+\frac{\partial H}{\partial t}dt\right)\delta t\right\},$$

или, в силу (15), разделив почленно на $d\mu=\frac{dt}{\pi}$,

$$0=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(P_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(-Q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{dH}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t\right\}\pi. \tag{18}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом при произвольном множителе π, а это возможно только тогда, когда выражение в фигурных скобках равно нулю. Приравняв это выражение нулю, получим

$$P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

что и требовалось доказать [2].

Из доказанного следует, что *инвариантность интеграла Пуанкаре — Картана может быть положена в основу*

---

[1]) Операции d и δ можно переставить местами, так как они представляют собой дифференцирование по различным независимым переменным μ и α. Далее, при интегрировании по частям проинтегрированная часть пропадает (равна нулю), так как конечная точка пути интегрирования совпадает с начальной. Поэтому для любых двух функций u и v при интегрировании по замкнутому контуру $\oint u\,\delta v=-\oint v\,\delta u$.

[2]) Мы получаем еще тождество $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$, которое является следствием канонических уравнений Гамильтона [см. равенство (20) на стр. 88].

механики, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона.

Замечание. При доказательстве мы ввели вспомогательную переменную μ и использовали то обстоятельство, что интеграл I не меняет своего значения при переходе от одной кривой семейства $\mu = \text{const}$ к другой кривой того же семейства. Из-за произвольности функции $\pi(t, q_i, p_i)$ семейство кривых $\mu = \text{const}$ по существу является произвольным семейством непересекающихся замкнутых кривых, охватывающих данную трубку прямых путей. Если мы не ввели бы параметр μ, а приняли бы в качестве параметра время t, то, повторяя те же рассуждения, мы только частично использовали бы инвариантность интеграла I (только для кривых из одновременных состояний $t = \text{const}$) и не могли бы прийти к нужному результату.

Рассмотрим теперь подробнее структуру интеграла Пуанкаре — Картана.

В интеграле Пуанкаре — Картана (12) время t входит на правах координаты q_i, а роль соответствующего импульса играет величина $-H$, т. е. энергия, взятая с противоположным знаком. Это — далеко идущая аналогия.

Сделаем в интеграле I замену переменных, введя новую переменную z, связанную со старыми переменными соотношением

$$z = -H(t, q_i, p_i). \tag{19}$$

Из этого соотношения выразим p_1:

$$p_1 = -K(t, q_1, \ldots, q_n, z, p_2, \ldots, p_n). \tag{20}$$

Тогда основной интеграл I в новых переменных запишется так:

$$I = \oint z\delta t + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n - K\delta q_1. \tag{21}$$

Таким образом, и в новых переменных интеграл I имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, но только теперь роль времени играет переменная q_1, а вместо прежней энергии H стоит импульс p_1, взятый с противоположным знаком, т. е. K. Поэтому, согласно доказанному ранее, в новых переменных движение системы должно описываться следующей гамильтоновой системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dt}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial t},\\ &\frac{dq_j}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь независимой переменной является q_1.

Проиллюстрируем это на примере линейного осциллятора. Для него

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}.$$

Составим канонические уравнения, приняв за независимую переменную q. Для этого положим

$$z=-\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}\right),$$

откуда

$$p=\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Таким образом, в нашем случае

$$K=-\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Соответствующие канонические уравнения (22) запишутся так:

$$\frac{dt}{dq}=\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c}-q^2}}, \quad \frac{dz}{dq}=0.$$

Из второго уравнения $z=\mathrm{const}=-h$. При помощи квадратуры находим t:

$$\omega t=\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c}-q^2}}-\alpha,$$

где $\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$, а α — произвольная постоянная, или

$$\omega t+\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{c}{2h}}\,q,$$

т. е.

$$q=A\sin(\omega t+\alpha) \quad \left(A=\sqrt{\frac{2h}{c}}\right).$$

§ 19. Гидродинамическая интерпретация основного интегрального инварианта. Теоремы Томсона и Гельмгольца о циркуляции и вихрях

Для конкретной интерпретации понятия об интегральном инварианте рассмотрим движение идеальной жидкости под действием внешних сил с потенциалом $\Pi(t, x, y, z)$. Как известно из гидродинамики [1]), уравнение движения частицы такой жидкости имеет вид

$$a = -\operatorname{grad}\Pi - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{1}$$

где a — ускорение частицы, ρ и p — ее плотность и давление, а потенциал Π отнесен к единице массы.

Примем, что ρ и p связаны функциональным соотношением $\rho = f(p)$ (это в частности имеет место при изотермическом протекании процесса). Тогда, положив

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \int \frac{dp}{\rho},$$

мы запишем уравнение (1) в виде

$$a = -\operatorname{grad}\tilde{\Pi}. \tag{1'}$$

Последнее уравнение показывает, что движение частицы жидкости идентично движению материальной точки с массой $m = 1$ в потенциальном поле $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}\ (t, x, y, z)$. Поэтому для движения частиц жидкости интегральным инвариантом будет интеграл Пуанкаре — Картана, который в данном случае имеет вид

$$I = \oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t, \tag{2}$$

где u, v, w — компоненты скорости частицы [они в данном случае (при $m = 1$) представляют собой импульсы p_i], E — энергия, определяемая формулой

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \tilde{\Pi}(t, x, y, z). \tag{3}$$

Таким образом, интеграл (2), взятый вдоль произвольно замкнутого контура в семимерном пространстве (t, x, y, z, u, v, w), не меняет своей величины при произвольном смещении точек контура в соответствии с движением жидкости. Это движение происходит

---

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика. т. I, М. — Л., 1948, стр. 48.

в соответствии с дифференциальными уравнениями, которые в силу формулы (1′) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,\\ &\frac{du}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial x},\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial y},\quad \frac{dw}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для данного частного случая уравнения (4) представляют собой канонические уравнения Гамильтона.

Если задано конкретное движение жидкости, при котором поле скоростей известно, т. е. если известны функции $u(t, x, y, z)$, $v(t, x, y, z)$, $w(t, x, y, z)$, то интеграл (2) можно рассматривать как интеграл в расширенном координатном пространстве, т. е. в четырехмерном пространстве t, x, y, z. Значение этого интеграла не меняется, если мы точки контура интегрирования произвольно сместим вдоль путей движения частиц, т. е. интеграл

$$\oint\limits_C u(t, x, y, z)\,dx+v(t, x, y, z)\,dy+ \\ +w(t, x, y, z)\,dz-E(t, x, y, z)\,dt \tag{5}$$

является интегральным инвариантом в расширенном координатном пространстве для движения жидкости с заданным полем скоростей.

Если контур интегрирования состоит из одновременных состояний ($t=\mathrm{const}$), то интеграл (2) принимает вид

$$\oint\limits_C u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z. \tag{6}$$

В гидродинамике этот интеграл называется *циркуляцией скорости* вдоль контура C. Мы попутно получили теорему Томсона о сохранении циркуляции скорости: *величина циркуляции* (6) *не изменится, если частицы жидкости, образующие контур в момент времени* t_1, *перевести в положения, занимаемые ими в произвольный другой момент времени* t_2.

Если частицы жидкости в некоторый момент времени образуют линию, то эти же частицы в другой момент образуют другую линию. Мы будем говорить о перемещающейся и деформирующейся со временем «жидкой линии». Аналогично определяется понятие «жидкой поверхности».

Теорема о сохранении циркуляции утверждает, что *каждой замкнутой жидкой линии отвечает определенная циркуляция.*

Заметим, что согласно формуле Стокса[1]) интеграл (6) записывается в виде интеграла по поверхности S, ограниченной контуром C:

$$\iint\limits_S \xi\,\delta y\,\delta z+\eta\,\delta z\,\delta x+\zeta\,\delta x\,\delta y, \tag{7}$$

[1]) См., например, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 22, § 4.

где

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

— компоненты некоторого вектора Ω, называемого *вихрем* (*ротором*) *скорости* или просто *вихрем*. Интеграл (7) обычно представляют в виде

$$\iint_S \Omega_n\, dS, \tag{7'}$$

где Ω_n — проекция вектора Ω на нормаль к поверхности, а dS — элемент площади поверхности S. Отсюда видно, что интеграл (7) задает *величину потока вихря* через поверхность. Теорема о сохранении циркуляции скорости переходит в теорему о сохранении потока вихря: *каждой ограниченной жидкой поверхности соответствует определенная величина потока вихря через эту поверхность*[1].

Движение жидкости с заданным полем скоростей определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=u(t,\ x,\ y,\ z),\quad \frac{dy}{dt}=v(t,\ x,\ y,\ z),\quad \frac{dz}{dt}=w(t,\ x,\ y,\ z). \tag{9}$$

По отношению к интегральным кривым системы (9) интеграл (5) является интегральным инвариантом.

Поставим вопрос, какие другие системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(t,\ x,\ y,\ z)}=\frac{dy}{Q(t,\ x,\ y,\ z)}=\frac{dz}{R(t,\ x,\ y,\ z)}=\frac{dt}{U(t,\ x,\ y,\ z)} \tag{10}$$

наряду с системой (9) обладают тем же свойством, т. е. для каких еще систем интеграл (5) является интегральным инвариантом?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, введем на траекториях системы (10) параметр μ и приравняем, как это делалось в предыдущем параграфе, отношения (10) произведению $\pi(t,\ x,\ y,\ z)\,d\mu$, где π — произвольная функция. Рассмотрим трубку интегральных кривых системы (10) и охватывающий эту трубку замкнутый контур C, для которого $\mu=\text{const}=c$. Заметим, что значение интеграла (5) вдоль контура C не зависит от величины $\mu=c$.

Обозначая буквой d дифференцирование по μ и проводя те же рассуждения, что и на стр. 119, мы получим, опираясь на

---

[1]) Отсюда, в частности, следует, что в жидком объеме идеальной жидкости вихри не могут ни исчезать, ни появляться [если, конечно, силы имеют потенциал и имеет место соотношение $\rho=f(p)$].

формулы (8):

$$0 = d\oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t =$$

$$= \oint du\,\delta x + dv\,\delta y + dw\,\delta z - dE\,\delta t - \delta u\,dx - \delta v\,dy - \delta w\,dz +$$

$$+ \delta E\,dt = \oint \left[-\zeta\,dy + \eta\,dz + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) dt \right] \delta x + [*]\,\delta y +$$

$$+ [*]\,\delta z + \left[-dE - \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \frac{\partial v}{\partial t}\,dy - \frac{\partial w}{\partial t}\,dz + \frac{\partial E}{\partial t}\,dt \right] \delta t,$$

где коэффициенты при δy и δz получаются из коэффициента при δx циклической перестановкой.

Заменим dx, dy, dz, dt знаменателями дробей (10), умноженными на $\pi(t, x, y, z)\,dt$. Так как при любом выборе функции $\pi(t, x, y, z)$ выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом, то оно должно тождественно равняться нулю. Поэтому выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю (после замены в них дифференциалов dx, dy, dz, dt пропорциональными величинами P, Q, R, U), т. е. имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \eta R - \zeta Q + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) U = 0, \\ \zeta P - \xi R + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) U = 0, \\ \xi Q - \eta P + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) U = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) P + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) Q + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) R = 0. \tag{12}$$

Соотношение (12) является следствием равенств (11), если $U \neq 0$, и равенств (11) и (1′), если $U = 0$.

Равенства (11) совместно с уравнениями (10) определяют все дифференциальные системы, по отношению к которым интеграл (5) является интегральным инвариантом. Среди этих систем будем искать те, для которых $U = 0$, т. е. $dt = 0$. Тогда из (11) найдем:

$$\frac{P}{\xi} = \frac{Q}{\eta} = \frac{P}{\zeta},$$

и система (10) примет вид

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}. \tag{13}$$

Интегральные кривые системы (13) носят название *вихревых линий.*

Таким образом, *система дифференциальных уравнений вихревых линий является единственной системой с* $dt = 0$, *по* *отношению к которой интеграл* (5) *является интегральным инвариантом* [1]).

Из этого положения вытекает важное следствие.

Возьмем в пространстве (x, y, z, t) произвольную трубку вихревых линий и два охватывающих ее контура C_1 и C_2 (рис. 34). В силу инвариантности интеграла (5) относительно вихревых линий

$$\oint_{C_1} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t = \oint_{C_2} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t.$$

Зададим произвольно величину $\tau > 0$ и переместим любую точку пространства (x, y, z, t) в точку $(x', y', z', t+\tau)$, где x', y', z' — координаты в момент $t+\tau$ той частицы жидкости, которая в момент t имела координаты x, y, z. При таком сдвиге вдоль траекторий частиц жидкости вихревые линии перейдут в некоторые новые линии, которые мы назовем «перемещенными линиями». Взятая нами трубка вихревых линий перейдет в трубку перемещенных линий, а контуры C_1 и C_2 — в контуры D_1 и D_2 (см. рис. 34)[2]). Так как сдвиг осуществлялся движением частиц жидкости, то при сдвиге интеграл (5) не меняет своего значения:

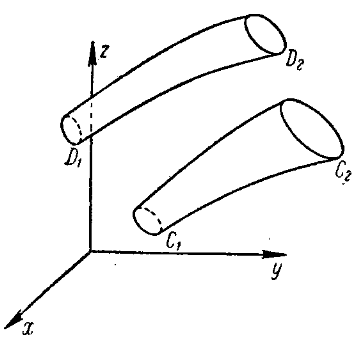

Рис. 34.

$$\oint_{C_1} = \oint_{D_1}, \quad \oint_{C_2} = \oint_{D_2};$$

но тогда

$$\oint_{D_1} = \oint_{D_2}. \tag{14}$$

Можно считать, что D_1 и D_2 — два произвольных контура, охватывающих трубку перемещенных линий. Поэтому равенство (14) выражает инвариантность интеграла (5) по отношению к «перемещенным линиям». При этом вдоль каждой перемещенной линии, как и вдоль вихревой, $dt = 0$. Следовательно, перемещенные линии обладают теми свойствами, которыми, как было показано ранее, могут обладать только вихревые линии. Значит, перемещенные линии являются вихревыми линиями. При этом время смещения τ является произвольным. Таким образом, любая вихревая линия при движении образующих ее частиц жидкости остается все время вихревой.

Мы пришли к **теореме Гельмгольца**, которую можно сформулировать и так: *вихревая линия есть жидкая линия.*

---

[1]) Интеграл (5) является интегральным инвариантом и для других систем [например, для системы (9)], у которых $dt \neq 0$.

[2]) Рассматриваемые здесь трубки вихревых линий расположены в четырехмерном пространстве (x, y, z, t), но на рис. 34 ось t не изображена.

Попутно мы получили, что с каждой вихревой трубкой связана определенная «интенсивность», определяемая интегралом

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t. \tag{15}$$

Величина этой интенсивности не меняется при движении жидкости. Если будем брать трубку вихревых линий для одного и того же момента времени t ($\delta t = 0$), то интенсивность (15) представляет собой циркуляцию скорости вдоль контура C

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z.$$

§ 20. Обобщенно-консервативные системы. Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, т. е. произвольную (быть может, и ненатуральную) систему, для которой функция H не зависит явно от времени. Для нее имеет место обобщенный интеграл энергии

$$H(q_i, p_i) = h. \tag{1}$$

Этот интеграл аналогичен интегралу сохранения импульса $p_1 = c$, который имеет место в случае, когда q_1 является циклической координатой, т. е. когда $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Исходя из аналогии между переменной времени t и циклической координатой, следует ожидать, что с помощью интеграла энергии (1) удастся понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на две единицы.

С этой целью рассмотрим обычное (т. е. нерасширенное) $2n$-мерное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$). *Ограничимся рассмотрением только тех точек фазового пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению* (1) *с фиксированным значением постоянной* h_0. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех состояний системы, которым соответствует заданная величина полной энергии

$$H = H(q_i^0, p_i^0) = h_0.$$

Тогда основной интегральный инвариант I представится в виде

$$I = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{2}$$

поскольку, в силу равенства (1),

$$\oint H \delta t = h_0 \oint \delta t = 0.$$

Теперь разрешим уравнение (1) относительно одного из импульсов, например p_1:

$$p_1 = -K(q_1, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h_0), \tag{3}$$

и полученное выражение подставим вместо p_1 в интеграл (2); тогда

$$I = \oint \left[\sum_{j=2}^{n} p_j \delta q_j - K \delta q_1 \right]. \tag{4}$$

Но интегральный инвариант (4) снова имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, если считать, что основными координатами и импульсами являются величины q_j и p_j ($j = 2, \ldots, n$), а переменная q_1 играет роль переменной времени (вместо функции H имеем функцию K). Поэтому (см. § 18) движение обобщенно-консервативной системы должно удовлетворять следующей гамильтоновой системе дифференциальных уравнений порядка $2n - 2$:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \qquad (j = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Эти уравнения были получены Уиттекером и носят название *уравнений Уиттекера*.

Проинтегрировав систему уравнений Уиттекера, мы найдем величины q_j и p_j ($j = 2, \ldots, n$) как функции от переменной q_1 и $2n - 2$ произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_{2n-2}$; кроме того, интегралы уравнений Уиттекера будут содержать произвольную постоянную h_0, т. е. будут иметь вид

$$q_j = \varphi_j(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \quad p_j = \psi_j(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$$
$$(j = 2, \ldots, n). \tag{6}$$

После этого, подставив выражение (6) в формулу (3), найдем аналогичное выражение для

$$p_1 = \psi_1(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{6'}$$

Таким образом определяются все траектории в фазовом пространстве т. е. геометрическая картина движения.

Зависимость координат от времени t мы получим из уравнения $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ при помощи квадратуры

$$t = \int \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} + c_{2n-1}; \tag{7}$$

при этом в частной производной $\frac{\partial H}{\partial p_1}$ все переменные выражены через q_1 с помощью равенств (6) и (6').

Гамильтонова система уравнений Уиттекера (5) может быть заменена эквивалентной системой уравнений типа Лагранжа:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где $q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}$, а функция P (аналог функции Лагранжа) связана с функцией K (аналогом функции Гамильтона) равенством [1])

$$P = P(q_1, \ldots, q_n, q'_2, \ldots, q'_n) = \sum_{j=2}^{n} p_j q'_j - K. \tag{9}$$

Обратим внимание на то, что система (8) содержит не n, а $n - 1$ уравнений второго порядка. В последней части этого соотношения импульсы p_j должны быть заменены их выражениями через

$$q'_2 = \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \quad q'_n = \frac{dq_n}{dq_1},$$

которые могут быть получены из первых $n - 1$ уравнений (5).

Преобразуем выражение для функции P, исходя из равенств (3) и (9):

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j q'_j + p_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \frac{1}{\dot{q}_1}(L + H). \tag{10}$$

[1]) См. равенство (8) на стр. 85.

В случае натуральной, т. е. обычной, консервативной системы $L = T - \Pi$ и $H = T + \Pi$; следовательно

$$P = \frac{1}{\dot q_1}(L + H) = \frac{2T}{\dot q_1}, \tag{11}$$

причем кинетическая энергия T может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k = \dot q_1^2 G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n'); \tag{12}$$

здесь

$$G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n') = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i' q_k' \qquad (q_1' = 1). \tag{13}$$

Из равенств (1) и (12) находим

$$\dot q_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}} \tag{14}$$

и получаем для функции P следующее выражение:

$$P = \frac{2T}{\dot q_1} = 2\sqrt{G(h - \Pi)}. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения (8), в которых функция P имеет вид (15) и которые, таким образом, относятся к натуральным, т. е. обычным, консервативным системам, носят название уравнений Якоби [1]).

Интегрируя уравнения Якоби, мы определяем все траектории в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$:

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{16}$$

Связь координат с переменной времени устанавливается из соотношения (14) с помощью квадратуры

$$t = \int \sqrt{\frac{G}{h - \Pi}}\, dq_1 + c_{2n-1}. \tag{17}$$

Переходим теперь к установлению принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа. Поскольку уравнения (8)

---

[1]) Эти уравнения были выведены немецким математиком К. Якоби и содержатся в его классических «Лекциях по динамике», изданных в 1886 г. (русский перевод ГОНТИ, 1936). В случае ненатуральной обобщенно-консервативной системы функция P, входящая в уравнения Якоби, определяется формулой (9).

являются уравнениями типа Лагранжа, то из них вытекает вариационный принцип, согласно которому для прямого пути

$$\delta W^* = 0, \tag{18}$$

где

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P\, dq_1 \tag{19}$$

— *действие по Лагранжу*. Здесь «допускаются к соревнованию» все движения обобщенно-консервативной системы, которые переводят систему из заданного начального положения q_i^0 в заданное конечное положение q_i^1 (рис. 35). При этом моменты времени t_0 и t_1 не фиксируются и при переходе от прямого пути к окольным могут варьироваться[1]).

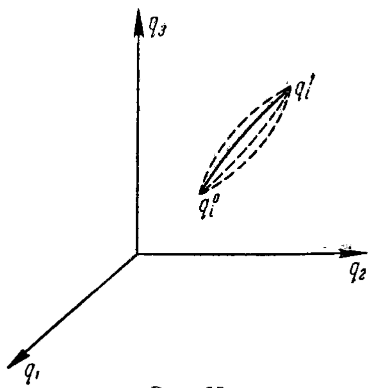

Рис. 35.

Выражая в интеграле (19) функцию P с помощью равенства (10), находим связь между действием по Лагранжу W^* и действием по Гамильтону W:

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + h \int_{t_0}^{t_1} dt = W + h(t_1 - t_0). \tag{20}$$

В случае обычной (натуральной) консервативной системы можно воспользоваться выражением (11) и представить действие

[1]) Равенство (18) устанавливает, что для прямого пути действие по Лагранжу имеет стационарное значение. Вопрос о том, когда действие W^* имеет для прямого пути наименьшее значение, решается с привлечением кинетических фокусов совершенно так же, как и для принципа Гамильтона. Более подробно об этом см. Суслов Г. К., Теоретическая механика, § 248.

по Лагранжу в виде

$$W^* = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\,dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\,ds_\nu. \qquad (21)$$

Но при этом уже имеется в виду, что «к соревнованию» допускаются только те движения системы, при которых полная энергия системы имеет одно и то же значение h (изоэнергетичность!).

Полученное выражение для W^* показывает, что *действие по Лагранжу* W^* *равно работе векторов количеств движения точек системы на соответствующем перемещении системы.*

Вариационный принцип (18) носит название *принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа* [1]).

В качестве примера рассмотрим сравнение оптического принципа Ферма с принципом наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа [2]).

Согласно принципу Ферма свет в неоднородной среде распространяется так, чтобы время пробега

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} \qquad (22)$$

было минимальным.

Введя в каждой точке среды коэффициент преломления $n = \frac{c}{v}$ — отношение скорости света c в пустоте к скорости v в данной среде, — мы преобразуем эту формулу к виду

$$t = \frac{1}{c}\int_{s_0}^{s} n\,ds,$$

где n — функция точки среды. Поэтому принцип Ферма запишется так:

$$\delta \int_{s_0}^{s} n\,ds = 0. \qquad (23)$$

---

[1]) Впервые в несколько туманной формулировке этот принцип был сформулирован Мопертюи в 1747 г. Строгая формулировка и обоснование принципа были даны Лагранжем в 1760 г.

[2]) См., например, Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938, стр. 93—94.

С другой стороны, для одной материальной точки с массой m принцип Мопертюи — Лагранжа дает (поскольку $^1/_2\, mv^2 + \Pi = h$)

$$\delta \int_{s_0}^{s} mv\, ds = \sqrt{m}\ \ \delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = 0. \tag{24}$$

Траектория светового луча совпадает с траекторией материальной точки, если [см. формулы (23) и (24)]

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n^2. \tag{25}$$

Если принять, что вблизи поверхности Земли показатель преломления n убывает как линейная функция высоты z

$$n = n_0 \left(1 - k\frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

где H — высота атмосферы, то, пренебрегая малыми членами порядка $\left(\frac{z}{H}\right)^2$, можно написать

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 - 2k\frac{z}{H}\right) = c + gz, \tag{27}$$

где

$$c = h - \frac{1}{2} n_0^2, \qquad g = \frac{kn_0^2}{H}. \tag{28}$$

Формула (27) определяет потенциал силы тяжести вблизи поверхности Земли с видоизмененным значением g.

Поэтому если показатель преломления n указанным образом изменяется с высотой, то свет распространяется по параболе с вертикальной осью.

§ 21. Движения по инерции. Связь с геодезическими линиями при произвольном движении консервативной системы

Пусть дана произвольная склерономная система; ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{1}$$

Введем метрику в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, определив квадрат длины дуги ds^2 с помощью положительно определенной квадратичной дифференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, dq_i\, dq_k. \tag{2}$$

Тогда величина дуги кривой, соединяющей две точки координатного пространства (q_i^0) и (q_i), определится равенством

$$s=\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} ds=\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{3}$$

Сопоставляя формулы (1) и (2), найдем, что при движении системы

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{4}$$

т. е. что *кинетическая энергия системы* [при метрике (2)] *всегда совпадает с кинетической энергией изображающей точки в n-мерном координатном пространстве, если этой точке приписать массу* $m=1$.

Рассмотрим теперь движение системы по инерции ($\Pi=0$). Тогда все возможные при таком движении траектории изображающей точки носят название *геодезических линий* [по отношению к метрике (2)]. Из интеграла энергии

$$T=h,$$

согласно формуле (4), следует, что

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2h}, \tag{5}$$

т. е. движению по инерции (а также любому движению с постоянным значением h кинетической энергии) соответствует в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$ равномерное движение изображающей точки со скоростью $\sqrt{2h}$.

В соответствии с принципом наименьшего действия геодезические линии являются экстремалями[1]) вариационной задачи

$$\delta W^*=0, \tag{6}$$

где W^* — действие по Лагранжу. Но в рассматриваемом случае как для прямого, так и для окольного пути имеет место интеграл энергии $T=h$ с фиксированным значением h; поэтому

$$W^*=\int\limits_{t_0}^{t} 2T\,dt=2h\,(t-t_0)=\sqrt{2h}\,s, \tag{7}$$

где $s=\sqrt{2h}\,(t-t_0)$ — длина кривой в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$.

---

[1]) То есть кривыми, для которых W^* имеет стационарное значение.

Вариационная задача (6) принимает вид

$$\delta s=\delta\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}=0. \tag{8}$$

Таким образом, *геодезическая линия характеризуется тем, что длина дуги этой кривой имеет экстремальное (точнее, стационарное) значение по сравнению с дугами других кривых, имеющими с геодезической одни и те же концы*[1] (см. рис. 35 на стр. 131).

В случае, когда для прямого пути действие по Лагранжу имеет минимум, длина дуги геодезической меньше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки, что и дуга геодезической.

Поэтому геодезические линии называются также *кратчайшими линиями* в пространстве.

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. склерономную систему с не зависящей явно от t потенциальной энергией $\Pi=\Pi(q_1, \ldots, q_n)$. Тогда, согласно формулам (15) и (19) предыдущего параграфа,

$$W^*=2\int\limits_{q_1^0}^{q_1}\sqrt{G(h-\Pi)}\,dq_1=2\int\limits_{q_i^0}^{q_i}\sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}. \tag{9}$$

Поэтому движение консервативной системы с данным значением полной энергии h осуществляется в координатном пространстве вдоль экстремали вариационной задачи (с закрепленными концами)

$$\delta\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)}\sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}=0. \tag{10}$$

Сопоставляя формулу (10) с формулой (8), заключаем, что *для консервативной системы траектории прямых путей являются геодезическими линиями в координатном пространстве с метрикой*

$$ds_1^2=(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k. \tag{11}$$

---

[1]) Это всегда имеет место, когда концы дуги геодезической достаточно близки.

§ 22. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна

Рассмотрим теперь интеграл $I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]$ вдоль контура C, состоящего из одновременных состояний системы. Такой контур получается, если трубку прямых путей (см. рис. 33 на стр. 116) рассечь гиперплоскостью $t = \text{const}$. Для такого контура $\delta t = 0$ и основной интегральный инвариант принимает вид

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i. \tag{1}$$

Этот интеграл был впервые введен Пуанкаре. Позже Картан распространил этот интеграл и на контуры, состоящие из неодновременных состояний, введя дополнительное слагаемое $-H\delta t$.

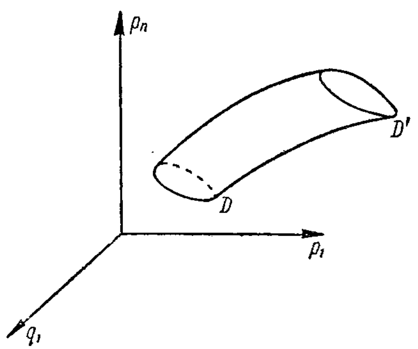

Рис. 36.

Интегральный инвариант Пуанкаре I_1 не меняет своего значения, если контур C смещается вдоль трубки прямых путей, переходя в контур C', состоящий снова из одновременных состояний. Интеграл I_1 удобно рассматривать в обычном (нерасширенном) $2n$-мерном фазовом пространстве $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$. В этом пространстве контурам C и C' (рис. 33) соответствуют контуры D и D', охватывающие трубку «прямых» траекторий (рис. 36); при этом

$$\oint_D \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint_{D'} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i.$$

Заметим, что один из контуров D и D', например D, можно выбрать совершенно произвольно. Можно считать, что точки контура D являются различными состояниями системы в один и тот же момент времени t; тогда соответствующие состояния системы в момент времени t' составят контур D'.

Вместо фазового пространства рассмотрим отдельно n фазовых плоскостей (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Спроектируем произвольный замкнутый контур D, расположенный в фазовом пространстве, на эти плоскости (рис. 37). Получим контуры D_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда для любого i

$$\oint_D p_i\,\delta q_i = \oint_{D_i} p_i\,\delta q_i = \pm S_i, \tag{2}$$

где S_i — площадь области, ограниченной контуром D_i в плоскости (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Направление обхода контура D индуцирует направление обхода на проекции D_i. В формуле (2) перед S_i берется знак плюс, если контур D_i обходится по часовой стрелке (т. е. в направлении кратчайшего поворота оси p_i к оси q_i), и знак минус — в противном случае.

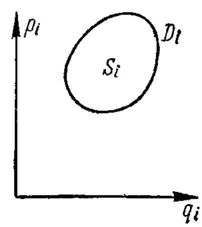

Рис. 37.

Тогда

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \pm S_i. \tag{3}$$

Таким образом, при движении системы меняются контуры D и D_i, изменяются и площади S_i, но *алгебраическая сумма* (3) *этих площадей остается неизменной*. Это и есть геометрическая интерпретация инвариантности интеграла Пуанкаре.

В выражение для I_1 не входит H. Следовательно, интеграл Пуанкаре I_1 является инвариантом для любой гамильтоновой системы. Поэтому интеграл I_1 называется *универсальным интегральным инвариантом*.

Нетрудно доказать и следующее положение.

Если для некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4}$$

интеграл I_1 *является инвариантом, то система* (4) *является гамильтоновой.*

Действительно, в этом случае

$$0=\frac{d}{dt}I_1=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\frac{d}{dt}\delta q_i\right)=$$
$$=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\delta\frac{dq_i}{dt}\right)=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i-\frac{dq_i}{dt}\delta p_i\right)=$$
$$=\oint\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i).$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее под знаком интеграла, является полным виртуальным дифференциалом некоторой функции — $H(t, q_k, p_k)$ [1]):

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i)=-\delta H(t, q_k, p_k),$$

т. е.

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще следующие термины: интеграл Пуанкаре — Картана I и интеграл Пуанкаре I_1 называются *относительными* интегральными инвариантами первого порядка. Термин «относительный» означает, что область интегрирования представляет собой замкнутый контур; первый порядок означает, что в выражение, стоящее под знаком интеграла, дифференциалы входят линейно. Заметим, что относительный интегральный инвариант первого порядка I_1 при помощи формулы Стокса может быть представлен в виде абсолютного интегрального инварианта второго порядка

$$\oint_D\sum_{i=1}^{n}A_i\delta x_i=\iint_S\sum_{i<k}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\delta x_i\,\delta x_k,\tag{5}$$

---

1) Здесь $\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)$.

где интеграл в правой части берется по поверхности S, ограниченной замкнутым контуром D.

Эта формула в применении к интегралу I_1 дает

$$I_1=\iint\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\,\delta q_i.$$

Известно, что в фазовом $2n$-мерном пространстве существуют следующие универсальные относительные интегральные инварианты I_{2k-1} нечетных порядков и абсолютные интегральные инварианты J_{2k} четных порядков,

$$I_1=\oint\sum p_i\,\delta q_i=J_2=\iint\sum\delta p_i\,\delta q_i,$$

$$I_3=\oint\!\!\oint\!\!\oint\sum p_i\,\delta q_i\,\delta p_k\,\delta q_k=J_4=\iiiint\sum\delta p_i\,\delta q_i\,\delta p_k\,\delta q_k,$$

. . . .

$$I_{2n-1}=\oint\cdots\oint\sum p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\ldots\,\delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}=$$

$$=J_{2n}=\int\ldots\int\delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\ldots\,\delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}.$$

В 1947 г. китайский ученый Ли Хуа-чжун доказал единственность этих универсальных интегральных инвариантов. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из перечисленных интегралов [1]).

Нам в дальнейшем понадобится теорема Ли Хуа-чжуна для интегрального инварианта первого порядка; поэтому мы формулируем эту теорему для произвольного n и докажем ее для $n=1$.

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Если*

$$\Gamma=\oint\sum_{i=1}^{n}\left[A_i(t,\ q_k,\ p_k)\,\delta q_i+B_i(t,\ q_k,\ p_k)\,\delta p_i\right]$$

— универсальный относительный интегральный инвариант, то

$$\Gamma=cI_1, \tag{6}$$

где c — постоянная, а I_1 — интеграл Пуанкаре.

Доказательство. Пусть

$$\Gamma=\oint A(t,\ q,\ p)\,\delta q+B(t,\ q,\ p)\,\delta p$$

---

[1]) Hwa-Chung Lee, Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, ser. A, v. LXII, 1947, p. 237—247.

— универсальный интегральный инвариант. Интегрирование ведется по замкнутому контуру в фазовой плоскости (q, p). Пусть, далее, дана какая-либо гамильтонова система дифференциальных уравнений с функцией $H(t, q, p)$:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{7}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$q=q(t, q_0, p_0), \quad p=p(t, q_0, p_0), \tag{8}$$

где q_0, p_0 — начальные значения q, p при $t=t_0$.

Пусть

$$q=q_0(\alpha), \quad p=p_0(\alpha) \tag{9}$$

$$[0\leqslant\alpha\leqslant l; \quad q_0(0)=q_0(l), \quad p_0(0)=p_0(l)]$$

— уравнения замкнутого контура D_0 в фазовой плоскости (рис. 38). Точки, которые в момент $t=t_0$ находились на контуре D_0, в произвольный другой момент времени t образуют контур D. Параметрические уравнения этого контура получаются из равенств (8), если туда вместо q_0 и p_0 подставить их выражения (9). Сделав это, получим:

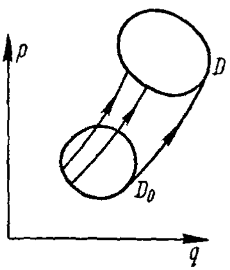

Рис. 38.

$$q=q(t, \alpha), \quad p=p(t, \alpha) \quad (0\leqslant\alpha\leqslant l). \tag{10}$$

Подставляя эти функции вместо q и p в интеграл I', мы получим I' как функцию параметра t. Из инвариантности I' следует, что $\frac{dI'}{dt}=0$. Дифференцируя под знаком интеграла и интегрируя по частям [1]), находим

$$0=\frac{dI'}{dt}=\oint \frac{dA}{dt}\,\delta q+\frac{dB}{dt}\,\delta p+A\frac{d}{dt}\,\delta q+B\frac{d}{dt}\,\delta p=$$

$$=\oint \frac{dA}{dt}\,\delta q+\frac{dB}{dt}\,\delta p+A\delta\frac{dq}{dt}+B\delta\frac{dp}{dt}=$$

[1]) См. примечание 1 к стр. 119. В процессе преобразований мы полагаем $\delta A=\frac{\partial A}{\partial q}\delta q+\frac{\partial A}{\partial p}\delta p$, $\delta B=\frac{\partial B}{\partial q}\delta q+\frac{\partial B}{\partial p}\delta p$ и затем используем уравнения (7).

$$
\begin{aligned}
&= \oint \frac{dA}{dt}\,\delta q - \delta A\,\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\,\delta p - \delta B\,\frac{dp}{dt} = \\
&= \oint \left[\left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q + \\
&\qquad\qquad + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p = \\
&= \oint \left(-Z\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q + \left(-Z\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p,
\end{aligned}
$$

где

$$
Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}.
$$

Последний интеграл равен нулю при любом значении переменной t, рассматриваемой как параметр, и при произвольном контуре интегрирования. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом относительно переменных q и p. Отсюда

$$
\frac{\partial}{\partial p}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right),
$$

или после элементарных преобразований

$$
-\frac{\partial Z}{\partial p}\,\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q}\,\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.
$$

Так как функцию H можно выбрать совершенно произвольно, то

$$
\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,
$$

т. е.

$$
Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = \mathrm{const} = c.
$$

Тогда

$$
\frac{\partial (A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}
$$

и, следовательно, существует функция $\Phi(t, q, p)$, такая, что [1]

$$
(A - cp)\,\delta q + B\,\delta p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\,\delta p = \delta\Phi.
$$

---

[1]) Здесь время t рассматривается как параметр.

