Теория функции комплексной переменной.

Понятие функции комплексной переменной.

Определение: Будем говорить, что на множестве E комплексной плоскости задана функция комплексной переменной, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества E некоторое комплексное число. Множество E будем называть множеством значений независимой переменной.

Определение: Множество E называется областью, если выполняются следующие условия: 1) каждая точка множества E – внутренняя точка этого множества 2) $\forall$ 2 точки множества E можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат E.

Определение: Множество, полученное присоединением к области всех её граничных точек, называется замкнутой областью

Определение: Однозначная функция комплексной переменной z, заданная в области G, определяется законом, ставящим каждому значению z из области G в соответствие определенное комплексное число w. $w = f(z)$.

(т.к. $z = x+iy$, то $w(z) = u(x,y) + i v(x,y)$)

Определение: Функция $f(z)$ называется однолистной функцией в области G, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

(однолистная функция осуществляет взаимно однозначное отображение)

Определение: Если независимо от выбора последовательности $\{z_n\}$ $\exists$ единственный предел $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = w_0$, то этот предел называется предельным значением, или пределом функции $f(z)$ в точке z_0.

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

<u>Определение:</u> число w_0 называется предельным значением функции $f(z)$ в точке z_0, если для $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ такое, что для всех точек $z\in E$ и удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$, имеет место равенство $|f(z)-w_0|<\varepsilon$.

<u>Определение:</u> Функция $f(z)$, заданная на множестве E, называется непрерывной в точке $z_0\in E$, если предельное значение этой функции в точке z_0 $\exists$, конечно и совпадает со значением $f(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

<u>Определение:</u> Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек $z\in E$, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, имеет место неравенство $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

(Из непрерывности функции комплексной переменной $f(z)=u(x,y)+i v(x,y)$ следует непрерывность её действительной $u(x,y)$ и мнимой $v(x,y)$ частей по совокупности переменных x и y)

<u>Определение:</u> (показательной функции e^z):

Функция e^z задается на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ равенством:

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y) \quad , \text{где } x=\operatorname{Re} z \text{ и } y=\operatorname{Im} z$$

$$\text{а } |e^{x+iy}|=e^x \quad , \operatorname{Arg}(e^{x+iy})=\{y+2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

(областью знач. e^z, заданной на всей плоскости $\mathbb{C}$, является множество $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. При этом отображение $\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ не является взаимнооднозначным. Однако если в качестве области определения M_1 для $f(z)=e^z$ взять полосу вида $M_1=\{z: \operatorname{Im} z\in(y_0, y_0+2\pi)\}$, или какое-либо её подмножество, то отображение $e^z: M_1\to f(M_1)$ будет взаимнооднозначным.

<u>Определение:</u> Функции $\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ определяются равенствами.

$$\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ;\ \cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ;\ \operatorname{tg} z = \frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}\ ;\ \operatorname{ctg} z = \frac{i(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1}$$

<u>Определение:</u> Функции $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z := \frac{e^z-e^{-z}}{2}\ ;\ \operatorname{ch} z := \frac{e^z+e^{-z}}{2}\ ;\ \operatorname{th} z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\ ;\ \operatorname{cth} z = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}.$$

Эти функции обладают свойствами:

$\sin iz = i\operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\operatorname{sh} iz = i\sin z$; $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$,

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$; $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$\sin(\frac{\pi}{2}-z)=\cos z$; $\operatorname{sh}(\frac{i\pi}{2}-z)=i\operatorname{ch} z$.

Определение: (многозначной функции)

Б.г., что на множестве $M \in \mathbb{C}$ задана многозначная функция $w = F(z)$, если каждому $z_0 \in M$ поставлены в соответствие элементы некоторого множества $W_0 = W_0(z_0) \subset \mathbb{C}$

Определение: $\exists$ $F_1(z)$ и $F_2(z)$ - две многозначные функции, и M-некоторое подмножество областей определения обеих функций. Будем говорить, что $F_1(z) = F_2(z)$ (или что $F_1(z)$ и $F_2(z)$ совпадают на M), если для каждой точки $z_0 \in M$ соответствующие множества значений этих функций W_{10} и W_{20} совпадают.

(Многозначность функций осложняет корректное введение операций (даже сложение и умножение): будем использовать формулы, где $f(z)$ - однозначная, а $F(z)$ - многозначная: G и H в произвольной точке z_0:

$$G(z) = F(z) + f(z) = f(z) + F(z) \quad : \quad W_0 = \{w_{0k} + f(z_0)\}, \quad w_{0k} \text{ - значения } F(z_0).$$

$$H(z) = F(z) \cdot f(z) = f(z) \cdot F(z) \quad : \quad W_0 = \{w_{0k} \cdot f(z_0)\}$$

Сложная функция вида $F_2(F_1(z))$: ~~зн~~ множество значений W_0 в точке z_0

$$W_0 = \bigcup_k F_2(w_{0k}^{(1)}), \text{ где } w_{0k}^{(1)} \text{ - всевозможные значения } F_1(z_0).$$

Сложная функция $F_2(F_1(z))$ представляет собой композицию отображений $F_1(z)$ и $F_2(z)$ и, можно сказать, является естественным обобщением сложной функции, образованной из двух однозначных.)

Определение: степенной функции z^a и $\mathrm{Ln}\, z$)

Функцию $\mathrm{Ln}\, z$ определяют как обратную по отношению к функции e^z. Это означает, что значениями $\mathrm{Ln}\, z$ в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$ будут все решения уравнения $e^{w_0} = z_0$. При $z_0 = 0$ уравнение $e^{w_0} = z_0$ не имеет решений в $\mathbb{C}$.

Если же $z_0 \neq 0$, то решениями уравнения будут те и только те w_0, для которых $e^{\mathrm{Re}\, w_0} = |z_0|$, $\mathrm{Im}\, w_0 \in \mathrm{Arg}\, z_0$

Таким образом: если $z \neq 0$, то $\mathrm{Ln}\, z := \ln|z| + i\varphi \quad (\varphi \in \mathrm{Arg}\, z)$

если $z = 0$, то функция $\mathrm{Ln}\, z$ не определена.

(если $z = z_1 z_2$, где z_1 и z_2 - комплексные числа, отличные от нуля, и ~~W_0~~ $W(z)$ - множество значений $\mathrm{Ln}\, z$. Тогда:

$$W(z) = \{w_1 + w_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ где } w_1 \text{ - произвольно выбранное значение}$$

$\mathrm{Ln}\, z_1$, а w_{2k} - всевозможные значения $\mathrm{Ln}\, z_2$.)

Степенную функцию одной переменной (комплексной) определим:

$$z^{\gamma} := e^{\gamma \mathrm{Ln}\, z}$$

Многозначную функцию $f(z_1; z_2) = (z_1)^{z_2}$ двух комплексных переменных z_1 и z_2 определим при $z_1 \neq 0$ равенством:

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \mathrm{Ln}\, z_1},$$

Здесь e^{z_1} - однозначная функция, а функцию $e^{z_2 \mathrm{Ln}\, z_1}$ следует понимать аналогично случаю многозначных функций одной переменной.

Определение: (функции, дифференцируемой в точке)

Пусть $f(z)$ - однозначная функция с областью определения $D \subset \mathbb{C}$, и z_0 - некоторая внутренняя точка D. Будем говорить, что $f(z)$ дифференцируема в точке x_0 (либо что производная $f'(z)$ функции $f(z)$ $\exists$ в точке z_0), если $\exists$ конечный предел

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}, \text{ где } \Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Пример: 1. функция $f_1(z) = c_0$ и функция $f_2(z) = z$. $\frac{\Delta f_1}{\Delta z} \equiv 0$ и $\frac{\Delta f_2}{\Delta z} \equiv 1$ для $\forall$ z и Δz, то всюду в $\mathbb{C}$ $\exists$ют $f_1'(z) = 0$ и $f_2'(z) = 1$. Обе производные непрерывны всюду в $\mathbb{C}$, поэтому $f_1(z) = c_0$ и $f_2(z)$ - целые функции.

Теорема: (о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции в точке)

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x_0, y_0) $\exists$ частные производные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x, y и $\exists$ соотношения Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Определение: Пусть $G \subset \mathbb{C}$ - область, и $f(z)$ - однозначная функция, заданная в G.

Если функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторой области G, а её производная непрерывна в этой области, то функция $f(z)$ называется аналитической функцией в области G.

Определение: Пусть $G \subset \mathbb{C}$ - область, и $f(z)$ - однозначная функция, заданная в G.

1. Если $f'(z)$ $\exists$ в G всюду, причем $f'(z)$ непрерывна в G, то будем говорить, что функция $f(z)$ является аналитической в области G, либо что $f(z)$ аналитична в G.

2. Пусть z_0 - внутренняя точка G. Если в некоторой окрестности z_0 вида:

$$U_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\} \quad (\delta > 0)$$ целиком принадлежащей G, функция $f(z)$ аналитична, то будем говорить, что $f(z)$ является аналитической в точке z_0 (аналитична в точке z_0)

Замечание к определению аналитичности:

1. функция аналитична в области в том и только том случае, если она является аналитической в каждой точке этой области.

2 свойство аналитичности функции всегда распространяется на некоторую область; даже „функция аналитическая в точке $z_0 \in \mathbb{C}$" обязательно должна быть задана во всех точках некоторой области $U_\delta(z_0)$ и должна быть в этой области аналитической.

3. Можно показать, что дифференцируемость $f(z)$ во всех точках области G является не только необходимым, но и достаточным условием аналитичности $f(z)$ в G

Пример: $f(z)=e^{-z}$

получим $f(z)=e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$:

$u_x(x,y)=-e^{-x}\cos y \qquad v_y(x,y)=-e^{-x}\cos y$

$u_y(x,y)=-e^{-x}\sin y \qquad -v_x(x,y)=-e^{-x}\sin y$

Т.к. выполнены условия теоремы во всех точках комплексной плоскости. Поэтому функция e^{-z} является аналитической в $\forall$ точке $\mathbb{C}$

Условия Коши-Римана:

1) когда $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$: $u_x(x,y)=v_y(x,y)$, $u_y(x,y)=-v_x(x,y)$.

2) когда $z=re^{i\varphi}$, $w=f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$: $u_r=\frac{1}{r}v_\varphi$, $\frac{1}{r}u_\varphi=-v_r$.

3) когда $z=x+iy$, $w=f(z)=\rho(x,y)e^{i\psi(x,y)}$: $\rho_x=\rho\psi_y$, $\rho_y=-r\psi_x$.

4) когда $z=re^{i\varphi}$, $w=f(z)=R(r,\varphi)e^{i\Phi(r,\varphi)}$: $R_\rho=\frac{R}{\rho}\Phi_\varphi$, $\frac{1}{\rho}R_\varphi=-R\Phi_\rho$.

Конформные отображение.

$\exists$ функция $w=f(z)$ осуществляет непрерывное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ на область $G\subset\mathbb{C}$ и $\forall$ непрерывную кривую, имеющую касательную в точке z_0, переводит в непрерывную кривую, имеющую касательную в точке $w_0=f(z_0)$.

$\exists$ γ_1 и γ_2 - 2 $\forall$ непр. кривые в D, проходящие через точку D и имеющие в этой точке касательные. Б.г., что указанное отображение $w=f(z)$ обладает в точке z_0 свойством сохранения углов, если угол между кривыми γ_1 и γ_2 в данной точке равен по абсолютной величине и направлению углу между их образами в точке $w_0=f(z_0)$

Будем также говорить, что данное непрерывное отображение $w=f(z)$ обладает в точке $z_0\in D$ свойством постоянства растяжений, если $\exists$ конечный предел: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=k$ при произвольном стремлении z к z_0. Число k называется коэффициентом растяжения в точке z_0 при данном отображении. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка имеет место соотношение $|f(z)-f(z_0)|=k|z-z_0|$, т.е. отображение $w=f(z)$ переводит $\forall$ бесконечно малую фигуру в окрестности точки z_0 в подобную ей фигуру.

Определение: Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществленное аналитической функцией $w=f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется конформным отображением.

Определение: (функции, гармонической в некоторой области)

Дважды дифференцируемая в области G функция $u(x,y)$ называется гармонической, если всюду в G она удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$ ($\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, или лапласиан). Можно показать, что $\forall$ гармоническая функция дифференцируема не только дважды, но и $\forall$ число раз.

Определение: (сопряженной гармонической в некоторой области функции)

Две дифференцируемые в некоторой области D функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие в этой области уравнениям:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Сопряженные гармонические функции определяют в области D аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Каждая из сопряженных гармонических функций является гармонической в области D. Функция $v(x,y)$ называется сопряженной с гармонической функцией $u(x,y)$ и определяется ею с точностью до постоянной. Сопряженной с $v(x,y)$ является функция $-u(x,y)$, т.е. $v(x,y)$ и $-u(x,y)$ также составляют пару сопряженных гармонических функций.

Интегрирование функции комплексной переменной.

$\exists$ $L = \{z: z = \xi(t) + i\eta(t),\ t \in [a;b] \subset \mathbb{R}\}$ – кусочно-гладкая кривая конечной длины на плоскости $\mathbb{C}$, имеющая не более, чем конечное число точек самопересечения.

$\exists$ в каждой точке ζ кривой L определено значение функции $f(\zeta)$. Разобьем кривую L на n частичных дуг точками деления $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, соответствующими возрастающим значениям параметра t ($t_{i+1} > t_i$).

Введем обозначение $\Delta\zeta = \zeta_i - \zeta_{i-1}$ и составим сумму:

$S(\zeta_i, \zeta_i^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i$, где ζ_i^* – произвольная точка i-й частичной дуги.

Определение: Если при $\max|\Delta\zeta_i| \to 0$ $\exists$ предел суммы $S(\zeta_i, \zeta_i^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой L, ни от выбора точек ζ_i^*, то этот предел называется интегралом от функции $f(\zeta)$ по кривой L и обозначается как

$\int_L f(\zeta)\,d\cancel{\xi}\zeta$

Вопрос о $\exists$ ~~предела~~ интеграла $\int_L f(\zeta)d\zeta$ сводится к вопросу о $\exists$ некоторых криволинейных интегралов от действительной u и мнимой v частей функции $f(z)$. Записав: $f(\zeta_i^*) = u(P_i^*) + iv(P_i^*)$, $\Delta\zeta_i = \Delta\xi_i + i\Delta\eta_i$, где $P_i(\xi_i^*, \eta_i^*)$ – точка кривой L на плоскости xy, можно записать:

$$S(\zeta_i, \zeta_i^*) = \sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\xi_i - v(P_i^*)\Delta\eta_i\} + i\sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\eta_i + v(P_i^*)\Delta\xi_i\}$$

Действительная и мнимая части $S(\zeta_i, \zeta_i^*)$ представляют собой интегральные суммы криволинейных интегралов второго рода $\int_L u d\xi - v d\eta$ и $\int_L u d\eta + v d\xi$ (для $\exists$ этих интегралов достаточно лишь кусочной непрерывности функций u и v действительных переменных, а это означает, что $\exists \int_L f(\zeta) d\zeta$ даже в случае неаналитической функции $f(z)$, если эта функция является кусочно непрерывной)

$$\int_L f(\zeta) d\zeta = \int_L u d\xi - v d\eta + i \int_L u d\eta + v d\xi$$

Это соотношение может служить определением интеграла от функции $f(z)$ по кривой L. Из него следует ряд свойств:

Свойства: 1. $\int_{AB} f(\zeta) d\zeta = -\int_{BA} f(\zeta) d\zeta$; 2. $\int_{L_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{L_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{L_1+L_2} f(\zeta) d\zeta$

3. если a – комплексная постоянная, то $\int_L a f(\zeta) d\zeta = a \int_L f(\zeta) d\zeta$

4. $\int_L \{f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\} d\zeta = \int_L f_1(\zeta) d\zeta + \int_L f_2(\zeta) d\zeta$

5. $\left| \int_L f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_L |f(\zeta)| ds$, где ds - дифференциал длины дуги кривой L.

$$\left| \int_L f(\zeta) d\zeta \right| = \left| \lim_{\max |\Delta \zeta_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^*) \Delta \zeta_i \right| \leq \lim_{\max |\Delta \zeta_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i^*)| |\Delta \zeta_i| = \int_L |f(\zeta)| ds.$$

6. Формула замены переменной интегрирования:

$$\int_L f(z) dz = \int_\Gamma f[\varphi(\zeta)] \varphi'(\zeta) d\zeta,$$

где $z = \varphi(\zeta)$ – аналитическая функция ζ, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между кривыми L и Γ.