Но тогда

$$A\,\delta q + B\,\delta p = cp\,\delta q + \delta\Phi$$

и потому

$$I' = \oint A\,\delta q + B\,\delta p = c\oint p\,\delta q = cI_1,$$

что и требовалось доказать.

При $n > 1$ идея доказательства сохраняется, хотя само доказательство становится более сложным.

§ 23. Инвариантность объема в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля

Рассмотрим «полный» абсолютный интегральный инвариант

$$J = \int \ldots \int \delta p_1\,\delta q_1 \ldots \delta p_n\,\delta q_n. \tag{1}$$

Инвариантность этого интеграла означает инвариантность фазового объема в $2n$-мерном фазовом пространстве и устанавливается следующим образом [1].

Запишем конечные уравнения движения, получающиеся после интегрирования уравнений Гамильтона, в следующем виде:

$$q_i = q_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0),\quad p_i = p_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0)\qquad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где q_k^0, p_k^0 — начальные значения q_k, p_k при $t = t_0$ $(k = 1, \ldots$ $\ldots, n)$.

Выберем в фазовом пространстве некоторый объем J_0 и примем каждую точку из этого объема за начальную (при $t = t_0$). Тогда преобразование (2) к моменту времени t переводит объем J_0 в объем J. При этом

$$J = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} I\,\delta q_1^0\,\delta p_1^0 \ldots \delta q_n^0\,\delta p_n^0, \tag{3}$$

где

$$I = \left| \frac{\partial(q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n)}{\partial(q_1^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ q_n^0,\ p_n^0)} \right|,$$

---

[1] В дальнейшем (см. § 31) инвариантность фазового объема будет установлена, исходя из общих свойств движения гамильтоновых систем.

т. е. I является якобианом, составленным из частных производных от q_j, p_j по начальным данным q_i^0, p_i^0 $(i, j = 1, \ldots, n)$. Без нарушения общности, мы можем считать, что якобиан, стоящий в равенстве (3) под знаком интеграла, положителен, и опустить знак абсолютной величины.

При $t = t_0$ этот якобиан равен 1, поскольку при этом значении t все $q_k = q_k^0$ и $p_k = p_k^0$. При изменении t якобиан изменяется непрерывно, не обращаясь в нуль, так как особые точки, в которых этот якобиан мог бы обратиться в нуль, исключаются из рассмотрения, т. е. предполагается, что в рассматриваемом объеме таких точек нет. Тогда якобиан положителен в этом объеме[1]).

Дифференцируя по t под знаком интеграла, получаем:

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \underbrace{\int \cdots \int}_{J_0} \left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0} \delta q_1 \, \delta p_1 \ldots \delta q_n \, \delta p_n.$$

Подсчитаем производную от якобиана I:

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{2n} |I_i|_{t=t_0},$$

где I_i — определитель, получаемый из якобиана дифференцированием i-й строки. Учитывая теперь, что

$$1^\circ \text{ при } i \neq j \quad \left|\frac{\partial q_j}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_j}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = 0,$$

$$2^\circ \text{ при любом } i \quad \left|\frac{\partial q_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = 0,$$

$$3^\circ \text{ при любом } i \quad \left|\frac{\partial q_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = 1,$$

находим:

$$|I_i|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n$$

и

$$|I_i|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} \quad \text{для} \quad i = n+1, \ldots, 2n;$$

---

[1]) В доказательстве на стр. 185—186, упомянутом в предыдущем примечании, не требуется каких-либо предположений об особых точках.

поэтому

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{2n}|I_i|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i^0}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right]_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial p_i^0}-\frac{\partial}{\partial p_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial q_i^0}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i^0\,\partial p_i^0}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i^0\,\partial q_i^0}\right]=0.$$

Таким образом, $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0}=0$. Так как начальный момент t_0 можно выбрать совершенно произвольно, то для любого t

$$\frac{dJ}{dt}=0, \tag{4}$$

т. е. величина фазового объема J не изменяется при сдвиге точек этого объема из состояний, занимаемых в момент времени t_0, в состояния, занимаемые в произвольный другой момент времени t.

Из инвариантности фазового объема вытекает одна из основных теорем статистической механики — теорема Лиувилля.

Представим себе, что имеется очень большое число совершенно одинаковых «экземпляров» системы, отличающихся друг от друга только начальными состояниями q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$. Все эти «экземпляры» образуют *статистический ансамбль.*

Примером статистического ансамбля является совокупность молекул газа, находящегося в данном объеме.

Каждому элементу объема dV фазового пространства можно отнести «массу» $d\mu$, характеризующую количество «экземпляров», приходящихся на данный элемент объема dV. В силу доказанной инвариантности объема в фазовом пространстве величина dV не меняется с течением времени. По своему физическому смыслу не изменяется и величина $d\mu$, так как экземпляры, находившиеся в объеме dV в какой-то момент времени, будут перемещаться вместе с этим объемом. Поэтому при движении остается неизменной плотность статистического ансамбля

$$\rho(t,\ q_i,\ p_i) = \frac{d\mu}{dV}, \tag{5}$$

т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

В развернутом виде равенство (6) может быть записано так (см. § 15):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\, H) = 0, \tag{6'}$$

где $(\rho\, H)$ — скобки Пуассона. Согласно равенству (6) функция $\rho(t,\ q_i,\ p_i)$ является интегралом движения.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а Л и у в и л л я. *Плотность статистического ансамбля всегда является интегралом движения.*

Так, например, для консервативной системы любая функция от энергии системы может служить плотностью статистического ансамбля.

ГЛАВА IV

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

§ 24. Канонические преобразования

Преобразование координат в $2n$-мерном фазовом пространстве (содержащее в общем случае переменную времени t как параметр)

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q_k, p_k)\\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q_k, p_k)\end{aligned} \quad \left(i = 1, \ldots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)} \neq 0\right) \tag{1}$$

называется *каноническим*, если это преобразование переводит *любую* гамильтонову систему

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

снова в гамильтонову систему (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона $\tilde{H}$):

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Важность изучения канонических преобразований связана с тем, что эти преобразования дают возможность заменить данную гамильтонову систему (2) другой гамильтоновой системой (3), в которой функция $\tilde{H}$ имеет более простую структуру, чем H.

Если в фазовом пространстве последовательно выполнить два канонические преобразования, то результирующее преобразование снова будет каноническим. Кроме того, преобразование, обратное некоторому каноническому преобразованию, всегда является каноническим и тождественное преобразование $\tilde{q}_i=q_i$, $\tilde{p}_i=p_i$ $(i=1, \ldots, n)$ есть каноническое. Поэтому все канонические преобразования в совокупности образуют *группу*.

Примеры. 1. Преобразование

$$\tilde{q}_i=\alpha q_i, \quad \tilde{p}_i=\beta p_i \qquad (i=1, \ldots, n; \quad \alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0),$$

как легко проверить, является каноническим. Оно переводит систему (2) в систему (3) с

$$\tilde{H}=\alpha\beta H.$$

2. Преобразование

$$\tilde{q}_i=\alpha p_i, \quad \tilde{p}_i=\beta q_i \qquad (i=1, \ldots, n; \quad \alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0)$$

будет каноническим. В этом случае

$$\tilde{H}=-\alpha\beta H.$$

3. Преобразование

$$\tilde{q}_i=p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i=q_i \operatorname{ctg} t \qquad (i=1, \ldots, n)$$

будет каноническим, так как легко проверяется, что из уравнений (2) всегда получаются уравнения (3) при

$$\tilde{H}=-H+\frac{1}{\sin t \cos t}\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\tilde{p}_i.$$

Для вывода условий, при которых преобразование (1) является каноническим, рассмотрим два расширенных

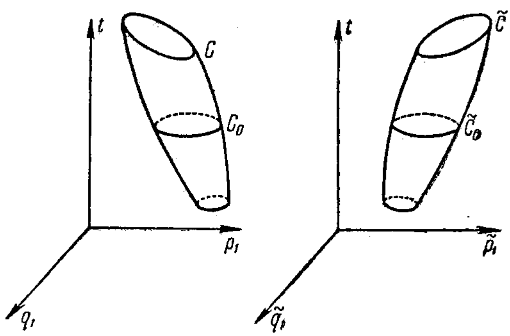

Рис. 39.

$(2n+1)$-мерных фазовых пространства (q_i, p_i, t) и $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$, переходящих одно в другое при каноническом преобразовании (1), и две трубки прямых путей гамильтоновых систем (2) и (3) (рис. 39).

Возьмем два произвольных замкнутых контура C и $\tilde{C}$, которые охватывают эти трубки и соответствуют друг другу в силу преобразования (1). Кроме того, пере ечем обе трубки одной и той же гиперплоскостью $t = \text{const}$. В сечении получим два «плоских» контура C_0 и $\tilde{C}_0$. Эти контуры также переходят друг в друга при каноническом преобразовании (1), так как при каноническом преобразовании величина t остается неизменной. Из инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана следует, что

$$\oint\limits_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = \oint\limits_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i, \tag{4}$$

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = \oint\limits_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i. \tag{5}$$

С другой стороны, если в универсальном интегральном инварианте $\oint \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i$ перейти к переменным q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ с помощью канонического преобразования (1), то этот интеграл перейдет в некоторый универсальный интегральный инвариант первого порядка в $2n$-мерном фазовом (q_i, p_i)-пространстве; по теореме Ли Хуа-чжуна полученный инвариант может отличаться только постоянным множителем c от $\oint \sum\limits_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i$. Поэтому

$$\oint\limits_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i = c \oint\limits_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i. \tag{6}$$

Из равенств (4) — (6) следует, что

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = c \oint\limits_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]. \tag{7}$$

Если в первом интеграле считать, что переменные $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ выражены через переменные $q_1, \ldots, p_n$ (при этом контур интегрирования $\tilde{C}$ заменяется контуром интегрирования C), то равенство (7) может быть переписано так:

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\delta t\right] - c\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right] = 0. \tag{8}$$

Но C — совершенно произвольный контур в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла в равенстве (8), должно быть полным дифференциалом некоторой функции от $2n+1$ аргументов $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ и t. Эту функцию нам удобно будет обозначать через $-F(t, q_i, p_i)$; тогда[1])

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right) - \delta F. \tag{9}$$

Заметим, что постоянная c в тождестве (9) всегда отлична от нуля, $c \neq 0$, так как выражение $\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\delta t$ не является полным дифференциалом[2]) и потому не может быть равным $-\delta F$.

Функцию F будем называть *производящей функцией*, а постоянную c — *валентностью* рассматриваемого канонического преобразования (1). Каноническое преобразование будем называть *унивалентным*, если для него $c = 1$.

Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (1) *является существование производящей функции F и некоторой постоянной c, при которых равенство* (9) *тождественно выполняется в силу преобразования* (1).

Замечание. Если преобразование (1) является каноническим, то существуют производящая функция F и валентность $c \neq 0$ такие, что имеет место равенство (9) при *любой* функции H и соответствующей $\tilde{H}$. Однако если равенство (9)

---

[1]) Здесь $\delta F = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t$.

[2]) По отношению к независимым переменным $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t$, а следовательно, и по отношению к независимым переменным q_i, p_i, t $(i = 1, \ldots, n)$.

справедливо для одной пары функций H и $\tilde{H}$, то преобразование (1) уже является каноническим [1]).

Действительно, наряду с H возьмем произвольную другую функцию H_1 и определим $\tilde{H}_1$ из условия

$$\tilde{H}_1 - \tilde{H} = c\,(H_1 - H).$$

Умножая обе части этого равенства на δt и вычитая почленно полученное равенство из равенства (9), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}_1\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H_1\,\delta t\right) - \delta F.$$

Таким образом, равенство (9) справедливо для любой функции H_1 и соответствующей $\tilde{H}_1$.

Канонические преобразования иногда называют также *контактными преобразованиями.*

В литературе часто рассматривают только унивалентные канонические преобразования. Многие авторы ошибочно считают, что этими преобразованиями исчерпываются все преобразования (1), переводящие гамильтоновы системы снова в гамильтоновы. Эти авторы не замечают произвольного постоянного множителя c, который должен фигурировать в общей формуле для произвольного канонического преобразования.

§ 25. Свободные канонические преобразования

Проведем более подробное исследование так называемых *свободных* канонических преобразований. Эти преобразования характеризуются дополнительно неравенством

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{1}$$

обеспечивающим независимость величин $t, q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, которые теперь могут быть выбраны в качестве основных

---

[1]) Однако отсюда не следует, что каноническое преобразование можно определить как преобразование, переводящее одну *заданную* гамильтонову систему в некоторую другую гамильтонову систему.

Так, например, произвольное неканоническое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ переводит гамильтонову систему с $H \equiv 0$ в гамильтонову систему с $\tilde{H} \equiv 0$.

переменных[1]). Действительно, это неравенство позволяет из первых n уравнений (1) § 24 выразить обобщенные импульсы $p_1, \ldots, p_n$ через $2n+1$ величин $t, q_i, \tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и, следовательно, позволяет представить любую функцию от переменных t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ в виде функции от переменных $t, q_i, \tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. В этом случае можно считать, что производящая функция представлена в виде функции S от этих переменных:

$$F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, \tilde{q}_i).$$

Тогда основное тождество (9) предыдущего параграфа запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t\right) - \delta S(t, q_i, \tilde{q}_i). \tag{2}$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при δq_i, $\delta \tilde{q}_i$ и δt, получим следующие формулы:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4}$$

Уравнения (3) *определяют рассматриваемое каноническое преобразование.* Покажем, что они могут быть приведены к виду (1) § 24.

Частные производные $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, стоящие в левых частях первых n уравнений (3), как функции величин $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ независимы, потому что в силу формул (3) зависимость[2])

$$\Omega\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = 0$$

перешла бы в равенство

$$\Omega(cp_1, \ldots, cp_n, q_1, \ldots, q_n) = 0,$$

---

[1]) В случае несвободного канонического преобразования величины $t, q_i, \tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ связаны некоторыми зависимостями.

[2]) В этой зависимости величины $q_1, \ldots, q_n$ рассматриваются как параметры.

что возможно лишь при $\Omega \equiv 0$, так как координаты точки фазового пространства q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ — независимые величины. Из независимости производных $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, рассматриваемых как функции переменных $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, следует, что якобиан этих функций не равен тождественно нулю. Таким образом, для производящей функции S свободного канонического преобразования должен быть отличен от нуля определитель

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \, \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{5}$$

Из неравенства (5) следует, что первые n уравнений (3) можно разрешить относительно $\tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и таким образом все новые фазовые переменные $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ выразить через старые переменные q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$. Полученное таким образом преобразование вида (1) будет обратимым, т. е. для него $\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \ldots, p_n)} \neq 0$, так как в силу неравенства (5) последние n равенств (3) можно разрешить относительно q_i и, следовательно, выразить все q_i, p_i через $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, *уравнения* (3) *определяют свободное каноническое преобразование с данной производящей функцией* $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ *и с данной валентностью* $c \neq 0$. Формулы же (4) устанавливают простую связь между функциями Гамильтона H и $\tilde{H}$.

Перебирая различные производящие функции S, удовлетворяющие условию (5), и различные валентности $c \neq 0$, мы с помощью формул (3) можем охватить все свободные канонические преобразования [1]).

Для унивалентных $(c=1)$ свободных канонических преобразований формулы (3) и (4) принимают более простой вид

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{6}$$

и

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7}$$

[1]) Для несвободных канонических преобразований существуют определяющие формулы, аналогичные (3). Эти формулы будут установлены в § 29.

Последнее равенство показывает, что после применения одного и того же свободного унивалентного канонического преобразования к различным гамильтоновым системам во всех случаях разность между $\tilde{H}$ и H будет одной и той же $\left(\text{равной } \frac{\partial S}{\partial t}\right)$.

Из равенства (4) следует, что $\tilde{H} = cH$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, т. е. когда производящая функция S не зависит явно от t. В этом случае в силу равенств (3) время t не будет входить явно в формулы канонического преобразования. При таких канонических преобразованиях функция H существенно не меняется, она умножается только на константу c. Поэтому если мы желаем получить новую систему с существенно более простой функцией Гамильтона, мы обязательно должны взять свободное каноническое преобразование, содержащее время t как параметр.

Примеры. 1. На стр. 147 были рассмотрены три канонических преобразования:

$$1)\ \tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i; \qquad 2)\ \tilde{q}_i = \alpha p_i,\ \tilde{p}_i = \beta q_i;$$
$$3)\ \tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Преобразования 2) и 3) являются свободными. Они имеют производящие функции и валентности соответственно $S = -\beta \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{q}_i$, $c = -\alpha\beta$; $S = -\operatorname{ctg} t \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{q}_i$, $c = -1$. Преобразование же 1) не является свободным. Для него $c = \alpha\beta$, $F \equiv 0$.

2. Рассмотрим произвольное аффинное преобразование фазовой плоскости (q, p) (здесь $n = 1$):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q} &= \alpha q + \beta p, \\ \tilde{p} &= \alpha_1 q + \beta_1 p \qquad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Подставим правые части равенств (8) в основное тождество (9) на стр. 149. Поскольку переменная t не входит в правые части (8), мы и F будем искать в виде функции, не зависящей от времени t явно: $F = F(q, p)$. Тогда основное тождество примет вид

$$(\alpha_1 q + \beta_1 p)(\alpha\, \delta q + \beta\, \delta p) - cp\, \delta q = -\delta F,$$

или

$$\delta\left(\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2\right)+\alpha_1\beta q\,\delta p+(\alpha\beta_1-c)\,p\,\delta q=-\delta F.$$

Левая часть этого равенства будет полным дифференциалом при условии, что

$$c=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta.$$

Таким образом, преобразование (8) является каноническим с валентностью c, равной определителю преобразования, и с производящей функцией

$$F=\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2+\alpha_1\beta\, qp.$$

Это преобразование будет свободным, если $\beta\neq 0$.

3. Преобразование $\tilde{q}=\sqrt{q}\cos 2p$, $\tilde{p}=\sqrt{q}\sin 2p$ является свободным унивалентным каноническим преобразованием с производящей функцией

$$S=\frac{1}{2}q\arccos\frac{\tilde{q}}{\sqrt{q}}-\frac{1}{2}\tilde{q}\sqrt{q-\tilde{q}^2}.$$

Для натуральной системы координаты $q_1, \ldots, q_n$ определяли положение системы, а совместно с импульсами $p_1, \ldots, p_n$ они определяли состояние системы, т. е. положение и скорости ее точек. При каноническом преобразовании общего типа эта специфика координат теряется. Величины $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ уже не определяют положения системы, а только вместе с $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ определяют состояние системы. Переменные $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ будут по-прежнему определять положение системы лишь в частном случае *точечного* канонического преобразования, при котором функции $\tilde{q}_i(t, q_k, p_k)$ фактически не содержат импульсов:

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(t, q_k) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Заметим, что в дальнейшем преобразование произвольной системы Гамильтона к системе с функцией H простой структуры удается осуществить с помощью свободного канонического преобразования. Свободное же каноническое преобразование не является точечным. Таким образом, неточечные канонические преобразования играют существенную роль в теории гамильтоновых систем.

§ 26. Уравнение Гамильтона — Якоби

Теория канонических преобразований приводит нас непосредственно к уравнению Гамильтона — Якоби.

Пусть дана голономная система, движение которой подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\ \dots,\ n). \tag{1}$$

Постараемся определить такое свободное унивалентное каноническое преобразование, чтобы в преобразованной гамильтоновой системе

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i},\quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}\qquad (i=1,\ \dots,\ n) \tag{2}$$

функция $\tilde{H}$ была тождественно равна нулю:

$$\tilde{H}\equiv 0. \tag{3}$$

Тогда система (2) интегрируется непосредственно

$$\tilde{q}_i=\alpha_i,\quad \tilde{p}_i=\beta_i, \tag{4}$$

где α_i и β_i суть $2n$ произвольных постоянных. Зная каноническое преобразование, т. е. связь между q_i, p_i $(i=1,\ \dots,\ n)$ и $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1,\ \dots,\ n)$, мы выразим все q_i и p_i как функции времени t и $2n$ произвольных постоянных α_k, β_k $(k=1,\ \dots,\ n)$, т. е. полностью найдем конечные уравнения движения данной голономной системы [все решения системы (1)].

Как же определить нужное нам каноническое преобразование? Для этого в силу формулы (7) предыдущего параграфа необходимо и достаточно, чтобы для производящей функции $S(t,\ q_i,\ \tilde{q}_i)$ искомого канонического преобразования выполнялось равенство

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(t,\ q_i,\ p_i)=0. \tag{5}$$

Это в сочетании с формулами (6) того же параграфа дает

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0. \tag{6}$$

Полученное уравнение в частных производных (6) носит название *уравнения Гамильтона — Якоби*. Таким образом, производящая функция $S(t,\ q_i,\ \tilde{q}_i)$ с основными переменными

t и q_i ($\tilde{q}_i$ рассматриваются здесь как параметры) удовлетворяет уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби. При этом, кроме уравнения Гамильтона — Якоби, для производящей функции $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{7}$$

Как только производящая функция $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ найдена, формулы

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

определят искомое свободное каноническое преобразование. Заменив в этих формулах $\tilde{q}_i$ на α_i и $\tilde{p}_i$ на β_i, мы получим уравнения движения данной голономной системы в конечном виде. Весь этот процесс удобнее описать, если с самого начала в S заменить $\tilde{q}_i$ на α_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Введем определение. Решение $S(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби, содержащее n произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, называется *полным интегралом* этого уравнения, если выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{8}$$

Теперь мы можем сформулировать доказанную теорему.

Теорема Якоби. *Если $S(t, q_i, \alpha_i)$ — некоторый полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби* (6), *то конечные уравнения движения голономной системы с данной функцией H могут быть записаны в виде*[1])

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

где α_i и β_i — произвольные постоянные $(i = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, знание полного интеграла уравнения в частных производных (6) избавляет нас от необходимости

---

[1]) Здесь мы вместо произвольных постоянных $-\beta_i$ пишем просто β_i. В силу условия (8) последние n уравнений (9) можно разрешить относительно q_i и выразить $q_1, \ldots, q_n$ в виде функций от t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i.

интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Задача интегрирования этой системы заменяется эквивалентной задачей отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных.

Замечание. Общее решение уравнения в частных производных зависит от нескольких произвольных функций. Поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби отнюдь не является общим решением. Полный интеграл по сравнению с общим решением охватывает только небольшую «горстку» решений. Тем не менее по полному интегралу можно восстановить исходное уравнение (отсюда и название «полный интеграл»). Действительно, дифференцируя полный интеграл, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=f_i(t,\ q_k,\ \alpha_k) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=f_0(t,\ q_k,\ \alpha_k). \tag{11}$$

Если известен полный интеграл $S(t,\ q_k,\ \alpha_k)$, то известны и функции $f_i(t,\ q_k,\ \alpha_k)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Из соотношений (10) можно выразить каждое α_k через частные производные $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, t и q_i, поскольку, в силу условия (8),

$$\frac{\partial(f_1,\ \ldots,\ f_n)}{\partial(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)}=\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{12}$$

Подставив полученные выражения для α_k в равенство (11), получим исходное уравнение в частных производных (6)[1]).

В качестве примера полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби рассмотрим так называемую *главную функцию Гамильтона*. Для этого вернемся к формуле (7) на стр. 115 и к рис. 33 на стр. 116. Рассмотрим только частный случай, когда $t_0(\alpha)=\text{const}=t_0$, т. е. примем, что контур C_0 состоит из начальных состояний системы при $t=t_0$. Кроме того, вместо t_1, q_i^1, p_i^1, H_1 будем писать просто t, q_i, p_i, H. Тогда, если W — действие вдоль прямого пути (т. е. вдоль

---

[1]) Можно считать, что полный интеграл S содержит еще $(n+1)$-ю аддитивную произвольную постоянную α_{n+1}, так как в уравнение (6) входят только производные от S, а не сама функция S.

образующей трубки) от начальной точки ($t=t_0$) до конечной точки, соответствующей данному значению t, то

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i^0\delta q_i^0. \tag{13}$$

Если использовать конечные уравнения движения

$$q_i=\varphi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0), \tag{14}$$
$$p_i=\psi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{15}$$

и вместо $q_i(t)$ подставить в выражение для действия

$$W=\int_{t_0}^{t} L(t,\ q_i,\ \dot q_i)\,dt$$

их значения (14), то W станет функцией от t, q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, n$). Гамильтон предложил, используя конечные уравнения движения (14), выразить p_k^0 через t, q_i^0 и q_i и таким образом представить действие в виде

$$W=W(t,\ q_i,\ q_i^0). \tag{16}$$

Действие W, представленное в виде (16), т. е. в виде функции от начальных координат, конечных координат и конечного момента времени t, называется *главной функцией Гамильтона*. Считая, что в равенстве (13) W есть главная функция Гамильтона, мы на основании этого равенства получаем

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i^0}=-p_i^0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-H(t,\ q_i,\ p_i). \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) следует, что главная функция Гамильтона удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=0, \tag{19}$$

а соотношения (17) представляют собой конечные уравнения движения, содержащие $2n$ произвольных постоянных q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$.

Таким образом, Гамильтон показал, как записываются конечные уравнения движения при помощи полного интеграла уравнения (19). Однако этот полный интеграл у Гамильтона не был произвольным и в нем произвольными постоянными были начальные значения q_i^0 и p_i^0. Получался порочный круг: для написания конечных уравнений движения (17) нужна главная функция Гамильтона, а для составления этой функции, как выше было показано, нужно знать конечные уравнения движения.

Заслуга Якоби заключается в том, что, продолжив исследования Гамильтона, он разорвал этот порочный круг. Он показал, что конечные уравнения движения могут быть написаны в виде (9) при помощи *произвольного* полного интеграла $S(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения Гамильтона — Якоби.

Вернемся к тождеству (13) и сопоставим его с тождеством (2) на стр. 151. Из сопоставления видно, что формулы (14) и (15), представляющие собой конечные уравнения движения и выражающие гамильтоновы координаты q_i, p_i состояния системы в момент t через начальные координаты $q_1^0, \ldots, p_n^0$, можно рассматривать как свободное унивалентное каноническое преобразование от переменных q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$ к переменным q_k, p_k $(k=1, \ldots, n)$; производящей функцией этого канонического преобразования является $-W$, где W — главная функция Гамильтона[1]).

Таким образом, *преобразование фазового пространства, осуществляемое с помощью движений любой гамильтоновой системы, является каноническим (при этом свободным и унивалентным).*

Пример. Составим функцию Гамильтона для движения по инерции свободной материальной точки. В этом случае (полагаем $t_0=0$)

$$x=x_0+\dot{x}_0 t, \quad y=y_0+\dot{y}_0 t, \quad z=z_0+\dot{z}_0 t$$

---

[1]) Для обратного канонического преобразования, в котором осуществляется переход от переменных q_i, p_i к переменным q_i^0, p_i^0, производящей функцией будет главная функция Гамильтона W.

и потому

$$W=\frac{m}{2}\int_0^t (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,dt=$$

$$=\frac{mt}{2}(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].$$

Если исходить из найденной главной функции Гамильтона

$$W=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2],$$

то уравнения движения получаются по формулам (17), которые в данном случае выглядят так:

$$\begin{aligned}
p_x&=\frac{\partial W}{\partial x}=m\frac{x-x_0}{t}; & -p_x^0&=\frac{\partial W}{\partial x_0}=-m\frac{x-x_0}{t},\\
p_y&=\frac{\partial W}{\partial y}=m\frac{y-y_0}{t}; & -p_y^0&=\frac{\partial W}{\partial y_0}=-m\frac{y-y_0}{t},\\
p_z&=\frac{\partial W}{\partial z}=m\frac{z-z_0}{t}; & -p_z^0&=\frac{\partial W}{\partial z_0}=-m\frac{z-z_0}{t}.
\end{aligned}$$

Пусть мы имеем обобщенно-консервативную систему $\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$. В этом случае уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{20}$$

и его полный интеграл можно искать в виде

$$S=-ht+V(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1},\ h), \tag{21}$$

где h и $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Подставляя это выражение для S в уравнение (20), мы получаем для определения функции V следующее уравнение:

$$H\left(q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=h. \tag{22}$$

Найдя полный интеграл этого уравнения, т. е. решение $V(q_i;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1},\ h)$, для которого выполняется неравенство

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial\alpha_k}\right)_{i,k=1}^n\neq 0\qquad(\alpha_n\equiv h), \tag{23}$$

мы с помощью формул (9) и (21) получим следующие конечные уравнения движения обобщенно-консервативной системы:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{24'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j}=\beta_j \qquad (j=1, \ldots, n-1), \quad \frac{\partial V}{\partial h}=t+\gamma, \tag{24''}$$

где α_j, β_j $(j=1, \ldots, n-1)$, h и γ — произвольные постоянные.

В силу условия (23) координаты $q_1, \ldots, q_n$ могут быть определены из уравнения (24″) как функции от t и $2n$ произвольных постоянных α_j, β_j, h и γ. Подставляя полученные выражения в уравнения (24′), найдем аналогичные выражения для обобщенных импульсов p_i $(i=1, \ldots, n)$ [1]).

В случае обобщенно-консервативной системы мы заменили уравнение (6) уравнением (20), в котором число независимых переменных на единицу меньше. Аналогичное понижение числа независимых переменных в уравнении в частных производных можно произвести и в том случае, если одна из координат циклическая.

Рассмотрим сразу общий случай, когда несколько координат $q_{m+1}, \ldots, q_n$ являются циклическими. В этом случае $H=H(t, q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_n)$, и полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде

$$S=\sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + S_0(t, q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{25}$$

Для нахождения функции S_0 получаем уравнение

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H\left(t, q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right)=0. \tag{26}$$

Если координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ являются циклическими у обобщенно-консервативной системы, то функцию S ищут

---

[1]) Из первых $n-1$ уравнений (24″) можно выразить $n-1$ координат через оставшуюся n-ю координату и $2n-1$ произвольных постоянных. Тогда получим уравнения траекторий в координатном пространстве. Последнее уравнение (24″) устанавливает связь координат с переменной времени t.

в виде

$$S = -ht + \sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + V_0(q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, h), \quad (27)$$

где функция V_0 определяется из уравнения

$$H\left(q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = h. \quad (28)$$

§ 27. Метод разделения переменных. Примеры

Мы показали, что интегрирование системы канонических уравнений сводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Это положение имеет не только теоретический интерес. Оказалось, что многие задачи динамики и в том числе задачи, представляющие интерес для теоретической физики, получают на этом пути свое удобное практическое решение.

Здесь мы познакомим читателя с методом разделения переменных для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Этот метод применяется в тех случаях, когда функция Гамильтона H обобщенно-консервативной системы имеет специальную структуру.

1°. Пусть

$$H = G[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)]. \quad (1)$$

В этом случае в выражении для функции H переменные разделены: в каждую функцию f_i входит только одна пара сопряженных переменных q_i, p_i.

Уравнение (22) предыдущего параграфа теперь запишется так:

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \quad (2)$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (3)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Тогда, согласно формуле (1), постоянную h можно выразить через постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ следующим образом:

$$h = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (4)$$

Разрешив равенства (3) относительно $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, найдем[1])

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i,\ \alpha_i)\quad(i=1,\ \ldots,\ n),$$

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i)\,dq_i \tag{5}$$

и

$$S=-G(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\,t+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i)\,dq_i. \tag{6}$$

В этом случае

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_i}=\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial\alpha_k}=0\quad\text{при}\quad i\neq k\qquad(i,\ k=1,\ \ldots,\ n)$$

и основное условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial\alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n}\neq 0 \tag{7}$$

сводится к неравенству

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}\neq 0.$$

Поскольку соотношение

$$f_i(q_i,\ p_i)=\alpha_i \tag{8}$$

эквивалентно уравнению

$$p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i), \tag{9}$$

то

$$\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)^{-1}\neq 0\qquad(i=1,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

и условие (7) всегда выполнено. Поэтому формула (6) определяет полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Конечные уравнения движения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\qquad\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i\qquad(i=1,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

[1]) Мы предполагаем, что каждая функция $f_i(q_i,\ p_i)$ фактически содержит импульс p_i, т. е. что $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\neq 0$. В этом случае уравнения (3) могут быть разрешены относительно $p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$; каждая функция F_i является функцией от двух переменных q_i и α_i; $i=1,\ \ldots,\ n$.

в данном случае запишутся так[1]):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} t + \int \frac{dq_i}{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i)}} &= \beta_i, \\ p_i = F_i(q_i,\ \alpha_i) & \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Таким образом, нахождение конечных уравнений движения осуществляется с помощью квадратур.

Пример 1. Рассмотрим осциллятор с одной степенью свободы. В этом случае

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

и, таким образом,

$$f(p,\ q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2},$$

а уравнение (2) имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dV}{dq}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = h.$$

Положим $h = \alpha$; тогда

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}\, dq,$$

и из конечных уравнений движения (11) находим выражение для импульса

$$p = \sqrt{2m\alpha - mcq^2}, \qquad (13)$$

а собственно уравнение движения запишется так:

$$-t + \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = \beta, \qquad (14)$$

где

$$A^2 = \frac{2\alpha}{c}, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Замечая, что интеграл в формуле (14) равен $\arcsin \frac{q}{A}$, получаем уравнение движения в следующем виде:

$$q = A \sin \omega (t + \beta). \qquad (15)$$

---

[1]) В формулах (5) и (6) мы под интегралом $\int F_i(q_i,\ \alpha_i)\, dq_i$ будем понимать интеграл $\int_{\gamma_i}^{q_i} F_i(q_i,\ \alpha_i)\, dq_i$, где постоянная γ_i фиксирована и не зависит от значений произвольных постоянных α_k; тогда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^{n} \int F_k(q_k,\ \alpha_k)\, dq_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int F_i(q_i,\ \alpha_i)\, dq_i = \int \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} dq_i.$$

Затем мы используем соотношение (10).

2°. Пусть

$$H = g_n\{\ldots g_3\{g_2[g_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3\} \ldots q_n, p_n\}. \tag{16}$$

Тогда уравнение для определения V запишется так:

$$g_n\left\{\ldots g_3\left\{g_2\left[g_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}\right], q_3, \frac{\partial V}{\partial q_3}\right\} \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right\} = h.$$

Введем произвольные постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и $\alpha_n = h$ и положим последовательно

$$\left.\begin{aligned} g_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right) &= \alpha_1, \\ g_2\left(\alpha_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}\right) &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ g_n\left(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) &= \alpha_n. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Определяя отсюда частные производные, найдем[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= G_1(q_1, \alpha_1), \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= G_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial V}{\partial q_n} &= G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\, dq_i \text{ }^{2)} \tag{18}$$

и

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\, dq_i. \tag{19}$$

Здесь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_k} = 0 \quad \text{при} \quad l < k \qquad (l, k = 1, \ldots, n).$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$, т. е. что p_i действительно входит в функцию $g_i(q_i, p_i)$.

[2]) Здесь и далее в этом параграфе под неопределенным интегралом понимаем (как и в п. 1°) определенный интеграл с переменным верхним пределом и фиксированным, не зависящим от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ постоянным нижним пределом.

Поэтому условие (7) сводится к неравенству

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \neq 0,$$

которое всегда выполняется, поскольку уравнение

$$g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i) = \alpha_i \tag{20}$$

эквивалентно уравнению

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i), \tag{21}$$

и потому

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^{-1}_{p_i = G_i(q_i,\, \alpha_{i-1},\, \alpha_i)} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Для дальнейшего нам понадобятся выражения для производных $\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}$, которые находятся из уравнений (20) и (21), а именно:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = -\left(\frac{\dfrac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\dfrac{\partial g_i}{\partial p_i}}\right)_{p_i = G_i(q_i,\, \alpha_{i-1},\, \alpha_i)}. \tag{23}$$

Подставляя в конечные уравнения движения (11) выражение (19) и учитывая формулы (22) и (23), получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{dq_i}{\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = G_i(q_i,\, \alpha_{i-1},\, \alpha_i)}} - \\ &\qquad - \int \left(\frac{\dfrac{\partial g_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\dfrac{\partial g_{i+1}}{\partial p_{i+1}}}\right)_{p_{i+1} = G_{i+1}(q_{i+1},\, \alpha_i,\, \alpha_{i+1})} dq_{i+1} = \beta_i \\ &\qquad\qquad (i = 1, \ldots, n-1), \\ &\qquad -t + \int \frac{dq_n}{\left(\dfrac{\partial g_n}{\partial p_n}\right)_{p_n = G_n(q_n,\, \alpha_{n-1},\, \alpha_n)}} = \beta_n \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Здесь первые $n-1$ уравнений (24) являются уравнениями для семейства траекторий в координатном пространстве; эти уравнения содержат $2n-1$ произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Последнее уравнение (24) содержит новую произвольную постоянную β_n и устанавливает связь координат q_i с переменной времени t.

Уравнения (25) после подстановки в них функций $q_i(t, \alpha_k, \beta_k)$ $(i=1, \ldots, n)$, найденных из уравнений (24), определяют импульсы p_i $(i=1, \ldots, n)$ как функции от t и всех произвольных постоянных α_i, β_i $(i=1, \ldots, n)$.

Пример. 2. Рассмотрим кеплерово движение, при котором материальная точка массы m притягивается к центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра.

В этом случае в сферических координатах

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2), \qquad \Pi=-\frac{\gamma}{r} \qquad (\gamma>0),$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\psi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{\gamma}{r}$$

и уравнение для определения V имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)^2\right]\right\}-\frac{\gamma}{r}=h.$$

Положим

$$g_1\equiv p_\psi=\alpha_1, \quad g_2\equiv p_\theta^2+\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2, \quad g_3\equiv\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)-\frac{\gamma}{r}=\alpha_3=h.$$

Тогда, согласно формулам (24), находим:

$$\psi-\alpha_1\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}=\beta_1, \tag{26а}$$

$$\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}-\int\frac{\frac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2m\alpha_3+\frac{2m\gamma}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}}}=\beta_2, \tag{26б}$$

$$-t+\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m\alpha_3+\frac{2m\gamma}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}}}=\beta_3. \tag{26в}$$

Мы получили конечные уравнения для кеплерова движения.

При исследовании этого движения без нарушения общности можно считать, что начальная скорость лежит в плоскости меридиана $\psi = \mathrm{const}$. Тогда в начальный момент $\frac{d\psi}{d\theta} = 0$ и, следовательно, согласно формуле (26а),

$$\alpha_1 = 0 \tag{27}$$

и $\psi = \beta_1 = \mathrm{const}$, т. е. движение плоское. Почленно дифференцируя равенства (26б) и (26в), получаем, что секториальная скорость [1]) равна

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \mathrm{const},$$

т. е. движение в плоскости $\psi = \mathrm{const}$ происходит в соответствии с законом площадей.

Наконец, для определения траектории полагаем $\frac{1}{r} = x$ и из формулы (26б) с учетом равенства (27) находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = \beta - \theta,$$

где

$$c = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, \quad k = \frac{m\gamma}{\alpha_2}, \quad \beta = 2\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2. \tag{28}$$

Вычислив интеграл, получим

$$\arccos \frac{x - k}{\sqrt{k^2 + c}} = \theta - \beta$$

и, следовательно,

$$x = k + \sqrt{k^2 + c}\cos(\theta - \beta).$$

Наконец, вспомнив, что $x = \frac{1}{r}$, получим для траектории уравнение конического сечения, в одном из фокусов которого расположен центр притяжения:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \beta)}, \tag{29}$$

где параметр и эксцентриситет конического сечения определяются из равенств

$$p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{m\gamma}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{c}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}. \tag{30}$$

Пусть точка описывает замкнутую орбиту (движение планеты, притягиваемой Солнцем). Тогда эта орбита — эллипс, в одном из фокусов которого находится центр притяжения (Солнце).

---

[1]) То есть производная по времени от площади, описываемой радиусом-вектором, проведенным из центра.

Обозначив через F и a, b $(a>b)$ площадь и полуоси эллипса, найдем $\left(\text{поскольку, как известно, } p=\frac{b^2}{a}\right)$

$$\frac{F^2}{a^3}=\frac{\pi^2a^2b^2}{a^3}=\pi^2p.$$

Пусть τ — период (время обращения), $\tau=\frac{2mF}{\sqrt{\alpha_2}}$. Тогда на основании равенств (30)

$$\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{m^2}{\alpha_2}\frac{F^2}{a^3}=\frac{\pi^2m^2p}{\alpha_2}=\frac{\pi^2m}{\gamma}=\frac{\pi^2}{\gamma_1}\quad\left(\gamma_1=\frac{\gamma}{m}\right), \tag{31}$$

где, согласно закону притяжения Ньютона, величина γ_1 зависит только от центра притяжения. Мы получили три закона Кеплера для движения планет вокруг Солнца: 1) планеты движутся с постоянной секториальной скоростью по плоским орбитам; 2) этими орбитами являются эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце; 3) отношение квадратов времен обращения к кубам больших осей орбит для всех планет одинаково.

3°. Рассмотрим еще в качестве примера применения метода разделения переменных случай, когда

$$H=\frac{f_1(q_1, p_1)+\ldots+f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1)+\ldots+g_n(q_n, p_n)}. \tag{32}$$

Тогда основное дифференциальное уравнение

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)=h$$

может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)-hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\right]=0. \tag{33}$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)-hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\alpha_i\qquad(i=1, \ldots, n), \tag{34}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные, а постоянная α_n, в силу уравнения (33) и равенств (34), выражается через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, а именно:

$$\alpha_n=-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1}. \tag{35}$$

Разрешим уравнения (34) относительно производных $\frac{\partial V}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i, h) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{36}$$

Решение уравнения (33) берем в виде

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i, h)\, dq_i. \tag{37}$$

Поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i, h)\, dq_i. \tag{38}$$

Тогда конечные уравнения движения (11) получаются с помощью квадратур

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{\partial F_j}{\partial \alpha_j} dq_j - \int \frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n} dq_n = \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, n-1), \\ &\sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial F_i}{\partial h} dq_i = t + \beta_n, \\ &p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h) \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ &(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Разрешая уравнение $f_i(q_i, p_i) - hg_i(q_i, p_i) = \alpha_i$ относительно p_i, получаем $p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Предполагается, что выполняется условие разрешимости $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$. В этом случае производные неявной функции F_i равны

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}_{p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)}$$

и

$$\frac{\partial F_i}{\partial h} = \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i, p_i)\right\}_{p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Уравнения (39) в окончательной форме имеют вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \left[\frac{\partial f_j}{\partial p_j} - h\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\right]^{-1}_{p_j = F_j(q_j,\, \alpha_j,\, h)} dq_j - \\
&\qquad - \int \left[\frac{\partial f_n}{\partial p_n} - h\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right]_{p_n = F_n(q_n,\, \alpha_n,\, h)} dq_n = \beta_j \\
&\qquad\qquad (j = 1, \ldots, n-1), \\
&\sum_{i=1}^{n} \int \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i,\, p_i)\right\}_{p_i = F_i(q_i,\, \alpha_i,\, h)} dq_i = t + \beta_n, \\
&\qquad\qquad p_i = F_i(q_i,\, \alpha_i,\, h) \quad (i = 1, \ldots, n) \\
&\qquad\qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0).
\end{aligned}
\right\} \tag{40}
$$

Как частный случай получаем теорему Лиувилля:

Если кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$
T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)\sum_{i=1}^{n} B_i \dot{q}_i^2, \qquad \Pi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Pi_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}, \tag{41}
$$

где A_i, B_i *и* Π_i — *функции от одной переменной* q_i ($i = 1, \ldots, n$), *то конечные уравнения движения системы могут быть получены с помощью квадратур.*

Действительно, для системы Лиувилля

$$
H = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i\right)}{2\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}, \tag{42}
$$

но это частный случай формулы (32).

§ 28. Применение канонических преобразований в теории возмущений

Пусть известны движения системы с данной функцией H, т. е. решения

$$\left.\begin{array}{lll} q_i = \varphi_i(t, q_k^0, p_k^0), & p_i = \psi_i(t, q_k^0, p_k^0) & \\ {[q_i^0 = (q_i)_{t=0},} & p_i^0 = (p_i)_{t=0}; & i = 1, \ldots, n] \end{array}\right\} \tag{1}$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

и пусть требуется определить движение «возмущенной» системы с гамильтоновой функцией $H + H_1$, т. е. определить решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (H + H_1)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (H + H_1)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Если в формулах (1) рассматривать q_k^0 и p_k^0 $(k = 1, \ldots, n)$ как новые переменные, то, как было выяснено на стр. 159, формулы (1) определяют свободное унивалентное каноническое преобразование. Это преобразование переводит гамильтонову систему (2) в гамильтонову систему с функцией $\tilde{H} = 0$ [см. формулу (13) на стр. 158]

$$\frac{dq_k^0}{dt} = 0, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

а гамильтонову систему (3) — в гамильтонову систему с функцией $\tilde{H}$, которая будет равна H_1 [1]:

$$\frac{dq_k^0}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k^0}, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k^0} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Таким образом, новые переменные q_k^0 и p_k^0 обладают следующим замечательным свойством: для невозмущенного дви-

---

[1] Это следует из соотношения $\tilde{H} - (H + H_1) = 0 - H$. Левая и правая части этого равенства равны $\frac{\partial S}{\partial t}$, где S — производящая функция рассматриваемого свободного унивалентного канонического преобразования (см. стр. 152).

жения они сохраняют постоянные значения, равные начальным значениям; для возмущенного же движения они представляют собой функции от времени и начальных значений:

$$q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)\qquad (k=1,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

определяемые как общее решение гамильтоновой системы (5), в которой функцией Гамильтона является «энергия возмущения» H_1. Конечные уравнения для возмущенного движения в исходных координатах q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ получаются при подстановке функций (6) в формулы для невозмущенного движения (1) вместо постоянных q_k^0 и p_k^0.

Нам удалось, используя теорию канонических преобразований, заменить интегрирование гамильтоновой системы (3) интегрированием гамильтоновых систем (2) и (5); из общих решений (1) и (6) этих систем суперпозицией получаем общее решение системы (3)

$$\left.\begin{aligned} q_i&=\varphi_i\,[t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\ \ p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)],\\ p_i&=\psi_i\,[t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\ \ p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)]\\ &\qquad (i=1,\ \ldots,\ n).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы фактически показали, что «возмущение в энергии» системы эквивалентно «возмущению начальных данных». Проиллюстрируем это на рис. 40.

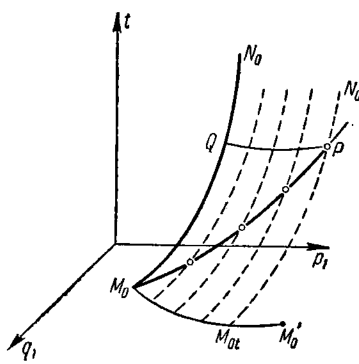

Рис. 40.

В расширенном фазовом пространстве в гиперплоскости $t=0$ возьмем фиксированную точку M_0 и проведем из нее невозмущенный прямой путь, т. е. прямой путь (1) для системы (2). На рис. 40 этот путь изображен жирной линией M_0N_0. В гиперплоскости $t=0$ смещение начальной точки, задаваемое функциями (6), изобразим тонкой линией M_0M_0'. Из точки M_{0t} этой кривой проведем невозмущенный прямой путь $M_{0t}N_{0t}$ (на рис. 40 он изображен пунктирной линией). На этом пути возьмем точку P с данным значением координаты времени t. Это и будет положение системы в возмущенном движении в момент времени t. При невозмущенном движении система в момент t занимала положение Q. Таким образом, возмущение сказалось в «сдвиге» QP. Прямой путь в возмущенном движении изображен жирной линией M_0P. Таким образом, возмущенное движение можно рассматривать как «сложное» движение в фазовом пространстве: точка движется по невозмущенному прямому пути, но сам этот путь смещается (в общем случае деформируясь) из-за «возмущения» начальных данных.

§ 29. Структура произвольного канонического преобразования

В этом и в следующих параграфах этой главы мы приведем некоторые дополнительные сведения о канонических преобразованиях.

Для произвольного канонического преобразования можно установить формулы, определяющие это преобразование с помощью производящей функции и валентности c, подобно тому как это было сделано в § 25 для свободного канонического преобразования.

Пусть, например, из $4n$ величин

$$q_i,\ p_i,\ \tilde{q}_i,\ \tilde{p}_i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

связанных между собой каноническим преобразованием

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(t,\ q_k,\ p_k), \qquad \tilde{p}_i=\psi_i(t,\ q_k,\ p_k) \tag{2}$$

$$\left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{p}_n)}{\partial(q_1,\ \ldots,\ p_n)}\neq 0\right),$$

можно в качестве $2n$ независимых взять величины

$$q_1,\ \ldots,\ q_l,\ p_{l+1},\ \ldots,\ p_n,\ \tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{q}_m,\ \tilde{p}_{m+1},\ \ldots,\ \tilde{p}_n$$

$$(0\leqslant l,\ m\leqslant n). \tag{3}$$

Тогда с помощью тождеств

$$\sum_{g=l+1}^{n} p_g\,\delta q_g = \delta\Big(\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g\Big) - \sum_{g=l+1}^{n} q_g\,\delta p_g,$$

$$\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{p}_h\,\delta\tilde{q}_h = \delta\Big(\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h\tilde{p}_h\Big) - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h\,\delta\tilde{p}_h$$

можно основное определяющее равенство (9) на стр. 149 записать в виде

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_j\,\delta\tilde{q}_j - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h\,\delta\tilde{p}_h - \tilde{H}\,\delta t =$$
$$= c\Big(\sum_{i=1}^{l} p_i\,\delta q_i - \sum_{g=l+1}^{n} q_g\,\delta p_g - H\,\delta t\Big) - \delta U, \tag{4}$$

где

$$U = F + \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h\tilde{p}_h - c\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g. \tag{5}$$

Поскольку все $4n$ величин (1) выражаются через $2n$ величин (3), то мы можем считать, что *U есть функция от величин* (3). *Тогда из тождества* (4) *легко находим*

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -c q_g, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_j} = -\tilde{p}_j, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_h} = \tilde{q}_h \tag{6}$$

$$(i = 1, \ldots, l;\ g = l+1, \ldots, n;$$
$$j = 1, \ldots, m;\ h = m+1, \ldots, n).$$

Формулы (6) эквивалентны формулам (2) и определяют рассматриваемое каноническое преобразование с помощью валентности c и производящей функции U от независимых величин (3).

Ниже мы докажем математическую лемму, согласно которой из $4n$ величин (1), связанных преобразованием (2), всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы среди выбранных величин не было ни одной пары сопряженных q_i, p_i или

$\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ [1]). Тогда при надлежащей перенумерации координат q_i, $\tilde{q}_k$ (i, $k=1, \ldots, n$) и соответственной перенумерации импульсов p_i, $\tilde{p}_k$ (i, $k=1, \ldots, n$) выбранные $2n$ независимых величин можно представить в виде (3). Поэтому *для произвольного канонического преобразования имеют место формулы, которые могут отличаться от формул* (6) *лишь нумерацией величин* (1) [2]).

Подобно тому как это было сделано в § 25 для свободного канонического преобразования, можно показать, что и для произвольного канонического преобразования определитель порядка n, составленный из смешанных производных второго порядка от производящей функции U, отличен от нуля [3]). Поэтому первые n уравнений (6) могут быть разрешены относительно величин $\tilde{q}_j$, $\tilde{p}_h$ ($j=1, \ldots, m$; $h=m+1, \ldots, n$). После подстановки полученных выражений в последние n уравнений (6) мы представим уравнения канонического преобразования (6) в виде (2).

Сформулируем и докажем лемму, на которую мы опирались при получении структурных формул (6) для произвольного канонического преобразования.

Лемма. *Если даны $2n$ независимых функций $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ от $2n$ независимых величин $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, то из $4n$ величин q_i, p_i, $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ ($i=1, \ldots, n$) всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы среди них не было ни одной пары сопряженных (q_k, p_k) или $(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k)$.*

---

[1]) В книге Голдстейна (Голдстейн Г., Классическая механика, М., 1957, стр. 262) утверждается, что при произвольном каноническом преобразовании в качестве системы $2n$ независимых величин всегда может быть взята одна из четырех систем: q_i и $\tilde{q}_i$; q_i и $\tilde{p}_i$; p_i и $\tilde{q}_i$; p_i и $\tilde{p}_i$ ($i=1, \ldots, n$). Ошибочность этого утверждения можно усмотреть из простого примера канонического преобразования $\tilde{q}_1=-p_1$, $\tilde{p}_1=q_1$, $\tilde{q}_j=q_j$, $\tilde{p}_j=p_j$ ($j=2, \ldots, n$).

[2]) Это положение приведено Каратеодори в его книге (Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erstes Ordnung, 2 Aufl., B. I, 1956, § 96), однако лемма, на которой основано наше доказательство (см. ниже), установлена Каратеодори для частного случая, когда переход от переменных q_i, p_i к переменным $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ ($i=1, \ldots, n$) является каноническим преобразованием.

[3]) Это условие можно записать так: $\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial \tilde{r}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0$, если через $r_1, \ldots, r_n$, $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$ обозначить соответственно величины (3) в том порядке, в каком они были выписаны выше (см. (3)).

Доказательство. Допустим противное, т. е. допустим, что любые $2n$ из рассматриваемых величин, среди которых нет ни одной пары сопряженных, всегда зависимы. Тогда выберем $n+d$ независимых из данных $4n$ величин таким образом, чтобы первые n не имели значка $\sim$, а последние d имели этот значок, причем выберем эти $n+d$ величин так, чтобы среди них не было сопряженных и чтобы число d имело наибольшее из всех возможных значений. Согласно допущению $d<n$.

Поскольку, не изменяя ни условия, ни утверждения леммы, можно поменять ролями две сопряженные величины q_i и p_i или $\tilde{q}_i$ и $\tilde{p}_i$, а также сделать произвольную перестановку индексов $1, \ldots, n$ как у величин q_i, p_i, так и у величин $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$, то можно считать, что выбранными являются следующие $n+d$ величин:

$$q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d \qquad (d<n). \tag{7}$$

Ряд величин (7) назовем *максимальным базисом*. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \end{aligned}\right\} \quad (j=d+1, \ldots, n), \tag{8}$$

где f — знак функциональной зависимости [1]).

Не нарушая общности, можно считать, что из величин

$$p_1, \ldots, p_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_d,$$

не входящих в формулы (8), величины

$$p_1, \ldots, p_a, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_b \qquad (a \leqslant n,\ b \leqslant d) \tag{9}$$

являются функциями от базисных величин (7), а каждая из величин

$$p_{a+1}, \ldots, p_n, \quad \tilde{p}_{b+1}, \ldots, \tilde{p}_d \tag{10}$$

независима по отношению к базису. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} p_i &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \quad (i=1, \ldots, a), \\ \tilde{p}_k &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \quad (k=1, \ldots, b). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Покажем теперь, что величины $q_{a+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_{b+1}, \ldots, \tilde{q}_d$, сопряженные «независимым» величинам (10), фактически не входят

[1]) В разных формулах одной и той же буквой f обозначаются различные функциональные зависимости.

в правые части формул (8). Действительно, пусть, например, q_λ $(\lambda > a)$ фактически входит в выражение для некоторого $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_\lambda, \ldots).$$

Тогда система величин $q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$ *эквивалентна* базису (7):

$$(q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) \backsim \backsim (q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d), \tag{12}$$

т. е. каждая из величин, входящих в одну из двух систем, выражается через величины другой и наоборот [1]). Поэтому $n+d+1$ величин

$$q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

независимы, что противоречит «максимальности» базиса (7).

Таким образом, формулы (8) могут быть записаны так:

$$\tilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \quad \tilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \tag{13}$$
$$(j = d+1, \ldots, n).$$

Обозначим через $q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}$ $(a_1 \leqslant a,\ b_1 \leqslant b)$ все величины, фактически входящие хотя бы в одну из правых частей формул (13); тогда

$$\tilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}), \quad \tilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}) \tag{14}$$
$$(j = d+1, \ldots, n).$$

Покажем теперь, что величины q_λ, $\tilde{q}_\mu$ $(\lambda > a,\ \mu > b)$ фактически не входят в те формулы (11), где $i \leqslant a_1$, $k \leqslant b_1$. Допустим противное. Пусть, например, q_λ $(\lambda > a)$ фактически входит в выражение (11) для p_{i_1}, где $i_1 \leqslant a_1$,

$$p_{i_1} = f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1,\ \lambda > a).$$

Но величина q_{i_1} фактически входит в одно из выражений (14); пусть, например, она входит в выражение для $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1,\ j > d).$$

Тогда

$$(q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) \backsim \backsim (q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \tag{15}$$

---

[1]) Если q_λ фактически входит в какую-либо функциональную зависимость, то эту зависимость можно разрешить относительно q_λ.

и, следовательно, $n+d+1$ величин

$$q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

независимы, что противоречит «максимальности» базиса (7).

Таким образом,

$$p_{i_1}=f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \ \tilde{p}_{k_1}=f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \quad (16)$$

$$(i_1=1, \ldots, a_1, \quad k_1=1, \ldots, b_1).$$

Обозначим через $q_{a_1+1}, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_{b_1+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_2}$ те из величин q_i, $\tilde{q}_k$ $(i>a_1,\ k>b_1)$, которые фактически входят в правые части формул (16). Тогда

$$\left.\begin{aligned} p_{i_1}&=f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \quad (i_1=1, \ldots, a_1;\ a_1\leqslant a_2\leqslant a), \\ \tilde{p}_{k_1}&=f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \quad (k_1=1, \ldots, b_1;\ b_1\leqslant b_2\leqslant b). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Теперь покажем, что величины q_λ, $\tilde{q}_\mu$ $(\lambda>a,\ \mu>b)$ фактически не входят в выражения (11) для p_i, $\tilde{p}_k$, где $i\leqslant a_2$, $k\leqslant b_2$. Действительно, пусть, например, q_λ $(\lambda>a)$ фактически входит в выражение для p_{i_2} $(a_1<i_2\leqslant a_2)$:

$$p_{i_2}=f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \qquad (a_1<i_2\leqslant a_2, \quad \lambda>a).$$

Но величина q_{i_2} фактически входит в одно из выражений (17), например в выражение для p_{i_1}. Тогда величина q_{i_1} фактически входит в одно из выражений (14), например в выражение для $\tilde{q}_j$ $(j>d)$:

$$p_{i_1}=f(\ldots, q_{i_2}, \ldots) \qquad (i_1\leqslant a_1<i_2\leqslant a_2),$$

$$\tilde{q}_j=f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \qquad (i_1\leqslant a_1, \quad j>d).$$

В этом случае имеет место эквивалентность между системой величин

$$q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{i_2-1}, p_{i_2}, q_{i_2+1}, \ldots, q_{\lambda-1},$$

$$q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j \quad (18)$$

и базисом (7). Поэтому величина p_λ независима от величин (18). Прибавляя p_λ к величинам (18), получим базис из $n+d+1$ величин, что невозможно.

Таким образом,

$$p_{i_2}=f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \quad \tilde{p}_{k_2}=f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \quad (19)$$

$$(i_2=a_1+1, \ldots, a_2, \quad k_2=b_1+1, \ldots, b_2).$$

Обозначим через $q_{a_2+1}, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_{b_2+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_3}$ те из величин $q_i, \tilde{q}_k$ $(i > a_2,\ k > b_2)$, которые фактически входят в формулы (19). Равенства (19) запишем так:

$$\left.\begin{aligned} p_{i_2} &= f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a), \\ \tilde{p}_{k_2} &= f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока одновременно не будут достигнуты равенства $a_s = a_{s+1}$, $b_s = b_{s+1}$; тогда

$$\left.\begin{aligned} p_{i_s} &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (i_s = a_{s-1} + 1, \ldots, a_s;\ a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s \leqslant a), \\ \tilde{p}_{k_s} &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (k_s = b_{s-1} + 1, \ldots, b_s;\ b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_s \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Вместо формул (14), (17), (20), ..., (21) можно написать

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \end{aligned}\right\} \quad (j = d + 1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$p_i = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (i = 1, \ldots, a_s), \tag{23}$$

$$\tilde{p}_k = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (k = 1, \ldots, b_s). \tag{24}$$

Пусть теперь $a_s > b_s$. Тогда из формул (23) можно исключить $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}$ и получить зависимость между q_i, p_i, что противоречит условию леммы.

Если $a_s \leqslant b_s$, то $a_s < b_s + 1$. Тогда из формул (22) и (24) можно исключить все q_i и получить зависимость между $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$, что опять противоречит условию.

Таким образом, допущение о существовании максимального базиса (7), в котором $d < n$, привело нас к противоречию. Лемма доказана.

§ 30. Критерий каноничности преобразования. Скобки Лагранжа

Установим некоторые критерии каноничности, т. е. необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $2n$ независимых функций [относительно q_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$]

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

для того, чтобы определяемое этими функциями преобразование было каноническим.

Пусть преобразование (1) является каноническим. Выпишем для него определяющее тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta q_i - H\,\delta t\right) - \delta F(t, q_i, p_i). \tag{2}$$

Возьмем произвольное фиксированное значение $t=\bar{t}$. Тогда из тождества (2) находим:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \,\delta\tilde{q}_i = c \sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta q_i - \delta F(\bar{t}, q_i, p_i). \tag{3}$$

Но равенство (3) есть определяющее тождество для преобразования, не содержащего явно времени,

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(\bar{t}, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(\bar{t}, q_k, p_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Следовательно, формулы (4) определяют каноническое преобразование с валентностью c, не зависящей от выбранного значения $t=\bar{t}$.

Пусть теперь, наоборот, дано, что все преобразования, получающиеся из преобразования (1) после замены переменной t различными фиксированными значениями $\bar{t}$, являются каноническими, и притом с одной и той же валентностью c. Тогда, определяя функцию $\tilde{H}$ равенством

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t}, \tag{5}$$

мы из равенств (3) и (5) получаем равенство (2), т. е. приходим к тому, что зависящее от времени t преобразование (1) является каноническим.

Таким образом, *для того чтобы зависящее от времени преобразование* (1) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы были каноническими, и притом с одной и той же валентностью c, все не зависящие от времени t преобразования, получающиеся из преобразования* (1) *заменой t произвольным значением $\bar{t}$.*

Поэтому при установлении критериев каноничности можно ограничиться каноническими преобразованиями, не содержащими явно переменной времени t:

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(q_k, p_k) \qquad \left(i = 1, \ldots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \ldots, p_n)} \neq 0\right). \tag{6}$$

Для канонического преобразования (6) определяющее тождество (2) записывается так:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \delta\tilde{q}_k = c \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k - \delta K(q_k, p_k). \tag{7}$$

Выразим здесь $\delta\tilde{q}_k$ через δq_i и δp_i с помощью формул (1). Тогда равенство (7) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_k, p_k), \tag{8}$$

где

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i} - cp_i, \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{8'}$$

Остается записать условия того, что левая часть равенства (8) является полным дифференциалом, и мы получаем критерий каноничности в виде равенств

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\Phi_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial\Psi_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial\Psi_k}{\partial q_i} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Подставляя сюда выражения (8'), после элементарных преобразований находим

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right) = 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_i}\right) = 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right) = c\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Условия (10) можно записать в компактной форме, если ввести так называемые *скобки Лагранжа*, которые определяются для заданных $2n$ функций φ_i, ψ_i $(i=1, \ldots, n)$ от двух переменных q и p следующим образом[1]:

$$[q\ p]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial q}\frac{\partial\psi_j}{\partial p}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial p}\frac{\partial\psi_j}{\partial q}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\varphi_j, \psi_j)}{\partial(q, p)}. \tag{11}$$

Использовав эти обозначения и взяв в качестве φ_i, ψ_i функции $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, определяемые формулами (6), мы можем записать условия (10) так:

$$[q_i\ q_k]=0, \quad [p_i\ p_k]=0, \quad [q_i\ p_k]=c\delta_{ik} \qquad (i, k=1, \ldots, n); \tag{12}$$

здесь c — валентность канонического преобразования.

Равенства (12) выражают необходимые и достаточные условия того, чтобы преобразование (6) было каноническим. В случае преобразования, зависящего от времени t, условия (12) сохраняются, только они должны выполняться при любом значении t.

§ 31. Симплектичность якобиевой матрицы канонического преобразования

Рассмотрим якобиеву матрицу канонического преобразования

$$M=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_n}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_n}\\ \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_n}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_n}\end{matrix}\right\|=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}$ — якобиева матрица n-го порядка $\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k}\right\|$. Аналогично определяются якобиевы матрицы n-го порядка $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}$, $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}$ и $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}$.

---

[1]) Пусть читатель сравнит скобки Лагранжа со скобками Пуассона, введенными в § 15. Там были заданы две функции φ, ψ от $2n$ переменных q_i, p_i и скобки Пуассона равнялись сумме якобианов $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}$. Здесь же даны $2n$ функций от двух аргументов и скобки Лагранжа равны сумме якобианов (11).

Введем в рассмотрение специальную матрицу порядка $2n$

$$J=\begin{Vmatrix} 0\ \dots\ 0 & -1\ \dots\ 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ -1 \\ 1\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0\ \dots\ 1 & 0\ \dots\ 0 \end{Vmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где E — единичная матрица n-го порядка. Рассматривая наряду с матрицей M транспонированную матрицу M', составим произведение $M'JM$ и докажем, что в силу соотношений (12) предыдущего параграфа это произведение тождественно равно cJ:

$$M'JM=cJ, \tag{3}$$

где c — валентность канонического преобразования.

Действительно [1]),

$$M'J=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde q}{\partial q}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial\tilde q}{\partial p}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial p}\right)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial q}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial p}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial p}\right)' \end{pmatrix},$$

$$M'JM=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde q}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde p}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde q}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde p}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde q}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde p}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde p}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde q}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde p}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

Но

$$\left(\frac{\partial\tilde p}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde q}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde q}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde p}{\partial q}=$$

$$=\left\Vert\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde p_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde q_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde q_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde p_j}{\partial q_k}\right\Vert_{i,k=1}^{n}=\Vert[q_i\ q_k]\Vert=0.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных трех блоков, получим

$$M'JM=\begin{pmatrix} 0 & -cE \\ cE & 0 \end{pmatrix}=cJ,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) В случае, когда элементами матрицы являются матрицы-блоки, умножение выполняется по тем же правилам, как если бы элементами матриц были числа, т. е. строки первой матрицы-сомножителя умножаются на столбцы второй матрицы-сомножителя (см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, § 5).

Для унивалентного канонического преобразования равенство (3) записывается так:

$$M'JM = J. \tag{4}$$

Матрицы M, для которых справедливо равенство (4), называются *симплектическими*. Поскольку $\det J = 1$, а определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей, то из (4) находим

$$\det M = \pm 1.$$

Таким образом, симплектические матрицы являются неособенными[1]).

Матрицу M, удовлетворяющую соотношениям (3), будем называть *обобщенно-симплектической* (с валентностью c)[2]).

Так как соотношения (12) предыдущего параграфа свелись к условию обобщенной симплектичности якобиевой матрицы M, то критерий каноничности преобразования может быть сформулирован так:

Для того чтобы некоторое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая этому преобразованию якобиева матрица M была обобщенно-симплектической с постоянной валентностью c. (В случае унивалентного преобразования матрица M является обыкновенной симплектической.) При этом условие симплектичности (3) должно выполняться тождественно относительно всех переменных t, q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$.

В § 26 было установлено, что движение любой гамильтоновой системы может рассматриваться как свободное унивалентное каноническое преобразование. Следовательно, его якобиева матрица симплектична и ее определитель I (см. стр. 142—143) равен ± 1.

Поскольку в начальный момент $I(0) = +1$, то $I = +1$ во все последующие моменты времени, но именно этот определитель слу-

---

[1]) Как легко проверить, произведение двух симплектических матриц, обратная матрица для любой симплектической и единичная матрица являются снова симплектическими матрицами. Поэтому симплектические матрицы образуют группу — *симплектическую группу*.

Симплектические матрицы характеризуются следующим свойством. В билинейной форме $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i' - y_i x_i')$ подвергнем $2n$ переменных x_i, y_i и $2n$ переменных x_i', y_i' одному и тому же линейному преобразованию с симплектической матрицей коэффициентов M. Тогда в новых переменных x_i^*, y_i^* и $x_i^{*\prime}$, $y_i^{*\prime}$ форма f сохранит свой вид: $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i^* y_i^{*\prime} - y_i^* x_i^{*\prime})$.

[2]) Все обобщенно-симплектические матрицы (при всех $c \neq 0$) также образуют группу. Если M — обобщенно-симплектическая матрица, то $\det M = \pm c^n$.

жит подынтегральной функцией в выражении для фазового объема в $2n$-мерном пространстве (формула (3) § 23).

Это замечание может рассматриваться как отличное от проведенного в § 23 доказательство теоремы Лиувилля.

§ 32. Инвариантность скобок Пуассона при каноническом преобразовании

Представим условие каноничности преобразования, записанное в форме равенства (3) предыдущего параграфа, в несколько измененной форме. Умножим обе части этого равенства слева на $(M')^{-1}$, а справа — на M^{-1}. Получим:

$$(M')^{-1}JM^{-1} = \frac{1}{c}J. \tag{1}$$

Возьмем обратные матрицы от обеих частей этого равенства, замечая, что $J^{-1} = -J$[1]):

$$MJM' = cJ. \tag{2}$$

Равенство $MJM' = cJ$ получается из равенства $M'JM = cJ$ путем замены якобиевой матрицы M транспонированной матрицей M'. Но эта замена [см. формулу (1) § 31] сводится к замене производных $\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial p_k}$ соответственно на производные $\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_i}$, т. е. в каждой производной меняются местами буквы и индексы, стоящие вверху и внизу[2]). Поэтому, если равенство $M'JM = cJ$ было эквивалентно системе равенств

$$[q_i\, q_k] = 0, \quad [p_i\, p_k] = 0, \quad [q_i\, p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

то равенство (2) будет эквивалентно системе равенств

$$[q_i\, q_k]^* = 0, \quad [p_i\, p_k]^* = 0, \quad [q_i\, p_k]^* = \delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

где значок * указывает, что внутри скобки Лагранжа следует произвести указанную выше замену производных. Но тогда скобки Лагранжа переходят в скобки Пуассона. Действительно,

$$[q_i\, q_k]^* = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\right)\right]^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_j}\right) = (\tilde{q}_i\, \tilde{q}_k),$$

---

[1]) Мы пользуемся здесь следующим правилом: обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратном порядке: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Кроме того,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = -JJ^{-1},$$

т. е. $J^{-1} = -J$.

[2]) Значок $\sim$ по-прежнему остается вверху.

где $(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k)$ — скобки Пуассона для функций $\tilde{q}_i$ и $\tilde{q}_k$ относительно независимых переменных $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$. Совершенно аналогично

$$[p_i\ p_k]^* = (\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k), \quad [q_i\ p_k]^* = (\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k).$$

Поэтому *условия каноничности преобразования* (4) *могут быть записаны с помощью скобок Пуассона в следующем виде:*

$$(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k) = 0, \quad (\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k) = 0, \quad (\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k) = c\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь две функции φ и ψ от величин q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) и t. Выражая в этих функциях q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) через $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) с помощью обратного канонического преобразования, мы можем рассматривать эти же функции как функции переменных $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Соответственно скобки Пуассона от φ, ψ можно вычислить как по отношению к переменным q_i, p_i [обозначение $(\varphi\ \psi)$], так и по отношению к переменным $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ [обозначение $(\varphi\ \psi)^{\sim}$].

Докажем справедливость тождества

$$(\varphi\ \psi) = c\,(\varphi\ \psi)^{\sim}. \tag{6}$$

Доказательство этого тождества опирается на известное выражение якобиана от системы сложных функций

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_j, p_j)} = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)}{\partial(q_j, p_j)} + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)}\right] +$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Просуммировав почленно эти тождества, получим

$$(\varphi\ \psi) = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} (\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k)\right] +$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k).$$

Согласно равенствам (5) отсюда находим

$$(\varphi\ \psi) = c \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)} = c\,(\varphi\ \psi)^{\sim}. \tag{7}$$

Справедливо и обратное утверждение. Если для любых двух функций φ и ψ выполняется тождество (7) при одной и той же постоянной $c \neq 0$, то переход от $2n$ переменных q_i, p_i к $2n$ переменным $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ осуществляется каноническим преобразованием с валентностью c[1]).

Для унивалентного канонического преобразования $c=1$, и потому

$$(\varphi\ \psi)=(\varphi\ \psi)^{\sim}.$$

Другими словами, *скобки Пуассона инвариантны относительно унивалентных канонических преобразований.* Это свойство унивалентных канонических преобразований выделяет эти преобразования среди всех возможных преобразований фазового пространства.

---

[1]) Действительно, из равенства (7) вытекает, что

$$(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k)=c\,(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k)^{\sim}=0,\quad (\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k)=c\,(\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k)^{\sim}=0,$$
$$(\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k)=c\,(\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k)^{\sim}=c\delta_{ik}.$$

ГЛАВА V

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 33. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Начнем с определения устойчивого положения равновесия.

Предварительно напомним[1]), что положение системы называется положением равновесия, если система, находящаяся в начальный момент в этом положении при нулевых скоростях, все время остается в этом положении.

Пусть положение голономной системы определяется с помощью независимых координат $q_1, \ldots, q_n$ (n — число степеней свободы системы). Как было выяснено в § 5, в положении равновесия (и только в этом положении) все обобщенные силы равны нулю: $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ [2]). Без нарушения общности можем считать, что рассматриваемое положение системы находится в начале координат $q_1 = \ldots = q_n = 0$. Тогда координаты любого другого положения системы $q_1, \ldots, q_n$ характеризуют отклонение этого положения от положения равновесия и потому сами называются *отклонениями* системы.

Положение равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ (или состояние равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$, $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_n = 0$) называется *устойчивым*, если при достаточно малых начальных

---

[1]) См. § 4.