В частности: $\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt$,

где $z = z(t)$ - параметрическое задание кривой L.

Теорема Коши для односвязной области:

Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по $\forall$ замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области G, равен нулю.

Теорема Коши для ограниченной области:

Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области G, ограниченной кусочно-гладким контуром L, и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе L области G равен нулю:

$$\int_L f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Теорема Коши для многосвязной области.

∃ $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области G, ограниченной извне контуром L_0, а изнутри контурами $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и ∃ $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда $\int_L f(\zeta)d\zeta = 0$, где L - полная граница области G, состоящая из контуров $L_0, L_1, \ldots, L_n$, причем обход границы L происходит в положительном направлении.

Формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta .$$

Интеграл, стоящий в правой части, выражает значение аналитической функции $f(z)$ в некоторой точке z_0 через её значения на ∀ контуре Γ, лежащем в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащем точку z_0 внутри.

Этот интеграл называется интегралом Коши.

Замечание: 1. В формуле Коши интегрирование ведется по замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри точку z_0. При дополнительном условии непрерывности $f(z)$ в замкнутой области $\bar{G}$ аналогична формула имеет место, в силу теоремы Коши для ограниченной области, и при интегрировании по границе L области G.

2. Верно и если G-многосвязная. Для формулы следует рассматривать такой замкнутый контур Γ, который может быть стянут к точке z_0, все время оставаясь в области G.

Принцип максимума модуля аналитической функции

∃ функция f(z) является аналитической в области G и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или максимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области.

Принцип минимума модуля аналитической функции

Если аналитическая в области G функция f(z) не равна нулю ни в одной точке этой области и непрерывна в $\overline{G}$, то имеет место принцип минимума модуля этой функции, т.е. $|f(z)| \equiv const$ или минимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области. (рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ для доказательства и воспользоваться принципом максимума модуля этой функции)

Интегралы, зависящие от параметра.

∃ задана функция двух комплексных переменных $\varphi(z,\zeta)$, однозначно определенная для значений комплексной переменной $z = x+iy$ из области G и для значений комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, принадлежащих некоторой кусочно-гладкой кривой L. Взаимное расположение G и L может быть совершенно произвольно. ∃ функция двух комплексных переменных $\varphi(z,\zeta)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) Функция $\varphi(z,\zeta)$ при ∀ значении $\zeta \in C$ является аналитической функцией z в области G.

б) Функция $\varphi(z,\zeta)$ и её производная $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ являются непрерывными функциями по совокупности переменных z,ζ при произвольном изменении z в обл. G и ζ на кривой L.

(усл. б) означает, что действительная и мнимая части функции $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ непрерывны по совокупности переменных x, y, ξ, η.

Очевидно, интеграл от функции $\varphi(z,\zeta)$ по кривой L ∃ при ∀ $z \in G$ и является функцией комплексной переменной z:

$$F(z) = \int_L \varphi(z,\zeta)d\zeta = U(x,y) + iV(x,y)$$

При выполнении условий на функцию $\varphi(z,\zeta)$ функция F(z) – аналитическая функция комплексной переменной z в области G, причем производную функции F(z) можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство: рассмотрим криволинейный интеграл:

$$U(x,y) = \int_L u(x,y,\xi,\eta)\,d\xi - \sigma(x,y,\xi,\eta)\,d\eta.$$

Т.к. функции u и σ обладают частными производными по x и y, непрерывными по совокупности переменных, то частные производные функции U(x,y) по переменным x и y, ∃ и их можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла:

$U_x(x,y)=\int_L u_x d\xi - v_x d\eta \qquad V_y(x,y)=\int_L u_y d\xi - v_y d\eta$

Сами функции U_x и V_y - непрерывные функции переменных x и y в области G. На основании аналогичных свойств функции $V(x,y)$ и используя условия Коши-Римана для функции $\varphi(z,\zeta)$, получим:

$$V_y(x,y)=\int_L v_y d\xi + u_y d\eta = \int_L u_x d\xi - v_x d\eta = U_x$$

$$V_x(x,y)=\int_L v_x d\xi + u_x d\eta = -\int_L u_y d\xi - v_y d\eta = -U_y$$

Таким образом, для $F(z)$ выполнены условия Коши-Римана в области G.

Заметим, что: $F'(z)=U_x(x,y)+iV_x(x,y)=\int_L u_x d\xi - v_x d\eta + i\int_L v_x d\xi + u_x d\eta = \int_L \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)d\zeta$.

Отсюда следует возможность вычисления производной от интеграла путем дифференцирования подынтегральной функции по параметру.

При этом, если $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ удовл-тем же условиям, что и $\varphi(z,\zeta)$, то $F(z)$ - аналитич. функц. в G.

Теорема Лиувилля.

$\exists$ на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является аналитической, а её модуль равномерно ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Теорема о почленном интегрировании функционального ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывных функций $u_n(z)$ сходится равномерно в области G к функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по $\forall$ кусочно-гладкой кривой L, целиком лежащей в области G, можно вычислить путем почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, т.е.

$$\int_L f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L u_n(\zeta)d\zeta$$

Теорема Вейерштрасса.

$\exists$ функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области G, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в $\forall$ замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G к функции $f(z)$.

Тогда:

1) $f(z)$ - аналитическая функция в области G.
2) $f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$
3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в $\forall$ замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G.

Определение равномерной сходимости.

Если для $\forall$ положительного числа ε можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ неравенство $|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \varepsilon$. выполняется сразу для всех точек z области G, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется равномерно сходящимся в области G.

Вторая теорема Вейерштрасса: $\exists$ функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области G, непрерывными в $\bar{G}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно и в $\bar{G}$.

Степенные ряды. Ряд Тейлора.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$. Члены этого ряда являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в $\forall$ точке z, удовлетворяющей условию $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$; причем в круге $|z-z_0| \leq \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1 - z_0|$, ряд сходится равномерно.

Формула Коши-Адамара для радиуса круга сходимости степенного ряда.

$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$, где $R = 1/l$ - радиус круга сходимости (формула верна для $\forall l$)

Теорема Тейлора

Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0| < R$, может быть представлена в ~~виде~~ этом круге сходящимся степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, причем этот ряд определен однозначно.

Теорема Морера

$\exists$ функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по $\forall$ замкнутому контуру, целиком принадлежащему G, равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области G.

Единственность определения аналитической функции.

Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области G. Точка $z_0 \in G$ называется нулем $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Из разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, следует, что в данном случае коэффициент $c_0=0$. Если не только коэффициент c_0, но и коэффициенты $c_1, c_2, .., c_{k-1}$ равны нулю, а коэффициент c_k отличен от нуля, то точка z_0 называется нулем k-го порядка функции $f(z)$.

Согласно формуле $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ в нуле k-го порядка не только сама функция, но и её первые $k-1$ производных равны нулю, а k-я производная отлична от 0.

В окрестности нуля порядка k разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \varphi(z),$$ где $\varphi(z)$ - аналитическая функция в окрестности точки z_0, разложение которой в степенной ряд имеет вид $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-z_0)^n$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Отметим, что последний ряд сходится в том же круге, что и исходный.

Теорема единственности аналитической функции.

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области G и обращается в нуль в различных точках $z_n \in G$, $n=1,2,\dots$ Если последовательность $\{z_n\}$ сходится к пределу a, принадлежащему той же области, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю в обл. G.

Аналитическое продолжение.

Теорема о единственности определения аналитической функции позволяет автоматически распространить на комплексную область элементарные функции действительной переменной. Пусть на отрезке $[a;b]$ действительной оси x задана непрерывная функция $f(x)$ действительной переменной; тогда в некоторой области G комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a;b]$ действительной оси, может $\exists$ только одна аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, принимающая данные значения $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Назовем функцию $f(z)$ аналитическим продолжением функции $f(x)$ действительной переменной x в комплексную область G.

Элементарные функции комплексной переменной

Показательная функция e^z производит взаимно однозначное отображение полосы $0 \le y \le 2\pi$ плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по положительной части действительной оси. Показательная функция является бесконечнолистной периодической функцией комплексной переменной z с мнимым периодом $2\pi i$.
(областью её однолистности является $\forall$ полоса $y_0 < y < y_0 + 2\pi$, отображающаяся на полную плоскость w с разрезом по лучу $\arg w = y_0$. Аргумент w на плоскостях, соответствующих различным полосам $2\pi n \le y \le 2\pi(n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \dots)$ изменяется соответственно в различных пределах. Тем самым получается ~~набор~~ бесконечный набор различных экземпляров плоскости w, разрезанной по положительной части действительной оси u.)

Тригонометрические функции являются бесконечнолистными функциями комплексной переменной z, периодическими с действительным периодом 2π.

Определение правильной точки:

Точка $z_0 \in \overline{G}$ называется правильной точкой функции $f(z)$, если $\exists$ сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, который в общей части области G и своего круга сходимости $|z - z_0| < \rho(z_0)$ сходится к функции $f(z)$.

Определение особой точки:

Точки $z \in \overline{G}$, не являющиеся правильными точками функции $f(z)$, называются её особыми точками.

Определение функции, аналитической в замкнутой области $\overline{G_1}$

Функция $f(z)$ называется аналитической в замкнутой области $\overline{G_1}$, если все точки границы Γ области G_1 первоначального задания аналитической функции $f(z)$ являются правильными.

Определение: Функцию, аналитическую в замкнутой области $\overline{G_1}$, можно аналитически продолжить на большую область G, содержащую область $\overline{G_1}$

Определение полной аналитической функции:

Функция $F(z)$, полученная путем аналитического продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из области G_1 первоначального задания аналитической функции $f_1(z)$, называется полной аналитической функцией. Её область определения R называется естественной областью $\exists$ия полной аналитической функции.

Ряд Лорана и изолированные особые точки.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ – ряд Лорана.

Представим его в виде: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Областью сходимости этого ряда является общая ~~от~~ часть областей сходимости каждого из слагаемых правой части

$\exists$ область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ является круг с центром в точке z_0 некоторого радиуса R_1. Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции комплексной переменной:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R_1.$$

У ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сделаем замену переменной, положив $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$.

Ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n$ – обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции $\varphi(\zeta)$ комплексной переменной ζ. Обозначим радиус сходимости полученного степенного ряда через $1/R_2$.

Тогда $\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n, \quad |\zeta| < 1/R_2.$

Возвращаясь к старой переменной и полагая $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$, получим:

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}, \quad |z-z_0| > R_2.$$

Если $R_2 < R_1$, то $\exists$ общая область сходимости этих рядов – круговое кольцо $R_2 < |z-z_0| < R_1$, в котором ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ сходится к аналитической функции:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad R_2 < |z-z_0| < R_1.$$

В указанной области функция $f(z)$ обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Это означает, что ряд Лорана сходится внутри своего кольца сходимости к некоторой функции $f(z)$, аналитической в данном кольце.

Теорема Лорана:

Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.

Определение изолированной особой точки:

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в круговом кольце $0 < |z-z_0| < R_1$, а точка z_0 является особой точкой функции $f(z)$. (в самой точке z_0 функция может быть не определена)

Определение устранимой особой точки:

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, называется устранимой особой точкой.

Пример: Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности её изолированной особой точки z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т.е. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. При $z\to z_0$ $\exists$ предельное значение функции $f(z)$, равное c_0.

Если первоначально заданное значение $f(z_0)$ не совпадает с c_0, то изменим значение функции $f(z)$ в точке z_0, положив $f(z_0)=c_0$. Так определенная функция $f(z)$ будет аналитической всюду внутри круга $|z-z_0|<R_1$. Тем самым был устранен разрыв функции $f(z)$ в точке z_0. Поэтому z_0-устранимая особая точка)

Определение полюса аналитической функции:

Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности её изолированной особой точки z_0 содержит конечное число m членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т.е. $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. В этом случае точка z_0-полюс порядка m функции $f(z)$)

Определение существенно особой точки аналитической функции:

Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности её изолированной особой точки z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ $\left(f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right)$. В этом случае точка z_0 называется ~~z_0~~ существенно особой точкой функции.

Теорема о конечной устранимой особой точке:

Если точка z_0 - устранимая особая точка $f(z)$, то $\exists$ предельное значение $\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$, причем $|c_0|<\infty$.

Теорема о конечном полюсе аналитической функции:

Если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z\to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает ~~не~~ независимо от способа стремления точки z к z_0.

Теорема ~~Ao~~ Сохоцкого-Вейерштрасса:

Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в $\forall$ окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка z_1, в которой значение функции $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа B меньше чем на ε.

Определение: Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, если можно указать такое значение R, что вне круга $|z|>R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z=0$.

(Так как $f(z)$ является аналитической функцией в круговом кольце: $R<|z|<\infty$, то её можно разложить в ряд Лорана: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$, $R<|z|<\infty$.

Классификация точек аналогична)

Теория вычетов.

$\exists$ точка z_0 - изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$. В окрестности этой точки функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в ряд Лорана: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, где $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$, и в частности $C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(\zeta)d\zeta$

Определение вычета:

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)d\zeta$, взятому в положительном направлении по $\forall$ лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру L, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

если $z_0\neq\infty$, то $\operatorname{res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f(z)dz$; если $z_0=\infty$, то $\operatorname{res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^+} f(z)dz$

$\exists$ точка z_0 - полюс первого порядка функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки имеет место разложение:

$$f(z)=C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\ldots$$

Умножив обе части уравнения на $(z-z_0)$ и перейдя к пределу при $z\to z_0$, получим: $C_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. В данном случае функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде отношения двух аналитических функций:

$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, а точка z_0 - нуль первого порядка функции $\psi(z)$, т.е.

$$\psi(z)=(z-z_0)\cdot\psi'(z_0)+\frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\ldots,\ \psi'(z_0)\neq 0.$$

Тогда получим формулу вычисления вычета в полюсе первого порядка $\operatorname{res}[f(z),z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ $\left(f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$

Точка z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$. В окрестности этой точки имеет место разложение:

$$f(z) = C_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z-z_0)^1$$

Умножив обе части уравнения на $(z-z_0)^m$, получим:

$$(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

Взяв производную $(m-1)$-го порядка от обеих частей этого равенства и перейдя к пределу при $z \to z_0$, получим:

формулу вычисления вычета в полюсе порядка m:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

Основная теорема теории вычетов:

Ǝ функция $f(z)$ - аналитическая всюду в замкнутой области $\bar{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,\ldots,N)$, лежащих внутри обл. G.

Тогда $\int_{\Gamma^+} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k]$,

где Γ^+ - полная граница области G, проходимую в положительном направлении.

Теорема о вычетах функции, аналитичной на всей комплексной плоскости, за исключ. конечного числа особых точек.

Ǝ функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,2,\ldots,N)$, включая и $z=\infty$. $(z_N=\infty)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0.$$

Интегралы вида $I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} F(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$

замена $z = \rho e^{i\varphi}$ $(0 \le \rho \le 1)$; При этом отрезку $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0+2\pi$ вещественной прямой соответствуют значение $\rho=1$ и окружность $|z|=1$ на плоскости z;

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=e^{i\varphi}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=e^{i\varphi}},$$

а интеграл принимает вид:

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \tilde{F}(z)\,dz, \quad \text{где } \tilde{F}(z) = \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

* Лемма Жордана.