[2]) Если обобщенные силы Q_i зависят не только от координат q_k, но и от обобщенных скоростей $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, то равенства $Q_i = 0$ должны выполняться тогда, когда входящие в выражение для Q_i координаты q_k заменяются координатами положения равновесия, а обобщенные скорости полагаются равными нулю.

отклонениях q_k^0 и достаточно малых начальных скоростях $\dot{q}_i^0$ ($i=1, \ldots, n$) система во все время движения не выходит из пределов сколь угодно малой (наперед заданной!) окрестности положения равновесия, имея при этом сколь угодно малые скорости $\dot{q}_i$ ($i=1, \ldots, n$), т. е. если *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $t \geqslant t_0$ *выполняются неравенства*

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, \ldots, n), \tag{1}$$

коль скоро в начальный момент $t=t_0$

$$|q_i^0| < \delta, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) удобно геометрически интерпретировать в $2n$-мерном пространстве состояний (q_i, $\dot{q}_i$). На рис. 41 (для случая $n=1$) в плоскости (q, $\dot{q}$) изображены две окрестности начала координат O, соответствующие неравенствам (1) и (2). Если начало координат O — устойчивое состояние равновесия и для заданного $\varepsilon > 0$ должным образом подобрано $\delta > 0$, то любое движение, начинающееся в момент t_0 внутри квадрата с центром в O и стороной 2δ, будет проходить все время внутри такого же квадрата со стороной 2ε.

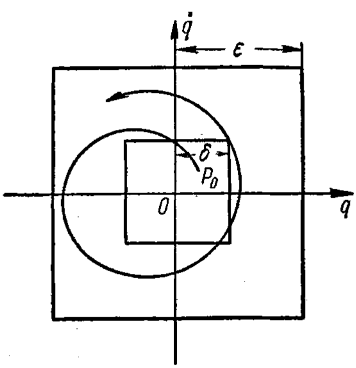

Рис. 41.

Примеры. 1. *Тяжелый шарик может двигаться по ободу, имеющему форму окружности и расположенному в вертикальной плоскости.* Имеются два положения равновесия: наинизшая и наивысшая точки окружности. Из них первая представляет собой устойчивое, а вторая — неустойчивое положение равновесия.

2. *Линейный осциллятор.* Положение равновесия устойчиво. Действительно, для линейного осциллятора $T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$, $\Pi = \frac{1}{2} cq^2$ ($m > 0$, $c > 0$) и дифференциальное уравнение движения $m\ddot{q} + cq = 0$ имеет общее решение

$$q = q_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad \left(\omega^2 = \frac{c}{m}\right).$$

Поэтому

$$|q(t)| \leqslant |q_0| + \frac{1}{\omega}|\dot{q}_0| < \varepsilon, \qquad |\dot{q}(t)| \leqslant \omega |q_0| + |\dot{q}_0| < \varepsilon,$$

если только $|q_0| < \delta$, $|\dot{q}_0| < \delta$, где, например, $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\omega}, \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$.

3. *Материальная точка массы m может двигаться вдоль оси x под действием двух сил: восстанавливающей силы, пропорциональной отклонению $-cx$, и силы сопротивления среды, пропорциональной первой степени скорости $-2f\dot{x}$ ($c > 0$, $f > 0$).*

Точка $x = 0$ будет устойчивым положением равновесия. Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент силы сопротивления мал: $0 < f < \sqrt{mc}$. В этом случае дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ имеет общее решение

$$x = e^{-\frac{f}{m}(t-t_0)}\left[C_1 \cos\frac{d}{m}(t-t_0) + C_2 \sin\frac{d}{m}(t-t_0)\right],$$

где

$$d = \sqrt{mc - f^2}, \quad C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{d}(fx_0 + m\dot{x}_0).$$

Отсюда при любом значении t

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \left(1 + \frac{f}{d}\right)|x_0| + \frac{m}{d}|\dot{x}_0| < \varepsilon$$

и

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \frac{d}{m}\left(1 + \frac{f}{d}\right)(|C_1| + |C_2|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{m}\left(1 + \frac{f}{d}\right)^2 |x_0| + \left(1 + \frac{f}{d}\right)|\dot{x}_0| < \varepsilon,$$

если $|x_0| < \delta$, $|\dot{x}_0| < \delta$, где например,

$$\delta = \min\left[\frac{d\varepsilon}{2m}, \frac{m\varepsilon}{2d\left(1 + \frac{f}{d}\right)^2}\right].$$

Если же $f \geqslant \sqrt{mc}$, то общее решение дифференциального уравнения движения $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ имеет вид

$$x = C_1 e^{-\nu_1(t-t_0)} + C_2 e^{-\nu_2(t-t_0)},$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - mc}}{m} > 0, \quad C_1 = \frac{\nu_2 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_2 - \nu_1}, \qquad C_2 = \frac{\nu_1 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_1 - \nu_2}.$$

Отсюда при любом значении t

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \frac{(\nu_1+\nu_2)|x_0| + 2|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|} = \frac{f|x_0| + m|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}} < \varepsilon$$

и

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \nu_1|C_1| + \nu_2|C_2| \leqslant \frac{2\nu_1\nu_2|x_0| + (\nu_1+\nu_2)|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|} = \frac{c|x_0| + f|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}} < \varepsilon,$$

если $|x_0| < \delta$, $|\dot{x}_0| < \delta$, где

$$\delta = \min\left(\frac{\sqrt{f^2-mc}}{2f}\varepsilon, \frac{\sqrt{f^2-mc}}{2c}\varepsilon, \frac{\sqrt{f^2-mc}}{2m}\varepsilon\right).$$

В примерах 2 и 3 устойчивость положения равновесия устанавливалась с помощью конечных уравнений, полученных путем интегрирования дифференциальных уравнений движения системы. Эти конечные уравнения движения давали нам зависимость отклонений q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ от времени t и начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i=1, \ldots, n)$. В более сложных (в частности, нелинейных) задачах определение этих конечных уравнений движения и их исследование весьма затруднительно. Поэтому представляют интерес критерии устойчивости положения равновесия, не требующие предварительного интегрирования дифференциальных уравнений движения системы.

Еще Торричелли (1644 г.) было известно, что положение системы тел, находящихся под действием сил тяжести, будет устойчивым, если центр тяжести этой системы тел занимает наинизшее из возможных положений. Лагранж обобщил этот принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил и установил следующий критерий устойчивости положения равновесия консервативной системы:

Теорема Лагранжа[1]. *Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.*

---

[1]) Эта теорема имеется в «Аналитической механике» Лагранжа (1-е издание 1788 г.), но строгое доказательство теоремы дал впервые Лежен Дирихле. Поэтому эту теорему часто называют теоремой Лежена Дирихле.

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что в рассматриваемом положении все координаты $q_1, \ldots, q_n$ и потенциальная энергия $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ равны нулю, т. е. $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$[1]. Так как в данном положении системы функция Π имеет минимум, то в этом положении обобщенные силы равны нулю

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

т. е. точка $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является положением равновесия системы. Далее, из того, что значение $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$ есть строгий минимум, следует, что в некоторой Δ-окрестности положения равновесия

$$|q_i| < \Delta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

имеет место строгое неравенство

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) > \Pi(0, \ldots, 0) = 0, \tag{4}$$

если только все координаты q_i не равны одновременно нулю.

Составим выражение для полной энергии системы:

$$E(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = T + \Pi =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k + \Pi(q_1, \ldots, q_n). \tag{5}$$

Из неравенства (4) и из того, что $T > 0$, если хотя бы одна из обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ не равна нулю[2], следует, что при выполнении неравенств (3) всегда

$$E > 0,$$

если только все $2n$ величин $q_i, \dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ не равны одновременно нулю, т. е. *полная энергия* $E(q_i, \dot{q}_i)$,

[1]) Потенциальная энергия Π определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Эту постоянную подбираем так, чтобы значение Π в положении равновесия было равно нулю.

[2]) Это справедливо, если Δ-окрестность начала координат O в координатном пространстве не содержит особых точек (см. примечание на стр. 55). Мы предполагаем, что точка O, в которой функция Π имеет минимум, не является особой. Но тогда и некоторая Δ_0-окрестность точки O не содержит особых точек. Мы выбираем $\Delta < \Delta_0$.

обращаясь в нуль в начале координат O $2n$-мерного пространства состояний, имеет в этой точке строгий минимум (равный нулю).

Выберем теперь произвольно число ε, подчинив его лишь ограничению $0<\varepsilon<\Delta$, и рассмотрим значения полной энергии E на границе ε-окрестности, определяемой неравенствами

$$|q_i|<\varepsilon, \quad |\dot{q}_i|<\varepsilon \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{6}$$

(рис. 42). Поскольку эта граница представляет собой замкнутое множество точек, то непрерывная функция E достигает на этой границе своего минимума E^*. Так как на границе ε-окрестности все значения E положительны, то положителен и минимум E^*. Таким образом, на границе ε-окрестности

$$E \geqslant E^* > 0. \tag{7}$$

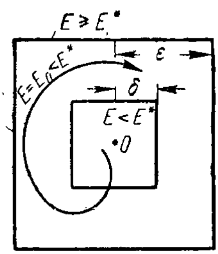

Рис. 42.

С другой стороны, поскольку непрерывная функция E обращается в нуль в начале координат O, то всегда существует такая δ-окрестность точки O[1], в которой

$$E<E^*. \tag{8}$$

Поэтому если начальные координаты и начальные скорости удовлетворяют неравенствам (2), то начальная энергия $E_0<E^*$. Но при движении консервативной системы ее полная энергия сохраняет свою начальную величину E_0 и, следовательно, во все время движения $E<E^*$. Поэтому при движении системы точка, изображающая это движение в пространстве состояний, не может достигнуть границы ε-окрестности, на которой $E \geqslant E^*$, и находится все время внутри этой окрестности.

Теорема доказана.

К доказанной теореме мы сделаем два замечания.

Замечание 1. *Теорема Лагранжа остается справедливой для неконсервативной системы, которая получается из консервативной добавлением гироскопических*

[1] Поскольку в δ-окрестности выполняется неравенство (8), то $\delta \leqslant \varepsilon$.

и диссипативных сил. Действительно, заметим прежде всего, что положение равновесия сохранится, если к системе дополнительно приложить гироскопические или диссипативные силы $\tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)$. Для этих сил

$$\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)\,\dot{q}_\nu \leqslant 0, \qquad |q_k| < \Delta,\ |\dot{q}_k| < \Delta.$$

Выберем, как и ранее, за начало координат пространства состояний положение равновесия и предположим, что среди функций $\tilde{Q}_\nu$ есть хотя бы одна $\tilde{Q}_j$ такая, что $\tilde{Q}_j(0) \neq 0$. Тогда по непрерывности $\tilde{Q}_j \neq 0$ и в Δ-окрестности начала координат. Но поскольку q_k и $\dot{q}_k$ независимы, их значения в этой окрестности всегда можно выбрать так, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)\,\dot{q}_\nu > 0,$$

а это противоречит условию диссипативности или гироскопичности сил. Поэтому предположение о существовании $\tilde{Q}_j(0) \neq 0$ приводит к противоречию, т. е. все $\tilde{Q}_\nu(0) = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, а это и свидетельствует о том, что добавление гироскопических и диссипативных сил не нарушает равновесия.

Гироскопические силы не нарушают закона сохранения полной энергии (см. § 8), и потому все доказательство теоремы Лагранжа остается без изменения и при наличии гироскопических сил. При диссипативных силах полная энергия $E = T + \Pi$ убывает при движении системы, и, следовательно, во время движения вместо равенства $E = E_0$ имеет место неравенство $E \leqslant E_0$. Но отсюда также следует, что во все время движения $E < E^*$, если $E_0 < E^*$. Поэтому и здесь с этим небольшим изменением доказательство теоремы сохраняется.

Замечание 2. Положение равновесия консервативной системы будет устойчивым и в том случае, когда в этом положении потенциальная энергия Π имеет *нестрогий* минимум, но в любой ε-окрестности положения равновесия существует замкнутая гиперповерхность

$$f(q_1, \ldots, q_n) = 0, \tag{9}$$

содержащая положение равновесия внутри себя и обладающая тем свойством, что на этой гиперповерхности значения потенциальной энергии строго больше, чем значение П в положении равновесия.

Действительно, пусть по-прежнему в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Кроме того, пусть уравнение гиперповерхности (9) выбрано так, чтобы для точек, расположенных внутри замкнутой гиперповерхности (9), выполнялось неравенство

$$f(q_1, \ldots, q_n) > 0. \tag{10}$$

Тогда это неравенство вместе с неравенствами

$$|\dot{q}_k| < c_k \qquad (0 < c_k < \varepsilon;\ \ k = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

определяет в $2n$-мерном пространстве состояний область (конечный «гиперцилиндр») G, расположенную внутри ε-окрестности (6). На границе области G либо $f = 0$ (тогда $\Pi > 0$, $T \geqslant 0$), либо хотя бы при одном k имеет место равенство $|\dot{q}_k| = c_k$ (тогда $T > 0$, $\Pi \geqslant 0$). Поэтому на границе области G всегда выполняется строгое неравенство $E = T + \Pi > 0$.

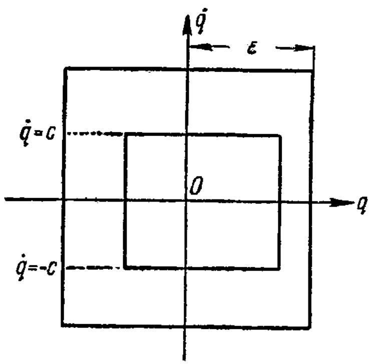

Рис. 43.

В рассматриваемом случае минимум функции E на границе ε-окрестности (6) может равняться нулю. Тогда при доказательстве теоремы Лагранжа нужно вместо ε-окрестности взять расположенную внутри нее область G. На границе области G минимум полной энергии $E^* > 0$. После этого остальная часть доказательства остается без изменения.

При $n = 1$ замкнутая гиперповерхность (9) вырождается в совокупность двух точек на оси q, расположенных по разные стороны от начала O, а область G — в прямоугольник, расположенный внутри ε-окрестности точки O (рис. 43).

Изложенные в замечании 2 соображения сохраняют свою силу и тогда, когда к системе дополнительно приложены гироскопические и диссипативные силы (см. замечание 1).

Если точки, в которых функция П имеет минимум $\Pi = 0$, заполняют сплошную кривую, исходящую из положения равновесия, то это положение равновесия может быть и неустойчивым. В качестве соответствующего примера можно взять движение свободной материальной точки с потенциальной энергией, не содержащей одной из координат, например x: $\Pi = \Pi(y, z)$, причем $\Pi(0, 0) = 0$ и $\Pi(y, z) > 0$ при $y^2 + z^2 > 0$. В этом примере точки минимума заполняют ось x. Положение равновесия $x = y = z = 0$ неустойчиво, так как при сколь угодно малой по величине начальной скорости, направленной вдоль оси x, точка будет совершать равномерное движение вдоль оси x.

В приведенных на стр. 190 примерах 1 и 2 рассматривается консервативная система, а в примере 3 (стр. 191) на точку действует и диссипативная сила. Потенциальная энергия имеет строгий минимум в примере 1 в наинизшей точке окружности, а в примерах 2 и 3 при $x=0$. Поэтому эти положения равновесия являются устойчивыми.

Пример 4. *Консервативная система с одной степенью свободы имеет потенциальную энергию* $\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}$ [дополнительно определяем: $\Pi(0)=0$]. В соответствии с замечанием 2 положение $q=0$ — устойчивое положение равновесия.

§ 34. Признаки неустойчивости положения равновесия. Теоремы Ляпунова и Четаева

Еще в 1892 г. А. М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» поставил вопрос об обращении теоремы Лагранжа. Этот вопрос до сих пор полностью не решен. Частичное решение этого вопроса дают две теоремы Ляпунова и теорема Четаева, в которых устанавливаются некоторые достаточные условия для неустойчивости положения равновесия.

Пусть по-прежнему в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Напишем разложение потенциальной энергии в ряд по степеням координат («отклонений»):

$$\Pi = \Pi_m(q_1, \ldots, q) + \Pi_{m+1}(q_1, \ldots, q_n) + \ldots$$
$$[\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) \not\equiv 0, \ m \geqslant 2], \tag{1}$$

где $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция k-й степени ($k=m$, $m+1, \ldots$), а наинизшая из степеней членов, фактически входящих в разложение, $m \geqslant 2$, так как в положении равновесия все $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Теорема Ляпунова I. *Если потенциальная энергия* $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ *консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это обстоятельство можно усмотреть из членов второй степени* $\Pi_2(q_1, \ldots, q_n)$ *в разложении* (1)[1], *то данное положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство. В выражении для кинетической энергии $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ разложим коэффициенты $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ в ряд по степеням координат и обозначим через a_{ik}^0 свободные члены

---

[1]) То есть $m=2$ и Π_2 — квадратичная форма, принимающая отрицательные значения (быть может, наряду с положительными).

(т. е. значения функций $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ при $q_1 = \ldots = q_n = 0$). Тогда, полагая $T_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^0 \dot{q}_i \dot{q}_k$, будем иметь

$$T = T_0 + (*), \qquad \Pi = \Pi_2 + (*);$$

здесь и далее через $(*)$ обозначаем сумму членов, имеющих более высокий порядок малости относительно координат и скоростей, чем выписанные ранее члены. Так как T_0 — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, то при помощи неособенного линейного преобразования переменных можно одновременно привести две квадратичные формы T_0 и Π_2 к сумме квадратов, после чего разложение для T и Π в новых переменных $\theta_1, \ldots, \theta_n$ примет вид[1])

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k^2 + (*), \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2 + (*). \tag{2}$$

Поскольку квадратичная форма Π_2 принимает некоторые отрицательные значения, то, по крайней мере, одно $\lambda_k < 0$.

В координатах θ_k уравнения Лагранжа запишутся так:

$$\ddot{\theta}_k = -\lambda_k \theta_k + (*) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left[\left(\lambda_k^2 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2}\right)\theta_k^2 + \mu(1-\lambda_k)\theta_k\dot{\theta}_k + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2}\right)\dot{\theta}_k^2\right], \tag{4}$$

где $\varepsilon_k = 1$ при $\lambda_k \geqslant 0$ и $\varepsilon_k = -1$ при $\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, а число $\mu > 0$.

Непосредственно проверяется, что в силу уравнений (3) и равенства (4) при движении системы

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t} V) = e^{-\mu t}\left[\mu \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\lambda_k + \frac{\mu^2}{4}\right)(\theta_k^2 + \dot{\theta}_k^2) + (*)\right]. \tag{5}$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\lambda_1 < 0$ и что λ_1 — наибольшее число из отрицательных λ_k. Положительное число μ выберем так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\lambda_1 + \frac{\mu^2}{4} < 0, \qquad \lambda_1^2 + \lambda_1 + \frac{\mu^2}{2} > 0. \tag{6}$$

---

[1]) Координаты $\theta_1, \ldots, \theta_n$ носят название *нормальных* или *главных* координат. Более подробно они будут рассмотрены в § 41.

Из первого неравенства следует, что сумма в правой части равенства (5) представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Но тогда при достаточно малых (по абсолютной величине) θ_k и $\dot{\theta}_k$

$$|\theta_k| < \Delta, \quad |\dot{\theta}_k| < \Delta \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

правая часть равенства (5) будет всегда положительна, т. е.

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t} V) > 0,$$

откуда

$$e^{-\mu t} V > e^{-\mu t_0} V_0,$$

или

$$V > V_0 e^{\mu (t - t_0)}. \tag{8}$$

Положим все начальные значения θ_k^0, $\dot{\theta}_k^0$ $(k = 1, \ldots, n)$ равными нулю, за исключением θ_1^0, которое возьмем по модулю меньшим Δ. Тогда, используя выражение (4) и второе неравенство (6), находим $V_0 > 0$. Но при этом движение обязательно выйдет за пределы окрестности (7), как бы мал ни был $|\theta_1^0|$, так как в противном случае из неравенства (8) следовало бы, что $\lim\limits_{t \to \infty} V = \infty$, а квадратичная форма V в окрестности (7) ограничена.

Теорема доказана.

В случае, когда в разложении (1) $m > 2$, можно применять следующие две теоремы, которые приведем без доказательства[1]).

Теорема Ляпунова II. *Если потенциальная энергия* Π *консервативной системы при* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *имеет строгий максимум и это обстоятельство может быть определено, исходя из членов наинизшей степени* $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n)$ $(m \geqslant 2)$ *в разложении* (1)[2]), *то положение* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *является неустойчивым положением равновесия системы.*

Теорема Четаева. *Если потенциальная энергия* Π *консервативной системы является однородной функцией отклонений* $q_1, \ldots, q_n$ *и в положении равновесия* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Примеры. 1. Пусть $\Pi = A(1 - \cos \alpha q)$; $n = 1$. Функция Π в точках $q_{2k} = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$ имеет строгие минимумы, а в точках $q_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)\pi}{\alpha}$ — строгие максимумы $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этом

---

[1]) Доказательства читатель может найти в следующих книгах: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 1935, § 16 и 25; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 1965, § 17; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 1952, § 14 и 17.

[2]) То есть в некоторой окрестности начала координат (исключая само начало) всегда $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) < 0$. Это возможно только при четном m.

последнее обстоятельство следует из вида члена наинизшего порядка в разложении по степеням отклонений

$$\Pi = -\frac{\alpha^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \ldots$$

Тогда, согласно теоремам Лагранжа и Ляпунова, точкам q_{2k} соответствуют устойчивые, а точкам q_{2k-1} — неустойчивые положения равновесия.

2. $\Pi = Aq_1 \ldots q_n$. Из теоремы Четаева следует, что положение $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

§ 85. Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Диссипативные системы

Введем теперь понятие об асимптотически устойчивом положении равновесия. Положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и если, кроме того, при достаточно малых по абсолютной величине начальных отклонениях и начальных скоростях все отклонения и скорости при неограниченном возрастании времени t стремятся к нулю, т. е. если *существует такое число* $\delta_0 > 0$, *что*

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

всякий раз, когда удовлетворяются неравенства

$$|q_i^0| < \delta_0, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1'}$$

При геометрической интерпретации (рис. 44) это означает, что в пространстве состояний $(q_i, \dot{q}_i)$ все траектории, начинающиеся в δ_0-окрестности начала координат O, асимптотически приближаются (при $t \to \infty$) к точке O.

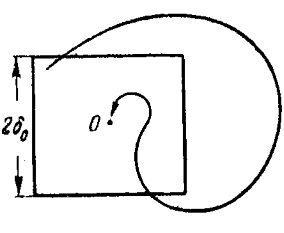

Рис. 44.

В рассмотренных на стр. 190—192 примерах 1, 2 и 3 только в примере 3 устойчивое положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Мы будем рассматривать склерономные системы, находящиеся под воздействием потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ и непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и будем предполагать, что потенциальная энергия П и непотенциальные силы $\tilde{Q}_i$ не зависят явно от времени:

$$\Pi = \Pi(q_k), \quad \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

В этом случае время t не входит явно в уравнения Лагранжа, которые могут быть записаны в следующем виде (разрешенном относительно обобщенных ускорений) (см. § 7, стр. 56):

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

В рассматриваемом случае полная энергия E склерономной системы не содержит явно времени:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k). \tag{4}$$

Вычисляя ее полную производную по времени при движении системы, находим:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} G_i = E'(q_k, \dot{q}_k). \tag{5}$$

Таким образом, в каждой точке пространства состояний $(q_k, \dot{q}_k)$ не только полная энергия, но и ее полная производная по времени имеют определенные значения.

Если силы $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются диссипативными (см. § 8), то при движении системы $\frac{dE}{dt} \leqslant 0$, т. е. функция $E'(q_k, \dot{q}_k)$ в рассматриваемой области пространства состояний принимает лишь неположительные значения.

В случае определенно-диссипативной системы (см. § 8) $\frac{dE}{dt} = E'(q_i, \dot{q}_i)$ обращается в нуль только в тех точках пространства состояний $(q_i, \dot{q}_i)$, где все $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Будем предполагать, что положение равновесия системы является изолированным, т. е. в его окрестности нет других положений равновесия[1]). Тогда имеет место

[1]) На это обстоятельство не было обращено внимания в первом издании книги, и теорема об асимптотической устойчивости в той форме, как она была там сформулирована, неверна (см. Гантмахер Ф. Р., Замечание по книге «Лекции по аналитической механике», Физматгиз, Москва, 1960, Прикладная математика и механика, т. 26, вып. 2, 1962).

Теорема об асимптотической устойчивости. *Если потенциальная энергия* П *склерономной определенно-диссипативной системы в некотором положении равновесия имеет строгий минимум и это положение равновесия является изолированным, то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть снова в положении равновесия

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0 \quad \text{и} \quad \Pi(0) = 0.$$

Как и при доказательстве теоремы Лагранжа, выберем в пространстве состояний ε-окрестность начала координат O, в которой энергия E положительна,

$$E(q_i, \dot{q}_i) > 0, \qquad (6)$$

во всех точках, отличных от O, и в которой нет состояний равновесия, отличных от O.

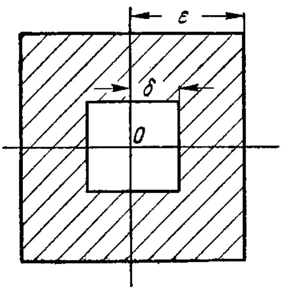

Рис. 45.

Так как согласно теореме Лагранжа положение равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ устойчиво, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что все движения протекают внутри ε-окрестности точки O, если начальная точка выбрана в δ-окрестности (рис. 45). В качестве δ_0-окрестности возьмем окрестность, в которой выполняется условие (8) § 33 ($\delta_0 \leqslant \delta$). Рассмотрим какое-либо из движений, начинающихся в δ_0-окрестности. Поскольку при движении энергия E убывает, то[1])

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = E_\infty \geqslant 0,$$

причем $E(t) \geqslant E_\infty$ ($t \geqslant t_0$). Допустим сначала, что $E_\infty \neq 0$, т. е. $E_\infty > 0$, и рассмотрим последовательность значений времени $t_s \to \infty$ и последовательности значений фазовых координат

$$q_i^{(s)} = q_i(t_s), \qquad \dot{q}_i^{(s)} = \dot{q}_i(t_s), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

[1]) Этот предел существует в силу того, что $E(t)$ — непрерывная монотонно убывающая неотрицательная функция.

Так как вся траектория лежит в ε-окрестности, то при всех s и i выполняются неравенства

$$|q_i^{(s)}| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^{(s)}| < \varepsilon.$$

В силу леммы Больцано — Вейерштрасса из бесконечных ограниченных последовательностей $q_i^{(s)}$ и $\dot{q}_i^{(s)}$ можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $q_i^{(k)}$ и $\dot{q}_i^{(k)}$. Пусть

$$\lim_{k \to \infty} q_i^{(k)} = q_i^*, \quad \lim_{k \to \infty} \dot{q}_i^{(k)} = \dot{q}_i^*, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{7}$$

при этом

$$|q_i^*| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^*| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но тогда, в силу непрерывности $E(t)$,

$$E(q_i^*, \dot{q}_i^*) = \lim_{k \to \infty} E(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)}) = E_\infty > 0.$$

По предположению точка $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ не совпадает с началом координат, где $E = 0$.

Примем точку $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$, за начальную точку движения при $t = t_0$. Так как эта точка не совпадает с точкой O, т. е. не является положением равновесия, то при движении системы хотя бы одна из обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ будет отлична от нуля и потому $\frac{dE}{dt} < 0$. Но тогда при некотором $t = t_1$ будет выполняться неравенство $E < E_\infty$.

Рассмотрим, далее, движение системы, начинающееся при $t = t_0$ из точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$. В силу (7) значения $q_i^{(k)}$ и $\dot{q}_i^{(k)}$ при достаточно больших k будут сколь угодно близки к значениям q_i^* и $\dot{q}_i^*$ соответственно. Следовательно, при достаточно больших k будут сколь угодно близки и значения фазовых координат при $t = t_1$ у движений, начинающихся при $t = t_0$ из начальных точек $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$ и $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ (решения систем дифференциальных уравнений являются непрерывными функциями начальных данных). Поэтому для движения, начавшегося при $t = t_0$ из точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^k)$, при $t = t_1$ будет выполняться неравенство $E(t_1) < E_\infty$, так как полная энергия E представляет собой непрерывную функцию фазовых координат. Но в силу единственности решений уравнений Лагранжа, состояние в момент $t = t_1$ системы, вышедшей при $t = t_0$ из начальной точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$, $i=1, \ldots, n$, совпадает[1]) с состоянием в момент t_k+t_1 системы, вышедшей при $t=t_0$ из начальной точки $(q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)})$, $i=1, \ldots, n$; поэтому интересующее нас значение энергии $E(t_k+t_1)$ должно удовлетворять неравенству

$$E(t_k+t_1)<E_\infty,$$

а это невозможно, так как $E(t)\geqslant E_\infty$ при любом $t>t_0$.

Итак, мы пришли к противоречию, допустив, что $E_\infty \neq 0$, следовательно,

$$E_\infty=0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} E(t)=0. \tag{8}$$

Так как в силу неравенства (6) равенство $E=0$ имеет место только в точке O, то из равенства (8) вытекает, что при $t\to\infty$ точка, изображающая систему в пространстве состояний, стремится к началу координат, т. е. имеют место соотношения (1). Теорема доказана.

В примере 3 на стр. 191 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2$ и

$$\frac{dE}{dt}=m\dot{x}\ddot{x}+cx\dot{x}=(m\ddot{x}+cx)\dot{x}=-2f\dot{x}^2<0,$$

поскольку $f>0$. Система определенно-диссипативная, и положение равновесия является изолированным, что следует из уравнения движения при подстановке решения $x=\text{const}$. В силу теоремы положение равновесия асимптотически устойчиво.

Исследование движения склерономной определенно-диссипативной системы в окрестности ее асимптотически устойчивого положения равновесия будет дано в § 46.

Ляпунов доказал теорему, которая обобщает теорему Лагранжа. Он обратил внимание на то, что *при доказательстве теоремы Лагранжа можно вместо энергии E взять любую непрерывную (с непрерывными частными производными первого порядка) функцию $V(q_k, \dot{q}_k)$, имеющую*

---

[1]) Так как в уравнения движения (3) время t явно не входит, то выбор начала отсчета времени не играет роли. Поэтому, если вместо $q_i^{(0)}$, $\dot{q}_i^{(0)}$ за начальное состояние принять $q_i^{(k)}$, $\dot{q}_i^{(k)}$, $i=1,\ldots,n$, то в дальнейшем система будет проходить те же состояния, что и в исходном движении, но в иные моменты времени.

в состоянии равновесия строгий минимум и не возрастающую при любом движении системы.

Вычислим производную по времени от функции V, использовав при этом уравнения движения (3):

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}Q_i(q_k,\ \dot{q}_k)=V'(q_k,\ \dot{q}_k). \tag{9}$$

В частности, из этой формулы следует, что в начале координат O пространства состояний функция V' обращается в нуль, так как точка O соответствует состоянию равновесия, в котором все $\dot{q}_i=0$ и все $\ddot{q}_i=Q_i=0$. Если функция V не возрастает при любом движении, то $\frac{dV}{dt}=V'(q_k,\ \dot{q}_k)\leqslant 0$. В этом случае функция V' в состоянии равновесия O имеет максимум. Если же этот максимум строгий, то в окрестности точки O (за исключением самой точки O) $V'<0$ и при движении системы в пределах этой окрестности функция V строго убывает.

Теперь можно почти дословно повторить доказательство теоремы Лагранжа, используя вместо E функцию V. В случае асимптотической устойчивости (например, для диссипативной системы) доказательство будет даже более простым, если потребовать, чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ имела в положении равновесия строгий экстремум противоположного типа по отношению к экстремуму функции V [1]).

Заметим еще, что при формулировке критерия устойчивости можно поменять местами слова «минимум» и «максимум», так как замена функции V на функцию $-V$ возвращает нас к прежней формулировке.

Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема. *Если дано положение равновесия склерономной системы, находящейся под действием сил, не зависящих явно от времени, и существует непрерывная*

---

[1]) При доказательстве теоремы об устойчивости диссипативной системы производная $\frac{dE}{dt}$ не имела в положении равновесия строгого максимума. В связи с этим нам пришлось специально оговорить, что положение равновесия является изолированным.

вместе с частными производными первого порядка функция $V(q_k, \dot{q}_k)$, имеющая в данном состоянии равновесия строгий экстремум, в то время как производная V' от V по времени (вычисленная в силу уравнений движения) имеет в этом же состоянии экстремум противоположного типа, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво. Если при этом экстремум производной также является строгим, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Функцию $V(q_k, \dot{q}_k)$, о которой идет речь в теореме, принято называть *функцией Ляпунова.*

§ 36. Условная устойчивость. Общая постановка вопроса. Устойчивость движения или произвольного процесса. Теорема Ляпунова

В неравенствах (1) и (2) на стр. 190, определявших устойчивость положения равновесия, фигурировали *все* отклонения q_i и *все* обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Однако во многих вопросах мы встречаемся с *условной устойчивостью*, когда указанные неравенства выполняются для некоторых из $2n$ величин $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ или в более общей постановке для некоторых функций $x_1, \ldots, x_m$ от этих величин:

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

При этом предполагается, что все функции (1) обращаются в нуль при

$$q_k = 0, \quad \dot{q}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \text{ т. е. } f_i(0, \ldots, 0) = 0,$$

и удовлетворяют автономной [1]) системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2])

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_i, \ldots, x_m, t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 94.

[2]) При исследовании условной устойчивости склерономных систем функции X_i $(i = 1, \ldots, m)$ не зависят явно от t. Мы вписали t в качестве аргумента в правых частях, имея в виду несклерономные системы и дальнейшие обобщения.

где $X_i(x_1, \ldots, x_m, t)$ $(i=1, \ldots, m)$ — непрерывные функции в области

$$|x_i| \leqslant \Delta, \quad t \geqslant t_0 \quad (i=1, \ldots, m) \tag{3}$$

(t_0 — фиксированный начальный момент времени).

Состоянию равновесия отвечает нулевое решение $x_i \equiv 0$ $(i=1, \ldots, m)$ системы дифференциальных уравнений (2). Наличие такого решения предполагает, что правые части уравнений (2) удовлетворяют условию

$$X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \quad (i=1, \ldots, m). \tag{4}$$

С математической точки зрения речь идет об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2), причем эта устойчивость определяется так: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом $t \geqslant t_0$

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, \ldots, m), \tag{5}$$

коль скоро

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i=1, \ldots, m). \tag{6}$$

Для геометрической интерпретации неравенств (5) и (6) используются ε- и δ-окрестности начала координат в m-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_m)$. В случае асимптотической устойчивости дополнительно требуется существование такого $\delta_0 > 0$, что

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \quad (i=1, \ldots, m), \tag{7}$$

если только

$$|x_i(t_0)| < \delta_0 \quad (i=1, \ldots, m). \tag{8}$$

Если исследуется устойчивость положения равновесия (не условная!), то в качестве $x_1, \ldots, x_m$ можно взять величины $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ или $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. В первом случае уравнения (2) представляют собой уравнения Лагранжа, записанные в виде системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $q_1, \ldots, \dot{q}_n$. Во втором случае уравнениями (2) являются канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{9}$$

Рассмотрим два важных частных случая системы уравнений (2), которые часто встречаются в приложениях.

1°. Стационарный случай, когда t не входит явно в правые части X_i уравнений (2), т. е. когда

$$\frac{\partial X_i}{\partial t}=0 \qquad (i=1, \ldots, m).$$

2°. Периодический случай, когда правые части X_i имеют период τ относительно переменной t:

$$X_i(x_1, \ldots, x_m, t+\tau)=X_i(x_1, \ldots, x_m, t) \qquad (i=1, \ldots, m).$$

В этих случаях устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2) определяется с помощью теоремы, являющейся непосредственным обобщением теоремы, приведенной в конце § 35.

Теорема Ляпунова. *Если в стационарном или в периодическом случае существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка в области* (3) *функция* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$, *которая при любом* t, *рассматриваемом как параметр, имеет в точке* $x_1=\ldots=x_m=0$ *строгий экстремум, в то время как в той же точке снова при любом* t *ее производная по времени* $V'(x_1, \ldots, x_m, t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial V}{\partial t}$ *имеет экстремум противоположного типа, то нулевое решение системы* (2) *устойчиво. Если при этом экстремум производной* V' *также является строгим, то нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво. При этом предполагается, что в стационарном случае функция* V *не зависит явно от* t, *а в периодическом эта функция периодична относительно* t *с периодом* τ [τ — период правых частей уравнений (2)].

Доказательство этой теоремы достаточно провести для периодического случая, так как стационарный случай можно рассматривать как частный случай периодического с любым τ. Доказательство состоит в повторении рассуждений, приведенных ранее при доказательстве теоремы Лагранжа и теоремы об асимптотической устойчивости со следующими изменениями: вместо E теперь используется разность

$$V(x_1, \ldots, x_m, t)-V(0, \ldots, 0, t),$$

а вместо пространства $(q_1, \dot{q}_i)$ берется m-мерное пространство $(x_1, \ldots, x_m)$. Величину t, входящую в V, рассматриваем как параметр. В силу периодичности этот параметр можно изменять в конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Благодаря этому обстоятельству наличие в V переменной t не вызывает каких-либо осложнений при доказательстве теоремы.

Заметим, что в общем (нестационарном и непериодическом) случае на функцию Ляпунова нужно наложить более жесткие условия [1]).

Отметим один частный случай теоремы Ляпунова, который часто используется в качестве критерия простой (неасимптотической) устойчивости.

Пусть функция $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ является интегралом системы дифференциальных уравнений (2), т. е. функция V при подстановке в нее любого решения системы (2) превращается в постоянную. В этом случае $\frac{dV}{dt} = V'(x_1, \ldots, x_m, t) \equiv 0$ и можно считать, что функция V' в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$ при любом t имеет максимум и минимум (конечно, нестрогий). Поэтому имеет место такое следствие из теоремы Ляпунова:

Следствие. *Если система дифференциальных уравнений* (2) *имеет интеграл* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ [*не зависящий от* t *в стационарном случае и периодический относительно* t *с периодом* τ *в периодическом случае*] *и этот интеграл в точке* $x_1 = \ldots = x_m = 0$ *при любом фиксированном* t *имеет строгий экстремум, то нулевое решение системы* (2) *устойчиво.*

Заметим, что при доказательстве теоремы Лагранжа для консервативной системы используется интеграл энергии E.

Рассмотрим теперь движения или более общие процессы, описываемые системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_m, t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{10}$$

где правые части — непрерывные функции в некоторой области изменения переменных $z_1, \ldots, z_m$ при $t \geqslant t_0$, удовлетворяю-

---

[1]) См., например, Четаев Н. Г., Устойчивость движения, гл. II.

щие условиям существования и единственности решения по заданным начальным данным $z_i(t_0)$ $(i=1, \ldots, m)$.

Пусть $\tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ — решение системы уравнений (10), определяющее некоторый процесс. Для выяснения вопроса об устойчивости этого процесса введем вместо неизвестных функций $z_1, \ldots, z_m$ новые неизвестные функции — «отклонения»

$$x_i = z_i - \tilde{z}_i(t) \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{11}$$

Тогда в новых переменных система дифференциальных уравнений (10) запишется в виде системы (2), где

$$X_i = Z_i[x_1 + \tilde{z}_1(t), \ldots, x_m + \tilde{z}_m(t)] - X_i[\tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_m(t)]. \tag{12}$$

Решению $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ системы дифференциальных уравнений (10) в новых переменных соответствует нулевое решение $x_1 = \ldots = x_m = 0$ системы дифференциальных уравнений (2). Это обстоятельство позволяет свести вопрос об устойчивости процесса $\tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ к изученному нами вопросу об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2). Другими словами, решение $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ системы (10) называется устойчивым (соответственно асимптотически устойчивым), если устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) нулевое решение $x_1 = \ldots = x_m = 0$ системы уравнений в отклонениях (2) при правых частях, определяемых формулами (12). Все это открывает широкое поле для применений приведенной в этом параграфе теоремы Ляпунова. Эта теорема может быть использована не только для определения устойчивости положения равновесия, но и для определения устойчивости движения и вообще любого процесса, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример. Рассмотрим *вращение по инерции твердого тела имеющего неподвижную точку O*. Динамические уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp, \quad C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq. \tag{13}$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости ω на главные оси инерции тела $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; A, B, C — моменты инерции относительно этих осей.

Уравнения (13) допускают следующие три частных решения, определяющих перманентные вращения тела относительно главных осей:

$$1^\circ \quad q = r = 0, \quad p = \text{const} = p_0;$$
$$2^\circ \quad r = p = 0, \quad q = \text{const} = q_0;$$
$$3^\circ \quad p = q = 0, \quad r = \text{const} = r_0.$$

Мы ограничимся выяснением устойчивости вращения 1°, поскольку 2° и 3° могут быть записаны в виде 1° при другом обозначении осей. При этом устойчивость решения 1° уравнений Эйлера (13) будет определять условную устойчивость вращения 1° относительно угловой скорости ω [1]).

Составим уравнения в отклонениях, положив $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \frac{B-C}{A} x_2 x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{C-A}{B} x_3 (x_1 + p_0), \\ &\frac{dx_3}{dt} = \frac{A-B}{C} x_2 (x_1 + p_0). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Пусть вдоль оси $O\xi$ исследуемого перманентного вращения расположена большая или малая ось эллипсоида инерции. Поскольку величины A, B и C обратно пропорциональны квадратам осей эллипсоида инерции, это означает, что $A < B$, C или $A > B$, C. Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию

$$V = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0x_1)^2 \pm [B(B-A)x_2^2 + C(C-A)x_3^2],$$

где знак «+» берется в случае $A < B$, C, а знак «—» — в случае $A > B$, C.

Функция V обращается в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и положительна в окрестности этой точки, т. е. функция V имеет в этой точке строгий минимум. С другой стороны, как легко проверить, $\frac{dV}{dt} = 0$ в силу уравнений (14), т. е. функция V является интегралом системы дифференциальных уравнений (14). Поэтому, согласно следствию из теоремы Ляпунова, *перманентное вращение относительно большой или малой оси эллипсоида инерции устойчиво.*

Можно было бы показать, что перманентное вращение относительно средней оси эллипсоида инерции неустойчиво, но для этого следовало бы воспользоваться критерием неустойчивости Четаева [2]).

---

[1]) Устойчивость относительно ω означает, что малое изменение начальной угловой скорости ω_0 влечет малое изменение вектора ω во все время движения. Другими словами, это устойчивость относительно отклонений $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$. Разумеется, углы Эйлера при этом непрерывно растут.

[2]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, изд. 3, 1965, стр. 37.

2. Рассмотрим в качестве примера задачу об устойчивости вращательного движения снаряда [1]).

Примем для упрощения задачи, что центр тяжести снаряда C движется прямолинейно вдоль горизонтальной оси x с постоянной скоростью $v = \text{const}$. Пусть Cxy — вертикальная плоскость стрельбы. Положение оси снаряда (оси динамической симметрии) $C\xi$ определяется двумя углами: углом α, образованным проекцией Cx_1 оси $C\xi$ на плоскость Cxy с осью Cx, и углом β между Cx_1 и $C\xi$ (рис. 46). Последовательными поворотами на угол α и на угол β триэдр осей $Cxyz$ переходит в триэдр $C\xi\eta\zeta$. Дополнительный поворот на угол φ вокруг оси $C\xi$ переводит триэдр $C\xi\eta\zeta$ в триэдр осей, неизменно связанных со снарядом. Поэтому угловая скорость снаряда $\boldsymbol{\omega}$ состоит из трех составляющих:

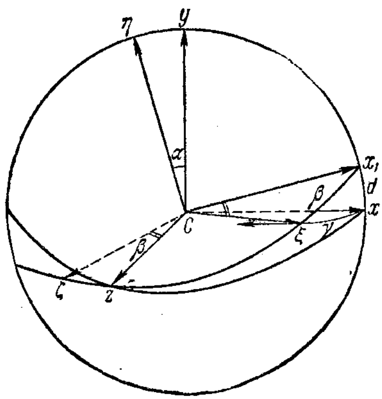

Рис. 46.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3,$$

где $\omega_1 = \dot{\alpha}$, $\omega_2 = \dot{\beta}$, $\omega_3 = \dot{\varphi}$. Проекции угловой скорости на главные оси инерции $C\xi, C\eta, C\zeta$ определяются формулами

$$p = \dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta,$$

$$q = -\dot{\beta}, \quad r = \dot{\alpha}\cos\beta.$$

Обозначая через A аксиальный, а через B экваториальный момент инерции снаряда, получаем для кинетической энергии выражение

$$T = \frac{1}{2}[Ap^2 + B(q^2 + r^2)] = \frac{1}{2}[A(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)^2 + B(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta)].$$

Будем считать, что помимо силы тяжести к снаряду приложена в точке D на оси снаряда (в «центре давления») сила лобового сопротивления воздуха $\boldsymbol{R}$, постоянная по величине [2]) и направленная в сторону, противоположную скорости $\boldsymbol{v}$, т. е. в отрицательном направлении оси x. Пусть $l = CD$, а γ — угол между осями Cx и $C\xi$. Тогда момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно C равен $Rl\sin\gamma$, а элементарная работа силы $\boldsymbol{R}$ будет

$$\delta A = Rl\sin\gamma\,\delta\gamma = -\delta(Rl\cos\gamma),$$

[1]) Решение этой задачи было дано Н. Г. Четаевым и опубликовано в «Прикладной математике и механике», т. X, вып. 1, 1946.

[2]) Величина R есть функция от v, $R = f(v)$, поэтому из $v = \text{const}$ следует $R = \text{const}$.

поэтому в качестве потенциала сил можно принять функцию [1])

$$\Pi = Rl\cos\gamma = Rl\cos\alpha\cos\beta.$$

Колебания оси снаряда характеризуются изменением углов α и β. Для определения устойчивости вращательного движения снаряда будем исходить из трех интегралов движения:

1) $T + \Pi = \text{const}$; 2) $G_x = \text{const}$; 3) $G_\xi = Ap = \text{const}$.

Первый интеграл представляет собой интеграл энергии; G_x и G_ξ — проекции кинетического момента $\boldsymbol{G}_C$ на оси Cx и $C\xi$. Постоянство G_x при движении системы следует из того, что момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно оси Cx равен нулю. Третий интеграл выражает постоянство обобщенного импульса Ap, соответствующего циклической координате φ. Заметим, что (см. рис. 46)

$$\begin{aligned} G_x &= G_\xi\cos(x\xi) + G_\eta\cos(x\eta) + G_\zeta\cos(x\zeta) = \\ &= Ap\cos(x\xi) + Bq\cos(x\eta) + Br\cos(x\zeta) = \\ &= Ap\cos\alpha\cos\beta + B(\dot\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta)\ ^{2)}. \end{aligned}$$

Комбинируя первые два интеграла с третьим и используя полученные выражения для T, Π, G_x, находим следующие два интеграла движения W_1 и W_2, обращающиеся в нуль при $\alpha = \beta = \dot\alpha = \dot\beta = 0$:

$$W_1 = \frac{1}{2}B(\dot\alpha^2\cos^2\beta + \dot\beta^2) + Rl(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \text{const},$$

$$W_2 = B(\dot\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta) + Ap(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \text{const}.$$

Будем искать знакоопределенную линейную комбинацию интегралов движения $W_1 - \lambda W_2$. Предварительно определим в W_1 и W_2 члены наинизшей степени относительно малых величин α, β, $\dot\alpha$, $\dot\beta$:

$$W_1 = \frac{1}{2}B(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2) - \frac{1}{2}Rl(\alpha^2 + \beta^2) + \ldots,$$

$$W_2 = B(\dot\beta\alpha - \dot\alpha\beta) - \frac{1}{2}Ap(\alpha^2 + \beta^2) + \ldots;$$

---

[1]) Дуги α, β, γ на сфере с центром в C образуют прямоугольный сферический треугольник с «катетами» α, β и «гипотенузой» γ. Для такого треугольника имеет место формула $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. Справедливость формулы следует из элементарных геометрических соображений.

[2]) Дуги α, $\frac{\pi}{2} + \beta$ и $(x\zeta)$ образуют прямоугольный сферический треугольник с «катетами» α и $\frac{\pi}{2} + \beta$, поэтому

$$\cos(x\zeta) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\cos\alpha\sin\beta.$$

тогда

$$W_1-\lambda W_2=\frac{1}{2}\left[B\dot{\alpha}^2+2B\lambda\dot{\alpha}\beta+(Ap\lambda-Rl)\beta^2\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[B\dot{\beta}^2-2B\lambda\dot{\beta}\alpha+(Ap\lambda-Rl)\alpha^2\right]+\ldots$$

Для того чтобы каждое из выражений в квадратных скобках было положительно определенным, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$B^2\lambda^2<B\,(Ap\lambda-Rl).$$

Сокращая на B и преобразуя, получаем

$$B\lambda^2-Ap\lambda+Rl<0.$$

Для того чтобы последнее неравенство имело место при некотором вещественном λ, нужно, чтобы квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имел вещественные корни, т. е. должно иметь место неравенство

$$A^2p^2>4BRl.$$

Это и есть условие, обеспечивающее устойчивость вращательного движения снаряда (при «отклонениях» α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$), так как при выполнении этого условия можно подобрать вещественное значение λ, при котором интеграл $W_1-\lambda W_2$ будет иметь при $\alpha=\beta=\dot{\alpha}=\dot{\beta}=0$ строгий минимум, равный нулю.

§ 37. Устойчивость линейных систем

В предыдущем параграфе было показано, что исследование устойчивости любого процесса, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]), сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы уравнений в отклонениях.

Пусть дифференциальные уравнения в отклонениях линейны и имеют постоянные коэффициенты

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x_i=u_ie^{\lambda t} \qquad \left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \sum_{i=1}^{n}|u_i|^2>0\right). \tag{2}$$

---

[1]) Как известно, обычно такая система может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для системы уравнений Лагранжа такая запись возможна всегда (см. § 7).

Подставляя выражения (2) в уравнения (1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем соотношения, связывающие искомые величины u_i и λ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = \lambda u_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda\delta_{ik})\, u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера

$$(\delta_{ik} = 1 \quad \text{при} \quad i = k, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k).$$

Так как в искомом решении (2), по крайней мере, одна из постоянных u_i должна быть отлична от нуля, то определитель системы однородных уравнений (4) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, для определения λ мы получили алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ.

Уравнение (5) называется *характеристическим* или *вековым уравнением* для матрицы коэффициентов

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения называются *характеристическими* числами матрицы A.

Взяв в качестве λ какое-либо характеристическое число матрицы A, мы найдем соответствующие этому числу постоянные u_i из системы линейных уравнений (4).

Для дальнейшего нам удобно будет ввести матричную запись как для исходной системы (1), так и для систем соотношений (2) и (3).

Введем в рассмотрение векторы-столбцы

$$\boldsymbol{x}=\left\|\begin{matrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{matrix}\right\|,\qquad \boldsymbol{u}=\left\|\begin{matrix} u_1\\ u_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ u_n\end{matrix}\right\|.$$

Тогда вместо равенств (1) — (3) и (5) можно написать[1])

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1'}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}e^{\lambda t}, \tag{2'}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\qquad (\boldsymbol{u}\neq 0), \tag{3'}$$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0. \tag{5'}$$

Здесь $\boldsymbol{E}=\|\delta_{ik}\|_{i,\,k=1}^{n}$ — единичная матрица.

Столбец $\boldsymbol{u}\neq 0$, удовлетворяющий вместе с числом λ соотношению (3'), называется *собственным вектором* матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующим характеристическому числу λ. Таким образом, в каждом решении системы (1'), имеющем вид (2'), λ — характеристическое число матрицы $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{u}$ — соответствующий собственный вектор.

Рассмотрим сначала тот случай, когда характеристическое уравнение (5) имеет n различных корней λ_k $(k=1,\ldots,n)$. Каждому характеристическому числу λ_k соответствуют собственный вектор $\boldsymbol{u}_k$ и частное решение системы (1) вида $\boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t}$. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n} C_k\boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t} \tag{6}$$

снова будет решением системы (1).

Для того чтобы показать, что формула (6) охватывает все решения системы (1), предварительно докажем, что

---

[1]) При умножении квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ на столбец $\boldsymbol{x}$ мы элементы i-й строки матрицы $\boldsymbol{A}$ умножаем на соответствующий элемент столбца $\boldsymbol{x}$ и все эти произведения складываем. Полученная таким способом сумма является i-м элементом столбца-произведения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Производная от столбца $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ получается дифференцированием каждого элемента столбца $\boldsymbol{x}$.

векторы-столбцы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, линейно независимы.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0. \tag{7}$$

Умножим обе части равенства (7) слева на матрицу A. Тогда, используя равенства

$$Au_k = \lambda_k u_k \qquad (u_k \neq 0, \ k = 1, \ldots, n),$$

находим:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k u_k = 0. \tag{8}$$

Исключим из соотношений (7) и (8) постоянную c_1:

$$\sum_{j=2}^{n} (\lambda_j - \lambda_1) c_j u_j = 0. \tag{9}$$

Это равенство опять умножим слева на A и используем полученное равенство совместно с (9) для исключения c_2 и т. д. В конце концов получим:

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_{n-1}) c_n u_n = 0, \tag{10}$$

откуда $c_n = 0$. Так как в равенстве (7) все слагаемые равноправны, то

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0,$$

т. е. никакой зависимости вида (7) между собственными векторами $u_1, u_2, \ldots, u_n$ не существует и эти векторы линейно независимы.

Положив в формуле (6) $t = 0$, найдем:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k. \tag{11}$$

Произвольно задавшись начальным вектором x_0, мы из равенства (11), в силу линейной независимости векторов $u_1, \ldots, u_n$, однозначно определим C_k $(k = 1, \ldots, n)$. Таким образом, формула (6) охватывает решения системы (1), удовлетворяющие любым начальным условиям $x(0) = x_0$, т. е. охватывает все решения системы (1).

В курсах по теории дифференциальных уравнений доказывается, что в случае кратных корней формула (6) несколько усложняется. В этой формуле могут появиться так называемые «вековые члены», содержащие вместо постоянного вектора u_k полином относительно t: $u_k + u'_k t + \ldots$. В общем случае произвольное решение системы дифференциальных уравнений (1) определяется формулой

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k (u_k + u'_k t + \ldots) e^{\lambda_k t}. \tag{12}$$

Из формул (6) и (12) непосредственно получаются важные следствия.

1°. *Если все характеристические числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части, т. е.*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0,$$

то $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$ *и нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (1) *асимптотически устойчиво* [1]).

Пусть теперь $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ хотя бы для одного k. Тогда система (1) имеет ненулевое решение $x = C_k u_k e^{\lambda_k t}$, которое стремится к бесконечности при $t \to \infty$. В то же время начальное значение (при $t = 0$) $x_0 = C_k u_k$ может быть сколь угодно малым, поскольку C_k — произвольная постоянная. В этом случае решение $x = 0$ неустойчиво. Таким образом, имеет место предложение:

2°. *Если хотя бы одно характеристическое число* λ_k *матрицы* A *имеет положительную вещественную часть* ($\operatorname{Re}\lambda_k > 0$), *то нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (1) *неустойчиво* [2]).

Пример. Положение равновесия *линейного осциллятора* в среде *с сопротивлением*, пропорциональным первой степени скорости, будет асимптотически устойчивым. Действительно (см. пример 3 на стр. 191), дифференциальное уравнение движения

---

[1]) Число $\alpha > 0$ иногда называется *степенью устойчивости*.

[2]) Если все $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0$ ($k = 1, \ldots, n$) и хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак равенства, то решение $x = 0$ будет устойчивым, если в формуле (12) во всех слагаемых, где $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, будут отсутствовать вековые члены. В противном случае решение $x = 0$ будет неустойчивым.

$m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0$ $(m,\ c,\ f>0)$ может быть записано в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, если положить $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-\frac{c}{m}x_1-2\frac{f}{m}x_2.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -2\dfrac{f}{m}-\lambda \end{vmatrix}\equiv\lambda^2+2\frac{f}{m}\lambda+\frac{c}{m}=0$$

имеет корни с отрицательной вещественной частью $-\dfrac{f}{m}$, что и обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия.

§ 38. Устойчивость по линейному приближению

В системе дифференциальных уравнений (нелинейных!)

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ n)\tag{1}$$

разложим правые части в ряды по степеням отклонений $x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{1'}$$

где f_i — сумма всех членов разложения X_i, начиная с членов второго порядка относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

В стационарном случае a_{ik} — постоянные коэффициенты, а функции f_i зависят от $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и не зависят от t. В периодическом случае a_{ik} — периодические функции от t с периодом τ, а нелинейные члены $f_i=f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$ также периодичны относительно t с периодом τ.

Если в уравнениях (1′) отбросить все нелинейные члены f_i, то получим линейную систему дифференциальных уравнений, которая называется *линейным приближением* для нелинейной системы (1).

В конце прошлого века в исследованиях Пуанкаре и Ляпунова было установлено, что как в стационарном, так и в периодическом случае об устойчивости нулевого решения нелинейной системы (1) можно судить по линейному приближению, а именно *из асимптотической устойчивости нулевого решения линейного приближения следует асимптотическая устойчивость нулевого решения нелинейной системы*[1]). Это положение находит широкие применения, поскольку исследование линейных систем значительно проще, чем исследование нелинейных систем.

Мы ограничимся рассмотрением стационарного случая и в этом случае для доказательства высказанного утверждения запишем систему (1′) в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \tag{1''}$$

Здесь $A = \| a_{ik} \|_{i,\,k=1}^{n}$ — квадратная матрица с постоянными элементами, а $f(x)$ — столбец с элементами $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поскольку по предположению нулевое решение линейного приближения асимптотически устойчиво, то (см. § 37) все характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0. \tag{2}$$

Условимся через $|z|$ обозначать «длину» вектора-столбца z с компонентами $z_1, \ldots, z_n$:

$$|z| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Поскольку каждый элемент столбца $f(x)$ начинается с членов второго измерения, то

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon |x|, \tag{4}$$

где постоянное число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, если ограничить изменение переменных $x_1, \ldots, x_n$ достаточно малой окрестностью $|x| < \Delta$.

---

[1]) При этом предполагалось, что правые части $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции. В настоящее время выяснено, что следует понимать под линейным приближением при разрывных правых частях X_i, и установлен соответствующий критерий устойчивости по линейному приближению как в периодическом случае, так и в некоторых непериодических случаях. См. Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Прикладная математика и механика, т. 21, вып. 5, 1955 и Ливартовский И. В., там же, т. 23, вып. 3, 1959.

Доказательство[1]) утверждения Пуанкаре и Ляпунова можно построить, опираясь на следующую лемму.

Лемма. *Линейная система дифференциальных уравнений* $\frac{dx}{dt}=Ax$ *с помощью линейного неособенного преобразования переменных*

$$x=Uy \qquad (\det U\neq 0) \tag{5}$$

может быть приведена к «треугольному» виду[2])

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\lambda_1 y_1+b_{12}y_2+\ldots+b_{1n}y_n,\\ \frac{dy_2}{dt}&=\qquad\quad \lambda_2 y_2+\ldots+b_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dt}&=\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_n y_n,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *характеристические числа матрицы* A, *а модули «недиагональных» коэффициентов* b_{ik} $(i<k)$ *могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет надлежащего выбора преобразования* (5)[3]).

Преобразование (5) применим к нелинейной системе (1″). В новых переменных система (1″) запишется так:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\lambda_1 y_1+b_{12}y_2+\ldots+b_{1n}y_n+g_1(y),\\ \frac{dy_2}{dt}&=\qquad\quad \lambda_2 y_2+\ldots+b_{2n}y_n+g_2(y),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dt}&=\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_n y_n+g_n(y),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где столбец $g(y)$ с элементами $g_1(y), \ldots, g_n(y)$ определяется равенством

$$g(y)=U^{-1}f(Uy) \tag{8}$$

---

[1]) См. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1952.

[2]) В результате преобразования (5) матрица коэффициентов A заменяется матрицей $U^{-1}AU$, которая имеет треугольную форму.

[3]) Доказательство леммы приводится далее на стр. 223—224.

и удовлетворяет неравенству [1])

$$|g(y)| < \eta |y|, \tag{9}$$

где число η (как и число ε) может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно малой окрестности $|x| < \Delta$ (и соответственно $|y| < \Delta_1$).

Тогда в соответствии с уравнениями (7) и неравенствами (2) и (9) найдем [2]):

$$|y| \frac{d|y|}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{y}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \frac{d\bar{y}_i}{dt} + \bar{y}_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} \lambda_i |y_i|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i>k} (b_{ik} y_k \bar{y}_i + \bar{b}_{ik} \bar{y}_k y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (g_i \bar{y}_i + \bar{g}_i y_i) \leqslant$$

$$\leqslant (-\alpha + \delta + \eta) |y|^2 \qquad \left(\delta = \sum_{i<k} |b_{ik}|\right),$$

т. е.

$$\frac{d|y|}{dt} \leqslant (-\alpha + \delta + \eta) |y|,$$

откуда

$$|y| \leqslant |y_0| e^{(-\alpha+\delta+\eta)(t-t_0)} \qquad (y_0 = y(t_0)). \tag{10}$$

---

[1]) Если определить норму матрицы $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ равенством $\| A \| = \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2}$, то легко проверяется справедливость неравенства

$$|Ax| \leqslant \| A \| \, |x|.$$

Поэтому из неравенства (4) и равенства (8) следует, что

$$|g(y)| \leqslant \| U^{-1} \| \, |f(Uy)| \leqslant \varepsilon \| U^{-1} \| \, \| U \| \, |y|,$$

и, таким образом, в неравенстве (9) можно положить

$$\eta = \| U \| \, \| U^{-1} \| \, \varepsilon.$$

[2]) Через $\bar{y}_k$ мы обозначаем число, комплексно сопряженное с y_k ($k = 1, \ldots, n$).

Выберем положительные числа δ и η так, чтобы выполнялись неравенства $\alpha-\delta>0$ и $\eta<\alpha-\delta$; тогда из неравенства (10) следует, что

$$|y| \leqslant |y_0| \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} y(t)=0, \tag{11}$$

т. е. решение $y=0$ системы (7) асимптотически устойчиво. Но векторы x и y связаны между собой линейным преобразованием (5); поэтому и решение $x=0$ системы (1) асимптотически устойчиво [1]).

Доказательство леммы. Покажем сначала, что с помощью преобразования $x=U^{(1)}z$ вида (5) можно привести систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{12}$$

к виду, в котором: 1) первая переменная z_1 не входит в правые части всех уравнений, начиная со второго, и 2) в первом уравнении коэффициент при z_1 равен характеристическому числу λ_1 матрицы A, т. е. к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_{12}z_2 + \ldots + b'_{1n}z_n, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad\quad b'_{22}z_2 + \ldots + b'_{2n}z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \qquad\quad b'_{n2}z_2 + \ldots + b'_{nn}z_n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для этого достаточно в качестве первого столбца матрицы $U^{(1)}$ взять собственный вектор u_1, соответствующий характеристическому числу λ_1 ($Au_1=\lambda_1 u_1$, $u_1\neq 0$), а остальные столбцы матрицы $u_2, \ldots, u_n$ выбрать так, чтобы вместе с u_1 они были линейно независимы (тогда $\det U^{(1)}\neq 0$).

Действительно, преобразование $x=U^{(1)}z$ может быть записано и так:

$$x=u_1z_1+u_2z_2+\ldots+u_nz_n, \tag{14}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — координаты вектора x в базисе $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Система (12) имеет решение

$$x=u_1e^{\lambda_1 t}. \tag{15}$$

---

[1]) В соответствии с примечанием 1 на предыдущей странице из равенства (5) вытекает неравенство

$$|x| \leqslant \|U\|\,|y| \leqslant \|U\|\,|y_0| \leqslant \|U\|\,\|U^{-1}\|\,|x_0|.$$

Поэтому преобразованная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}z_k \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{16}$$

согласно равенству (14), имеет решение

$$z_1=e^{\lambda_1 t}, \quad z_2=\ldots=z_n=0, \tag{15'}$$

что возможно лишь тогда, когда $b'_{11}=\lambda_1$ и $b'_{21}=\ldots=b'_{n1}=0$, т. е. когда система (16) имеет вид (13).

Так как при линейном неособенном преобразовании характеристическое уравнение матрицы A не изменяется [1]), то матрица $\|b_{jk}\|_2^n$ имеет своими характеристическими числами остальные $n-1$ характеристических чисел $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ матрицы A.

Применяя аналогичное преобразование к системе последних $n-1$ уравнений (13) и т. д., мы в конце концов с помощью неособенного линейного преобразования приведем исходную систему дифференциальных уравнений к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt}&=\lambda_1 z_1+b'_{12}z_2+\ldots+b'_{1n}z_n,\\
\frac{dz_2}{dt}&=\qquad\quad \lambda_2 z_2+\ldots+b'_{2n}z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_n}{dt}&=\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_n z_n.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Наконец, сделаем последнее преобразование переменных

$$z_k=\mu^k y_k \qquad (\mu>0;\ k=1, \ldots, n).$$

Тогда система (17) заменится системой (6), в которой недиагональные коэффициенты $b_{ik}=\mu^{k-i}b'_{ik}$ $(i<k)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми по модулю, если выбрать число $\mu>0$ достаточно малым. Лемма доказана.

§ 39. Критерии асимптотической устойчивости линейных систем

В предыдущих двух параграфах было установлено, что в стационарном случае нулевое решение произвольной

---

[1]) Характеристические уравнения матриц A и $U^{-1}AU$ (см. примечание 2 к стр. 221) совпадают, так как

$$U^{-1}(A-\lambda E)U=U^{-1}AU-\lambda E,$$

и поэтому

$$\det(U^{-1}AU-\lambda E)=\det U^{-1}\det(A-\lambda E)\det U=\det(A-\lambda E)$$

(E — единичная матрица).

(нелинейной) системы дифференциальных уравнений в отклонениях асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения, составленного для матрицы коэффициентов линейного приближения, имеют отрицательные вещественные части. Поэтому приобретают большую практическую значимость *необходимые и достаточные условия для того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (a_0 > 0) \qquad (1)$$

имели отрицательные вещественные части.

Обозначим через λ_k $(k = 1, \ldots, g)$ вещественные, а через $r_j \pm is_j$ $\left(j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right)$ — комплексные корни уравнения (1) и предположим, что в комплексной плоскости все эти корни лежат слева от мнимой оси, т. е. что

$$\lambda_k < 0, \quad r_j < 0 \quad \left(k = 1, \ldots, g;\ j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right); \qquad (2)$$

тогда

$$f(\lambda) = a_0 \sum_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda - r_j - is_j)(\lambda - r_j + is_j) =$$

$$= a_0 \prod_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda^2 - 2r_j\lambda + r_j^2 + s_j^2). \qquad (3)$$

Так как, согласно неравенствам (2), каждый множитель в последней части равенства (3) имеет положительные коэффициенты, то и в уравнении (1) все коэффициенты положительны. *Положительность всех коэффициентов — необходимое (при $a_0 > 0$), но отнюдь не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения* (1) *были расположены слева от мнимой оси.*

В 1875 г. уже известный читателю английский механик Раус дал алгоритм, с помощью которого по коэффициентам многочлена $f(\lambda)$ можно узнать, является ли он «устойчивым», т. е. имеют ли все его корни отрицательные вещественные части. В 1895 г. немецкий математик Гурвиц независимо от

Рауса установил тот же критерий в видоизмененной форме с помощью определителей («определителей Гурвица»)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

(Здесь всюду следует положить $a_p = 0$ при $p > n$.)

Условие Рауса — Гурвица[1]). *Для того чтобы все корни уравнения* (1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0. \qquad (5)$$

Если коэффициенты уравнения (1) заданы как числа, то условия (5) легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (1) содержат буквенные параметры, то вычисление определителей Δ_k при большом k уже вызывает затруднение.

Поэтому представляют интерес другие условия, установленные в 1914 г. французскими математиками Льенаром и Шипаром. В этих условиях число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях (5) Рауса — Гурвица.

Условия Льенара — Шипара. *Для того чтобы многочлен $f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ при $a_0 > 0$ имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ \ldots, \ a_n > 0; \qquad (6)$$

2) *имели место детерминантные неравенства*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ \ldots \qquad (7)$$

---

[1]) Относительно вывода условий Рауса — Гурвица см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, гл. XV, § 6; Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, изд. 2, гл. III, § 1.

(*здесь, как и ранее,* Δ_k *обозначает определитель Гурвица* k*-го порядка*[1])).

Теперь мы познакомимся с *геометрическим критерием устойчивости.*

Заменим в равенстве[2])

$$f(\lambda)=a_0\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)$$

λ на $i\omega$ и будем изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$. Вычислим соответствующее приращение угла $\theta=\arg f(i\omega)$:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\Delta_{-\infty}^{+\infty}\arg(i\omega-\lambda_k).$$

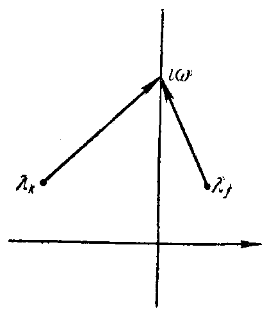

Рис. 47.

Теперь заметим, что[3]) (рис. 47)

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\arg(i\omega-\lambda_k)=\begin{cases}\pi, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda_k<0,\\ -\pi, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda_k>0.\end{cases}$$

Поэтому, обозначая через l и r число корней, лежащих слева и соответственно справа от мнимой оси ($l+r=n$), будем иметь:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega)=(l-r)\pi.$$

Рассмотрим кривую, описываемую аффиксом[4]) комплексного числа $f(i\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Эта кривая распадается на две ветви: на одной $\omega>0$, на другой $\omega<0$. Одна ветвь получается из другой зеркальным отображением относительно вещественной оси, поскольку $f(i\omega)$ и $f(-i\omega)$ — комплексно сопряженные числа. Поэтому, обозначив через Δ_0^{∞} приращение при изменении ω от 0 до ∞, получим

$$\Delta_0^{\infty}\theta(\omega)=\frac{1}{2}\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega)=(l-r)\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

---

[1]) Вывод условий Льенара и Шипара, а также некоторые другие варианты этих условий можно найти в цитированной книге «Теория матриц», гл. XV, § 3.

[2]) Здесь n корней многочлена $f(\lambda)$ обозначены через $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

[3]) Мы предполагаем здесь, что ни один из корней λ_k не лежит на мнимой оси.

[4]) Аффиксом комплексного числа z называют соответствующую точку комплексной z-плоскости.

Отсюда видно, что все корни будут расположены слева от мнимой оси ($l=n$, $r=0$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_0^\infty \theta(\omega) = n\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Геометрический критерий устойчивости[1]. *Для того чтобы многочлен $f(\lambda)$ был устойчивым, т. е. чтобы все его корни были расположены слева от мнимой оси, необходимо и достаточно:*

1) чтобы годограф $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не проходил через нулевую точку[2]) *и*

2) чтобы для этого годографа

$$\Delta_0^\infty \theta = n\frac{\pi}{2},$$

где n — степень многочлена $f(\lambda)$ (см. рис. 48 для $n=6$).

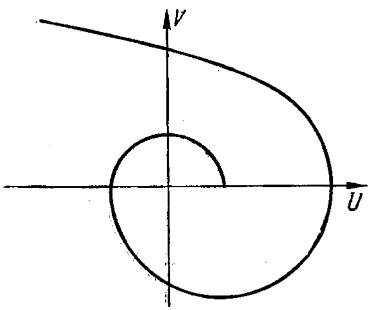

Рис. 48.

Заметим, что для устойчивого многочлена[3]) аргумент θ изменяется *монотонно* при изменении ω от 0 до ∞. Это следует из формулы

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \arg(i\omega - \lambda_k),$$

поскольку для такого многочлена каждое слагаемое в правой части является монотонно возрастающей функцией от ω.

Пример. Пусть $f(\lambda)=\lambda^5+5\lambda^4+10\lambda^3+11\lambda^2+7\lambda+2$. Тогда $f(i\omega)=U(\omega)+iV(\omega)$, где

$$U(\omega)=5\omega^4-11\omega^2+2, \qquad V(\omega)=\omega(\omega^4-10\omega^2+7).$$

---

[1]) Этот критерий впервые был применен А. В. Михайловым для исследования систем автоматического регулирования. Поэтому в технической литературе геометрический критерий устойчивости часто называется *критерием Михайлова.*

[2]) Условие 1) означает, что $f(\lambda)$ не имеет чисто мнимых корней.

[3]) Устойчивый многочлен называют также *многочленом Гурвица.*

Для построения годографа $f(i\omega)$ замечаем, что $U(0)=2$ и $V(\omega)$ обращается в нуль при $\omega=0$ и при $\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$ $(0<\omega_1<\omega_2)$; квадраты ω_1^2 и ω_2^2 определяются из квадратного уравнения:

$$\omega_1^2=5-\sqrt{18}\approx 0{,}76; \qquad \omega_2^2=5+\sqrt{18}\approx 9{,}24.$$

Нетрудно убедиться в том, что $U(\omega_1)<0$, $U(\omega_2)>0$. Кроме того, $V'(0)=7>0$.

Таким образом, годограф при $\omega=0$ начинается на положительной вещественной оси, идет сначала вверх, пересекает положительную мнимую ось, затем отрицательную вещественную ось (при $\omega=\omega_1$), отрицательную мнимую ось и, наконец, снова положительную вещественную ось (при $\omega=\omega_2$). При $\omega>\omega_2$ годограф не пересекает осей координат и уходит в бесконечность в пятом квадранте $(U>0$, $V>0)$, так как $n=5$. При этом $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}\to+\infty$ при $\omega\to+\infty$. Таким образом

$$\Delta_0^\infty\theta=5\frac{\pi}{2},$$

т. е. $f(\lambda)$ — устойчивый многочлен.