Ǝ функция $f(z)$ - аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ стремится к 0 при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$

$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta)\,d\zeta = 0$, где C'_R - дуга полуокружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости z.

Если $a<0$, а функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z \le 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta)d\zeta$, где C'_R - нижняя полуокружность.

Аналогично при $a=\pm i\alpha$ $(\alpha>0)$ при интегрировании соответственно в правой ($\operatorname{Re} z\ge 0$) или левой ($\operatorname{Re} z \le 0$) полуплоскости z.

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} e^{-a\zeta} f(\zeta)d\zeta$ при $a=i\alpha$ и $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} e^{a\zeta} f(\zeta)d\zeta$ при $a=-i\alpha$.

Определение мероморфной функции:

Функция комплексной переменной $f(z)$ называется мероморфной, если она определена на всей комплексной плоскости и не имеет в конечной части плоскости особых точек, отличных от полюсов.

Логарифмический вычет.

Пусть в области G задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в G, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,..,p)$, причем все z_k являются полюсами. Предположим, что на границе Γ области G нет ни нулей, ни особых точек функции $f(z)$, и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Функцию $f(z)$ часто называют логарифмической производной функции $f(z)$, а вычеты функции $\varphi(z)$ в её особых точках z_m $(m=1,..,M)$ - логарифмическими вычетами функции $f(z)$. Определим особые точки функции $f(z)$ в области G. В силу общих свойств аналитических функций ясно, что особыми точками функции $\varphi(z)$ будут нули $\tilde z_k$ $(k=1,..,n)$ и полюсы z_k $(k=1,\dots,p)$ функции $f(z)$. Найдем значение вычета $\varphi(z)$ в каждой из её особых точек. Пусть точка $z=\tilde z_k$ - нуль порядка n_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид:

$f(z) = (z-\tilde z_k)^{n_k} \cdot f_1(z)$, $f_1(\tilde z_k)\ne 0$, причем точка $\tilde z_k$ - правильная точка функции $f_1(z)$. Вычисляя функцию $\varphi(z)$ в окрестности точки $z=\tilde z_k$ по формуле $\varphi(z) = f'(z)/f(z)$, получаем:

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = n_k(\ln(z-\tilde z_k))' + (\ln f_1)' = \frac{n_k}{z-\tilde z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Отсюда следует, что точка $\tilde z_k$ - полюс первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет функции $f(z)$ в этой точке равен n_k. Итак, в нуле порядка n_k функции $f(z)$ её логарифмический вычет равен n_k т.е. порядку нуля:

$$\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \tilde z_k\right] = n_k$$

Пусть точка z_k - полюс порядка p_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид:

$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_k)^{p_k}}$, $f_1(z_k)\ne 0$, причем точка z_k - правильная точка функции $f_1(z)$

Поэтому для логарифмической производной функции $f(z)$ в окрестности точки $z=z_k$ получим выражение:

$$\varphi(z) = -\frac{p_k}{z-z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Отсюда следует, что точка z_k также - полюс первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет в этой точке равен $-p_k$. Итак, в полюсе порядка p_k функции $f(z)$ её логарифмический вычет равен порядку полюса, взятому со знаком минус:

$$res\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$$

Теорема о разности числа нулей и полюсов аналитической функции:

Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\bar{G}$, за исключением конечного числа лежащих внутри G изолированных особых точек z_k, которые все являются полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области G. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции $f(z)$ в области G определяется выражением:

$$N-P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

Под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (полюсов P) с учетом их кратности:

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k \; ; \; P = \sum_{k=1}^{p} p_k$$

Теорема Руше:

Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ - аналитические в замкнутой области $\bar{G}$, причем на границе Γ области G имеет место неравенство:

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma.$$

Тогда полное число нулей в области G функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$

Свойства аналитических функций:

1. Если функция $f(z)$ - аналитическая в области G, то она непрерывна в этой области.

2. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть аналитические функции в области G, то их сумма и произведение также аналитические функции в области G, а функция $\varphi(z) = f_1(z)/f_2(z)$ - аналитическая функция всюду, где $f_2(z) \neq 0$

3. Если $w = f(z)$ - аналитическая функция в области G плоскости комплексной переменной z, причем в области её значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\zeta = \varphi(w)$, то функция $F(z) = \varphi[f(z)]$ - аналитическая функция комплексной переменной z в области G.

4. Теорема о существовании и аналитичности обратной функции.

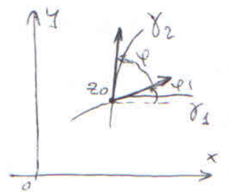
Если $w = f(z)$ - аналитическая функция в области G, причем ~~$|f'(z)|$~~ $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности некоторой точки $z_0 \in G$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ области G значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексной переменной w. При этом имеет место соотношение $f'(z_0) = 1/\varphi'(w_0)$

5. $\exists$ в области G плоскости xy задана функция $u(x,y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. Тогда мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной.
Действительно, в силу условий Коши-Римана по заданной функции $u(x,y)$ однозначно определяется полный дифференциал неизвестной функции $v(x,y)$:
$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

6. $\exists$ функция $f(z)$ - аналитическая в области G. Рассмотрим в соответствующей области плоскости xy семейства кривых $u(x,y) = C$ и $v(x,y) = C$, представляющие собой линии уровней действительной и мнимой частей функции $f(z)$.
Из условий Коши-Римана легко показать, что во всех точках данной области $\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0$. Т.к. grad ортогонален линии уровня, то отсюда следует, что семейства кривых $u(x,y) = C$ и $v(x,y) = C$ взаимно ортогональны.

Геометрический смысл производной функции

$\exists$ $f(z)$ - аналитическая функция в некоторой области G. Выберем произвольную точку $z_0 \in G$ и проведем через нее произвольную (гладкую) кривую γ_1, целиком лежащую в G. Функция $f(z)$ производит отображение области G комплексной плоскости z на некоторую область G комплексной плоскости w. $\exists$ точка z_0 переходит в точку w_0 а кривая γ_1 - в проходящую через w_0 кривую Γ.



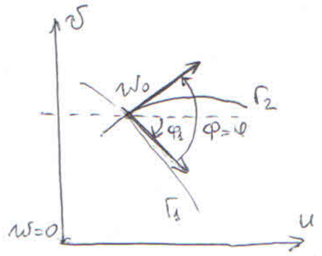
По условию $\exists$ производная $f'(z)$ функции $w = f(z)$ в точке z_0. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$ и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме (условие $f'(z_0) \neq 0$ необходимо для возможности такого представления):
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k \cdot e^{i\alpha}$$

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z = z_0 + \Delta z$ лежат на кривой γ_1. Очевидно, соответствующие им точки $w = w_0 + \Delta w$ лежат на кривой Γ_1. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 соответственно. Заметим, что $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей x и y, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ - длины этих векторов.

При $\Delta z\to 0$. векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=ke^{i\alpha}$ следует, что:

$\alpha=\arg f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z=$

$=\Phi_1-\varphi_1$, т.е. аргумент α производной имеет геометрический смысл разности Φ_1 и φ_1. (углы между касат. к Γ_1 в точке w_0 с осью u и между касат. к кривой γ_1 в точке z_0 с осью x.



Т.к. производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет такой же и для $\forall$ другой кривой, проходящей через точку z_0 (хотя Φ_1 и φ_1 могут измениться). Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, угол $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ между $\forall$ кривыми γ_1,γ_2, пересекающимися в точке z_0, равен углу $\Phi=\Phi_1-\Phi_2$ между их образами, пересекающимися в точке $w_0=f(z_0)$. При этом сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми γ_1 и γ_2 и их образами, но и направление углов.

Это свойство данного отображения носит название свойства сохранения углов.

Аналогично из $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=ke^{i\alpha}$ получим $k=|f'(z_0)|=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$

т.е. с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место равенство $|\Delta w|=k|\Delta z|$. Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой γ_1. Геометрический смысл этого соотношения состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия.

Это свойство данного отображения носит название свойства постоянства растяжения.

Конформное отображение области G комплексной плоскости z на область G^* комплексной плоскости w осуществляется только однолистными аналитическими функциями комплексной переменной с производной, отличной от нуля во всех точках области G.

Определение конформного отображения второго рода:

Отображение, при котором сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направление углов меняется на противоположное, называется конформным отображением 2го рода.

Теорема о необходимом и достаточном условии однолистности в точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась однолистной и аналитической в области G и $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ осуществляла конформное отображение области G на область G^* комплексной плоскости w, представляющую собой область значений функции $w = f(z)$ при $z \in G$.

Теорема Римана о существовании конформного отображения

Всякую односвязную область G комплексной плоскости z, граница которой состоит более, чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w.

Теорема единственности конформного отображения:

Функция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области G (граница которой состоит более чем из одной точки) на единичный круг $|w| < 1$ так, что $f(z_0) = 0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha_0$ (где $z_0 \in G$ и α_0 - заданное действительное число), определена единственным образом.

Принцип соответствия границ:

$\exists$ в области G задана однозначная непрерывная функция $w = f(z)$. Очевидно, эта функция переводит $\forall$ замкнутую кривую γ, целиком лежащую в области G, также в замкнутую кривую Γ на плоскости w. Будем говорить, что при отображении кривой γ, осуществленном функцией $f(z)$, сохраняется направление обхода, если при непрерывном движении точки в положительном направлении вдоль кривой γ соответствующая ей точка обходит кривую Γ также в положительном направлении.

Теорема:

$\exists$ в конечной области G, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая функция $f(z)$, непрерывная в $\bar{G}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ комплексной плоскости w. Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на внутреннюю область G^*, ограниченную контуром Γ.

Дробно-линейная функция:

Функция комплексной переменной $w = \frac{a+b\cdot z}{c+d\cdot z}$, где a, b, c, d – заданные комплексные постоянные, которые, очевидно, должны удовлетворять условию $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, т.к. в противном случае функция $f(z)$ – тождественно равна постоянной.

Можно записать дробно-линейную функцию в виде:

$w = f(z) = \lambda \cdot \frac{\alpha+z}{\beta+z}$, $\lambda = \frac{b}{d}$, $\alpha = a/b$, $\beta = c/d$, $\alpha \neq \beta$.

Это однозначная аналитическая функция на полной комплексной плоскости z, имеющей единственную особую точку – полюс первого порядка $z_0 = -\frac{c}{d} = -\beta$.

Обратная функция $z = \frac{\lambda\alpha - \beta w}{-\lambda + w}$ – дробно-линейная функция, определенная на полной плоскости w.

Поэтому дробно-линейная функция, переводящая конечные точки z_1 и z_2 соответственно в точки $w_1 = 0$ и $w_2 = \infty$ имеет вид $w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$, где $\alpha = -z_1$, а $\beta = z_2$

Отображение, осуществляемое этой функцией, называется дробно-линейным отображением. Найдем производную функции $w = f(z)$:

$$f'(z) = \lambda \frac{\beta-\alpha}{(\beta+z)^2} \neq 0$$

(в силу условия $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ производная дробно-линейной функции отлична от нуля во всех конечных точках плоскости z. Это означает, что дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение плоскости z на плоскость w.

Круговое свойство дробно-линейной функции.

Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости w. При этом включаются прямые в семейство окружностей, рассматривая прямые как окружности бесконечно большого радиуса.

Групповое свойство дробно-линейной функции:

Суперпозиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, и отображение, обратное к дробно-линейному, также дробно-линейное.

Свойство сохранения симметрии дробно-линейной функции:

При отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией точки, симметричные относительно $\forall$ окружности, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности.

Функция Жуковского:

Функция комплексной переменной $w = f(z) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$.

Эта функция аналитическая на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$, представляющей собой полюс первого порядка данной функции.

$$f'(z) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{z^2}) \Rightarrow f'(z)=0 \text{ только при } z=\pm 1$$

Тем самым отображение, осуществляемое этой функцией - конформное в окрестности $\forall$ точки z, за исключением этих двух точек

Области однолистности функции Жуковского:

Предположим, что две различные точки комплексной плоскости $z_1 \neq z_2$ переводятся функцией $f(z)$ в одну и ту же точку плоскости w, т.е.:

$$z_1+\frac{1}{z_1} = z_2+\frac{1}{z_2} \quad \text{или} \quad z_1-z_2 = \frac{z_1-z_2}{z_1 z_2}$$, так как $z_1 \neq z_2$, то

из соотношения следует $z_1 z_2 = 1$. $\Rightarrow$ области однолистности функции Жуковского являются, в частности, области внутри $(|z|<1)$ и вне $(|z|>1)$ единичного круга.

Рассмотрим отображение окружностей ~~$z=re^{i\varphi}$~~ $|z|=r_0$; $z=re^{i\varphi}$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\varphi; \quad v(r,\varphi) = \frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\varphi$$

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r_0+\frac{1}{r_0})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r_0-\frac{1}{r_0})^2} = 1 \Rightarrow w=f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$ отображает концентрические окружности $|z|=r_0$ в эллипсы. Фокусы эллипса в точка $c=\pm 1$

При $r\to 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1;1]$, действительной оси, проходимой дважды. При $r_1 \to 0$ ~~окружность~~ эллипс переходит в окружность бесконечно большого радиуса.

Найдем образ лучей $\arg z=\varphi_0$ при отображении $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ отрезки лучей $\arg z=\varphi_0$ переходят в ветви гиперболы $\frac{u^2}{\cos\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1$

Связь аналитических и гармонических функций.

Пусть в области G комплексной плоскости z задана аналитическая функция $f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$. Тогда всюду в этой области функции u и υ связаны условиями Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

Так как аналитическая функция имеет в области G производные всех порядков, то и действительные функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ имеют в соответствующей области плоскости xy частные производные $\forall$-го порядка.
Это позволяет дифференцировать выражения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ по переменным x, y $\forall$ число раз. Продифференцировав ~~перв~~ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$ по x и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ по y и сложив их, получим: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $x, y \in G$
и аналогично: $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} = 0$, $x, y \in G$ $\Rightarrow$ функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ гармонические в данной области плоскости xy.

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ в области G является требование, чтобы функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ были гармоническими и удовлетворяли условиям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ в соответствующей области плоскости xy.

Формула среднего значения для гармонической функции:
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \cdot \int_{C_{R_0}} u(\xi, \eta)\, dS.$$

При отображении области G плоскости z на область G' плоскости ζ, осуществляемом функцией $f(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$, уравнение Лапласа для функции $u(x,y)$ перейдет в уравнение Лапласа для функции $u(\xi,\eta) = u[x(\xi,\eta); y(\xi,\eta)]$ ~~лишь~~ лишь в том случае, если данное отображение является конформным отображением I или II рода.
(При данных отображениях оператор Лапласа Δ_{xy} переходит в оператор $|f'(z)|^2 \Delta_{\xi\eta} = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|^2} \Delta_{\xi\eta}$, где $z = \varphi(\zeta)$ - обратная функция, осуществляющая конформное отображение области G' на область G.

Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа ~~в круге $|z|<R$~~ в случае односвязной области

Пусть требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$. в области G, непрерывную в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$ и принимающую заданные значения на границе Γ:
$u(P)_\Gamma = \alpha(P)$, где $\alpha(P)$ - заданная непрерывная функция точки P контура Γ

Начнем решение задачи Дирихле для круга радиуса a.
Введем полярную систему координат r,φ с началом в центре круга. Тогда функция $\alpha(P)$ - функция лишь переменной φ. Выразим значение неизвестной функции $u(r,\varphi)$ в произвольной внутренней точке (r_0,φ_0) круга через её граничные значения $\alpha(\varphi)$. Для этого построим конформное отображение заданного круга на единичный круг $|w|<1$ плоскости w, при котором точка (r_0,φ_0) перейдет в центр $w=0$. Отображающая функция имеет вид: $w=f(z)=\lambda\dfrac{z-z_0}{z-\frac{a^2}{\bar z_0}}=\lambda\dfrac{z-r_0e^{i\varphi_0}}{z-\frac{a^2}{r_0}e^{i\varphi_0}}$,

где постоянная λ выбирается из условия, чтобы граничные точки $z=ae^{i\varphi}$ заданного круга перешли в граничные точки $|w|=1$ единичного круга плоскости w, при этом $|\lambda|=\frac{a}{r_0}$, а $\arg\lambda$, определяющий поворот круга $|w|\leq 1$ вокруг его центра $w=0$, может быть выбран произвольным. В результате произведенного преобразования искомая функция $u(r,\varphi)$ перейдет в функцию $V(\rho,\psi)=u[r(\rho,\psi),\varphi(r,\psi)]$, где ρ,ψ - полярные координаты на плоскости w, связанные с координатами r,φ соотношением $w=f(z)=\lambda\cdot\dfrac{z-z_0}{z-\frac{a^2}{\bar z_0}}=\lambda\cdot\dfrac{z-r_0e^{i\varphi_0}}{z-\frac{a^2}{r_0}e^{i\varphi_0}}$. При этом заданная граничная функция $\alpha(\varphi)$ перейдет в функцию $A(\psi)=\alpha[\varphi(1,\psi)]$. Так как функция $V(\rho,\psi)$ - гармоническая функция своих переменных, то её значение в центре круга может быть найдено по формуле среднего значения $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi R_0}\displaystyle\int_{C_{R_0}}u(\xi,\eta)\,ds$, откуда

$$u(r_0,\varphi_0)=V|_{w=0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A(\psi)\,d\psi$$

Из этой формулы мы получим явное выражение решения задачи Дирихле для круга, если выразим функцию $A(\psi)$ через первоначально заданную функцию $\alpha(\varphi)$. Заметим, что для соответствия граничных точек круга $|z|\leq a$ и круга $|w|\leq 1$ формула $w=f(z)=\ldots$ дает:

$$e^{i\psi}=\frac{a}{r_0}\cdot\frac{ae^{i\varphi}-r_0e^{i\varphi_0}}{a\cdot e^{i\varphi}-\frac{a^2}{r_0}e^{i\varphi_0}},\ \text{откуда}\ d\psi=\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi$$

Сделав в интеграле $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A(\psi)\,d\psi$ замену переменной интегрирования $\psi=\psi(\varphi)$, где связь переменных ψ и φ опред. формулой $e^{i\psi}=\ldots$, получим

$$u(r_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,\alpha(\varphi)\,d\varphi$$

Формула дает явное аналитическое выражение решения задачи Дирихле для круга радиуса a через функцию граничных условий $\alpha(\varphi)$ - называется интеграл Пуассона

Преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(p)$ комплексной переменной p с помощью соотношения

$$F(p) = \int^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Естественно, что не для всякой функции $f(t)$ этот интеграл имеет смысл.

Будем рассматривать функции $f(t)$, определенные для всех значений действительной переменной $-\infty < t < +\infty$ и удовлетворяющие следующим условиям:

① при $t<0$ функция $f(t) \equiv 0$

② при $t \geq 0$ функция $f(t)$ на $\forall$ конечном участке оси t имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода;

③ при $t \to \infty$ $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т.е. для каждой функции рассматриваемого класса $\exists$ют такие положительные постоянные M и a, что для всех $t>0$ $|f(t)| \leq Me^{at}$.

Точная нижняя грань тех значений a, для которых имеет место неравенство $|f(t)| \leq M \cdot e^{at}$, называется показателем степени роста функции $f(t)$. Легко, в частности, видеть, что показатель степени роста степенной функции $f(t) = t^n$ равен 0.

Определение преобразования Лапласа:

Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительной переменной t называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексной переменной p, определенную с помощью интеграла:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Определение изображения Лапласа:

Функция $F(p)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования $F(p) = \int^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ называется изображением Лапласа функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется оригиналом функции $F(p)$.

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(t).$$

Теорема об определении оригинала по изображению:

$\exists$ известно, что заданная функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$ — изображение кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t, обладающей степенью роста a.

Тогда $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$, $x > a$. — формула Меллина

Теорема о достаточных условиях существования оригинала функции комплексной переменной.

I функция $F(p)$ комплексной переменной $p=x+iy$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(p)$ - аналитическая функция в области $Re\, p>a$.

б) в области $Re\, p>a$ функция $F(p)$ стремится к 0 при $|p|\to\infty$ равномерно относительно $\arg p$.

в) для всех $Re\, p = x>a$ сходится интеграл (несобственный интеграл первого рода по прямой $Re\, p = x$ от действит. функции $|F(p)|$)

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dy < M, \quad x>a.$$

Тогда функция $F(p)$ при $Re\, p>a$ является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\cdot F(p)\,dp, \quad x>a.$$

Теоремы

Теорема о связи предела последовательности $\{z_n\}$ с пределами последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\}$ (а значит и $\exists$ ем предела последовательности) является сходимость последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (а значит и $\exists$ е пределов последовательностей) $(z_n = x_n + iy_n)$

Доказательство:

Если последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу $z = x+iy$, то $\forall \varepsilon > 0$ $|x_n - x| \le |z_n - z| < \varepsilon$ и $|y_n - y| \le |z_n - z| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$. Это и доказывает связь между пределами последовательностей. Обратное утверждение следует из соотношения $|z_n - z| \le \sqrt{(x_n-x)^2 + (y_n-y)^2}$, где x и y пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и $z = x+iy$.

Теорема (о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции в точке)

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы в точке $(x_0; y_0)$ $\exists$ частные производные функций $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ по переменным x, y и $\exists$ соотношения Коши-Римана.

$u_x(x_0,y_0) = \upsilon_y(x_0,y_0) \quad u_y(x_0,y_0) = -\upsilon_x$..

Доказательство:

1) Необходимость: по условию теоремы $\exists\ f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ не зависящий от способа стремления Δz к нулю. Положим $\Delta z = \Delta x$ и рассмотрим выражение: $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\upsilon(x_0+\Delta x; y_0) - \upsilon(x_0; y_0)}{\Delta x}$

Из существования предела комплексного выражения следует $\exists$ пределов его действительной и мнимой частей. Поэтому в точке $(x_0; y_0)$ существуют частные производные по x функций $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ и имеет место формула:

$f'(z_0) = u_x(x_0; y_0) + i\upsilon_x(x_0; y_0)$. Полагая $\Delta z = i\Delta y$, находим:

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0; y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\upsilon(x_0, y_0+\Delta y) - \upsilon(x_0; y_0)}{\Delta y} = -i\, u_y(x_0; y_0) + \upsilon_y(x_0; y_0)$$

приравнивая обе части получим условия Коши-Римана.

2) Достаточность: по определению дифференцируемости, приращение функций $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ в окрестности точки $(x_0; y_0)$ могут быть записаны в виде:

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0; y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0; y_0)\Delta y + \xi(x,y)$$

$\upsilon(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \upsilon(x_0; y_0) = \upsilon_x(x_0; y_0)\Delta x + \upsilon_y(x_0; y_0)\Delta y + \eta(x,y)$, где функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ стремятся к нулю при $x \to x_0$, $y \to y_0$ быстрее, чем Δx и Δy

$\left(\lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \dfrac{\xi(x,y)}{|\Delta z|} = 0,\ \lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \dfrac{\eta(x,y)}{|\Delta z|} = 0,\ |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)$

Составим теперь разностное отношение $\dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, и используя выражения $u(z_0+\Delta z) - u(z_0)$ и $\upsilon(z_0+\Delta z) - \upsilon(z_0)$ и условия Коши-Римана преобразуем его к виду:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0;y_0)\frac{\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} + v_x(x_0;y_0)\frac{i\Delta x-\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} +$$

$$+\frac{\xi(x,y)+i\eta(x,y)}{\Delta x+i\Delta y} = u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0;y_0)+\frac{\zeta(z)}{\Delta z} \quad (\zeta(z)=\xi(x,y)+i\eta(x,y))$$

При стремлении $\Delta z\to 0$ последнее слагаемое этой формулы стремится к 0, а первые 2 остаются неизменными. Поэтому $\exists \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$ что и доказывает дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0. ■

Теорема Коши для односвязной области:

Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по $\forall$ замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области G, равен 0.

Доказательство.

$$\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = \int_\Gamma u dx - v dy + i\int_\Gamma v dx + u dy.$$

Так как функция $f(z)$ - аналитическая всюду внутри контура Γ, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области, ограниченной этим контуром Γ, обладают непрерывными частными производными первого порядка. Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части последнего равенства, можно применить формулу $\int_C Pdx+Qdy=\iint_G\{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\}dxdy$

(если функции P и Q непрерывны в замкнутой области $\bar G$, ограниченной кусочно-гладким контуром C, а их частные производные первого порядка непрерывны в G)

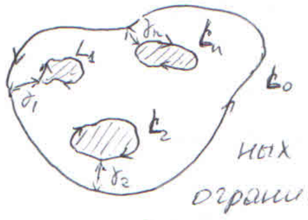
Кроме того, частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ связаны соотношениями Коши-Римана. Поэтому $\int u dx - v dy = \iint_G\{-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\}dxdy=0$ и $\int_\Gamma v dx+u dy=\iint_G\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\}dxdy=0$.

Это доказывает утверждение теоремы. ■

Теорема Коши для многосвязной области.

Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в многосвязной области G, ограниченной извне контуром L_0, а изнутри контурами $L_1, L_2, \dots, L_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar G$. Тогда $\int_L f(\zeta)d\zeta=0$, где L - полная граница области G, состоящая из контуров L_0, $L_1,\dots,L_n$, причем обход границы L происходит в положительном направлении.

Доказательство:



Проведем гладкие кривые $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, соединяющие контур L_0 с контурами L_1, L_2 и т.д. Тогда область, ограниченная кривыми $L_0, L_1,\dots,L_n$ и кривыми $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается односвязной. В силу теоремы Коши для ограниченной области интеграл по границе этой области равен 0. Но интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях и при суммировании интегралов выпадают.

Поэтому имеет место равенство:
$\int\limits_{L_0^+} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{L_1^-} f(\zeta)d\zeta + \ldots + \int\limits_{L_n^-} f(\zeta)d\zeta = 0$ (верхние индексы у L_i указывают направление обхода.)

Теорема об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области G, а интеграл от этой функции по $\forall$ замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в данной области, равен 0. Тогда функция $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ $(z, z_0 \in G)$ является аналитической функцией в области G и $\Phi'(z) = f(z)$

Доказательство:

Составим разностное отношение $\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right\} =$

$= \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$. Последнее равенство имеет место в силу независимости значения интеграла, определяющего функцию $\Phi(z)$, от пути интегрирования. Выберем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле прямую, соединяющую точки z и $z+\Delta z$. Тогда $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$.

Оценим выражение:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}d\zeta\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta\in[z;z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z| =$$

$= \max\limits_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|$.

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z для $\forall$ положительного числа ε может быть указано такое значение $\delta>0$, что при $|\Delta z|<\delta$ $\max\limits_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon \text{ при } 0<|\Delta z|<\delta.$$

Это и означает, что $\exists \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

Итак, функция $\Phi(z)$, определенная интегралом $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z)$, во всех точках области G имеет непрерывную производную (функция $f(z)$ по условию теоремы непрерывна в G). Тем самым $\Phi(z)$ - аналитическая функция в области G.

Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$.

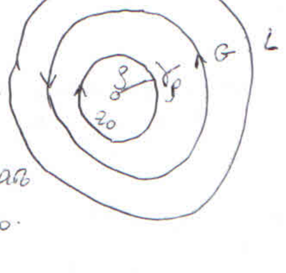
Интегральная формула Коши для односвязной области.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области G, ограниченной контуром L. Возьмем произвольную внутреннюю точку z_0 и построим замкнутый контур Γ, целиком лежащий в G и содержащий точку z_0 внутри себя. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Функция $\varphi(z)$, очевидно, — аналитическая функция всюду в области G, за исключением точки z_0. Поэтому, если в области G взять такой замкнутый контур γ, лежащий внутри Γ, чтобы точка z_0 попала внутрь области, ограниченной контуром γ, то функция $\varphi(z)$ — аналитическая в двухсвязной области G^*, заключенной между контурами Γ и γ. Согласно теореме Коши интеграл от функции $\varphi(z)$ по кривой $\Gamma+\gamma$ равен 0: $\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0$.

Изменив направление интегрирования во втором интеграле, это равенство можно переписать в виде: $\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$



Поскольку интеграл, стоящий слева, не зависит от выбора контура γ, то этим свойством обладает и интеграл, стоящий справа. Для дальнейших рассмотрений удобно в качестве контура интегрирования γ выбрать окружность γ_ρ некоторого радиуса ρ с центром в точке z_0.
Положив $\zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ имеем $\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = i\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi$

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}[f(\zeta) - f(z_0)]d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}[f(\zeta) - f(z_0)]d\varphi + 2\pi f(z_0)$$

Устремим теперь ρ к 0. Т.к. $f(z)$ — аналитическая, а следовательно, непрерывная функция в области G, то для $\forall$ положительного числа ε можно указать такое значение ρ, что $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ для $|\zeta - z_0| < \rho$. Отсюда следует, что при $\rho \to 0$ существует предел:

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)]d\varphi = 0$$

а, так как $2\pi f(z_0)$ не зависит от ρ, то $\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)d\varphi = 2\pi f(z_0)$, а следовательно, $\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z_0)$ и согласно $\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$ получим:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Теорема об аналитичности интеграла типа Коши.

В $\forall$ точке комплексной плоскости, кроме точек, лежащих на линии Γ, интеграл типа Коши является аналитической функцией и при этом:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Доказательство: Составим разностное отношение:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left\{\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z-\Delta z}-\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}$$

Очевидно, $\exists \lim_{\Delta z\to 0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=f'(z)$

Итак, интеграл типа Коши во всех точках заданной области комплексной плоскости, ограниченной контуром Γ, является дифференцируемой функцией и имеет непрерывную производную всюду, кроме точек, лежащих на линии Γ. Т.о. интеграл типа Коши является аналитической функцией

Принцип максимума модуля аналитической функции.

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области G и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)|\equiv const$, или max значение $|f(z)|$ достигаются только на границе области.