К этому же выводу можно было бы прийти, исходя из критерия Льенара — Шипара, поскольку в $f(\lambda)$ все коэффициенты положительны и

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 11\\ 1 & 10\end{vmatrix}>0, \qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}5 & 11 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 2\\ 0 & 1 & 10 & 7\end{vmatrix}>0.$$

ГЛАВА VI

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 40. Малые колебания консервативной системы

Если в начальный момент времени положение склерономной системы выбрано достаточно близким к положению устойчивого равновесия и начальные скорости по абсолютной величине достаточно малы, то на протяжении всего движения будут малыми по абсолютной величине как сами отклонения от положения равновесия, так и обобщенные скорости. Это обстоятельство позволяет сохранить в дифференциальных уравнениях движения только линейные члены относительно отклонений и скоростей, а члены более высокого порядка малости отбросить. Тогда дифференциальные уравнения движения становятся линейными, т. е. задача «линеаризуется». В этом параграфе рассматривается линеаризация уравнений движения для случая консервативной системы.

Кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы с n степенями свободы выражаются через независимые координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ следующим образом:

$$T=\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi=\Pi(q_1, \ldots, q_n). \tag{1}$$

Как и в предыдущей главе, примем, что начало координат $q_1=\ldots=q_n=0$ является положением равновесия и что в этом же положении $\Pi=0$. Разложим коэффициенты $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ в ряды по степеням координат:

$$a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)=a_{ik}+\ldots \qquad (i,\ k=1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $a_{ik}=a_{ik}(0, \ldots, 0)$ $(a_{ik}=a_{ki};\ i, k=1, \ldots, n)$ — постоянные. Подставляя эти выражения для коэффициентов в формулу (1) для кинетической энергии, получаем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+(**), \tag{3}$$

где через $(**)$ мы обозначили сумму членов третьего и более высоких порядков относительно q_i и $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

Разложим также и потенциальную энергию в ряд по степеням координат:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_0 q_iq_k+(**).$$

По условию $\Pi_0=0$. Кроме того, в положении равновесия обобщенные силы равны нулю

$$Q_i^0=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0=0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Поэтому, введя обозначения

$$c_{ik}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_0 \qquad (c_{ik}=c_{ki};\quad i, k=1, \ldots, n), \tag{4}$$

мы и потенциальную энергию представим в виде

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k+(**). \tag{5}$$

Отбрасывая в формулах (3) и (5) члены третьего и более высокого порядков малости относительно q_i и $\dot{q}_k$, мы представим кинетическую и потенциальную энергии в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k, \tag{6}$$

где $a_{ik}=a_{ki}$, $c_{ik}=c_{ki}$ $(i, k=1, \ldots, n)$.

Из физического смысла кинетической энергии ясно, что всегда $T\geqslant 0$. Поскольку мы предполагаем, что положение равновесия не является особой точкой[1]), то всегда $T > 0$, если только не все обобщенные скорости равны одновременно нулю, т. е. квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2T$ является положительно определенной:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 > 0\right). \tag{7}$$

Далее, для того чтобы обеспечить устойчивость данного положения равновесия, потребуем, чтобы (в соответствии с теоремой Лагранжа) в положении равновесия потенциальная энергия имела строгий минимум. Поскольку $\Pi_0 = 0$, то это означает, что в некоторой окрестности начала координат

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2 > 0\right). \tag{8}$$

Но квадратичная форма (8) представляет собой однородную функцию второй степени относительно координат. Поэтому неравенство (8) имеет место во всем пространстве, за исключением начала координат, где эта форма обращается в нуль. Другими словами, потенциальная энергия также представлена в виде положительно определенной квадратичной формы относительно координат[2]).

Составим уравнения Лагранжа, исходя из выражений (6) для T и Π:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Будем искать частное решение этой системы линейных дифференциальных уравнений в виде

$$q_i = u_i \sin(\omega t + \alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

[1]) См. примечание к стр. 55.

[2]) Конечно, возможны случаи, когда функция $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ до отбрасывания членов (**) имеет в начале координат строгий минимум, а после отбрасывания этих членов имеет в этой же точке нестрогий минимум (например, $\Pi = c^2(q_1 + \ldots + q_n)^2 + d^2(q_1^4 + \ldots + q_n^4)$, $c > 0$, $d > 0$). Но такие случаи мы будем считать особыми и исключим из рассмотрения. В этих особых случаях отбрасывание членов (**) в выражении для Π не оправдано. Оно может резко исказить картину движения.

т. е. в виде гармонических колебаний с одной и той же частотой ω и с одной и той же постоянной α для всех координат.

Подставляя выражения (10) для q_i в дифференциальных уравнениях (9) и полагая

$$\lambda = \omega^2, \tag{11}$$

получаем после сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$ следующую систему алгебраических уравнений, линейных относительно амплитуд u_i [1]):

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Так как все амплитуды u_i искомого колебания не должны обращаться в нуль, то определитель системы однородных уравнений (12) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{12} - \lambda a_{12} & \ldots & c_{1n} - \lambda a_{1n} \\ c_{21} - \lambda a_{21} & c_{22} - \lambda a_{22} & \ldots & c_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} - \lambda a_{n1} & c_{n2} - \lambda a_{n2} & \ldots & c_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

После раскрытия определителя мы получим в левой части многочлен n-й степени относительно λ. Таким образом, квадрат частоты $\lambda = \omega^2$ искомого гармонического решения (10) должен удовлетворять алгебраическому уравнению n-й степени (13). Уравнение (13) называется *вековым уравнением* или *уравнением частот.*

Каждому корню λ уравнения (13) соответствует частное решение (10) (при произвольном постоянном α) системы дифференциальных уравнений (9). В этом решении $\omega = \sqrt{\lambda}$.

Запишем приведенные выше формулы в матричной форме. Введем в рассмотрении две симметрические положительно

[1]) Величину u_i мы называем амплитудой гармонического колебания (10) координаты q_i, хотя фактически амплитудой является абсолютная величина $|u_i|$; начальной фазой (при $t = 0$) гармонических колебаний (10) является либо величина α (при $u_i > 0$), либо величина $-\alpha$ (при $u_i < 0$).

определенные матрицы [1])

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad C = \|c_{ik}\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

и векторы-столбцы

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Vmatrix}, \qquad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix} \tag{15}$$

(u — амплитудный вектор). Тогда система дифференциальных уравнений (9) запишется в виде

$$A\ddot{q} + Cq = 0. \tag{16}$$

Частное решение (10) будет выглядеть так:

$$q = u \sin(\omega t + \alpha), \tag{17}$$

а результат подстановки решения (17) в уравнение (16), т. е. система алгебраических уравнений (12), имеет вид

$$(C - \lambda A)\, u = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{18}$$

Уравнение частот запишется так:

$$\det (C - \lambda A) = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{19}$$

Для того чтобы выяснить, что корни λ векового уравнения (19) всегда вещественны и положительны, рассмотрим предварительно некоторые свойства квадратичных форм с вещественными коэффициентами.

Каждой квадратичной форме $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k$ соответствует некоторая билинейная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k$, для которой

---

[1]) Симметрическая матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k$ является положительно определенной.

введем сокращенное обозначение

$$A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k;$$

тогда квадратичная форма запишется так:

$$A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k.$$

Легко проверяются следующие свойства билинейной формы:

1°. $A(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v})$.

2°. $A(\lambda\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \lambda A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ (λ — скаляр).

3°. $A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})$[1].

Покажем еще, что для любого комплексного вектора $\boldsymbol{u}$

4°. $A(\boldsymbol{u},\ \overline{\boldsymbol{u}})$ — вещественное число[2].

Действительно, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — вещественные векторы-столбцы), в силу 1° — 3°, найдем:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u},\ \overline{\boldsymbol{u}}) &= A(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}) = \\ &= A(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}) - iA(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) + iA(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w}) = \\ &= A(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w}). \end{aligned} \tag{20}$$

Последнее выражение явно вещественно.

Из равенства (20) следует также

5°. Если $A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})$ — положительно определенная квадратичная форма, а $\boldsymbol{u} \neq 0$ — произвольный комплексный вектор, то

$$A(\boldsymbol{u},\ \overline{\boldsymbol{u}}) > 0 \qquad (\boldsymbol{u} \neq 0). \tag{21}$$

В самом деле, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$, имеем $A(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}) \geqslant 0$, $A(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w}) \geqslant 0$. В одном из этих соотношений имеет место знак $>$, так как из $\boldsymbol{u} \neq 0$ следует, по крайней мере, одно из неравенств $\boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{w} \neq 0$. Тогда из равенства (20) следует равенство (21).

---

[1]) В отличие от равенств 1° и 2° равенство 3° справедливо только для билинейной формы с симметрической матрицей коэффициентов.

[2]) Чертой мы отмечаем переход к комплексно сопряженным величинам. Свойство 4° справедливо только для симметрической матрицы с вещественными элементами.

Докажем теперь

6°. Если λ — корень векового уравнения $\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})=0$, а $\boldsymbol{u}$ — соответствующий ему амплитудный вектор [см. (18)]

$$\boldsymbol{Cu}=\lambda\boldsymbol{Au} \qquad (\boldsymbol{u}\neq 0), \tag{22}$$

то при любом векторе $\boldsymbol{v}$

$$C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\lambda A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{23}$$

Действительно, в скалярной записи равенство (22) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}u_k=\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{22'}$$

Умножив обе части i-го уравнения (22') на v_i и просуммировав по i, получим:

$$\sum_{i, k=1}^{n} c_{ik}v_iu_k=\lambda\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}v_iu_k,$$

т. е. равенство (23).

Покажем теперь, что *для любых двух амплитудных векторов* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{u}'$, *соответствующих различным корням векового уравнения* λ *и* λ' $(\lambda\neq\lambda')$, *выполняется соотношение*[1])

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0. \tag{24}$$

Действительно, согласно 6°, имеют место два равенства:

$$C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=\lambda A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'), \qquad C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=\lambda' A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'). \tag{25}$$

Но $\lambda\neq\lambda'$. Поэтому из равенств (25) следует соотношение (24)[2]).

---

[1]) Если ввести в n-мерном пространстве A-метрику, т. е. под квадратом длины вектора $\boldsymbol{u}$ понимать величину квадратичной формы

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k,$$

то $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$ — «скалярное произведение» векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ в этой метрике. Поэтому равенство (3) выражает собой следующее свойство амплитудных векторов: *амплитудные векторы, соответствующие различным корням векового уравнения, всегда ортогональны между собой в* $\boldsymbol{A}$*-метрике.*

[2]) В силу равенств (25) одновременно с равенством $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0$ имеет место и равенство $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0$.

Докажем теперь, что *из симметричности матриц* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{C}$ *и из положительной определенности матрицы* $\boldsymbol{A}$ *следует, что вековое уравнение* (13) [или (19)] *имеет только вещественные корни.*

Действительно, пусть λ — комплексный корень векового уравнения ($\lambda \neq \bar{\lambda}$) и ему соответствует комплексный вектор $\boldsymbol{u} \neq 0$. Тогда $\bar{\lambda}$ также корень векового уравнения с амплитудным вектором $\bar{\boldsymbol{u}}$. Поскольку $\lambda \neq \bar{\lambda}$, то, по доказанному, $A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0$, что противоречит неравенству (21).

Если λ вещественно, то и соответствующий ему амплитудный вектор $\boldsymbol{u} \neq 0$ может быть выбран вещественным. Тогда, полагая в (23) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ и замечая, что $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$, находим

$$\lambda = \frac{C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{26}$$

Но в нашем случае квадратичная форма $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} u_i u_k$ также является положительно определенной. Тогда не только $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$, но и $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$. Следовательно, $\lambda > 0$.

Таким образом, вековое уравнение (13) имеет n положительных корней λ_j, которым соответствуют вещественные положительные частоты $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ и вещественные амплитудные векторы $\boldsymbol{u}_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Рассмотрим сначала случай, когда все корни векового уравнения различны. Каждому λ_j соответствует частное решение

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j}) \tag{27}$$

с амплитудным вектором $\boldsymbol{u}_j$, координаты которого $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_{kj} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{28}$$

или в матричной записи

$$(\boldsymbol{C} - \lambda_j \boldsymbol{A}) \boldsymbol{u}_j = 0. \tag{29}$$

Так как система дифференциальных уравнений (9) [или (16)] линейна, то линейная комбинация с постоянными коэффициентами решений (27) есть снова решение этой системы.

Поэтому

$$q = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j};\quad j = 1, \ldots, n) \quad (30)$$

при произвольных постоянных C_j, α_j ($j = 1, \ldots, n$) является решением системы (9) или (16). Мы покажем, что *формула* (30) *охватывает все движения системы.*

Докажем предварительно, что n амплитудных векторов u_j ($j = 1, \ldots, n$) линейно независимы[1]). Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j = 0.$$

Тогда при любом фиксированном k ($1 \leqslant k \leqslant n$)

$$0 = A\left(u_k,\ \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j A(u_k,\ u_j). \quad (31)$$

Но $A(u_k, u_j) = 0$ при $k \neq j$ и $A(u_k, u_j) > 0$ при $k = j$. Поэтому из равенств (31) следует:

$$c_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

т. е. между векторами $u_1, \ldots, u_n$ не может быть линейной зависимости.

Подберем теперь в формуле (30) значения произвольных постоянных C_j, α_j так, чтобы удовлетворялись произвольные наперед заданные начальные условия

$$q_i(0) = q_{i0}, \qquad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (32)$$

или в матричной записи

$$q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (33)$$

Из формул (30) находим

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \sum_{j=1}^{n} C_j \sin\alpha_j\, u_j, \\ \dot{q}_0 &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j C_j \cos\alpha_j\, u_j. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

---

[1]) Для частного случая, когда A — единичная матрица, это предложение было доказано в § 37.

В силу линейной независимости векторов u_j ($j=1, \ldots, n$) отсюда однозначно определяются произведения $C_j \sin \alpha_j$ и $\omega_j C_j \cos \alpha_j$ и, следовательно, поскольку $\omega_j \neq 0$, однозначно определяются значения произвольных постоянных C_j и α_j ($j=1, \ldots, n$)[1]).

Таким образом, при отсутствии у векового уравнения кратных корней формула (30) охватывает все колебания системы [2]).

Если же уравнение частот имеет кратные корни, то можно утверждать, что решений вида $u \sin(\omega t + \alpha)$ будет во всяком случае m, где m — число различных корней λ_j векового уравнения.

Лагранж считал, что в случае кратных частот общее решение системы (9) уже не представляется в форме (30) и что в правой части (30) появляются так называемые вековые члены вида

$$(\dot{u} + u't + u''t^2 + \ldots) \sin(\omega t + \alpha).$$

Однако Лагранж ошибся. Как доказал позже Вейерштрасс, каждому корню λ p-й кратности соответствует ровно p линейно независимых решений системы линейных уравнений (12), т. е. для каждого корня λ_j p-й кратности можно найти p линейно независимых амплитудных векторов. Таким образом, и в случае кратных частот существует n линейно независимых амплитудных векторов и составленная с их помощью формула (30) дает общее решение и в этом случае.

Колебания

$$q = C_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{35}$$

из которых складывается произвольное колебание системы, называются *главными колебаниями* системы.

Строгий вывод формулы (30) в общем случае (т. е. и при наличии кратных частот) с помощью так называемых

---

[1]) α_j определяются с точностью до слагаемого, кратного 2π.

[2]) Для амплитудных векторов u_j выполняются соотношения

$$A(u_j, u_h) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ij} u_{kh} = 0 \qquad (j \neq h;\ j, h = 1, \ldots, n).$$

«нормальных» координат будет дан в следующем параграфе. При этом выводе случай кратных корней векового уравнения не выделяется особо.

Пример. *Связанные маятники.* Точки подвеса двух одинаковых математических маятников с массой m и длиной l расположены на одной горизонтальной прямой. Точки этих маятников, отстоящие от точек подвеса на расстоянии h $(0 < h \leqslant l)$, соединены между собой пружиной жесткости γ; пружина находится в нерастянутом состоянии, когда маятники занимают вертикальное положение. Требуется определить колебание системы в вертикальной плоскости.

В качестве независимых координат возьмем углы φ_1 и φ_2, образованные маятниками с вертикалью (рис. 49). В положении равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. С точностью до малых величин высшего порядка удлинение пружины равно $h\,|\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1| \approx h\,|\varphi_2 - \varphi_1|$. Поэтому в данном случае

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2),$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_2) + \frac{\gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2}\gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \ldots$$

Сохраняя в Π только квадратичные члены, окончательно будем иметь

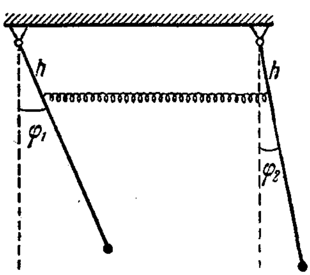

Рис. 49.

$$T = \frac{1}{2} a (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - b\varphi_1\varphi_2,$$

где

$$a = ml^2, \quad c = mgl + \gamma h^2,$$
$$b = \gamma h^2.$$

Напишем уравнение частот

$$\begin{vmatrix} c - \lambda a & -b \\ -b & c - \lambda a \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2)$$

и одно из двух уравнений для определения амплитуд в главных колебаниях (эти два уравнения зависимы)

$$(c - \lambda a) u_1 - b u_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{b}{c - \lambda a}.$$

Из уравнения частот находим

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{c - b}{a} = \frac{g}{l}, \qquad \omega_2^2 = \lambda_2 = \frac{c + b}{a} = \frac{g}{l} + 2\frac{\gamma}{m}\frac{h^2}{l^2}.$$

Соответственно для первого главного колебания $u_1 = u_2 = C_1$ и

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (\varphi_1 = \varphi_2),$$

а для второго $u_1 = -u_2 = C_2$ и

$$\varphi_1 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2 = -C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\varphi_1 = -\varphi_2).$$

В первом главном колебании оба маятника все время находятся в одной фазе, пружина не растянута и маятники не оказывают никакого влияния друг на друга. Во втором главном колебании маятники находятся все время в противоположных фазах.

Произвольное колебание получается наложением двух главных колебаний:

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

§ 41. Нормальные координаты

Две квадратичные формы

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad \text{и} \quad C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{1}$$

из которых хотя бы одна, например $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$, является положительно определенной, всегда можно одним и тем же (неособенным) преобразованием переменных

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \tag{2}$$

привести к «сумме квадратов» [1])

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{3}$$

При этом все $\lambda_j > 0$, так как (см. § 40) форма $C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ также является положительно определенной.

Поскольку обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны между собой такими же соотношениями, какими связаны q_i и θ_j:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dot{\theta}_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) См., например, цитированную на стр. 226 книгу «Теория матриц», гл. X, § 6.

то в первом из равенств (3) можно заменить q_i и θ_j на $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$, после чего для кинетической и потенциальной энергий получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{\theta}_j^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Переменные $\theta_1, \ldots, \theta_n$ называются *нормальными* или *главными* координатами. Формулы перехода (2) от произвольных координат к нормальным в «векторной» записи могут быть представлены так:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \tag{5}$$

где

$$\boldsymbol{q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_j = \begin{Vmatrix} u_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{nj} \end{Vmatrix} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Так как преобразование координат (2) является неособенным, то соответствующий определитель отличен от нуля:

$$\det (u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимы.

Используя простые выражения (4) для T и Π в нормальных координатах, составим уравнения Лагранжа в этих координатах:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j\theta_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Каждое из этих уравнений содержит только одну неизвестную функцию. Общие решения уравнений (6), как известно, определяют гармонические колебания

$$\theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где C_j и α_j — произвольные постоянные ($j = 1, \ldots, n$). Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем общую формулу для колебаний

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{8}$$

Таким образом, строго установлено, что эта формула в самом общем случае охватывает все малые колебания консервативной системы [1]).

Полагая в формуле (8) все произвольные постоянные, кроме C_j и α_j, равными нулю, получим j-е «главное» гармоническое колебание

$$\boldsymbol{q} = C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{9}$$

(В нормальных координатах это колебание осуществляется, когда все $\theta_i = 0$ при $i \neq j$ и изменяется только координата θ_j.) В предыдущем параграфе было установлено, что квадрат частоты $\lambda_j = \omega_j^2$ удовлетворяет уравнению частот. Так как других гармонических колебаний вида (9), кроме тех, которые входят как слагаемые в общую формулу (8), для $\boldsymbol{q}$ не существует, то $\lambda_j = \omega_j^2$ $(j = 1, \ldots, n)$ — *все* корни векового уравнения. Кроме того, если какой-либо корень повторяется здесь p раз, то ему соответствуют p линейно независимых амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$, определяемых из системы линейных уравнений (28) или (29) предыдущего параграфа.

Таким образом, мы снова доказали, что все корни λ_j векового уравнения вещественны и положительны и установили, что n частотам $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ соответствуют n линейно независимых амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Подставив в формулу $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ вместо $\boldsymbol{q}$ его выражение (5), получим:

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \sum_{h=1}^{n} \theta_h \boldsymbol{u}_h\right) = \sum_{j,h=1}^{n} A(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_h)\, \theta_j \theta_h. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2. \tag{11}$$

Сопоставляя равенства (10) и (11), получаем для амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, с помощью которых по формуле (5) осуществляется переход к нормальным координатам, соотношения [2]):

$$A(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

---

[1]) В предыдущем параграфе эта формула была установлена лишь для случая, когда вековое уравнение не имеет кратных корней.

[2]) Другими словами, векторы $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ ортонормированы в $\boldsymbol{A}$-метрике (см. примечание 1 на стр. 236).

§ 42. Влияние периодических внешних сил на колебания консервативной системы

Пусть помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ на систему действуют некоторые силы $Q_i = Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Перейдем к нормальным координатам с помощью формул

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n; \ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0). \tag{1}$$

Силам Q_i в координатах q_i $(i = 1, \ldots, n)$ соответствуют силы Θ_j в координатах θ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Установим связь между Q_i и Θ_j, исходя из равенства выражений для элементарной работы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \,\delta\theta_j. \tag{2}$$

Замечая, что в силу формул (1)

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\,\delta\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

и подставляя эти выражения для δq_i в равенство (2), получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_i\right)\delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j\,\delta\theta_j. \tag{4}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при независимых приращениях нормальных координат $\delta\theta_j$, находим

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_i \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Таким образом, если «старые» координаты q_i выражаются через «новые» θ_j при помощи матрицы $U = \| u_{ij} \|$:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= u_{11}\theta_1 + u_{12}\theta_2 + \ldots + u_{1n}\theta_n, \\ q_1 &= u_{21}\theta_1 + u_{22}\theta_2 + \ldots + u_{2n}\theta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= u_{n1}\theta_1 + u_{n2}\theta_2 + \ldots + u_{nn}\theta_n \end{aligned}\right\} \qquad (q = U\theta, \ \det U \neq 0), \tag{6}$$

то «новые» обобщенные силы Θ_j выражаются через «старые» обобщенные силы Q_i при помощи транспонированной матрицы U':

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_1 = u_{11}Q_1 + u_{21}Q_2 + \ldots + u_{n1}Q_n,\\ \Theta_2 = u_{12}Q_1 + u_{22}Q_2 + \ldots + u_{n2}Q_n,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \Theta_n = u_{1n}Q_1 + u_{2n}Q_2 + \ldots + u_{nn}Q_n\end{array}\right\} \quad (\Theta = U'Q). \tag{7}$$

Сопоставляя матричные формулы $q = U\theta$ и $Q = (U')^{-1}\Theta$, мы видим, что при переходе от координат к силам матрица преобразования U заменяется[1]) матрицей $(U')^{-1}$.

Это обстоятельство выражают словами: *обобщенные силы преобразуются контравариантно по отношению к координатам*[2]).

После того как мы научились определять Θ_j по заданным Q_i, напишем уравнения Лагранжа в нормальных координатах, используя для T и Π выражения (4) из предыдущего параграфа:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2\theta_j = \Theta_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Обозначим через $\theta_j^* (j = 1, \ldots, n)$ произвольное частное решение уравнения (8). Тогда общее решение уравнения (8) будет

$$\theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^* \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Пусть $\Theta_j(t)$ — периодическая сила и притом синусоидальная с частотой Ω:

$$\Theta_j(t) = A_j \sin \Omega t. \tag{10}$$

Тогда, как нетрудно видеть, в качестве θ_j^* можно взять

$$\theta_j^* = \frac{A_j}{\omega_j^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \tag{11}$$

Если $Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, а следовательно, и $\Theta_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — произвольные периодические силы с перио-

---

1) Если $U = \| u_{ij} \|_1^n$ — ортогональная матрица, то $(U')^{-1} = U$ и силы преобразуются так же, как и координаты.

2) В общем случае, когда преобразование координат нелинейно, обобщенные силы преобразуются контравариантно по отношению к дифференциалам координат.

дом τ и частотой $\Omega=\frac{2\pi}{\tau}$, то $\Theta_j(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\Theta_j(t)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{jm}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm}) \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{12}$$

Тогда, в силу линейности уравнений (8),

$$\theta_j^*=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\omega_j^2-m^2\Omega^2}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm}) \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{13}$$

Если некоторое $m\Omega$ совпадает с ω_j и соответствующее $A_{jm}\neq 0$, то для координаты θ_j имеет место явление *резонанса*.

Подставляя выражения (9) для θ_j в формулу

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j,$$

получаем:

$$\boldsymbol{q}=\widehat{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{q}^*, \tag{14}$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{q}}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j) \tag{15}$$

— *свободные колебания*, а

$$\boldsymbol{q}^*=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^*\boldsymbol{u}_j$$

— *вынужденные колебания* системы, $\boldsymbol{u}_j$ — амплитудный вектор с координатами $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ $(j=1, \ldots, n)$.

§ 43. Экстремальные свойства частот консервативной системы. Теорема Релея об изменении частот с изменением инерции и жесткости системы. Наложение связей

В § 41 мы рассматривали линейное неособенное преобразование координат

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j, \tag{1}$$

или в скалярной записи

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \qquad (i=1, \ldots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0), \tag{1'}$$

осуществляющее переход к нормальным координатам $\theta_1, \ldots, \theta_n$, в которых квадратичные формы[1])

$$A(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k, \qquad C(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k \tag{2}$$

имеют простой («канонический») вид:

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\theta_j^2. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что главные колебания занумерованы так, что их частоты идут в возрастающем порядке

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n. \tag{4}$$

Рассмотрим отношение квадратичных форм (3)

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2 + \ldots + \omega_n^2\theta_n^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2} \tag{5}$$

при любом $q \neq 0$ или, что то же, при любых значениях $\theta_1, \ldots, \theta_n$, не равных одновременно нулю. Заменяя в числителе дроби (5) все ω_j^2 на меньшее или равное им число ω_1^2, найдем

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \geqslant \omega_1^2. \tag{6}$$

С другой стороны, из формулы (5) непосредственно видно, что при $\theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$ отношение $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ достигает

[1]) $C(q, q)$ — удвоенная потенциальная энергия, а $A(q, q)$ получается из выражения для удвоенной кинетической энергии $A(\dot{q}, \dot{q})$ заменой в нем $\dot{q}$ на q.

значения ω_1^2. Следовательно [1]),

$$\omega_1^2 = \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{7}$$

Наложим теперь на систему линейную однородную связь [2]):

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0\right). \tag{8}$$

Выражая здесь $q_1, q_2, \ldots, q_n$ через нормальные координаты с помощью преобразования (1), мы в нормальных координатах снова будем иметь линейную однородную связь

$$l_1'\theta_1 + l_2'\theta_2 + \ldots + l_n'\theta_n = 0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} l_j'^2 > 0\right). \tag{8'}$$

Связь (8) или (8′) будем сокращенно обозначать так:

$$L = 0.$$

Всегда можно найти такие значения θ_1 и θ_2, которые вместе с $\theta_3 = \ldots = \theta_n = 0$ удовлетворяют уравнению связи (8′). Для соответствующего q, согласно формуле (5),

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leqslant \omega_2^2.$$

---

[1]) Если мы на числовой оси отложим точки $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ и сосредоточим в этих точках массы $m_1 = \theta_1^2$, $m_2 = \theta_2^2, \ldots, m_n = \theta_n^2$, то, согласно формуле (5), величина $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ будет координатой центра этих масс. Отсюда сразу следуют соотношения (6) и (7), поскольку центр масс всегда расположен между крайними массами и совпадает с одной из крайних масс тогда, когда все остальные массы равны нулю.

[2]) Если дана нелинейная связь и положение равновесия удовлетворяет уравнению этой связи, то в разложении левой части уравнения связи в степенной ряд

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n + \sum_{i,k=1}^{n} l_{ik} q_i q_k + \ldots = 0$$

нет свободного члена. Кроме того, мы предполагаем, что линейные члены действительно имеются, т. е. что $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0$. Тогда, отбрасывая члены второго и более высокого порядков малости, мы представляем уравнение связи в виде (8).

Поэтому и[1])

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \omega_2^2. \tag{9}$$

Будем теперь варьировать связь $L=0$. Тогда левая часть в неравенстве (9) будет изменяться, оставаясь все время меньшей или равной ω_2^2. Но при связи $\theta_1=0$ (здесь $l_1'=1$, $l_2'=\ldots=l_n'=0$) отношение $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ задается формулой

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\frac{\omega_2^2\theta_2^2+\ldots+\omega_n^2\theta_n^2}{\theta_2^2+\ldots+\theta_n^2},$$

и потому [по аналогии с формулами (5) и (7)]

$$\min_{\theta_1=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\omega_2^2.$$

Таким образом, среди всех связей вида $L=0$ величина

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}$$

достигает своего наибольшего значения ω_2^2 при связи $\theta_1=0$. Следовательно,

$$\max \min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\omega_2^2. \tag{10}$$

Вместо одной связи $L=0$ можно накладывать на систему несколько связей $L_1=0, \ldots, L_{h-1}=0$. Аналогично тому, как это было сделано в частном случае одной связи, можно показать, что

$$\omega_h^2=\max \min_{\substack{L_1=0\\ \cdots\cdots\\ L_{h-1}=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \quad (h=2, \ldots, n). \tag{11}$$

Формулы (7) и (11) выражают экстремальные свойства частот консервативной системы. Эти свойства иногда называются *максиминимальными*.

---

[1]) Символ, стоящий в левой части неравенства (9), обозначает минимум отношения $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ при условии, что рассматриваются только векторы $q \neq 0$, удовлетворяющие уравнению связи (8).

Вместо формул (7) и (11) легко получить аналогичные формулы:

$$\omega_n^2 = \max \frac{C(q, q)}{A(q, q)}, \tag{7'}$$

$$\omega_{n-h}^2 = \min_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_h=0}} \max \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \quad (h = 1, \ldots, n-1). \tag{11'}$$

Экстремальные свойства главных частот, выражаемые равенствами (7') и (11'), иногда называют *минимаксимальными* [1]).

Наряду с данной системой рассмотрим еще одну консервативную систему с кинетической и потенциальной энергиями

$$\frac{1}{2}\tilde{A}(\dot{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad \frac{1}{2}\tilde{C}(q, q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{c}_{ik}q_iq_k \tag{12}$$

и с главными частотами

$$\tilde{\omega}_1 \leqslant \tilde{\omega}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\omega}_n. \tag{13}$$

Для этой системы

$$\tilde{\omega}_1^2 = \min \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}, \tag{14}$$

$$\tilde{\omega}_h^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_{h-1}=0}} \min \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)} \quad (h = 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Пусть *новая система имеет бóльшую жесткость при той же инерции,* т. е. при любом q

$$\tilde{A}(q, q) = A(q, q), \quad \tilde{C}(q, q) \geqslant C(q, q),$$

или *меньшую инерцию при той же жесткости*

$$\tilde{A}(q, q) \leqslant A(q, q), \quad \tilde{C}(q, q) = C(q, q).$$

В обоих случаях при любом $q \neq 0$

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}. \tag{16}$$

---

[1]) Экстремальные свойства частот были установлены немецкими математиками Е. Фишером [Monatshefte für Math. und Phys., 16 (1905), 234—249) и Р. Курантом [Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 2 (1922), 278—285].

Но тогда и минимумы и максиминимумы этих отношений будут связаны между собой таким же неравенством, т. е. из неравенства (16), в силу формул (7), (11), (14) и (15), следует:

$$\omega_j \leqslant \tilde{\omega}_j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

При этом хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак $<$, если только не выполняется тождество[1])

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}. \tag{18}$$

Мы пришли к теореме Релея[2]):

При увеличении жесткости системы или уменьшении ее инерции главные частоты увеличиваются[3]).

Выясним, как влияет наложение связей на величины главных частот $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n$ консервативной системы.

Наложим на систему s независимых линейных связей

$$\widehat{L}_1 = 0, \ \widehat{L}_2 = 0, \ \ldots, \ \widehat{L}_s = 0.$$

Пусть полученная таким образом консервативная система с $n - s$ степенями свободы имеет главные частоты $\omega_1^* \leqslant \omega_2^* \leqslant \ldots \leqslant \omega_{n-s}^*$. При этом

$$\omega_1^{*2} = \min_{\substack{\widehat{L}_1 = 0 \\ \cdots \\ \widehat{L}_s = 0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{19}$$

Сопоставляя формулу (19) с формулами (7) и (11) (при $h - 1 = s$), находим:

$$\omega_1 \leqslant \omega_1^* \leqslant \omega_{s+1}. \tag{20}$$

---

[1]) Действительно, согласно формуле (5), в случае $\omega_j = \tilde{\omega}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ имеет место тождество (18).

[2]) Эта теорема была установлена английским физиком Релеем в 1873 г. (Релей Дж. В., Теория звука, М., 1955, т. I, § 88).

[3]) В первом случае по разности $\tilde{C}(q, q) - C(q, q)$, а во втором — по разности $\tilde{A}(q, q) - A(q, q)$ можно оценить, насколько увеличиваются главные частоты (см. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, 1950, гл. 3, § 10).

Точно так же при любом $h \leqslant n-s$

$$\omega_h^{*2} = \max_{\substack{\widehat{L}_1=0,\ \ldots,\ \widehat{L}_s=0,\\ L_1=0,\ \ldots,\ L_{h-1}=0}} \min \frac{C(q,\ q)}{A(q,\ q)}. \tag{21}$$

Здесь связи $\widehat{L}_1=0,\ \ldots,\ \widehat{L}_s=0$ фиксированы, а варьируются связи $L_1=0,\ \ldots,\ L_{h-1}=0$. Сопоставляя равенства (21) с равенствами (11) и с формулой

$$\omega_{h+s}^2 = \max \min_{\substack{L_1=0\\ \cdots\cdots\\ L_{h+s-1}=0}} \frac{C(q,\ q)}{A(q,\ q)},$$

в которой варьируются все $s+h-1$ связей, будем иметь

$$\omega_h \leqslant \omega_h^* \leqslant \omega_{h+s} \qquad (h=1,\ \ldots,\ n-s). \tag{22}$$

Формулы (22) показывают, что *при наложении s независимых связей каждая из первых $n-s$ главных частот увеличивается, не превосходя при этом старую главную частоту, номер которой на s единиц больше номера данной частоты.*

1. В качестве приложения последнего предложения можно показать, что корни $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ векового уравнения $\Delta(\lambda) \equiv \det(c_{ik}-\lambda a_{ik})_{i,\,k=1}^{n}=0$ разделяются корнями $\lambda_1^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^*$ уравнения

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \det(c_{ik}-\lambda a_{ik})_{i,\,k=1}^{n-1}=0\ ^{1)},$$

т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1^* \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^* \leqslant \lambda_n. \tag{23}$$

Действительно, уравнение $\Delta_1(\lambda)=0$ является вековым уравнением для консервативной системы, получающейся из исходной наложением одной связи $q_n=0$. Поэтому, полагая $\lambda_k=\omega_k^2$ $(k=1,\ldots,n)$, $\lambda_j^*=\omega_j^{*2}$ $(j=1,\ \ldots,\ n-1)$, мы сразу из неравенств (22) получаем неравенства (23) при $s=1$.

---

[1]) $\Delta_1(\lambda)$ — главный минор $(n-1)$-го порядка в определителе $\Delta(\lambda)$. Иногда говорят, что неравенства (23) выражают «теорему разделения» для корней векового уравнения. Неравенства (23) могут быть использованы для нахождения нижних и верхних границ корней векового уравнения (см., например, Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958, стр. 106—107).

2. Укажем еще на одно любопытное применение предложения об изменении частот при наложении связей. Известно, что наличие трещины в стакане определяют, постукивая о стакан пальцами. Это связано с тем, что у стакана без трещины по сравнению со стаканом с трещиной имеются дополнительные связи между его частями. Поэтому у стакана без трещины частоты колебаний должны быть более высокими.

§ 44. Малые колебания упругих систем

В качестве важного примера малых колебаний консервативной системы рассмотрим n масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сосредоточенных в n точках (1), (2), ..., (n) упругой системы S (струны, стержня, мембраны, пластины и т. д.), имеющей конечные размеры и каким-либо образом закрепленной на краях.

Будем предполагать, что перемещения (прогибы) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ точек (1), (2), ..., (n) системы S и действующие на массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ параллельны одному и тому же направлению и потому определяются своими алгебраическими величинами (рис. 50). Прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно рассматривать как независимые координаты системы, а силы $F_1, F_2, \ldots \ldots, F_n$ — как соответствующие обобщенные силы, так как элементарная работа этих сил равна

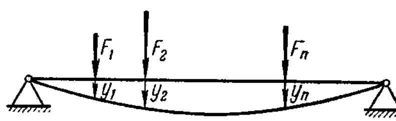

Рис. 50.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, dy_i.$$

При исследовании свободных колебаний мы в качестве сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ берем упругие силы $F_1^*, \ldots, F_n^*$, действующие на массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ со стороны упругой системы S при наличии прогибов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Рассматриваемая система n материальных точек, находящихся под воздействием упругих сил, является консервативной и имеет определенную потенциальную энергию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Разлагая функцию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в степенной ряд и сохраняя в этом ряду только квадратичные члены (см. § 40), получаем для Π выражение

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k \qquad (c_{ik} = c_{ki},\ i,\ k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда для упругих сил $F_i^* = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ находим

$$F_i^* = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Считая положение равновесия $y_1 = \ldots = y_n = 0$ устойчивым, принимаем, что *квадратичная форма* (1), *выражающая потенциальную энергию как функцию прогибов, является положительно определенной:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0\right). \tag{3}$$

Кинетическая энергия системы имеет простой вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^2. \tag{4}$$

В поисках гармонического колебания $y_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$ (как это мы делали в § 40) приходим к уравнению частот

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1\lambda & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - m_2\lambda & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - m_n\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2) \tag{5}$$

и алгебраическим уравнениям для определения амплитуд

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda m_i \delta_{ik}) u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Система имеет n частот

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \tag{7}$$

и соответствующие амплитудные столбцы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$; свободные колебания определяются формулой

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \tag{8}$$

где C_j и α_j $(j = 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Пусть внешние силы $F_1, \ldots, F_n$ вызывают статические прогибы $y_1, \ldots, y_n$. Тогда силы F_i уравновешиваются упругими силами F_i^* $(F_i = -F_i^*;\ i = 1, \ldots, n)$, и потому, согласно равенствам (2),

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

При исследовании упругих систем большую роль играет матрица $G = \| g_{ik} \|_1^n$, обратная[1]) для матрицы $C = \| c_{ik} \|_1^n$:

$$G = C^{-1}.$$

[1]) Матрица C не является особенной ($\det C \neq 0$), так как квадратичная форма (3) является положительно определенной.

С помощью матрицы G можно разрешить систему соотношений (9) относительно прогибов $y_1, \ldots, y_n$ и представить ее в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} F_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Величина g_{ik} равна прогибу в точке (i), вызванному единичной внешней силой, приложенной в точке (k), и называется *коэффициентом влияния* точки (k) на точку (i) $(i, k = 1, \ldots, n)$. Из симметричности матрицы C следует симметричность обратной матрицы G, составленной из коэффициентов влияния [1])

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

а из положительной определенности формы (3) следует положительная определенность квадратичной формы

$$G(F, F) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2 > 0\right), \tag{12}$$

поскольку квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k$ переходит в форму (12) при преобразовании переменных (10):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i y_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k. \tag{13}$$

Рассмотрим *линейную* упругую систему S — струну или стержень при обычных закреплениях концов. Можно показать, что в этом случае матрица коэффициентов влияния G обладает следующими свойствами.

1°. Все миноры (не только главные!) любого порядка матрицы G неотрицательны:

$$\begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & \cdots & g_{i_1 k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i_p k_1} & \cdots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

$$(0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n;\ 0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_p \leqslant n;\ p = 1, \ldots, n).$$

2°. $g_{ik} > 0$ при $|i - k| \leqslant 1$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

3°. Определитель $\det G = |g_{ik}|_1^n > 0$.

Матрицы, обладающие свойствами 1°, 2° и 3°, называются *осцилляционными*.

---

[1]) Равенство (11) выражает так называемый принцип *взаимности Максвелла*: «прогиб в точке (i) под действием единичной силы, приложенной к точке (k), равен прогибу в точке (k) под действием единичной силы, приложенной в точке (i)».

Заметим, что для всякой положительно определенной матрицы G выполняются свойство 3°, а также неравенства 1° для главных миноров и неравенства 2° для диагональных элементов g_{ii} $(i=1, \ldots, n)$. Однако неотрицательность неглавных миноров любого порядка p [1]) и положительность элементов $g_{12}, \ldots, g_{n-1,\,n}$ представляют собой специфические свойства матрицы коэффициентов влияния линейной упругой системы.

Из осцилляционности матрицы коэффициентов влияния вытекают следующие основные «осцилляционные» свойства упругих колебаний линейной системы.

1°. Все частоты различны:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n.$$

2°. Все амплитуды $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}$ в первом главном колебании (с частотой ω_1) отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

3°. Среди амплитуд $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ в j-м главном колебании (с частотой ω_j) имеется ровно $j-1$ перемен знака ($j=1, 2, \ldots, n$) рис. 51).

Исследование осцилляционных матриц и обоснование осцилляционных свойств упругих колебаний выходит за рамки настоящей книги [2]).

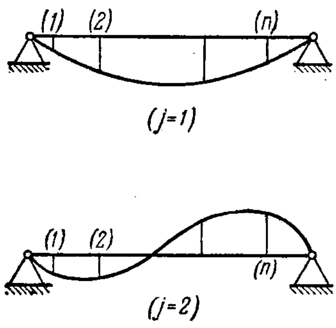

Рис. 51.

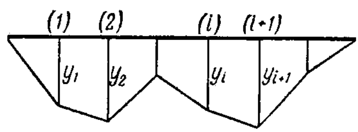

Рис. 52.

Пример. Рассмотрим классическую задачу о колебании струны конечной длины l с закрепленными концами в случае, когда вся масса струны сосредоточена в n равноудаленных (между собой и от концов) точках, причем сосредоточенные массы равны между собой (и равны m) (рис. 52).

Удлинение i-го участка (между точками с прогибами y_i и y_{i+1}) выразится (с точностью до малых четвертого порядка) следующим

[1]) В частности, неотрицательность недиагональных элементов матрицы G ($g_{ik} \geq 0$ при $i \neq k$).

[2]) Читатель найдет этот материал в книге: Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, М., 1950.

образом:

$$\sqrt{\left(\frac{l}{n+1}\right)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}-\frac{l}{n+1}=$$

$$=\frac{l}{n+1}\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{l}\right)^2(y_{i+1}-y_i)^2}-1\right)\approx\frac{n+1}{2l}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

Считая натяжение струны σ постоянным [1], получаем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi=\frac{c}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2 \qquad \left(y_0=y_{n+1}=0; \qquad c=\frac{\sigma(n+1)}{l}\right). \tag{14}$$

Кинетическая энергия имеет простой вид:

$$T=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2. \tag{15}$$

Для нахождения главных частот и соответствующих амплитудных векторов изберем косвенный путь [2]. Напишем уравнения (6) для амплитуд, используя выражения (14) и (15) для Π и T. Каждое из полученных уравнений (6) разделим почленно на c и введем сокращенное обозначение:

$$1-\frac{m}{2c}\omega^2=\cos\theta, \tag{16}$$

где θ — вспомогательная величина. Тогда уравнения (6) для амплитуд примут следующий вид:

$$u_{k-1}-2u_k\cos\theta+u_{k+1}=0 \qquad (k=1, \ldots, n), \tag{17}$$

где

$$u_0=u_{n+1}=0. \tag{18}$$

Алгебраическим уравнениям (6) можно удовлетворить, положив [3]

$$u_k=\sin k\theta \qquad (k=0, 1, \ldots, n+1). \tag{19}$$

При этом первое из «граничных» условий (18) удовлетворяется автоматически, а второе дает условие для определения искомых частот:

$$\sin(n+1)\theta=0. \tag{20}$$

---

[1]) Это предположение оправдано тем, что рассматриваются только малые прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

[2]) См. Крейн М. Г., Математический сборник, т. 40, 1933, стр. 455—466.

[3]) При подстановке выражения (19) в уравнения (17) получаем тригонометрические тождества

$$\sin(k-1)\theta-2\sin k\theta\cos\theta+\sin(k+1)\theta=0 \qquad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Отсюда $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$ $(j=1, \ldots, n)$ и, следовательно, согласно равенству (16),

$$\omega_j^2 = \frac{2c}{m}(1-\cos\theta_j),$$

т. е.

$$\left.\begin{gathered}\omega_j = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{\theta_j}{2} = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\\ \left(j=1, \ldots, n;\ c=\frac{(n+1)\sigma}{l}\right).\end{gathered}\right\} \tag{21}$$

Для нахождения амплитуд j-го главного колебания $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ полагаем в равенствах (19) $\theta=\theta_j$:

$$u_{kj} = \sin k\theta_j = \sin\frac{kj\pi}{n+1} \qquad (k,\ j=1, \ldots, n). \tag{22}$$

Произвольное свободное колебание системы определяется формулой

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j u_{kj}\sin(\omega_j t+\alpha_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} C_j \sin\frac{kj\pi}{n+1}\sin\left(2\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}\,t+\alpha_j\right). \tag{23}$$

Из формул (21) и (22) сразу видно, что полученные главные колебания обладают осцилляционными свойствами 1°—3°.

Лагранж показал, как из найденных формул предельным переходом можно получить свободные колебания однородной струны (с закрепленными концами), масса которой уже не сконцентрирована в n точках, а распределена равномерно вдоль струны, имеющей плотность ρ.

Полагая в рассмотренной задаче $m=\frac{\rho l}{n}$, находим дискретный аналог для однородной струны с главными частотами

$$\omega_j^{(n)} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}n(n+1)}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)} \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{24}$$

В пределе при $n\to\infty$ получим для частот ω_j однородной закрепленной струны известные выражения:

$$\omega_j = j\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{25}$$

Эти формулы выражают закон Мерсенна, согласно которому *все частоты являются целыми кратными частоты основного тона*

$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ *и каждая из частот прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения и обратно пропорциональна длине и корню квадратному из плотности.*

Представим j-е гармоническое колебание однородной струны в виде

$$y_j(x, t) = u_j(x)\sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{26}$$

где $u_j(x)$ — амплитудный прогиб в этом колебании.

Считая, что амплитудный прогиб $u_j(x)$ может быть получен из величин (22) предельным переходом

$$u_j(x) = \lim u_{kj}$$

при $n \to \infty$ и $\frac{kl}{n+l} \to x$, мы из формулы (22) найдем:

$$u_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{l} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Тогда свободное колебание однородной струны, которое получается линейной суперпозицией главных колебаний (26), выразится формулой

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin\frac{j\pi x}{l}\sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

где C_j и α_j ($j = 1, 2, \ldots$) — произвольные постоянные.

§ 45. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени

Напишем уравнения Лагранжа для склерономной системы в случае, когда обобщенные силы Q_i зависят только от координат и скоростей:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть начало координат является положением равновесия. Тогда (см. § 40) кинетическая энергия с точностью до членов третьего порядка малости относительно q_i и $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) может быть представлена квадратичной формой с постоянными коэффициентами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, \ldots, n$).

Разложим теперь обобщенные силы $Q_i(q_k, \dot{q}_k)$ в степенные ряды относительно q_k и $\dot{q}_k$:

$$Q_i = Q_{i0} + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0 \dot{q}_k\right] + (**). \qquad (3)$$

Так как начало координат является положением равновесия, то при нулевых координатах и скоростях все обобщенные силы должны равняться нулю, т. е.

$$Q_{i0} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{ik} = -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0, \qquad c_{ik} = -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n). \qquad (5)$$

После этого, отбрасывая в разложении (3) все члены второго и более высокого порядков малости, будем иметь:

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (6)$$

Подставляя в уравнения Лагранжа (1) выражения (2) и (6) для кинетической энергии и для обобщенных сил, получим линейные дифференциальные уравнения движения для малых колебаний склерономной системы

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (7)$$

Обозначим через $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ квадратные матрицы[1])

$$\boldsymbol{A} = \| a_{ik} \|_1^n, \quad \boldsymbol{B} = \| b_{ik} \|_1^n, \quad \boldsymbol{C} = \| c_{ik} \|_1^n,$$

а через $\boldsymbol{q}$ — столбец из $q_1, \ldots, q_n$. Тогда система дифференциальных уравнений (7) в матричной записи будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = 0. \qquad (8)$$

Будем искать решение системы (8) вида

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}e^{\mu t}, \qquad (9)$$

[1]) Заметим, что $\boldsymbol{A}$ — положительно определенная симметрическая матрица (это обстоятельство здесь не используется).

где $\boldsymbol{u}$ — столбец с постоянными элементами $u_1, \ldots, u_n$, а μ — число.

Подставляя выражение (9) в матричное уравнение (8) и сокращая на $e^{\mu t}$, получаем:

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{10}$$

или в развернутой записи

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\,u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10'}$$

Для того чтобы система (10) или (10′) имела ненулевое решение $\boldsymbol{u}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\Delta(\mu) \equiv \det(A\mu^2 + B\mu + C) = 0, \tag{11}$$

или в развернутом виде

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\mu^2 + b_{11}\mu + c_{11} & \ldots & a_{1n}\mu^2 + b_{1n}\mu + c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\mu^2 + b_{n1}\mu + c_{n1} & \ldots & a_{nn}\mu^2 + b_{nn}\mu + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{11'}$$

Уравнение (11) называется *вековым уравнением* для данной системы. Это алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно μ.

Ограничимся рассмотрением только основного случая, когда все корни векового уравнения $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$ различны между собой. Каждому корню μ_h соответствует некоторое ненулевое решение $\boldsymbol{u}_h \equiv (u_{1h}, \ldots, u_{nh})$ системы однородных алгебраических уравнений (10) и, следовательно, частное решение $\boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}$ системы дифференциальных уравнений (8) $(h = 1, \ldots, 2n)$. Общее решение этой системы дифференциальных уравнений получится как линейная комбинация (с произвольными постоянными коэффициентами) этих частных решений:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}. \tag{12}$$

Особо важным является тот случай, когда все вещественные части корней μ_h отрицательны:

$$\operatorname{Re}\mu_h < 0 \qquad (h = 1, \ldots, 2n).$$

В этом случае положение равновесия системы является асимптотически устойчивым не только для линеаризированной системы (8), но и для исходной нелинейной склерономной системы с дифференциальными уравнениями (1) (см. § 38).

В заключение отметим, что для консервативной системы $B=\|b_{ik}\|_1^n=0$, а $A=\|a_{ik}\|_1^n$ и $C=\|c_{ik}\|_1^n$ — симметрические положительно определенные матрицы. Вековое уравнение $\det(A\mu^2+C)=0$ переходит в уравнение $\det(C-\lambda A)=0$ из § 40, если положить $\mu=i\sqrt{\lambda}$ $(i=\sqrt{-1})$. Но, как было показано в § 40, уравнение $\det(C-\lambda A)=0$ имеет только положительные и вещественные корни. Поэтому уравнение (11) в случае консервативной системы имеет чисто мнимые корни.

§ 46. Диссипативная функция Релея. Влияние малых диссипативных сил на колебания консервативной системы

Отметим важный частный случай, когда асимптотическая устойчивость положения равновесия предопределена и нет необходимости прибегать к критериям устойчивости, изложенным в § 39.

Пусть в выражениях для обобщенных сил [см. равенство (6) на стр. 260]

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k-\sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

составленные из коэффициентов *матрицы* $B=\|b_{ik}\|_1^n$ и $C=\|c_{ik}\|_1^n$ *являются симметрическими и положительно определенными.*

Тогда, вводя в рассмотрение потенциальную энергию Π и диссипативную функцию Релея R (см. § 8), которые задаются положительно определенными квадратичными формами

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k>0, \qquad R=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k>0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2>0,\quad \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0\right), \tag{2}$$

мы формулы (1) перепишем так:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

На систему, помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, действуют еще диссипативные силы $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$, определяемые функцией Релея. В § 8 было выяснено, что в этом случае система является определенно-диссипативной. Так как, согласно первой из формул (2), потенциальная энергия в положении равновесия имеет строгий минимум и положение равновесия является изолированным, то (см. теорему на стр. 202) положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Таким образом, диссипативные силы, определяемые функцией Релея, не только не нарушают устойчивости положения равновесия консервативной системы, но и делают (в некоторых случаях) это положение асимптотически устойчивым.

В рассматриваемом случае можно установить простые формулы для оценки корней векового уравнения. Будем снова искать решение вида $ue^{\mu t}$. Для определения столбца u получаем уравнение [см. стр. 261]

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\, u = 0, \tag{4}$$

или в развернутой записи

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\, u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4'}$$

Умножая обе части i-го уравнения (4′) на $\bar{u}_i$ ($\bar{u}_i$ — величина, комплексно сопряженная с u_i) и суммируя по i, находим

$$\mu^2 \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\bar{u}_i u_k + \mu \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}\bar{u}_i u_k + \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}\bar{u}_i u_k = 0,$$

или в сокращенных обозначениях

$$A(u,\ \bar{u})\,\mu^2 + B(u,\ \bar{u})\,\mu + C(u,\ \bar{u}) = 0, \tag{5}$$

где $A(u,\ \bar{u}) > 0$, $B(u,\ \bar{u}) > 0$ и $C(u,\ \bar{u}) > 0$[1]).

---

[1]) См. 5° на стр. 235.

Таким образом, любой корень μ векового уравнения удовлетворяет квадратному уравнению (5) с положительными коэффициентами. Отсюда сразу следует, что $\operatorname{Re}\mu < 0$.

Если вековое уравнение имеет комплексный корень $\mu = \gamma + i\delta$, то это же уравнение имеет и комплексно сопряженный корень $\bar{\mu} = \gamma - i\delta$. Числа μ и $\bar{\mu}$ — корни квадратного уравнения (5). Поэтому, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$, $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — вещественные векторы-столбцы), можно написать [1]):

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\mu = \mu + \bar{\mu} &= -\frac{B(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})} = -\frac{B(v, v) + B(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)} < 0, \\ |\mu|^2 = \mu\bar{\mu} &= \frac{C(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})} = \frac{C(v, v) + C(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Комплексно сопряженным корням μ и $\bar{\mu}$ соответствуют комплексно сопряженные колебания $\boldsymbol{u}e^{\mu t}$ и $\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t}$. Сумму соответствующих членов в выражении для $\boldsymbol{q}$ [см. формулу (12) на стр. 261] можно привести к вещественному виду при комплексно сопряженных значениях произвольных постоянных $C = \frac{1}{2}(F + iG)$, $\bar{C} = \frac{1}{2}(F - iG)$:

$$C\boldsymbol{u}e^{\mu t} + \bar{C}\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t} = \frac{1}{2}(F + iG)(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w})\, e^{(\gamma+i\delta)t} + \frac{1}{2}(F - iG)(\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w})\, e^{(\gamma-i\delta)t} =$$

$$= \operatorname{Re}\{[F\boldsymbol{v} - G\boldsymbol{w} + i(F\boldsymbol{w} + G\boldsymbol{v})]\, e^{\gamma t}(\cos\delta t + i\sin\delta t)\} =$$

$$= e^{\gamma t}[(F\boldsymbol{v} - G\boldsymbol{w})\cos\delta t - (F\boldsymbol{w} + G\boldsymbol{v})\sin\delta t]. \quad (7)$$

Если мы имеем два вещественных корня μ и μ' и соответствующие им столбцы обозначим через $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, то, умножая обе части i-го уравнения (4′) на u_i' (вместо $\bar{u}_i$), получаем вместо равенства (5) следующее равенство:

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu^2 + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu + C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = 0. \quad (8)$$

---

[1]) См. формулу (20) на стр. 235.

Меняя ролями векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, заключаем, что число μ' также удовлетворяет уравнению (8). Поэтому

$$\mu+\mu'=-\frac{B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}, \quad \mu\mu'=\frac{C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}. \tag{9}$$

Посмотрим теперь, как изменяются главные колебания консервативных систем под действием малых диссипативных сил[1]). Введем нормальные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_n$. В этих координатах

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_i^2, \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\theta_i^2, \tag{10}$$

$$R=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\dot{\theta}_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\(i\neq k)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_k, \tag{11}$$

где ω_i $(i=1, \ldots, n)$ — главные частоты консервативной системы, а коэффициенты в выражении (11) для функции Релея β_i, β_{ik} $(i, k=1, \ldots, n;\ \beta_{ik}=\beta_{ki}$ при $i\neq k)$ малы (квадратами и произведениями этих величин можно пренебрегать). Из положительной определенности квадратичной формы (11) следует, что $\beta_i>0$ $(i=1, \ldots, n)$.

Составим уравнения Лагранжа

$$\ddot{\theta}_i+\beta_i\dot{\theta}_i+\omega_i^2\theta_i+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_k=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{12}$$

Подставляя сюда

$$\theta_i=\varkappa_i e^{\mu t} \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{13}$$

и сокращая на $e^{\mu t}$, получаем систему линейных уравнений

$$(\mu^2+\beta_i\mu+\omega_i^2)\varkappa_i+\mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\varkappa_k=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{14}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, найдем вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu^2+\beta_1\mu+\omega_1^2 & \beta_{12}\mu & \ldots & \beta_{1n}\mu \\ \beta_{21}\mu & \mu^2+\beta_2\mu+\omega_2^2 & \ldots & \beta_{2n}\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1}\mu & \beta_{n2}\mu & \ldots & \mu^2+\beta_n\mu+\omega_n^2 \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

---

[1]) См. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М. — Л., 1937, § 94.

Раскрывая этот определитель и отбрасывая члены, содержащие произведения малых коэффициентов β_i, β_{ik}, представим вековое уравнение в следующем виде:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mu^2+\beta_k\mu+\omega_k^2)=0. \tag{16}$$

Корни векового уравнения в первом приближении имеют вид

$$\mu_k\approx-\frac{\beta_k}{2}\pm i\omega_k \qquad (k=1, \ldots, n). \tag{17}$$

Найдем амплитуды $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ для $\mu=\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$. Подставив это значение μ в коэффициенты последних $n-1$ уравнений (14) и разделив левые части уравнений на μ_1, получим:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{21}\varkappa_1+\left(\beta_2-\beta_1+\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\varkappa_2+\ldots+\beta_{2n}\varkappa_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_{n1}\varkappa_1+\beta_{n2}\varkappa_2+\ldots+\left(\beta_n-\beta_1+\dfrac{\omega_n^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\varkappa_n=0.\end{array}\right\} \tag{18}$$

Из этой системы определяем отношение $\frac{\varkappa_k}{\varkappa_1}$ $(k=2, \ldots, n)$, отбрасывая члены второго и более высокого порядков малости (относительно β_i, β_{ik}):

$$\frac{\varkappa_k}{\varkappa_1}=i\varepsilon_k, \quad \varepsilon_k=-\frac{\beta_{k1}\omega_1}{\omega_k^2-\omega_1^2} \qquad (k=2, \ldots, n). \tag{19}$$

Формулы (19) показывают, что ε_k — малые вещественные величины $(k=2, \ldots, n)$. Корню $\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ соответствует «комплексное колебание» (полагаем $\varkappa_1=Ae^{i\alpha}$, $A>0$):

$$\theta_1=\varkappa_1e^{\mu_1 t}=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i(\omega_1t+\alpha)}, \quad \theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{20}$$
$$(k=2, \ldots, n).$$

Взяв линейную комбинацию из данного и комплексно сопряженного колебания, получим «главное» колебание, соответствующее корням

$$\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1 \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_1=-\frac{\beta_1}{2}-i\omega_1:$$

$$\theta_1=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin(\omega_1t+\alpha), \quad \theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \tag{21}$$
$$(k=2, \ldots, n).$$

Аналогичные выражения мы получим и для других главных колебаний.

Таким образом, *в первом приближении:* 1) *малые диссипативные силы не изменяют частот консервативной системы;* 2) *при этих силах колебания затухают при* $t \to \infty$; 3) *в* j-*м главном колебании все координаты малы по сравнению с* j-*й координатой и отличаются от нее по фазе на четверть периода* $(j = 1, \ldots, n)$.

§ 47. Влияние внешней силы, зависящей от времени, на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика

Пусть дополнительно к тем силам, о которых шла речь в § 45, на склерономную систему действуют еще силы $Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда уравнения Лагранжа для малых колебаний системы будут отличаться от уравнений (7) на стр. 260 только наличием ненулевых правых частей

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = Q_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Общее решение этой неоднородной системы дифференциальных уравнений представляется в виде

$$q = \sum_{h=1}^{2n} C_h u_h e^{\mu_h t} + q^*, \tag{2}$$

где первое слагаемое представляет собой общее решение соответствующей однородной системы, а q^* — некоторое частное решение системы (1).

Мы предполагаем, что положение системы $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия, т. е. что $\mathrm{Re}\,\mu_h < 0$ $(h = 1, \ldots, 2n)$. Тогда первое слагаемое стремится к нулю при $t \to \infty$[1]) и при достаточно больших t общее решение q неоднородной системы практически совпадает с q^*. Поэтому мы в дальнейшем будем интересоваться только «вынужденными колебаниями» q^*, которые будем обозначать просто через q.

---

[1]) Если вековое уравнение имеет кратные корни, то в сумме, стоящей в правой части равенства (2), могут появиться вековые члены вида $C_h(u_h + u_h' t + u_h'' t^2 + \ldots)e^{\mu_h t}$. Однако и в этом случае сумма стремится к нулю при $t \to \infty$, если все $\mathrm{Re}\,\mu_h < 0$.

Поскольку система дифференциальных уравнений (1) линейна, то общий случай отыскания вынужденных колебаний сводится (за счет линейной суперпозиции частных решений) к тому случаю, когда только одна из обобщенных сил $Q_i(t)$ отлична от нуля.

Пусть, например, $Q_1(t) \neq 0$, а $Q_j(t) = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$. Кроме того, допустим сначала, что $Q_1(t)$ — гармоническая сила, т. е.

$$Q_1(t) = Ae^{i\Omega t}. \tag{3}$$

Тогда дифференциальные уравнения (1) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} (a_{1k}\ddot{q}_k + b_{1k}\dot{q}_k + c_{1k}q_k) = Ae^{i\Omega t}, \\ &\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0 \quad (j = 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Будем искать вынужденные колебания в виде

$$q_k = B_k e^{i\Omega t} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Подставляя эти выражения для q_k $(k = 1, \ldots, n)$ в дифференциальные уравнения (4) и сокращая на $e^{i\Omega t}$, получаем для определения величин B_k систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} [a_{1k}(i\Omega)^2 + b_{1k}(i\Omega) + c_{1k}]\, B_k = A, \\ &\sum_{k=1}^{n} [a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk}]\, B_k = 0. \\ &\qquad (j = 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим для $k = 1, \ldots, n$:

$$B_k = W_{1k}(i\Omega)\, A, \tag{7}$$

где

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)} \tag{8}$$

— правильная дробно-рациональная функция от $i\Omega$ с вещественными коэффициентами; годограф этой функции в комплексной плоскости, а иногда и сама функция, носит название *частотной* или *амплитудно-фазовой характеристики*.

Тогда «отклик» координаты q_k на внешнее воздействие $Q_1 = Ae^{i\Omega t}$ получается умножением этого воздействия на частотную характеристику $W_{ik}(i\Omega)$:

$$q_k = W_{1k}(i\Omega)\, Ae^{i\Omega t}. \tag{9}$$

Полагая

$$W_{1k}(i\Omega) = R_{1k}(\Omega)\, e^{i\Psi_{1k}(\Omega)} \qquad [R_{1k}(\Omega) > 0] \tag{10}$$

$[R_{1k}(\Omega)$ — *амплитудная*, $\Psi_{1k}(\Omega)$ — *фазовая* характеристика], перепишем формулу (9) следующим образом:

$$q_k = R_{1k}(\Omega)\, Ae^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Пусть теперь

$$Q_1 = A \sin \Omega t, \tag{12}$$

т. е.

$$Q_1 = \frac{A}{2i}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right).$$

Соответствующий отклик будет [1])

$$q_k = \frac{1}{2i} R_{1k}(\Omega)\, A \left\{e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} - e^{-i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]}\right\},$$

т. е.

$$q_k = R_{1k}(\Omega)\, A \sin\,[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]. \tag{13}$$

Другими словами, *при переходе от синусоидальной силы* (12) *к соответствующему отклику, т. е. синусоидальному вынужденному колебанию* (13), *амплитуда силы умножается на амплитудную характеристику* $R_{1k}(\Omega)$, *а смещение фазы определяется фазовой характеристикой* $\Psi_{1k}(\Omega)$, *взятой для того же значения* Ω.

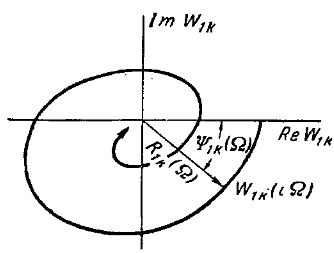

Рис. 53.

На рис. 53 изображена амплитудно-фазовая характеристика $W_{1k}(i\Omega)$ $(0 < \Omega < \infty)$. Если для данного Ω соответствующее $R_{1k}(\Omega)$ очень мало, то амплитуда отклика весьма мала по сравнению с амплитудой «возбуждения» $A \sin \Omega t$

---

[1]) Так как $W_{1k}(i\Omega)$ и $W_{1k}(-i\Omega)$ — комплексно сопряженные числа, то $R_{1k}(-\Omega) = R_{1k}(\Omega)$ и $\Psi_{1k}(-\Omega) = -\Psi_{1k}(\Omega)$.

данной частоты Ω. Наоборот, если при данном Ω соответствующее $R_{1k}(\Omega)$ очень велико, то амплитуда отклика велика по сравнению с амплитудой обобщенной силы Q_1. Таким образом, подбирая систему с надлежащими амплитудными характеристиками, мы можем гасить колебания на одних диапазонах частот и увеличивать амплитуды этих колебаний на других частотах. Это и есть принцип устройства *фильтров*.

Так как $W(i\Omega)$ — правильная дробно-рациональная функция и потому $W(i\Omega)\to 0$ при $\Omega\to\infty$, то любая система практически пропускает только конечный диапазон частот.

Пусть теперь $Q_1(t)$ — произвольная периодическая функция, задаваемая рядом Фурье

$$Q_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(m\Omega t+\varphi_m). \tag{14}$$

Складывая отклики на отдельные гармоники этого ряда, получаем

$$q_k=\sum_{m=0}^{\infty} R_{1k}(m\Omega)\,A_m \sin[m\Omega t+\varphi_m+\Psi_{1k}(m\Omega)] \tag{15}$$

$$(k=1,\ \ldots,\ n).$$

Пусть теперь $Q_1(t)$ — произвольная непериодическая функция $f(t)$ от t, которую можно представить в виде интеграла Фурье[1])

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t}\,d\Omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\Omega t}\,dt. \tag{16}$$

Полагая

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\Omega t}dt, \tag{17}$$

будем иметь

$$Q_1=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega. \tag{18}$$

---

[1]) См., например, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 24, § 3.

Функция $F(\Omega)$ называется *комплексным спектром* функции $Q_1 = f(t)$.

Воздействие

$$\frac{1}{2\pi} F(\Omega)\, d\Omega\, e^{i\Omega t}$$

вызовет отклик

$$\frac{1}{2\pi} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega)\, d\Omega\, e^{i\Omega t}.$$

Поэтому, основываясь на принципе линейной суперпозиции откликов, найдем:

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega) e^{i\Omega t}\, d\Omega \tag{19}$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

т. е. комплексный спектр $W_{1k}(i\Omega) F(\Omega)$ для координаты q_k получается умножением комплексного спектра воздействия $Q_1(t)$ на соответствующую частотную характеристику системы $W_{1k}(i\Omega)$.

Пусть при $t < 0$ система находится в покое и движение системы при нулевых начальных условиях вызвано только внешним воздействием $Q(t) \neq 0$ при $t > 0$. Представляя комплексный спектр отклика в виде

$$F(\Omega) W_{1k}(i\Omega) = G(\Omega) + iH(\Omega), \tag{20}$$

согласно формуле (19) будем иметь

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) + iH(\Omega)] [\cos \Omega t + i \sin \Omega t]\, d\Omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t]\, d\Omega +$$
$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \sin \Omega t + H(\Omega) \cos \Omega t]\, d\Omega.$$

Так как $q_k(t)$ — вещественная функция, то второе слагаемое в правой части равно нулю [1]) и поэтому

$$q_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t - H(\Omega)\sin\Omega t]\, d\Omega. \tag{21}$$

Предположим теперь, что

$$\left.\begin{aligned} &Q_1(t) = 0, \\ &q_k(t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \text{ при } t < 0; \tag{22}$$

тогда

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t - H(\Omega)\sin\Omega t]\, d\Omega \qquad (\text{при } t < 0).$$

Заменим здесь t на $-t$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega)\cos\Omega t + H(\Omega)\sin\Omega t]\, d\Omega \qquad (\text{при } t > 0). \tag{23}$$

Складывая почленно равенства (21) и (23), находим

$$q_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega)\cos\Omega t\, d\Omega \qquad (\text{при } t > 0). \tag{24}$$

Можно показать, что выражение (24) определяет общее решение устойчивой системы для координаты q_k при условиях (22) и при нулевых начальных данных [2]). Функция $W_{1k}(\Omega)$ строится непосредственно по коэффициентам a_{ik}, b_{ik} и c_{ik}, содержащимся в уравнениях (1), а функция $F(\Omega)$ определяется выражением (17). После этого задача об определении движения, описываемого уравнениями (1), сводится с помощью выражения (24) к одной квадратуре.

Для приближенного определения движения пригоден поэтому любой метод приближенного интегрирования. Можно,

---

[1]) Реальная система не может иметь частотную характеристику, не удовлетворяющую этому условию.

[2]) Это следует из того факта, что выражение (20) определяет преобразование Фурье решения при нулевых начальных данных, а выражение (24) — обращение преобразования Фурье (см., например, Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, изд. 2, Физматгиз, 1958).

например, построить график функции $G(\Omega)$, заменить его ломаной линией и через точки излома провести горизонтальные линии до оси ординат. Тогда функция $G(\Omega)$ приближенно

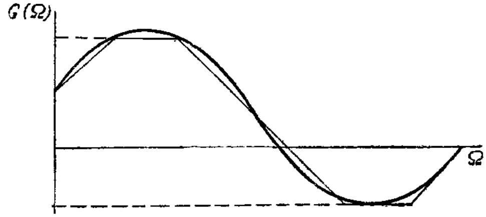

Рис. 54.

заменяется суммой функций $g_j(\Omega)$, график каждой из которых представляет собой трапецию (в частном случае треугольник), как показано на рис. 54.

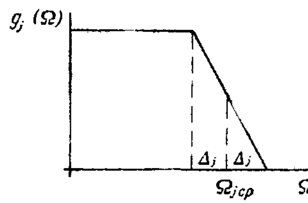

Рис. 55.

Для одной такой функции $g_j(\Omega)$ интеграл (24) может быть вычислен [1]):

$$q_{jk}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j(\Omega)\cos\Omega t\,d\Omega=$$

$$=\frac{A_j}{\pi}\,\frac{\sin\Omega_{j\text{cp}}t}{\Omega_{j\text{cp}}}\,\frac{\sin\Delta_j t}{\Delta_j t},$$

где $\Omega_{j\text{cp}}$ и Δ_j показаны на рис. 55, а A_j — площадь трапеции. Поэтому

$$q_k\approx\frac{1}{\pi}\sum_j A_j\,\frac{\sin\Omega_{j\text{cp}}t}{\Omega_{j\text{cp}}}\,\frac{\sin\Delta_j t}{\Delta_j t},$$

где суммирование ведется по всем трапециям, полученным при аппроксимации $G(\Omega)$ ломаной линией.

При использовании такой аппроксимации для построения движения могут быть использованы таблицы функции $\dfrac{\sin z}{z}$.

[1]) См. стр. 280—282 книги, указанной в примечании 2 на стр. 272.

ГЛАВА VII

СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

§ 48. Приведенная система. Потенциал Рауса. Скрытые движения. Концепция Герца о кинетическом происхождении потенциальной энергии

В настоящей главе общие положения, изложенные в гл. II и в гл. V, используются для исследования движения голономной склерономной системы с циклическими координатами q_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$. Кинетическая энергия такой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{n} a_{rs}(q_1, \ldots, q_m)\, \dot{q}_r \dot{q}_s. \tag{1}$$

Найдем выражение для кинетической энергии в переменных Рауса q_i, $\dot{q}_i$, p_α $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$. Для этого выразим все $\dot{q}_\alpha$ через p_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$, используя исходные соотношения

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{m} a_{\alpha i} \dot{q}_i + \sum_{\beta = m+1}^{n} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{2}$$

Поскольку определитель $D = \det (a_{\alpha\beta})^{n}_{\alpha,\beta=m+1} \neq 0$ [1]), то из соотношений (2) находим

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} \left(p_\beta - \sum_{i=1}^{m} a_{\beta i} \dot{q}_i \right) \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{3}$$

где $\| b_{\alpha\beta} \|^{n}_{m+1}$ — обратная матрица для матрицы $\| a_{\alpha\beta} \|^{n}_{m+1}$,

$$\| b_{\alpha\beta} \| = \| a_{\alpha\beta} \|^{-1}. \tag{4}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 91.