Доказательство:

Действительная функция двух действительных переменных $|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$ по условию является непрерывной в замкнутой области. Поэтому она достигает своего максимального значения M в какой-либо точке (x_0,y_0) данной области. То есть:

$$M=|f(z_0)|\geq|f(z)|,\quad \begin{matrix} z_0=x_0+iy_0 \\ x\in\overline{G}\end{matrix} \qquad (1)$$

Предположим, что точка z_0 - внутренняя точка области G. Построим в области G круг K_0 некоторого радиуса R с центром в точке z_0 и запишем формулу среднего значения для z_0 и R. Учтя (1), получим:

$$2\pi M=\left|\int_0^{2\pi}f(\zeta)d\varphi\right|\leq\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|d\varphi\leq 2\pi M$$

Следовательно, $\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|d\varphi=2\pi M$. Из этого соотношения в силу непрерывности функции $f(\zeta)$ на контуре интегрирования и неравенства (1) следует, что

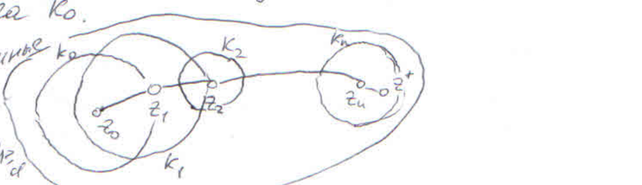
$|f(\zeta)|=M$ при $\zeta=z_0+Re^{i\varphi}$

Действительно, по (1) функция $|f(\zeta)|$ не может быть больше M ни в одной точке контура интегрирования. Если предположить, что в какой-либо точке ζ_0 контура интегрирования функция $|f(\zeta_0)|$ строго меньше M, то из непрерывности $|f(\zeta)|$ следует, что $|f(\zeta)|$ строго меньше M и в некоторой окрестности точки ζ_0, т.е. можно указать отрезок $[\varphi_1;\varphi_2]$ интегрирования, на котором $|f(\zeta)|\leq M-\varepsilon$, $\varepsilon>0$

Тогда $\int\limits_0^{2\pi}|f(\zeta)|d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}|f(\zeta)|d\varphi+\int\limits_0^{\varphi_1}|f(\zeta)|d\varphi+\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi}|f(\zeta)|d\varphi\le$

$\le(M-\varepsilon)(\varphi_2-\varphi_1)+M[2\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]<2\pi M$, что противоречит $\int\limits_0^{2\pi}|f(\zeta)|d\varphi=2\pi M$

Итак, соотношение $|f(\zeta)|=M$ при $\zeta=z_0+Re^{i\varphi}$ действительно имеет место. Это означает, что на окружности радиуса R с центром в точке z_0 функция $|f(\zeta)|$ имеет постоянное значение, равное своему максимальному значению в области G. То же будет иметь место и на $\forall$ окружности меньшего радиуса с центром в точке z_0, а следовательно, и во всем круге K_0. Теперь легко показать, что это же значение функции $|f(z)|$ имеет и в $\forall$ другой внутренней точке z^* области G. Для этого соединим точки z_0 и z^* кривой L, целиком лежащей в области G и отстоящей от её границы не меньше, чем на некоторое положительное число d. Возьмем точку z_{01}, являющуюся последней общей точкой кривой L_0 и круга K_0.



Поскольку $|f(z_1)|=M$, то, повторяя проведенные выше рассуждения, покажем, что внутри круга $K_1\subset G$ с центром в точке z_1 радиуса R_{d} модуль функции $f(z)$ принимает постоянное значение, равное максимальному значению M. Взяв на кривой L точку z_2, являющуюся последней общей точкой кривой L и круга K_1, и продолжая данный процесс, мы в результате конечного числа шагов получим, что внутри круга K_n, которому принадлежит точка z^*, имеет место равенство $|f(z)|=M$, что и доказывает утверждение.

Замечание: Если аналитическая в области G функция $f(z)$ не равна 0 ни в одной точке этой области и непрерывна в $\bar{G}$, то имеет место принцип min модуля этой функции.

Теорема Лиувилля.

Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является аналитической, а её модуль равномерно ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Доказательство:

Запишем значение производной $f'(z_0)$ в произвольной точке z по формуле $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$, причем интегрирование будем вести по окружности некоторого радиуса R с центром в точке z, т.е. $|\zeta-z|=R$. По условию теоремы $\exists$ такая константа M, что $|f(\zeta)|\le M$ независимо от R.

Поэтому $|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R}\frac{|f(\zeta)|}{R^2}ds\le\frac{M}{R}$. Т.к. радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)|=0$. В силу произвольности выбора точки z, заключаем, что $|f'(z)|\equiv0$ на всей комплексной плоскости.

Отсюда следует, что $f(z)=\mathrm{const}$.

Теорема о среднем.

Значение аналитической функции в центре окружности как среднее её граничных значений выражается формулой среднего значения:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}} f(\zeta)ds.$$

Доказательство:

Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области G и z_0 - некоторая внутренняя точка этой области. Опишем из этой точки, как из центра окружность радиуса R_0, целиком лежащую в обл. G. Тогда по формуле Коши получим:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}d\zeta.$$

Но на окружности C_{R_0} $\zeta=z_0+Re^{i\varphi}$, поэтому

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})d\varphi \text{ или}$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}}f(\zeta)ds.$$

Теорема Морера.

Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по $\forall$ замкнутому контуру, целиком принадлежащему G, равен 0. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области G.

Доказательство:

В теореме об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом было доказано, что при условиях теоремы функция $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$, где z_0 и z - произвольные точки области G, а интеграл берется по $\forall$ пути, соединяющему эти точки в G, является аналитической в этой области функцией, причем $F'(z)=f(z)$. Но производная аналитической функции также является аналитической функцией, т.е. $\exists$ непрерывная производная функции $F'(z_0)$, а именно $F''(z)=f'(z)$.

Критерий Коши.

Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходился равномерно в области G, необходимо и достаточно чтобы для $\forall\varepsilon>0$ существовало такое $N(\varepsilon)$, что одновременно во всех точках области G выполняется соотношение:

$$|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \quad \text{при } n\geq N \text{ и для } \forall \text{ натурального } m.$$

Доказательство:

1) Необходимость. Из равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ следует, что для $\forall\varepsilon>0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что во всех точках z области G имеет место неравенства:

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon/2,\quad |f(z)-S_{n+m}(z)|<\varepsilon/2. \quad \text{при } n\geq N \text{ и для } \forall \text{ натурального } m,$$

откуда $|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$

2) Достаточность

Из соотношения $|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ в силу критерия Коши для числовой последовательности с комплексными членами следует, что при $\forall$ фиксированном $z\in G$ последовательность $\{S_n(z)\}$ является сходящейся. Следовательно, при выполнении $|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится в области G к некоторой функции $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)$. Но в силу $|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$:

$\lim\limits_{n\to\infty}|S_{n+m}(z)-S_n(z)|=|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ при $n\geq N(\varepsilon)$ во всех точках области G одновременно, что и доказывает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ в области G.

Теорема:

Если функции $U_n(z)$ непрерывны в области G, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(z)$ сходится в этой области равномерно к функции $f(z)$, то $f(z)$ также непрерывна в области G.

Доказательство:

Рассмотрим выражение $|f(z+\Delta z)-f(z)|$, где точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области G. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(z)$, для $\forall\,\varepsilon>0$ можно указать такое N, что одновременно имеют место неравенства:

$$\left|f(z+\Delta z)-\sum_{k=1}^{N}U_k(z+\Delta z)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|f(z)-\sum_{k=1}^{N}U_k(z)\right|<\varepsilon/3$$

для $\forall$ точек z и $z+\Delta z$, принадлежащих области G. В силу непрерывности функций $U_k(z)$, в $\forall$ точке $z\in G$ для заданного ε и выбранного N можно указать $\delta>0$, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{N}U_k(z+\Delta z)-\sum\limits_{k=1}^{N}U_k(z)\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{N}|U_k(z+\Delta z)-U_k(z)|<\varepsilon/3$ при $|\Delta z|<\delta$.

Из этих уравнений и из того, что модуль суммы не превосходит сумму модулей, следует, что для $\forall\,\varepsilon>0$ можно указать такое δ, что $|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon$ при $|\Delta z|<\delta$. Это и доказывает непрерывность функции $f(z)$ в области G.

Теорема о почленном интегрировании функционального ряда.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ непрерывных функций $U_n(z)$ сходится равномерно в обл. G к функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по $\forall$ кусочно-гладкой кривой C, целиком лежащей в области G, можно вычислить путем почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, т.е. $\int\limits_C f(\zeta)d\zeta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_C U_n(\zeta)d\zeta$

Доказательство: Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится равномерно, то для $\forall$ заданного $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что для всех точек $\zeta\in G$.

$|r_n(\zeta)|<\frac{\varepsilon}{L}$ при $n\geq N(\varepsilon)$, где L - длина кривой C.

Тогда $\left|\int\limits_C f(\zeta)d\zeta-\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_C U_k(\zeta)d\zeta\right|=\left|\int\limits_C r_n(\zeta)d\zeta\right|\leq\int\limits_C|r_n(\zeta)d\zeta|<\varepsilon.$

Теорема Вейерштрасса (первая)

J функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области G, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в $\forall$ замкнутой подобласти $\overline{G}'$ области G к функции $f(z)$.

Тогда:

① $f(z)$ является аналитической функцией в области G.

② $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$

③ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в $\forall$ замкнутой подобласти $\overline{G}'$ области G.

Доказательство:

① Рассмотрим произвольную внутреннюю точку $z_0 \in G$ и построим односвязную подобласть G' области G, содержащую точку z_0 внутри.

По позапрошлой теореме $f(z)$ - непрерывная функция в области G. Рассмотрим интеграл от $f(z)$ по произвольному замкнутому контуру C, целиком лежащему в области G'. По теореме о почленном интегрировании функционального ряда этот интеграл можно вычислить путем почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Тогда в силу аналитичности функции $u_n(z)$ получим:

$$\int\limits_C f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C u_n(\zeta)d\zeta = 0$$

Тем самым выполнены все условия теоремы Морера. Следовательно, $f(z)$ - функция аналитическая в окрестности G' точки z_0. В силу произвольности выбора точки z_0 отсюда следует аналитичность $f(z)$ в области G. Заметим, что для $\forall$ натурального числа n функция $r_n(z) = \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} u_j(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{n} u_j(z)$, представляющая собой сумму конечного числа аналитических функций, также является аналитической функцией в обл. G.

② Фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$ и выберем произвольный замкнутый контур C, целиком лежащий в построенной выше подобласти G' и ~~сод~~ содержащий точку z_0 внутри. Минимальное расстояние от точки z_0 до контура C обозначим через d.

Рассмотрим ряд: $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$

Так как ~~min~~ $\min\limits_{z\in C} |z-z_0| = d > 0$, то этот ряд в силу условий теоремы сходится равномерно на C. Поэтому, проинтегрировав его почленно по контуру C и воспользовавшись выражением производных аналитической функции через интеграл Коши, получим $f^{(k)}(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$. Т.к. z_0 - произвольная точка области G, то утверждение 2 доказано.

③ Рассмотрим произвольную подобласть $\overline{G}'$ области G и построим в области G замкнутый контур C, содержащий $\overline{G}'$ внутри, причем так, чтобы расстояние от произвольной точки $z \in \overline{G}'$ до $\forall$ точки $\zeta \in C$ было не меньше некоторого положительного числа d, $|z-\zeta| \geq d > 0$ (очевидно, для $\forall$ подобласти $\overline{G}'$ области G найдутся соответствующие контур C и число d).

Так как $r_n(z)$ является аналитической функцией в G, то для $\forall$ точки $z \in \overline{G}'$ имеет место соотношение $\dfrac{k!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{r_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta = r_n^{(k)}(z)$. Причем, согласно только что доказанному утверждению, $r_n^{(k)}(z)$ представляет собой остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$.

В силу равномерной сходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое N, что на контуре C при $n \geq N$ имеет место равномерная оценка $|r_n(\zeta)| < \varepsilon \cdot \frac{2\pi \cdot d^{k+1}}{k! L}$, где L - длина контура C. Тогда:

$$|r_n^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_C \frac{|r_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} ds < \varepsilon$$

для всех $z \in \bar{G}'$ одновременно, что и доказывает ~~ся~~ утверждение 3.

(доказательство относится к случаю односвязной области G. Случай многосвязной области рассматривается аналогично).

! Из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в замкнутой области $\bar{G}$ не следует равномерная сходимость в этой области ряда, составленного из производных.

Вторая теорема Вейерштрасса

Пусть функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области G, непрерывными в $\bar{G}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно и в $\bar{G}$.

Доказательство:

Разность частичных сумм данного ряда, функция $S_{n+p}(z) - S_n(z)$, как конечная сумма аналитических функций, является аналитической в G и непрерывной в $\bar{G}$. Из равномерной сходимости на Γ следует, что $|S_{n+p}(\zeta) - S_n(\zeta)| = |u_{n+p}(\zeta) + \ldots + u_{n+s}(\zeta)| < \varepsilon$ при $n \geq N$ для $\forall$ натурального p и всех точек $\zeta \in \Gamma$ одновременно. Следовательно, по теореме о максимуме модуля аналитической функции $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ при $n \geq N$ для $\forall$ натурального p и для всех $z \in \bar{G}$. Тем самым для данного ряда выполнен критерий Коши.

Замечание: Все доказанные выше свойства функциональных рядов справедливы и для функциональных последовательностей.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в $\forall$ точке z, удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; причем в круге $|z - z_0| \leq \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1 - z_0|$, ряд сходится равномерно.

Доказательство.

Выберем произвольную точку z, удовлетворяющую условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Обозначим $|z - z_0| = q|z_1 - z_0|$, $q < 1$. В силу необходимого условия сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ его члены стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, существует такая константа M, что $|c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < M$. Отсюда для коэффициентов c_n данного степенного ряда получим оценку:

$|c_n| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}$.

Тогда $\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\cdot|z-z_0|^n \le M\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$

По условию теоремы число $q=\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|<1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы, сходится. Тогда из этой формулы следует сходимость и рассматриваемого ряда. Чтобы доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ в круге $|z-z_0|\le \rho < |z_1-z_0|$, достаточно, в силу признака Вейерштрасса, построить сходящийся числовой ряд, мажорирующий данный функциональный ряд в рассматриваемой области. Очевидно, таковым является ряд $M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{|z_1-z_0|^n}$, также представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

Из теоремы Абеля можно вывести ряд важных следствий.

Следствие 1: Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке z_1, то он расходится и во всех точках z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|>|z_1-z_0|$.

(область $|z-z_0|<R$ $(R>0)$ называется кругом сходимости степенного ряда, а число R - его радиусом сходимости.

Следствие 2. Для всякого степенного ряда $\exists$ такое число R, что внутри круга $|z-z_0|<R$ данный степенной ряд сходится, а вне этого круга расходится.

Следствие 3: Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.

Следствие 4: Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать $\forall$ число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

Следствие 5:

Коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ выражаются через значения суммы ряда $f(z)$ и её производных в центре круга сходимости по формулам $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$

~~След~~

Теорема Коши-Адамара о степенных рядах.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ определяется формулой Коши-Адамара $R=\frac{1}{\ell}$, где $\ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ есть верхний предел послед. $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ (верхним пределом $\overline{x}$, последовательности $\{x_n\}$ называется наибольшая предельная точка этой последовательности).

Доказательство:

Предположим вначале, что $0<\ell<\infty$. Надо показать, что в $\forall$ точке z_1, удовлетворяющей условию $|z_1-z_0|<\frac{1}{\ell}$, ~~[illegible]~~ ряд сходится, а в $\forall$ точке z_2, удовлетворяющей условию $|z_2-z_0|>\frac{1}{\ell}$, расходится.

Т.к. ℓ-верхний предел последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то для $\forall \varepsilon>0$ можно указать номер N, начиная с которого $\sqrt[n]{|c_n|}<\ell+\varepsilon$. С другой стороны, для того же ε найдется бесконечно много членов последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, больших $\ell-\varepsilon$.

~~Во~~

Возьмем произвольную точку z_1, удовлетворяющую неравенству $l|z_1-z_0|<1$, и выберем в качестве ε число $\frac{1-l|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|}>0$.

Тогда: $\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_1-z_0|<(l+\varepsilon)|z_1-z_0|=\frac{1+l|z_1-z_0|}{2}=q<1$.

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z_1-z_0)^n$ мажорируется геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ со знаменателем, меньшим единицы, что и доказывает его сходимость. Взяв теперь некоторую точку z_2, удовлетворяющую неравенству $l|z_2-z_0|>1$, и выбрав в качестве ε число $\frac{l|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|}>0$, получим,

$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_2-z_0|>(l-\varepsilon)|z_2-z_0|=1$ для бесконечного множества значений n. Отсюда $|c_n(z_2-z_0)^n|>1$, что на основании необходимого признака сходимости свидетельствует о расходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z_2-z_0)^n$.

Рассмотрим теперь предельные случаи.