Полагая

$$\gamma_{\alpha i}=\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}a_{\beta i} \quad (i=1, \ldots, m; \ \alpha=m+1, \ldots, n), \tag{5}$$

запишем соотношения (3) в следующем виде:

$$\dot{q}_{\alpha}=\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_{\beta}-\sum_{i=1}^{m}\gamma_{\alpha i}\dot{q}_{i} \quad (\alpha=m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Здесь $b_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha i}$ — функции от нециклических (или, как их иногда называют, *позиционных*) координат q_i $(i=1, \ldots, m)$. Подставляя выражения (6) для $\dot{q}_\alpha$ в формулу (1), получаем выражение $\widehat{T}$ для кинетической энергии в переменных Рауса:

$$\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^{*}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} a_{\alpha\beta}^{*}p_{\alpha}p_{\beta}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=m+1}^{n} a_{i\alpha}^{*}\dot{q}_{i}p_{\alpha}. \tag{7}$$

Замечательным является то обстоятельство (на него обратил внимание еще Раус), что в этой формуле все $a_{i\alpha}^{*}=0$, т. е. выражение $\widehat{T}$ есть сумма квадратичной формы относительно позиционных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ и квадратичной формы относительно обобщенных импульсов $p_{m+1}, \ldots, p_n$[1]).

Действительно,

$$a_{i\alpha}^{*}=\frac{\partial^{2}\widehat{T}}{\partial\dot{q}_{i}\,\partial p_{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{i}}\left(\sum_{\beta=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{i}}\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\beta\alpha}p_{\beta}=0, \tag{8}$$

так как $\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_{\beta}$ зависит только от переменных q_i и p_β, которые рассматриваются как независимые по отношению к $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, m; \ \beta=m+1, \ldots, n)$.

[1]) Использованное здесь преобразование переменных, соответствующее переходу от переменных $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$ к переменным $\dot{q}_i$, p_α, применяется обычно в теории квадратичных форм для приведения (по методу Лагранжа) квадратичной формы к сумме квадратов. Действительно, применив несколько раз подобные преобразования, мы представим квадратичную форму от n переменных в виде суммы n квадратичных форм, каждая из которых зависит только от одной переменной, т. е. равна произведению квадрата этой переменной на некоторый вещественный коэффициент.

Вычислим теперь коэффициенты $a^*_{\alpha\beta}$:

$$a^*_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\gamma}\frac{\partial\dot q_\gamma}{\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}b_{\gamma\beta}p_\gamma=b_{\alpha\beta}$$

$$(\alpha,\ \beta=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

Аналогично найдем коэффициенты a^*_{ij}[1])

$$a^*_{ij}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial\dot q_i\,\partial\dot q_j}=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}-\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}p_\alpha=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}=$$

$$=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\,\partial\dot q_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_j\,\partial\dot q_\alpha}\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\dot q_i}=a_{ij}-\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}a_{\alpha j}.$$

Используя равенства (5), получаем

$$a^*_{ij}=a_{ij}-\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}a_{\alpha j}a_{\beta i}\qquad(i,\ j=1,\ \ldots,\ m). \tag{10}$$

Но на основании равенства (4) $b_{\alpha\beta}=\frac{A_{\beta\alpha}}{D}$, где $A_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\beta\alpha}$ в определителе D. Используя это обстоятельство, можно вместо формулы (10) написать:

$$a^*_{ij}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_{ij} & a_{i,\,m+1} & \ldots & a_{in}\\ a_{m+1,j} & a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,\,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{nj} & a_{n,\,m+1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}\qquad(i,j=1,\ \ldots,\ m). \tag{10'}$$

Таким образом, формула (7) имеет вид

$$\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}a^*_{ij}\dot q_i\dot q_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta. \tag{11}$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем $\dot q_\alpha=\ldots$ означает, что в выражении, стоящем в квадратных скобках, все $\dot q_\alpha$ заменяются их выражениями (6).

Здесь коэффициенты a_{ij}^* и $b_{\alpha\beta}$ определяются равенствами (4) и (10).

Пусть силы, приложенные к склерономной системе, имеют потенциал $\Pi = \Pi(t, q_i)$. Тогда $L = T - \Pi$. Вычислим функцию Рауса (см. § 13):

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, p_\alpha) = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L =$$

$$= \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \left(\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \right) - T + \Pi =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta +$$

$$+ \Pi - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i. \qquad (12)$$

Рассмотрим функцию $\Pi^*(t, q_i, p_\alpha)$, которую назовем *потенциалом Рауса* [1]):

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \qquad (13)$$

Пользуясь тем, что

$$b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D},$$

где $A_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\beta\alpha}$ в определителе D, можно записать выражение для потенциала Рауса еще в следующем виде:

$$\Pi^* = \Pi - \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & p_{m+1} & \dots & p_n \\ p_{m+1} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (13')$$

---

[1]) Routh E. G., The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 5th ed., 1892, § 99.

Кроме того, введем обозначение

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{14}$$

Тогда, согласно равенству (12), функция $-R$, которая для позиционных координат играет роль функции Лагранжа, равна

$$T^* - V, \tag{15}$$

где V — обобщенный потенциал, определяемый равенством

$$V = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, p_\alpha). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь какое-либо движение исходной системы. В этом движении

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{17}$$

и изменение позиционных координат $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ может быть определено из дифференциальных уравнений (8) на стр. 95, в которых всюду p_α следует заменить на $c_\alpha (\alpha = m+1, \ldots, n)$. Но эти уравнения являются уравнениями Лагранжа (с функцией Лагранжа $-R = T^* - V$) для некоторой вспомогательной натуральной склерономной системы с m степенями свободы, имеющей кинетическую энергию $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j$ и обобщенный силовой потенциал $V = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} c_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$. Потенциальной энергией этой системы является потенциал Рауса $\Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$. Из формул (11) — (13) следует, что

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*. \tag{18}$$

Полученную вспомогательную систему будем называть *приведенной системой.*

Таким образом, *изменение позиционных координат* $q_1, \ldots, q_m$ *определяет движение приведенной системы* (*с* m *степенями свободы*) *с кинетической энергией* T^* *и обобщенным потенциалом* $V = V_1 + \Pi^*$, *где* Π^* — *потенциал*

Рауса. При соответствующих движениях исходной и приведенной системы полные энергии этих систем равны между собой.

Когда функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, определяющие движение приведенной системы, найдены, то изменение со временем циклических координат $q_\alpha = q_\alpha(t)$ $(\alpha = m+1, \ldots, n)$ может быть определено из формул (9) на стр. 95, которые сейчас могут быть написаны так:

$$q_\alpha = \int \left[\frac{\partial \Pi^*(t, q_i, c_\alpha)}{\partial c_\alpha} - \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\alpha j}(q_i)\, \dot{q}_j \right] dt + c'_\alpha \qquad (19)$$

$$(\alpha = m+1, \ldots, n).$$

Рассмотрим частный случай, когда выражение кинетической энергии исходной системы (1) не содержит произведений позиционных скоростей $\dot{q}_i$ на циклические скорости $\dot{q}_\alpha$, т. е. случай, когда все $a_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$. В этом случае кинетическая энергия T распадается на две квадратичные формы, из которых одна содержит только позиционные скорости $\dot{q}_i$, а вторая — только циклические скорости $\dot{q}_\alpha$. Такая система называется *гироскопически несвязанной*. Для гироскопически несвязанной системы, согласно формулам (5), все $\gamma_{\alpha i} = 0$ и, следовательно, $V_1 = 0$ и $V = \Pi^*$. Таким образом, *если исходная система является гироскопически несвязанной, то приведенная система имеет обычный потенциал* Π^* [1]).

Кроме того, из равенств (10) следует, что для гироскопически несвязанной системы $a^*_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, т. е.

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \qquad (20)$$

В этом случае исходная система имеет кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta$$

---

[1]) На приведенную систему действуют потенциальные силы $-\dfrac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ и гироскопические силы, определяемые потенциалом V_1. В случае гироскопически несвязанной системы $V_1 = 0$ и гироскопические силы отсутствуют.

и потенциальную $\Pi = \Pi(t, q_i)$, а приведенная — кинетическую энергию $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ и потенциальную

$$\Pi^* = \Pi(t, q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta.$$

Мы видим, что *часть кинетической энергии исходной системы* $\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta\right)$ *перешла в потенциальную энергию приведенной системы.*

Все сказанное о склерономных системах справедливо, в частности, для консервативных систем, у которых $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$, т. е. $\Pi = \Pi(q_i)$. Приведенная система для гироскопически несвязанной консервативной системы будет снова консервативной.

Пусть теперь дана произвольная консервативная система с m степенями свободы, с кинетической энергией $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(q_1, \ldots, q_m) \dot{q}_i \dot{q}_j$ и потенциальной энергией $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$. Рассмотрим консервативную систему, у которой число степеней свободы равно $m+1$ и которая имеет m позиционных координат $q_1, \ldots, q_m$ и одну циклическую координату q_{m+1}.

Пусть у новой системы $\Pi = 0$, а кинетическая энергия имеет вид

$$T = T^* + \frac{1}{2} \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}^2 \qquad (k = \text{const}).$$

Тогда

$$p_{m+1} = \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}$$

и

$$T = T^* + \frac{1}{2k} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2 .$$

Но тогда при $p_{m+1} = c_{m+1} = \sqrt{2k}$

$$\frac{1}{2} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2 = \Pi^*(q_i).$$

Таким образом, у данной консервативной системы кинетическая и потенциальная энергии T^* и $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$, а у новой «расширенной» системы $T = T^* + \Pi^*(q_i)$ и $\Pi = 0$.

Потенциальная энергия данной системы получилась за счет кинетической энергии «расширенной» системы, имеющей бо́льшее число степеней свободы.

Движения, при которых изменяются только циклические (скрытые) координаты, иногда называются скрытыми движениями [1]).

Выше мы видели, что *потенциальная энергия консервативной системы всегда может быть рассматриваема как кинетическая энергия скрытых движений.*

Эта концепция о кинетическом происхождении потенциальной энергии и, следовательно, о кинетическом происхождении сил, приложенных к телам, осуществляющим явные (нескрытые) движения, была широко развита Герцем в его «Принципах механики» (1894 г.)[2]).

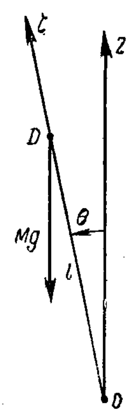

Рис. 56.

Пример. Рассмотрим движение твердого тела с закрепленной точкой O в случае Лагранжа, когда на тело действует сила веса Mg, существует ось динамической симметрии и центр тяжести D расположен на этой оси.

Положение тела будем задавать с помощью трех углов Эйлера θ, ψ, φ, где угол нутации θ — угол между вертикальной осью Oz и осью динамической симметрии $O\zeta$ (рис. 56), ψ — угол прецессии, а φ — угол чистого вращения. Пусть $l = OD$, а A и C — экваториальный и аксиальный моменты инерции соответственно. Тогда

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2, \quad \Pi = Mgl\cos\theta,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости ω на главные оси инерции $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Но

$$p^2 + q^2 = \dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta, \quad r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta.$$

Поэтому окончательно

$$2T = A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2, \quad \Pi = Mgl\cos\theta. \tag{21}$$

---

[1]) Ярким примером проявления скрытых движений являются системы, содержащие внутри себя гироскопы. За счет «скрытых» движений гироскопов движение таких систем резко отличается от движения систем без гироскопов.

[2]) Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959; см. также Thomson W. and Tait P., Treatise on natural philosophy, Part I, § 319 и А. Вебстер, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, М., 1933, гл. V.

Найдем выражения для обобщенных импульсов p_φ, p_ψ, соответствующих циклическим координатам φ, ψ:

$$\left.\begin{aligned} p_\psi &= (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\,\dot\psi + C\cos\theta\,\dot\varphi, \\ p_\varphi &= C\cos\theta\,\dot\psi + C\dot\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Разрешив эти соотношения относительно $\dot\psi$ и $\dot\varphi$, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi &= \frac{p_\psi - \cos\theta\, p_\varphi}{A\sin^2\theta}, \\ \dot\varphi &= \frac{-C\cos\theta\, p_\psi + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\, p_\varphi}{AC\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Коэффициенты при p_ψ и p_φ в правых частях равенств (23) и представляют собой величины $b_{\alpha\beta}$. Выражение для кинетической энергии в переменных Рауса θ, $\dot\theta$, p_ψ, p_φ получаем, подставляя выражения (23) для $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ в выражение (21) для $2T$ или сразу по формуле (11)[1]:

$$2T = A\dot\theta^2 + \frac{Cp_\psi^2 - 2C\cos\theta\, p_\psi p_\varphi + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\, p_\varphi^2}{AC\sin^2\theta}. \tag{24}$$

При движении системы импульсы p_ψ и p_φ сохраняют постоянные значения

$$p_\psi = a, \quad p_\varphi = b. \tag{25}$$

Нутационное движение определяется приведенной системой, для которой

$$T^* = \frac{1}{2}A\dot\theta^2, \quad \Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{(a - b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{b^2}{C}. \tag{26}$$

Изменение угла нутации $\theta = \theta(t)$ находится из соответствующего интеграла энергии

$$\frac{1}{2}A\dot\theta^2 + Mgl\cos\theta + \frac{(a - b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} = \text{const} = h. \tag{27}$$

Введем вспомогательную переменную $u = \cos\theta$. Умножая обе части равенства (27) на $\frac{2}{A}(1 - u^2) = \frac{2}{A}\sin^2\theta$, находим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u), \tag{28}$$

---

[1]) В данном случае твердое тело представляет собой гироскопически несвязанную систему. В этом случае в формуле (11) $a_{ij}^* = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$.

где $f(u)$ — многочлен третьей степени относительно u:

$$f(u)=\frac{2}{A}(h-Mglu)(1-u^2)-\frac{2}{A^2}(a-bu)^2. \tag{29}$$

Полагая в этом выражении $u=\pm 1$ и $u=u_0=\cos\theta_0<1$, находим¹)

$$f(-1)<0, \quad f(u_0)=\left(\frac{du}{dt}\right)_0^2>0, \quad f(+1)<0.$$

Тогда многочлен $f(u)$ имеет три вещественных корня $u_1=\cos\theta_1$, $u_2=\cos\theta_2$ и u':

$$-1<u_1<u_2<1<u',$$

и [поскольку $f(+\infty)=+\infty$] график многочлена $f(u)$ имеет такой вид, как показано на рис. 57.

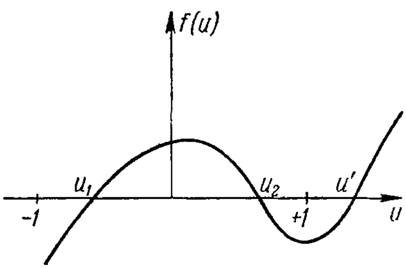

Рис. 57.

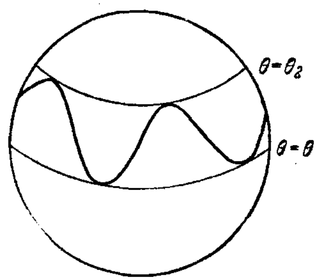

Рис. 58.

Так как при движении тела $-1\leqslant u=\cos\theta\leqslant+1$ и $f(u)=\left(\frac{du}{dt}\right)^2\geqslant 0$, то величина $u=\cos\theta$ должна изменяться в интервале $u_1\leqslant u\leqslant u_2$, т. е. $\theta_1\geqslant\theta\geqslant\theta_2$. Угловая скорость прецессии определяется из первой формулы (23):

$$\dot\psi=\frac{a-b\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \tag{30}$$

Если отношение $\frac{a}{b}$ находится вне интервала $u_1\leqslant u\leqslant u_2$, то скорость прецессии $\dot\psi$ сохраняет постоянный знак и прецессионное движение происходит все время в одном направлении. В этом случае след, оставленный осью $O\zeta$ на неподвижной сфере с центром в O, описывает кривую, изображенную на рис. 58.

¹) Мы здесь предполагаем, что $a\neq\pm b$. Особые случаи $a=\pm b$ будут рассмотрены ниже. Кроме того, начальное значение θ_0 выбираем так, чтобы $\dot\theta_0\neq 0$ и, следовательно, $\left(\frac{du}{dt}\right)_0\neq 0$.

Если же $u_1 < \frac{a}{b} < u_2$, то скорость прецессии меняет знак при $\cos\theta^* = \frac{a}{b}$ и след динамической оси описывает на сфере кривую, показанную на рис. 59.

Если $\frac{a}{b} = u_2$, то скорость прецессии $\dot{\psi}$ не меняет знака, но обращается в нуль на верхней параллели $\theta = \theta_2$ (рис. 60) [1].

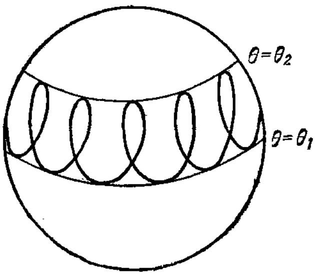

Рис. 59.

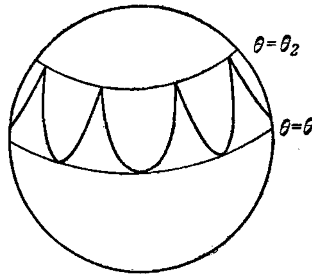

Рис. 60.

Аналитически изменение угла нутации определяется из формул

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = t + \text{const}, \qquad \theta = \arccos u. \tag{31}$$

Здесь знак «+» берется при изменении θ от значения θ_2 до значения θ_1 и знак «—» — при изменении θ в обратном направлении. Очевидно, изменение угла θ во времени будет периодической функцией $\theta(t)$ с периодом

$$\tau = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{32}$$

После того как изменение угла нутации $\theta = \theta(t)$ найдено, изменения углов ψ и φ определяются по формулам (23).

Рассмотрим теперь движение твердого тела, проходящее через «особое» положение $\theta = 0$. В этой точке кинетическая энергия задается вырожденной квадратичной формой [см. выражение (21) при $\theta = 0$]

$$2T = A\dot{\theta}^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi})^2. \tag{33}$$

[1]) Можно доказать, что $\dot{\psi}$ не может обращаться в нуль на нижней параллели.

Согласно формулам (22) в особой точке $\theta = 0$ должно иметь место равенство $p_\psi = p_\varphi$, т. е.

$$a = b. \tag{34}$$

Предполагая, что произвольные постоянные a и b связаны соотношением (34), мы легко раскрываем неопределенность в выражении (26) для потенциала Рауса[1]):

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

После этого нутационное движение снова определяется из интеграла энергии $T^* + \Pi^* = \text{const}$.

Если движение проходит через «особое» положение $\theta = \pi$, то вместо (34) имеем соотношение

$$a = -b$$

и выражение для потенциала Рауса принимает вид

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

В рассмотренных двух «особых» случаях верхняя или соответственно нижняя параллель на рис. 58—60 вырождается в точку.

§ 49. Устойчивость стационарных движений

Рассмотрим консервативную систему, положение которой задается при помощи m позиционных координат q_i и $n - m$ циклических координат q_α ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$). Движение такой системы определяется каноническими уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где полная энергия системы $H = H(q_i, p_i, p_\alpha)$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} c_{rs}(q_1, \ldots, q_m)p_r p_s + \Pi(q_1, \ldots, q_m). \tag{2}$$

---

[1]) В выражении для Π^* мы отбрасываем постоянное слагаемое $\frac{b^2}{B}$.

причем квадратичная форма, стоящая в правой части этого равенства, является положительно определенной[1]). При движении системы функция H и обобщенные импульсы p_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$) не изменяют своих значений, т. е. эти величины являются интегралами движения:

$$\left.\begin{aligned} &H(q_i, p_i, p_\alpha) = H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0), \\ &p_\alpha = p_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Движение системы называется *стационарным*, если при этом движении все позиционные координаты сохраняют постоянные значения $q_i = \text{const} = q_i^0$ ($i = 1, \ldots, m$).

При стационарном движении все позиционные скорости равны нулю и потому, согласно уравнениям (1) и равенству (2),

$$\dot q_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(q_i^0) p_k + \sum_{\alpha=m+1}^{n} c_{i\alpha}(q_i^0) p_\alpha^0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Из этих соотношений следует[2]), что при стационарном движении имеют постоянные величины и все позиционные импульсы $p_i = \text{const} = p_i^0$. Поскольку $\dot q_i = \dot p_i = 0$ ($i = 1, \ldots, m$), то из уравнений (1) вытекает, что при стационарном движении

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Уравнения (5) представляют собой необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные значения q_i^0, p_i^0, p_α^0 ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) для того, чтобы движение, определяемое этими начальными данными, было стационарным.

---

[1]) Эта квадратичная форма представляет собой кинетическую энергию системы, выраженную через обобщенные импульсы.

[2]) Соотношения (4) могут быть разрешены относительно позиционных импульсов p_k, так как определитель $\det\left[c_{ik}(q_j^0)\right]_{i,k=1}^{m}$ отличен от нуля, поскольку квадратичная форма $\sum_{r,s=1}^{n} c_{rs} p_r p_s$ является положительно определенной.

Заметим еще, что при стационарном движении имеют постоянные величины и циклические скорости $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = m+1, \ldots, n$), так как в соответствии с (1)

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \sum_{s=1}^{n} c_{\alpha s}(q^0) p_s^0 = \text{const} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Поэтому

$$q_\alpha = \dot{q}_\alpha^0 (t - t_0) + q_\alpha^0 \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{7}$$

Начальные циклические координаты q_α^0 являются произвольными постоянными и в условия (5) не входят.

Таким образом, *при стационарном движении позиционные координаты сохраняют постоянные значения, а циклические координаты изменяются по линейному закону.*

Пример. *Регулярная прецессия тяжелого симметричного гироскопа* представляет собой стационарное движение.

Действительно, регулярная прецессия характеризуется равенствами

$$\theta = \text{const} = \theta_0, \qquad \dot{\psi} = \text{const}, \qquad \dot{\varphi} = \text{const},$$

где угол прецессии ψ и угол чистого вращения φ — циклические координаты, а угол нутации θ — угол, образованный осью гироскопа с вертикалью, — позиционная координата [1]).

Заметим, что согласно соотношениям (6) небольшое изменение начальных величин q_i^0, p_i^0, p_α^0 дает небольшое изменение начальных циклических скоростей $\dot{q}_\alpha^0$ ($\alpha = m+1, \ldots, n$). Однако небольшое изменение величин $\dot{q}_\alpha^0$, согласно формулам (7), дает с течением времени сколь угодно большое изменение самих циклических координат. Поэтому *по отношению к циклическим координатам стационарное движение не может быть устойчивым.*

В дальнейшем под устойчивостью стационарного движения мы будем понимать устойчивость по отношению ко всем

---

[1]) Из формулы (21) предыдущего параграфа видно, что координаты φ и ψ не входят явно в выражения для кинетической и потенциальной энергий.

импульсам p_i и p_α и позиционным координатам q_i ($i=1, \ldots, m$; $\alpha=m+1, \ldots, n$)[1]).

Тогда имеет место следующий **критерий устойчивости стационарных движений.**

Движение с начальными данными q_i^0, p_i^0, p_α^0 ($i=1, \ldots, m$; $\alpha=m+1, \ldots, n$) *будет устойчивым стационарным движением, если функция* $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ *в точке* $q_i=q_i^0$, $p_i=p_i^0$ ($i=1, \ldots, m$) *имеет строгий экстремум.*

Действительно, рассматриваемое движение будет стационарным, поскольку из существования экстремума функции $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ следует, что величины q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, m$) совместно с величинами p_α^0 ($\alpha=m+1, \ldots, n$) удовлетворяют уравнениям (5). Введем отклонения

$$\xi_i=q_i-q_i^0, \quad \eta_i=p_i-p_i^0, \quad \eta_\alpha=p_\alpha-p_\alpha^0.$$

Тогда, используя интеграл движения $H(q_i^0+\xi_i, \; p_i^0+\eta_i, p_\alpha^0)$ в качестве функции Ляпунова, можно сделать заключение (см. стр. 209) об устойчивости нулевого решения $\xi_i=0$, $\eta_i=0$ (т. е. устойчивости стационарного движения) в предположении, что циклические импульсы p_α не испытывают возмущений (т. е. что эти величины для возмущенного движения имеют те же значения p_α^0, что и для невозмущенного[2])).

Однако сформулированный выше критерий устойчивости сохраняет свою силу и в общем случае, когда для возмущенного движения величины $\eta_\alpha=p_\alpha-p_\alpha^0$ ($\alpha=m+1, \ldots, n$) могут быть отличными от нуля[3]). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно использовать следствие из теоремы Ляпунова (стр. 209), взяв в качестве функции Ляпунова функцию

$$[H(q_i^0+\xi_i, \; p_i^0+\eta_i, \; p_\alpha^0)-H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)]^2+\sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_\alpha^2. \tag{8}$$

Эта функция является интегралом движения и имеет при $\xi_i=0$, $\eta_i=0$, $\eta_\alpha=0$ ($i=1, \ldots, m$; $\alpha=m+1, \ldots, n$) строгий минимум, равный нулю.

---

[1]) Или, что то же, устойчивость относительно величин q_i, $\dot{q}_i$, p_α ($i=1, \ldots, m$; $\alpha=m+1, \ldots, n$).

[2]) Именно такого рода устойчивость рассматривал Раус.

[3]) Пожарицкий Г. К., Прикладная математика и механика, т. 22, вып. 2, 1958.

Установим аналогию между устойчивостью состояния равновесия и устойчивостью стационарного движения. Для этого рассмотрим приведенную систему с m независимыми координатами $q_1, \ldots, q_m$ и с потенциальной энергией, равной потенциалу Рауса:

$$\Pi^*(q_i, p_\alpha^0) = \Pi(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = m+1}^{n} b_{\alpha\beta}(q_i)\, p_\alpha^0 p_\beta^0 \tag{9}$$

(см. предыдущий параграф). На приведенную систему помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ действуют еще гироскопические силы. Так как стационарному движению исходной системы $q_i = q_i^0$, $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ соответствует положение равновесия приведенной системы, то величины q_i^0, p_α^0 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \Pi^*(q_i, p_\alpha^0)}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Это *необходимые и достаточные условия существования стационарного движения.* Они, очевидно, эквивалентны условиям (5) и получаются из последних исключением величин p_i $(i = 1, \ldots, m)$. Применяя теорему Лагранжа к положению равновесия $q_i = q_i^0$ приведенной системы, получаем критерий устойчивости стационарного движения в следующей форме.

Движение с начальными данными q_i^0, $\dot{q}_i^0 = 0$, p_α^0 $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ *будет устойчивым стационарным движением, если потенциал Рауса* $\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)$ *имеет строгий минимум при* $q_i = q_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Применяя теорему Лагранжа к приведенной системе, мы фиксировали постоянные значения циклических импульсов $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(\alpha = m+1, \ldots, n)$. Однако критерий сохраняет свою силу и при варьировании импульсов p_α^0. Для того чтобы установить это, достаточно в качестве функции Ляпунова взять интеграл движения

$$[E^*(q_i^0 + \xi_i, \dot{q}_i, p_\alpha^0) - E^*(q_i^0, 0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha = m+1}^{n} \eta_\alpha^2, \tag{11}$$

где $E^* = T^* + \Pi^*$ — полная энергия приведенной системы [она совпадает с полной энергией исходной системы, выраженной в переменных Рауса q_i, $\dot{q}_i$, p_α (см. § 48)], а $\xi_i = q_i - q_i^0$, $\dot{q}_i$, $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ — отклонения возмущенного движения (от данного стационарного движения). Функция (11) имеет строгий минимум (равный нулю) при $\xi_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, $\eta_\alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$.

Приведенный здесь критерий устойчивости стационарного движения в несколько иной форме был установлен Раусом в 1884 г.

Пример. Определить устойчивые стационарные движения неоднородного весомого шара на гладкой горизонтальной плоскости, если центр тяжести шара D отстоит от геометрического центра O

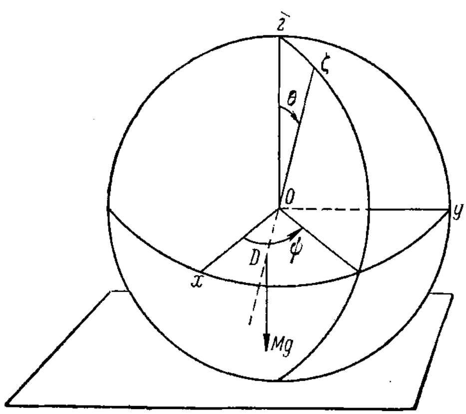

Рис. 61.

на расстоянии d, масса шара равна M, момент инерции относительно оси OD равен C, а два других главных центральных момента инерции равны между собой, $A = B$ (рис. 61)[1]).

В качестве независимых координат возьмем две горизонтальные координаты центра тяжести x_D, y_D и три угла Эйлера φ, ψ, θ. При этом угол φ является углом «чистого вращения» вокруг оси динамической симметрии $O\zeta$, проходящей через точки D и O; направление оси $O\zeta$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{DO}$. Напишем

[1]) Рассматриваемое в этой задаче твердое тело представляет собой физический маятник, у которого ось подвеса является осью динамической симметрии, а точка опоры O может свободно скользить (без трения) вдоль горизонтальной плоскости.

выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$2T = A(p^2+q^2)+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2+\dot{z}_D^2), \quad \Pi = Mgz_D.$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости ω на центральные оси инерции. Но

$$p^2+q^2=\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta, \quad r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta, \quad z_D=-d\cos\theta.$$

Поэтому

$$2T=(A+Md^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2),$$
$$\Pi=-Mgd\cos\theta.$$

Координаты x_D, y_D, φ и ψ являются циклическими. Во время движения соответствующие импульсы сохраняют постоянные значения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} p_x=M\dot{x}_D=\alpha, \quad p_y=M\dot{y}_D=\beta, \quad p_\varphi=Cr=\gamma,\\ p_\psi=A\dot{\psi}\sin^2\theta+Cr\cos\theta=\delta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Кроме того,

$$p_\theta=(A+Md^2\sin^2\theta)\,\dot{\theta}.$$

Напишем выражение для функции Гамильтона в переменных θ, $p_x=\alpha$, $p_y=\beta$, p_θ, $p_\varphi=\gamma$, $p_\psi=\delta$:

$$H=\frac{p_\theta^2}{2(A+Md^2\sin^2\theta)}+\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mg\,d\cos\theta+$$
$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M}=\frac{p_\theta^2}{A+Md^2\sin^2\theta}+\Pi^*, \tag{13}$$

где

$$\Pi^*=\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mg\,d\cos\theta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M} \tag{14}$$

— потенциал Рауса [1]).

Условия существования стационарного движения (5) здесь имеют вид

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta}=0, \quad p_\theta=0.$$

---

[1]) Мы исключаем из рассмотрения особые значения $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Поэтому $\sin\theta\neq 0$.

Условие устойчивости — наличие строгого экстремума функции H при $p_\theta = 0$ и некотором искомом значении θ — будет выполнено, если при этом значении θ функция Π^* имеет строгий минимум. Для нахождения этого значения $\theta = \theta_0$ положим $u = \cos\theta$ и

$$f(u) = A\Pi^* = \frac{1}{2}\frac{(\delta - \gamma u)^2}{1 - u^2} - Ku + \text{const} \qquad (K = AMgd).$$

Найдем:

$$f'(u) = \frac{-\gamma\delta u^2 + (\gamma^2 + \delta^2)u - \gamma\delta}{(1 - u^2)^2} - K,$$

$$f''(u) = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(1 - u^2)^3}(1 - 3\mu u + 3u^2 - \mu u^3),$$

где [1])

$$\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Допустим, что уравнение $f'(u) = 0$ имеет корень u такой, что $|u| < 1$. Этому значению $|u| = \cos\theta$ и соответствует стационарное движение шара, при котором центр шара перемещается равномерно и прямолинейно, а углы φ и ψ изменяются по линейному закону.

Для выяснения устойчивости стационарного движения докажем предварительно, что $f''(u) > 0$ при $|u| < 1$. Действительно, если бы $f''(u) = 0$ при $|u| < 1$, то из выражения для $f''(u)$ вытекало бы, что $\mu = \frac{1 + 3u^2}{u^3 + 3u}$. Отсюда легко усмотреть, что $|\mu| > 1$ при $|u| < 1$, что невозможно, поскольку $\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$. Следовательно, $f''(u) \neq 0$ при $|u| < 1$, т. е. $f''(u)$ сохраняет знак в интервале $(-1, +1)$. Но $f''(0) = \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Следовательно, $f''(u) > 0$ при $|u| < 1$.

Поскольку

$$A\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} = f''(u)\sin^2\theta - f'(u)\cos\theta = f''(u)\sin^2\theta > 0,$$

то при рассматриваемом значении θ функция Π^* имеет строгий минимум, т. е. соответствующее стационарное движение устойчиво.

Условие существования стационарного движения $f'(u) = 0$ можно преобразовать, положив $\delta = \gamma u + A\dot\psi(1 - u^2)$.

---

[1]) $\gamma^2 + \delta^2 > 0$, так как при $\gamma = \delta = 0$ функция $\Pi^* = -Mg\,d\cos\theta$ имеет строгий минимум при $\theta = 0$.

Если затем в полученное равенство подставить $\gamma = Cr = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)$, то это условие принимает окончательный вид

$$C\dot\varphi\dot\psi + (C - A)\dot\psi^2\cos\theta + Mgd = 0. \tag{15}$$

Это хорошо известное условие существования регулярной прецессии под воздействием внешнего момента $Mgd\sin\theta$ (момент вертикальной реакции $N = Mg$ относительно полюса D).

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. Если

$$|Mgd + C\dot\varphi\dot\psi| > |A - C|\dot\psi^2,$$

то условие (15) не выполняется ни при одном вещественном значении θ и не существует стационарного движения с такими угловыми скоростями.

2°. Если $|Mgd + C\dot\varphi\dot\psi| < |A - C|\dot\psi^2$ и величины $Mgd + C\dot\varphi\dot\psi$ и $A - C$ имеют одинаковые знаки; то при таких угловых скоростях существует стационарное движение с $\cos\theta > 0$.

3°. Если же $|Mgd + C\dot\varphi\dot\psi| < |A - C|\dot\psi^2$, а величины $Mgd + C\dot\varphi\dot\psi$ и $A - C$ имеют разные знаки, то при стационарном движении $\cos\theta < 0$. В этом случае *существует устойчивое стационарное движение такое, при котором центр тяжести расположен выше геометрического центра шара.*

Рассмотрим теперь особые случаи.

а) $\theta_0 = 0$. Тогда из формул (12) следует, что $\gamma = \delta$. Поэтому

$$f'(u) = -\frac{\gamma^2}{(1+u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = f'(u)\ (-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1+u_0)^2} + K > 0.$$

Стационарное движение всегда устойчиво.

б) $\theta_0 = \pi$. Из формул (12) находим: $\gamma = -\delta$. Поэтому

$$f'(u) = \frac{\gamma^2}{(1-u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1-u_0)^2} - K = \frac{\gamma^2}{4} - K.$$

Стационарное движение будет устойчивым при выполнении условия

$$\frac{\gamma^2}{4} > K,$$

которое в подробной записи выглядит так:

$$C^2 r^2 > 4\, AMg\, d. \tag{16}$$

Если неравенство (16) имеет место, то, хотя в рассматриваемом случае центр тяжести расположен над геометрическим центром шара, вращение вокруг вертикальной оси будет устойчивым стационарным движением.

ЛИТЕРАТУРА

Аппель П., Теоретическая механика, т. I и II, перев. с франц., Физматгиз, 1960.

Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958.

Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.

Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, перев. с франц., Издатинлит, т. I, 1948; т. II, 1949.

Вариационные принципы, сборник статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, 1959.

Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.

Голдстейн Г., Классическая механика, перев. с англ., Гостехиздат, 1957.

Зигель К. М., Лекции по небесной механике, перев. с нем., Издатинлит, 1959.

Зоммерфельд А., Механика, перев. с нем., Издатинлит, 1947.

Картан Э., Интегральные инварианты, перев. с франц., Гостехиздат, 1940.

Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. I, II, перев. с франц., Гостехиздат, 1950.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958.

Ланцош К., Вариационные принципы механики, перев. с англ., изд-во «Мир», 1965.

Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, перев. с англ., изд-во «Мир», 1964.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Теоретическая механика, ч. III, ОНТИ, 1934.

Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, перев. с англ., Издатинлит, 1951.

Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.

Меркин Д. Р., Гироскопические системы, Гостехиздат, 1956.

Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Изд. ЛГУ, 1938.

Синг Дж. Л., Классическая динамика, перев. с англ., Физматгиз, 1963.

Суслов Г. К., Основы аналитической механики, изд. 2-е, Киев, 1911—1912; изд. 3, переработанное Н. Н. Бухгольцем и В. К. Гольцманом под названием: Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.

Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937.

Четаев Н. Г., Устойчивость движения, изд. 3-е, изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1965.

Якоби К., Лекции по динамике, перев. с нем., ГОНТИ, 1936.

Corden H. C., Stehle Ph., Classical mechanics, Wiley, New York; Chapman, London, 1950.

Routh E. T., The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, изд. 6-е, London Macmillan, 1905.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