При $l=0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится в $\forall$ точке z, т.е. $R=\infty$. Действительно, в этом случае для $\forall\varepsilon>0$ может быть указано такое число N, начиная с которого $\sqrt[n]{|c_n|}<\varepsilon$. Выбрав в качестве ε число $\frac{q}{|z-z_0|}$, где z - произвольная точка комплексной плоскости и $0<q<1$, получим $|c_n(z-z_0)^n|<q^n$, что и доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

При $l=\infty$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ расходится в $\forall$ точке $z\neq z_0$, т.е. $R=0$. Действительно, в этом случае для $\forall$ числа M найдется бесконечно много коэффициентов c_n таких, что $\sqrt[n]{|c_n|}>M$. Рассмотрим произвольную точку $z\neq z_0$ и выберем M так, чтобы $M\cdot|z-z_0|=q>1$. Тогда бесконечное множество членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ удовлетворяет условию $|c_n(z-z_0)^n|>1$, что и доказывает его расходимость.

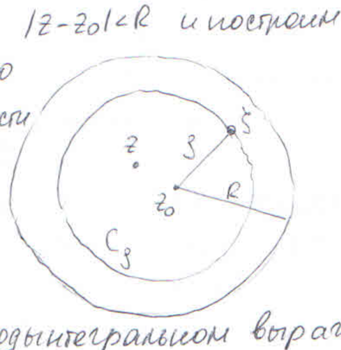
Итак, формула Коши-Адамара $R=1/l$, где $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ справедлива при $\forall$ значении l. ■

Теорема Тейлора.

Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в ~~виде~~ этом круге ~~в виде~~ сходящимся степенным рядом $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, причем этот ряд определен однозначно.

Доказательство:

Выберем произвольную точку z внутри круга $|z-z_0|<R$ и построим окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса $\rho<R$, содержащую точку z внутри. Очевидно, для $\forall$ точки z данной области такое построение возможно. Так как точка z - внутренняя точка области $|z-z_0|<\rho$, в которой функция $f(z)$ является аналитической, то по формуле Коши имеем:



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$ Осуществим в подынтегральном выражении

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}= \qquad =\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}$$

Здесь мы воспользовались формулой $f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(z-z_0)^n}{1-(z-z_0)}=\frac{1}{1-(z-z_0)}$ (где $S_n(x)$ - сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$) и очевидным соотношением $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$. При $\zeta\in C_\rho$ ряд $\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}$ сходится равномерно по ζ, т.к. он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ $(|z-z_0|<\rho)$

Подставляя $f(z)=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}$ в $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ и интегрируя почленно, получаем $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$

Введя обозначение:

$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$, перепишем $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$ в виде сходящегося ~~степенного~~ в выбранной точке z степенного ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

В формуле $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ окружность C_ρ можно заменить, в силу теоремы Коши, $\forall$ замкнутым контуром C, лежащим в области $|z-z_0|<R$ и содержащим точку z_0 внутри. Так как z - произвольная точка этой области, то отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится к $f(z)$ всюду внутри круга $|z-z_0|<R$, причем в круге $|z-z_0|\leq\rho<R$ этот ряд сходится равномерно.

Итак, функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд. Коэффициенты разложения $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ на основании формулы $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ для производных аналитической функции имеют вид:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Остается доказать единственность разложения $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

Предположим, что имеет место другое разложение:

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$, где хотя бы 1 коэффициент $c_n'\neq c_n$. Степенной ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ сходится в круге $|z-z_0|<R$, поэтому на основании формулы $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$, $c_n'=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, что совпадает с выражением $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ для коэффициентов c_n.

Теорема (о единственности аналитической функции см. далее)

Если функция $f(z)$ является аналитической в области G и обращается в нуль в различных точках $z_n \in G$, $n = 1, 2, \dots$ Если последовательность $\{z_n\}$ сходится к пределу a, принадлежащему той же области, то функция $f(z)$ тождественно равна 0 в области G.

Доказательство:

Т.к. $a \in G$, то функцию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд в окрестности данной точки: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$, причем радиус R_0 сходимости данного ряда не меньше расстояния от точки a до границы области. Из определения непрерывности функции $f(z)$ следует, что $f(a) = 0$. Отсюда следует, что $c_0 = 0$, и разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = a$ имеет вид: $f(z) = (z-a) f_1(z)$, где $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (z-a)^n$

Будем предполагать, что все точки последовательности $\{z_n\}$ отличны от a.

В силу последнего условия $f_1(z_n) = 0$, и по определению непрерывной функции $f_1(a) = 0$. Отсюда $c_1 = 0$, и разложение $f_1(z)$ в окрестности a принимает вид:

$f_1(z) = (z-a) \cdot f_2(z)$, где $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$. Аналогично предыдущему получим, что и $f_2(a) = 0$, т.е. $c_2 = 0$. Продолжая неограниченно данный процесс, получим, что все коэффициенты c_n в разложении $f(z)$ в степенной ряд

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ в окрестности точки a равны 0. Отсюда следует, что $f(z) \equiv 0$ внутри круга $|z-a| < R_0$.

Докажем теперь тождественное равенство функции $f(z)$ нулю во всей области G. Достаточно показать, что $f(z_1) = 0$, где z_1 – произвольная точка области G, лежащая вне круга $|z-a| < R_0$. Для этого соединим точки a и z_1 спрямляемой кривой L, целиком лежащей в G и отстоящей от её границы на расстояние $d > 0$. Поскольку $\forall$ точку круга $|z-a| < R_0$, лежащую внутри области G, можно рассматривать как предел последовательности нулей функции $f(z)$, то, выбрав в качестве нового центра разложения последнюю точку $z = a_1$ пересечения кривой L с окружностью $|z-a| = R_0$, получим, что $f(z) \equiv 0$ внутри круга $|z-a_1| < R_1$, где $R_1 \geq d$. Продолжая аналогичным образом, покроем всю кривую L конечным числом кругов радиусов, не меньших d, внутри которых $f(z) \equiv 0$. При этом точка $z = z_1$ попадает внутрь последнего круга, тем самым $f(z_1) = 0$. Поскольку z_1 – произвольная точка области G, отсюда следует, что $f(z) \equiv 0$ в G.

Следствие 1: Функция $f(z) \not\equiv 0$, аналитическая в области G, в $\forall$ замкнутой ограниченной подобласти $\overline{G'}$ области G имеет лишь конечное число нулей.

Следствие 2: Если точка $z_0 \in G$ является нулем бесконечного порядка функции $f(z)$ (т.е. в разложении $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ в окрестности точки z_0 все коэффициенты $c_n \equiv 0$), то $f(z) \equiv 0$ в области G.

Следствие 3: Аналитическая функция может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области.

Теорема о единственности аналитической функции.

Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в области G. Если в G существует сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ последовательность различных точек $\{z_n\}$, в которых значения функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в G.

Доказательство:

Воспользовавшись предыдущей теоремой достаточно установить, что функция $\psi(z) = f(z) - \varphi(z) \equiv 0$ в G.

(теорема означает, что в данной области G может существовать лишь единственная аналитическая функция, принимающая заданные значения в последовательности точек $\{z_n\}$, сходящейся к точке $a \in G$.)

Следствие 1: Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в области G, совпадают на некоторой кривой L, принадлежащей данной области, то они тождественно равны в области G.

Следствие 2: Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические соответственно в обл. G_1 и G_2 имеющих общую подобласть G, совпадают в G, то $\exists$ единственная аналитическая функция $F(z)$ такая, что $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$

Теорема

Если функции $f_i(z)$ являются аналитическими функциями z в области G, содержащей отрезок $[a;b]$ действительной оси x, то из соотношения $F[f_1(x), .., f_n(x)] = 0$ при $a \leq x \leq b$ следует соотношение $F[f_1(z), .., f_n(z)] = 0$ при $z \in G$

Доказательство:

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при сформулированных условиях функция $\Phi(z) = F[f_1(z), .., f_n(z)]$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области G. Доказательство проведем для случая двух переменных w_i, т.е. когда $\Phi(z) = F[f_1(z), f_2(z)]$. Фиксируем в области G произвольную точку $z_0 \in G$ и обозначаем $f_1(z_0) = w_1^0$ и $f_2(z_0) = w_2^0$. Составим выражение: $\Phi(z_0 + \Delta z) - \Phi(z_0) = F[w_1^0 + \Delta w_1, w_2^0 + \Delta w_2] - F[w_1^0, w_2^0]$, где $\Delta w_1, \Delta w_2$ суть приращение функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, соответствующие приращению Δz независимой переменной z. Так как, по предположению, существуют частные производные функции F, непрерывные по совокупности переменных, то $\Phi(z_0 + \Delta z) - \Phi(z_0) = F[w_1^0 + \Delta w_1, w_2^0 + \Delta w_2] - F[w_1^0, w_2^0]$ можно преобразовать к виду:

$$\Phi(z_0 + \Delta z) - \Phi(z_0) = \frac{\partial F}{\partial w_1}(w_1^0, w_2^0 + \Delta w_2)\Delta w_1 + \eta_1 \Delta w_1 + \frac{\partial F}{\partial w_2}(w_1^0, w_2^0)\Delta w_2 + \eta_2 \Delta w_2,$$

где функции η_1 и η_2 бесконечно малы при Δw_1 и Δw_2, стремящихся к нулю, а тем самым и при $\Delta z \to 0$. Составим теперь разностное отношение $\frac{\Delta \Phi}{\Delta z}$ и перейдя к пределу при $\Delta z \to 0$, в силу непрерывности частных производных функции F по совокупности переменных, получим:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z_0+\Delta z)-\Phi(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial F}{\partial w_1}(w_1^0,w_2^0)\,f_1'(z_0)+\frac{\partial F}{\partial w_2}(w_1^0,w_2^0)\,f_2'(z_0),$$

что и доказывает существование производной $\Phi'(z_0)$ в точке z_0. В силу сделанных предположений функция $\Phi'(z)$ непрерывна в точке z_0, а так как z_0 - произвольная точка области G, отсюда и следует аналитичность функции $\Phi(z)$ в области G.

В случае большего числа переменных w_i доказательство проводится совершенно аналогично.

(Эта теорема позволяет аналитично продолжать в компл. область соотношения вида: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $e^{\ln x}=x$

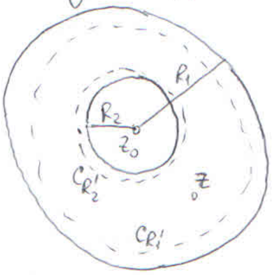
Следствие: Если выполнены условия прошлой теоремы и функции $f_i(z)$ соответственно равны: $f_1(z)=f(z)$, $f_2(z)=f'(z)$, …, $f_{n+1}(z)=f^{(n)}(z)$, то из соотношения:

$$F[f(x),\dots,f^{(n)}(x)]=0 \text{ при } a<x<b \text{ следует } F[f(z),\dots,f^{(n)}(z)]=0,\ z\in G$$

Теорема Лорана.

Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.

Доказательство: Фиксируем произвольную точку z внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ и построим окружности $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$ с центрами в точке z_0, радиусы которых удовлетворяют условиям $R_2<R_2'<R_1'<R_1$, $R_2'<|z-z_0|<R_1'$. Согласно формуле Коши для многосвязной области имеет место соотношение



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R_2'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

На $C_{R_1'}$ выполняется неравенство $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|\le q<1$. Поэтому, представив дробь $\frac{1}{\zeta-z}$ в виде

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

и проведя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда по переменной ζ, получим

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\text{ где } c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n\ge 0.$$

Так как на $C_{R_2'}$ выполняется неравенство $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, то аналогично предыдущему имеем $\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$. В результате почленного интегрирования этого ряда получим

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R_2'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\text{ где } c_{-n}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R_2'}}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta,\ n>0$$

Заметим, что подынтегральные функции в c_n и c_{-n} - аналитические в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$. Поэтому в силу теоремы Коши значение соответствующих интегралов ~~на~~ не изменяется при произвольной деформации контуров интегрирования в области аналитичности подынтегральных функций. Это позволяет объединить формулы c_n и c_{-n}:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

где C - произвольный замкнутый контур, лежащий в кольце ~~p~~ $R_2<|z-z_0|<R_1$ и содержащий точку z_0 внутри.

Возвратившись к формуле $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\bar{R}_2'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

получим: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$,

где коэффициенты c_n для всех значений индекса n определяются единообразной формулой $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$.

Так как z - произвольная точка внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$, то отсюда следует, что ряд $\cancel{f(z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится к функции $f(z)$ всюду внутри данного кольца, причем в замкнутом кольце $R_2<\bar{R}_2\le|z-z_0|\le\bar{R}_1<R_1$ ряд сходится к функции $f(z)$ равномерно.

Докажем единственность разложения $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_n(z-z_0)^n$. Предположим, что имеет место другое разложение:

$f(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$, где хотя бы один коэффициент $c_n'\ne c_n$. Тогда всюду внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ имеет место равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$$

Проведем окружность C_R радиуса R, $R_2<R<R_1$, с центром в точке z_0. Ряды $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ сходятся на C_R равномерно. Умножим их на $(z-z_0)^{-m-1}$, где m - фиксированное ~~ц~~ целое число, и проинтегрируем почленно. Рассмотрим $\int_{C_R}(z-z_0)^{n-m-1}dz$. Положив $z-z_0=Re^{i\varphi}$, получим:

$$\int_{C_R}(z-z_0)^{n-m-1}dz=R^{n-m}i\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\varphi}d\varphi=\begin{cases}0, & n\ne m\\ 2\pi i, & n=m.\end{cases}$$

Учтя это, найдем, что после указанного интегрирования выражения $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ отличными от нуля окажутся лишь по одному слагаемому из бесконечных сумм в левой и правой частях этого выражения. Отсюда получим: $c_m=c_m'$. Т.к. m - произвольное число, то это и доказывает единственность разложения $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. ■

Теорема о конечной устранимой особой точке

Если точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то $\exists$ предельное значение $\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0$, причем $|c_0|<\infty$.

Теорема о конечной устранимой особой точке.

Если функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, ограничена ($|f(z)|<M$ при $0<|z-z_0|<R_1$), то точка z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

Доказательство: Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и рассмотрим $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ $n=0;\pm1;\pm2.$ для коэффициентов этого ряда.

В качестве контура интегрирования выберем круг с центром в точке z_0 радиуса ρ. Тогда в силу условия теоремы имеет место мажорантная оценка:
$|C_n| < M\cdot\rho^{-n}$.

Будем рассматривать коэффициенты с отриц. индексом $n<0$. Т.к. значение коэффициентов C_n не зависит от ρ, то из $|C_n| < M\rho^{-n}$ получим $C_n = 0$ при $n<0$.

Теорема о конечном полюсе аналитической функции.

Если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к z_0.

Доказательство: Представим функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 в виде:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^{-m}\{C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1}\} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^{-m}\varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

Функция $\varphi(z)$, очевидно, является ограниченной аналитической функцией в окрестности точки z_0. Из этой формулы следует, что при $z \to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к точке z_0, что и доказывает теорему. Заметим, что если доопределить функцию $\varphi(z)$ в точке z_0, положив $\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$, эта формула может быть переписана в виде: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ - ан. функция и $\varphi(z_0) \neq 0$; число m называется порядком полюса.

Теорема о конечном полюсе аналитической функции

Если функция $f(z)$, аналитическая в окрестности своей изолированной особой точки z_0, неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления точки z к точке z_0, то точка z_0 является полюсом функции $f(z)$.

Доказательство:

По условию теоремы для $\forall$ числа $A>0$ можно указать такую ε-окрестность точки z_0, в которой $|f(z)| > A$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$.
В указанной ε-окрестности точки z_0 эта функция является аналитической и $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. Поэтому на основании теоремы о конечной устранимой особой точке точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$, и функция $g(z)$ в силу формулы $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$ [в окрестности устранимой особой точки функция $f(z)$ ограничена и может быть представлена в виде
$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $m \geq 0$ - целое число, а $\varphi(z_0) \neq 0$. При этом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ то в этом представлении число $m>0$ определяет порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0] в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде
$g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая функция, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а $m>0$
Тогда в окрестности точки z_0 для искомой функции $f(z)$ имеет место представление $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{\varphi(z)}$.

Оно в силу условия $\varphi(z_0)\neq 0$ может быть переписано в виде $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, совпадающем с представлением $f(z)=\frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^m}$ прошлой теоремы, где $\Psi(z)$ – аналитическая функция. Отсюда и следует, что точка z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$.

Заметим, что точка z_0, являющаяся нулем порядка m аналитической функции $g(z)$, является полюсом того же порядка m функции $f(z)=1/g(z)$ и наоборот. Это устанавливает очень простую связь между нулями и полюсами.

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса

Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в $\forall$ окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка ~~z_0~~ z_1, в которой значение функции $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа B меньше чем на ε.

Доказательство:

Предположим, что теорема не верна, т.е. при заданном комплексном числе B и заданном $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta_0>0$, что во всех точках z из η_0-окрестности точки z_0 значение функции $f(z)$ отличается от заданного B больше, чем на ε: $|f(z)-B|>\varepsilon$; $|z-z_0|<\eta_0$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(z)=\frac{1}{f(z)-B}$. В силу этих неравенств функция $\psi(z)$ определена и ограничена в η_0-окрестности точки z_0. Следовательно по теореме об устранимой особой точке точка z_0 является устранимой особой точкой функции $\psi(z)$. Это означает, что разложение функции $\psi(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $\psi(z)=(z-z_0)^m\tilde{\varphi}(z)$, $\tilde{\varphi}(z_0)\neq 0$.

Тогда в силу определения функции $\psi(z)$, в данной окрестности точки z_0 имеет место следующее разложение функции $f(z)$:

$f(z)=(z-z_0)^{-m}\cdot\varphi(z)+B$, где аналитическая функция $\varphi(z)=\frac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$ ограничена в η_0-окрестности точки z_0. Но разложение $f(z)=(z-z_0)^{-m}\cdot\varphi(z)+B$ означает, что точка z_0 является или полюсом порядка m, или при $m=0$ правой точкой функции $f(z)$, и разложение в ряд Лорана последней должно содержать лишь конечное число членов, что противоречит условию теоремы.

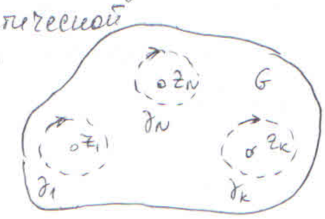
(нет необходимости доказывать теорему, обратную к этой, т.к. если при $z\to z_0$ не существует конечного или бесконечного предела функции $f(z)$, то в силу теоремы об устранимой особой точке и теоремы о конечном полюсе точка z_0 не может быть ни устранимой, ни полюсом.

Основная теорема теории вычетов.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\bar{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,\dots,N)$, лежащих внутри области G. Тогда $\int f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_k]$, где Γ^+ представляет собой полную границу области G, Γ^+ проходимую в положительном направлении.

Доказательство: ~~Напом~~ Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\bar{G}$, то все точки границы Γ этой области суть правильные точки функции $f(z)$. Выделим каждую из особых точек z_k функции $f(z)$ замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри других особых точек, кроме точки z_k.

В замкнутой многосвязной области, ограниченной контуром Γ и всеми контурами γ_k функция $f(z)$ является всюду аналитической.



Поэтому по второй теореме Коши получим:

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta + \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k^-} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Перенеся второе слагаемое в этом уравнении направо, в силу формулы $res[f(z),z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta = c_{-1}$ и получим утверждение теоремы:

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_k]$$ ■

Теорема о вычетах функции, аналитичной на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.

∃ функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,2,\dots,N)$, включая и $z=\infty$ $(z_N=\infty)$. Тогда $\sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_k]=0$

Доказательство:

Действительно, рассмотрим замкнутый контур C, содержащий внутри все $(N-1)$ особые точки z_k, расположенные на конечном расстоянии от точки $z=0$. По ~~теореме~~ основной теореме теории вычетов $\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{N-1} res[f(z),z_k]$. Но в силу $res[f(z),\infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)d\zeta = -c_{-1}$, интеграл стоящий слева равен вычету функции $f(z)$ в точке $z=\infty$, взятому с обратным знаком, откуда и получим утверждение данной теоремы.

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Лемма:

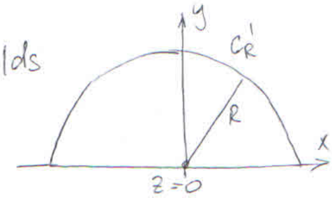
Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа R_0, M и δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z|>R_0$, имеет место оценка

$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $|z|>R_0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(\zeta)d\zeta=0$, где контур интегрирования C'_R представляет собой полуокружность $|z|=R$, $\operatorname{Im} z>0$ в верхней полуплоскости z.

Доказательство:

Действительно, в силу $\left|\int\limits_C f(\zeta)d\zeta\right| \le \int\limits_C |f(\zeta)|ds$



и условию леммы при $R>R_0$.

$$\left|\int\limits_{C'_R} f(\zeta)d\zeta\right| \le \int\limits_{C'_R} |f(\zeta)|ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

что и доказывает лемму. ■

Замечание: Условия леммы, очевидно, будут выполнены, если функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки и точка $z=\infty$ представляет собой нуль не ниже второго порядка функции $f(z)$. Действительно, в этом случае разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \ldots = \frac{\psi(z)}{z^2}$, причем $|\psi(z)|<M$, откуда и следует оценка

$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ $|z|>R_0$ при $\delta=1$

Теорема о вычислении интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ при помощи вычетов.

Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty<x<\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z\ge 0$, причем ее аналитическое продолжение, функция $f(z)$, удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и равен:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$$, где z_k — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство: По условию теоремы функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек z_k, причем все они удовлетворяют условию $|z_k|<R_0$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси — $-R\le x\le R$ $(R>R_0)$ и полуокружности C'_R, $|z|=R$, в верхней полуплоскости.

В силу основной теоремы теории вычетов: $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R'} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k]$

Так как выполнены условия леммы 1, то предел второго слагаемого в левой части при $R\to\infty$ равен 0; правая часть при $R>R_0$ от R не зависит. Отсюда следует, что предел первого слагаемого $\exists$ и его значение определяется формулой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k]$ ■

Лемма Жордана для верхней полуплоскости.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек и равномерно относительно $\arg z$ $(0\le \arg z\le\pi)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a>0$:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R'} e^{ia\zeta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$ где C_R' – дуга полуокружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости z.

Доказательство: Условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z|=R$ имеет место оценка: $|f(z)|<\mu_R$, $|z|=R$, где $\mu_R\to 0$ при $R\to\infty$. С помощью этого соотношения оценим исследуемый интеграл. Сделаем замену переменной, положив $\zeta=Re^{i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением:

$\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0\le\varphi\le\pi/2$

Тогда получим:

$$\left|\int\limits_{C_R'} e^{ia\zeta} f(\zeta)d\zeta\right| \le \mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi} |e^{ia\zeta}|d\varphi = \mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi = 2\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi <$$

$$< 2\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2aR}{\pi}\varphi\right)d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R\left(1-e^{-aR}\right)\to 0 \text{ при } R\to\infty.$$ ■

Замечание: ① при $\operatorname{Im} z\le 0$ $a<0$ и формула $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{ia\zeta} f(\zeta)d\zeta = 0$. имеет место при интегрировании по дуге полуокружности C_R' в нижней полуплоскости z.

② аналогично при $\operatorname{Re} z\ge 0$ и $\operatorname{Re} z\le 0$ $a=\pm i\alpha$ $(\alpha>0)$ и имеет место эта формула

③ изменяются пределы φ.

Замечание: Лемма Жордана остается справедливой и в том случае, когда функция $f(z)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям в полуплоскости $\operatorname{Im} z\ge y_0$ (y_0 - фиксированное число, которое может быть как положительным, так и отрицательным), а интегрирование производится по дуге полуокружности $|z-iy_0|=R$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z\ge y_0$ с заменой переменной при интегрировании $\zeta=Re^{i\varphi}+iy_0$.

Теорема о вычислении интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)dx$ $(a>0)$ при помощи вычетов.

Ǝ функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty<x<\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z\geq 0$, а её аналитическое продолжение $f(z)$ в верхней полуплоскости удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси.

Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)dx$, $a>0$, существует и равен:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\,[e^{iaz}F(z), z_k],$$ где z_k - особые точки функции $F(z)$ в верхней полуплоскости z.

Доказательство:

По условию теоремы особые точки z_k функции $F(z)$ в верхней полуплоскости ~~z~~ удовлетворяют условию $|z_k|<R_0$. Рассмотрим в верхней полуплоскости z замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R\leq x\leq R$, $R>R_0$ и дуги C_R' полуокружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости z.

По основной теореме теории вычетов:

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} F(x)dx + \int_{C_R'} e^{ia\zeta} F(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\,[e^{iaz}F(z), z_k]$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого в левой части уравнения при $R\to\infty$ равен 0. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Теорема о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.

Ǝ функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\bar{G}$, за исключением конечного числа лежащих внутри G изолированных особых точек z_k, которые все являются полюсами, и Ǝ $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области G. Тогда разность между полным числом ~~нулей~~ полюсов функции $f(z)$ в области G определяется выражением:

$$N-P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

(под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (полюсов P) с учетом их кратности $N=\sum_{k=1}^{n} n_k$ и $P=\sum_{k=1}^{p} p_k$)

Доказательство:

Для доказательства теоремы заметим, что интеграл по Γ от функции $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ может быть вычислен с помощью основной теоремы теории вычетов, причем так как все особые точки функции $\varphi(z)$ - это нули и полюсы функции $f(z)$, а вычеты в этих точках определяются формулами $\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right]$ и $\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$, то $\int_{\Gamma^+}\varphi(\zeta)d\zeta = 2\pi i\sum_{m=1}^{M} \mathrm{res}\,[\varphi(z), z_m] = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n} n_k - \sum_{k=1}^{p} p_k\right\} = 2\pi i(N-P)$

Отметим простой геометрический смысл доказанной теоремы, для чего преобразуем интеграл, стоящий в правой части $N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int d\ln f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}d\{\ln|f(\zeta)|+i\arg f(\zeta)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}d\ln|f(\zeta)|+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+}d\arg f(\zeta).$$

Действительная функция $\ln|f(\zeta)|$ - однозначная функция, поэтому её вариация (изменение) при обходе точкой ζ замкнутого контура Г равна 0. Следовательно первое слагаемое в правой части равно 0. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(\zeta)$ при обходе точкой ζ замкнутого контура Г, деленную на 2π.

Итак, $N-P=\frac{1}{2\pi}Var[\arg f(z)]_{\Gamma^+}$

Теорема Руше

Г функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в замкнутой области $\bar{G}$, причем на границе Г области G имеет место неравенство:

$$|f(z)|_\Gamma>|\varphi(z)|_\Gamma$$

Тогда полное число нулей в области G функции $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$.

Доказательство: Для функций $f(z)$ и $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ выполнены все условия теоремы о разности числа нулей и полюсов аналитической функции. Действительно, функция $f(z)$ не имеет особых точек на Г (она аналитическая в $\bar{G}$) и не обращается в нуль на Г в силу $|f(z)|_\Gamma>|\varphi(z)|_\Gamma$.

Эти условия также выполнены для функции $F(z)$, т.к. $|F(z)|_\Gamma=|f(z)+\varphi(z)|_\Gamma\geq|f(z)|_\Gamma-|\varphi(z)|_\Gamma>0$. Поэтому на основании формулы $N-P=\frac{1}{2\pi}Var[\arg f(z)]_{\Gamma^+}$ получим:

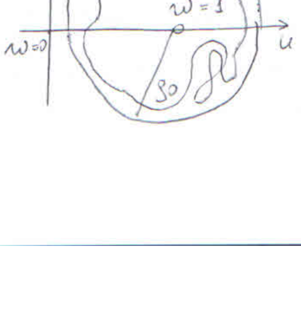
$$N[f(z)+\varphi(z)]=\frac{1}{2\pi}Var[\arg(f+\varphi)]_\Gamma \quad и \quad N[f(z)]=\frac{1}{2\pi}Var[\arg f(z)]_\Gamma$$

Рассмотрим разность $N[f(z)+\varphi(z)]-N[f(z)]=$

$$=\frac{1}{2\pi}Var[\arg(f+\varphi)-\arg f]_\Gamma=\frac{1}{2\pi}Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]_\Gamma$$

$$(\arg(f+\varphi)-\arg f=\arg\left(\frac{f+\varphi}{f}\right)$$

Введем функцию $w=1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$. При обходе точкой z контура Г соответствующая ей точка w опишет замкнутую кривую C, которая в силу условия $|f(z)|_\Gamma\geq|\varphi(z)_\Gamma|$ будет целиком лежать внутри некоторого круга $|w-1|\leq\rho_0<1$. Тем самым точка $w=0$ лежит вне кривой C. Следовательно, $Var[\arg w]_\Gamma=0$.



Основная теорема высшей алгебры.

Полином n-й степени имеет на комплексной плоскости равно n нулей (с учетом их кратности).

Доказательство: Представим полином $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

Составим соотношение: $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{z^n}$. Как легко видеть, при $\forall$ заданных значениях коэффициентов $a_0, a_1, .., a_n$ всегда найдется такое значение R_0, что для всех значений $|z| = R > R_0$ имеет место неравенство

$$0 < \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right|_{|z|=R} < 1.$$

В силу теоремы Руше и этой формулы следует, что полное число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| = R$ равно числу нулей в этом круге функции $f(z) = a_0 z^n$. Но функция $f(z) = a_0 z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n-кратный нуль точку $z = 0$. Отсюда в силу произвольности $R \geq R_0$ и следует утверждение теоремы.

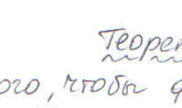
Теорема о необходимом и достаточном условии однолистности в точке

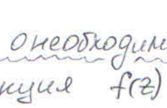
Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась однолистной и аналитической в области G и $f'(z_0) \neq 0$ при $z \in G$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ осуществляла конформное отображение области G на область G^* комплексной плоскости w, представляющую собой область значений функции $w = f(z)$ при $z \in G$.

Доказательство: 1) Необходимость. Действительно, в силу условия $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$ отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, во всех точках области G обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

2) Достаточность. Т.к. отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, является конформным, то оно является взаимнооднозначным, и в $\forall$ точке $z_0 \in G$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений. Следовательно, для $\forall$ точек z_1 и z_2, принадлежащих окрестности точки z_0, с точностью до бесконечно малых величин выполняются соотношения: $\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$ и $\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = k \neq 0$

где $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ и $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ суть бесконечно малые линейные элементы, выходящие из точки z_0, а Δw_1 и Δw_2 – их образы.





Заметим, что в силу $\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$ соответствующие углы в точках z_0 и w_0 равны не только по абсолютной величине, но и по направлению. Обозначив $\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}$ через α, из $\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$ найдем, что и $\arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha$. Действительно, $\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg \Delta w_2 - \arg \Delta z_2 = \arg \Delta w_1 - \arg \Delta z_1 = \arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha$

Из этих уравнений получим, что с точностью до бесконечно малых величин имеет место соотношение $\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = k e^{i\alpha}$

В силу произвольности выбора точек z_1 и z_2 в окрестности точки z_0 соотношение $\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = ke^{i\alpha}$ означает, что $\exists$ предел разностного отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$.

Этот предел по определению является производной функции $f(z)$ в точке z_0. Т.к. $k \neq 0$, то эта производная отлична от нуля:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0.$$

Точка z_0 - произвольная точка области G; поэтому $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0$, что функция $f(z)$ является аналитической в области G и $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$. Однолистность $f(z)$ следует из взаимной однозначности отображения.

Теорема о существовании и аналитичности обратной функции.

Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в области G, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности некоторой точки $z_0 \in G$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ области G значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексной переменной w. При этом имеет место соотношение $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)}$

Доказательство: Для $\exists$ обратной функции необходимо, чтобы уравнения $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ можно было разрешить относительно x, y в окрестности точки w_0. Для этого достаточно, чтобы в окрестности точки z_0 выполнялось условие:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \neq 0.$$

В силу соотношений $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$ это условие можно переписать в виде $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$. Но при условии $|f'(z_0)| \neq 0$ последнее имеет место. Тем самым $\exists$ обратной функции $z = \varphi(w)$ доказано. Составив разностное соотношение $\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}$ легко доказать существование и непрерывность производной $\varphi'(w_0)$ при условии $|f'(z_0)| \neq 0$.

Теорема о принципе соответствия границ при конформном отображении.

Пусть в конечной области G, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая функция $f(z)$, непрерывная в $\bar{G}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ комплексной плоскости w.

Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на внутреннюю область G^*, ограниченную контуром Γ.

Доказательство:

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями G и G^*, т.е. надо показать, что функция $f(z)$ каждому значению $z \in G$ ставит в соответствие некоторую точку $w \in G^*$ и для каждой точки $w_1 \in G^*$ найдется, и при этом только одна, точка $z_1 \in G$ такая, что $f(z_1) = w_1$. Для этого рассмотрим две произвольные точки $w_1 \in G^*$ и $w_2 \notin G^*$ и построим в области G вспомогательные функции

$$F_1(z) = f(z) - w_1, \quad z \in G$$

$$F_2(z) = f(z) - w_2, \quad z \in G.$$

Подсчитаем число нулей этих функций в области G, для чего воспользуемся формулой $N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg f(z)]_{\Gamma}$. Так как в силу условий теоремы положительному обходу контура γ соответствует положительный обход контура Γ, получим:

$$N[F_1(z)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(f - w_1)]_{\gamma} = 1 \quad и$$

$$N[F_2(z)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(f - w_2)]_{\gamma} = 0$$

Из $N[F_2(z)]$ в силу произвольности выбора точки w_2 вне области G^* следует, что все значения функции $f(z)$ при $z \in G$ принадлежат области G^*. Из $N[F_1(z)]$ следует, что для $\forall$ точки $w_1 \in G^*$ в области G найдется одна и только одна точка z_1, для которой $f(z_1) = w_1$, что и доказывает взаимную однозначность данного отображения.

Теорема.

Пусть функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в области G на область G^* комплексной плоскости w. Тогда это отображение является конформным.

Доказательство:

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что при выполнении условий теоремы производная функции $f(z)$ отлична от нуля всюду в области G.

Предположим, что это не имеет места, т.е. что в области G существует такая точка z_0, в которой $f'(z_0) = 0$. Т.к. $f(z)$ является аналитической в области G, то в силу сделанного предположения её разложение в степенной ряд в окрестности точки z_0 должно иметь вид:

$$f(z) = a_0 + a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \ldots, \quad причем \ k \geq 2 \ и \ a_k \neq 0.$$

Если $f'(z)\not\equiv 0$, то точка z_0 не может быть предельной точкой нулей функции $f'(z)$. Это означает, что можно указать такое значение δ', что $f'(z)\neq 0$. Во всех точках $z\neq z_0$ внутри круга $|z-z_0|<\delta'$. Кроме того, очевидно, можно выбрать такое значение δ'', чтобы имело место неравенство:

$$\varphi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots\neq 0. \text{ при } |z-z_0|<\delta''$$

Выбрав $\delta=\min(\delta',\delta'')$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &f'(z_0)\neq 0 \quad \text{при } z\neq z_0\\ &\varphi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots\neq 0\end{aligned}\right\} \text{при } |z-z_0|\leq\delta \qquad (1)$$

Из последнего соотношения следует в силу непрерывности функции $\varphi(z)$, что

$$\min|(z-z_0)^k\varphi(z)|_{|z-z_0|=\delta}=m>0$$

Выберем некоторое комплексное число α, удовлетворяющее условию $|\alpha|<m$.

Согласно теореме Руше аналитическая функция:

$$\varphi(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)-\alpha=f(z)-a_0-\alpha$$

имеет внутри круга $|z-z_0|\leq\delta$ столько же нулей, сколько и функция $(z-z_0)^k\varphi(z)$. Последняя в силу условия (1) имеет в этом круге k нулей – точка $z=z_0$ является её нулем k-го порядка. Тогда из $\varphi(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)-\alpha=f(z)-a_0-\alpha$ следует, что уравнение $f(z)=a_0+\alpha$ имеет k корней в круге $|z-z_0|\leq\delta$, причем все эти корни простые, так как точка $z=z_0$ не является корнем уравнения $f(z)=a_0+\alpha$ и в силу (1) $f'(z)\neq 0$ в остальных точках данного круга. Это означает, что в k различных точках круга $|z-z_0|\leq\delta$ функция $f(z)$ принимает одно и то же значение $f(z)=a_0+\alpha$. Но последнее противоречит условию взаимной однозначности отображения области G на обл. G^*.

Теорема

Функция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области G (граница которой состоит более чем из одной точки) на единичный круг $|w|<1$ так, что $f(z_0)=0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha_0$ (где $z_0\in G$ и α_0 – заданное действительное число), определена единственным образом.

Доказательство:

Предположим, что в области G существуют две различные функции $w_1=f_1(z)$ и $w_2=f_2(z)$, осуществляющие заданное конформное отображение, т.е.

$$f_1(z_0)=0,\ \arg f_1'(z_0)=\alpha_0,\ |f_1(z)|_\gamma=1,$$

$$f_2(z_0)=0,\ \arg f_2'(z_0)=\alpha_0,\ |f_2(z)|_\gamma=1.$$

Заметим, что функции $w_1=f_1(z)$ и $w_2=f_2(z)$ устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между границей γ области G и окружностями $|w_1|=1$ и $|w_2|=1$ соответственно.

Т.к. при конформном отображении устанавливается взаимнооднозначное соответствие, то тем самым установлено и взаимно однозначное соответствие между точками единичных кругов $|w_1|\leq 1$ и $|w_2|\leq 1$. Значит, установленные соответствия определяют аналитическую функцию $w_2=\varphi(w_1)$, осуществляющую конформное отображение единичного круга $|w_1|<1$ на единичный круг $|w_2|<1$, причем

$$\varphi(0)=0,\ |\varphi(w_1)|_{|w_1|=1}=1.$$

Заметим, что, кроме того, в силу взаимнооднозначного соответствия областей $|w_1|<1$ и $|w_2|<1$ имеет место условие: $\varphi(w_1)\neq 0$ при $w_1\neq 0$.

Вычисляя значение производной $\frac{dw_2}{dw_1}$ по правилу определения производной от сложной функции, получаем:

$$\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}=\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{w_1=0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{\Delta w_2}{\Delta z}}{\frac{\Delta w_1}{\Delta z}}=\frac{k_2e^{i\alpha_0}}{k_1e^{i\alpha_0}}=\frac{k_2}{k_1}>0.$$

Отсюда следует, что производная $\frac{dw_2}{dw_1}$ в точке $w_1=0$ является положительным действительным числом. Рассмотрим вспомогательную функцию, определенную при $|w_1|\leq 1$.

$$\psi(w_1)=\frac{1}{w_1}\varphi(w_1).$$

Очевидно, функция $\psi(w_1)$ - однозначная аналитическая функция в области $0<|w_1|<1$. Точка $w_1=0$ - устранимая особая точка этой функции. Доопределим $\psi(w_1)$ при $w_1=0$ по непрерывности. Разложим $\varphi(w_1)$ в окрестности $w_1=0$ в ряд Тейлора:

$$w_2=\varphi(w_1)=\varphi(0)+\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}\cdot w_1+\ldots=\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}w_1+\ldots$$

Переходя к пределу при $w_1\to 0$, получаем $\psi(0)=\lim\limits_{w_1\to 0}\frac{\varphi(w_1)}{w_1}=\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}=\frac{k_2}{k_1}>0.$

Функция $\psi(w_1)$ непрерывна в замкнутой области $|w_1|\leq 1$, причем в этой области $\psi(w_1)\neq 0$ и $|\psi(w_1)|_{|w_1|=1}=1$

В силу принципа максимума и минимума модуля аналитической функции из $|\psi(w_1)|_{|w_1|=1}=1$ следует, что $|\psi(w_1)|\equiv 1$ при $|w_1|<1$, откуда ~~вслед~~ получим, что $\psi(w_1)\equiv const$ при $|w_1|\leq 1$.

Чтобы найти эту постоянную, заметим, что в силу $\psi(0)=\lim\limits_{w_1\to 0}\frac{\varphi(w_1)}{w_1}=\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}=\frac{k_2}{k_1}>0$ она равна $\frac{k_2}{k_1}$, т.е. является положительным действительным числом. Согласно $|\psi(w_1)|_{|w_1|=1}=1$ модуль этого числа равен единице. Отсюда следует, что $\psi(w_1)\equiv 1$. Следовательно, $w_2=\varphi(w_1)\equiv w_1$. Это и доказывает, что не существует двух различных функций, осуществляющих заданное конформное отображение данной области G на внутренность единичного круга.

Теорема о существовании и единственности дробно-линейной функции, переводящей три конечные точки z_1,z_2,z_3 в три конечные точки w_1,w_2,w_3

Заданием соответствия трем различным точкам плоскости z трех различных точек плоскости w дробно-линейная функция определена однозначно.

Доказательство.

Нужно доказать, что условия $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$, $f(z_3)=w_3$ где z_1,z_2,z_3 и w_1,w_2,w_3 - заданные комплексные числа, однозначно определяют значения параметров λ,α,β. Составим выражение: $w_1-w_3=\lambda\frac{(z_1-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_1)(\beta+z_3)}$, $w_2-w_3=\lambda\frac{(z_2-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_2)(\beta+z_3)}$

Разделив уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{\beta+z_2}{\beta+z_1}.$$

Для произвольной точки z можем записать аналогичное соотношение: $\frac{w_1-w}{w_2-w}=\frac{z_1-z}{z_2-z}\cdot\frac{\beta+z_2}{\beta+z_1}$

Исключив из 2х последних соотношений параметр β, окончательно получим:
$\frac{w_1-w}{w_2-w}\Big/\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z_1-z}{z_2-z}\Big/\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. Это соотношение ~~со~~ и представляет собой неявное выражение искомой дробно-линейной функции. Очевидно, разрешив это уравнение относительно w, мы получим явное выражение коэффициентов λ, α, β дробно-линейной функции через заданные числа $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$, что и доказывает теорему. ■

Теорема (круговое свойство дробно-линейной функции)

Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости w. (при этом включаются прямые в семейство окружностей, рассматривая прямые как окружности бесконечно большого радиуса).

Доказательство:

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что преобразование инверсии, осуществляемое функцией $w=1/z$ обладает круговым свойством, так как сохранение окружности при линейном преобразовании не вызывает сомнений. Рассмотрим произвольную окружность, уравнение которой на плоскости z имеет вид:
$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, где A,B,C,D — действительные числа, удовлетворяющие условиям $A\geq 0$, $B^2+C^2>4AD$. При $A=0$ получим ~~окружность~~ прямую; при $D=0$ окружность проходит через начало координат (точку $z=0$). При преобразовании, осуществляемом функцией $w=u+iv=\frac{1}{z}$, координаты x,y связаны с координатами u,v соотношениями:
$x=\frac{u}{u^2+v^2}$ и $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$

Поэтому окружность $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ в новых координатах примет вид:
$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$, что и доказывает утверждение теоремы. ■

Теорема (о свойстве сохранения симметрии дробно-линейной функции)

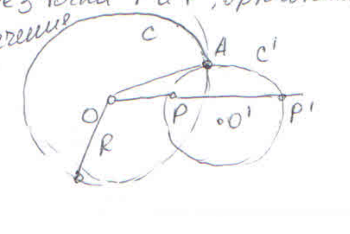
При отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией, точки, симметричные относительно ∀ окружности, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности.

Доказательство:

Воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями элементарной геометрии.

Утверждение 1: ∀ окружность C', проходящая через точки P и P', ортогональна

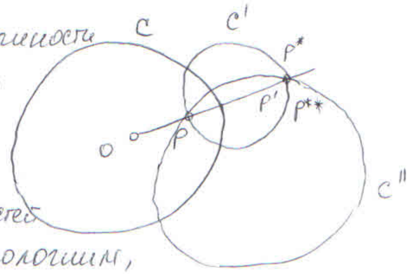
Действительно, проведя луч OP' и радиус OA в точку пересечения окружностей C и C', мы в силу симметрии точек P и P' относительно окружности C получим $OP\cdot OP'=(OA)^2=R^2$.



но это, согласно известной теореме элементарной геометрии, означает, что OA - касательная к окружности C', проведенной из точки O, откуда и следует, что $C' \perp C$

Утверждение 2.

Две взаимно пересекающиеся окружности C' и C'', ортогональные одной и той же окружности C, пересекаются в точках P и P', симметричных относительно окружности C.



Проведем через точку P пересечения окружностей C' и C'', лежащую внутри окружности C, луч OP. Предположим, что луч OP пересекает окружности C' и C'' в различных точках, соответственно P^* и P^{**}. Т.к. окружности C' и C'' ортогональны окружности C, то по указанной выше теореме элементарной геометрии имеют место соотношения:

$OP \cdot OP^* = R^2$ и $OP \cdot OP^{**} = R^2$, но т.к. точки P^* и P^{**} лежат на одном луче, эти равенства возможны только в том случае, когда точки P^* и P^{**} совпадают, $P^* = P^{**} = P'$, что и доказывает это утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть точки P и P' симметричны относительно окружности C. Проведем через эти точки две вспомогательные окружности C'' и C'. В силу утверждения 1 окружности C' и C'' ортогональны C. При конформном отображении, осуществляемом какой-либо дробно-линейной функцией, окружности C, C' и C'' перейдут соответственно в окружности K, K' и K'', причем окружности K' и K'' будут ортогональны окружности K. Точки P и P' пересечения окружностей C' и C'' перейдут в точки Q и Q' пересечения их образов - окружностей K' и K''. Но в силу утверждения 2 точки Q и Q' должны быть симметричны относительно окружности K, что и доказывает теорему. ∎

[Теорема остается справедливой и в том случае, когда рассматриваются и окружности бесконечно большого радиуса, т.е. прямые].

Теорема:

Интеграл $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ сходится в области $\operatorname{Re} p > a$, где a - показатель степени роста функции $f(t)$, причем для $\forall\, x_0 > a$ интеграл $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ при $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ сходится равномерно.

Доказательство: Для $\forall\, p = x+iy$ при $x > a$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $x > a_1 = a+\varepsilon$, причем $|f(t)| < Me^{a_1 t}$. Тогда, воспользовавшись признаком сравнения сходимости несобственных интегралов, получим

$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\right| \leq M\int_0^\infty e^{-xt} e^{a_1 t} dt = \frac{M}{x-a_1}$, $x > a_1$, что и приводит к выводу о сходимости интеграла $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ при $x > a$. Если $x \geq x_0 > a$, то аналогичная оценка дает

$|F(p)| \leq M\int_0^\infty e^{-(x_0-a_1)t} dt = \frac{M}{x_0-a_1}$, что и доказывает в силу признака Вейерштрасса равномерную сходимость этого интеграла по параметру p в области $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$.

Теорема об аналитичности изображения по Лапласу функции $f(t)$ действит. переменной t.

Изображение Лапласа $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области $\operatorname{Re} p>a$, где a - показатель степени роста функции $f(t)$.

Доказательство: В силу прошлой теоремы несобственный интеграл $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ сходится в области $\operatorname{Re} p>a$. Разобьем интервал интегрирования на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ произвольной конечной длины, причем $t_0=0$, $t_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p>a$ представляет собой сумму сходящегося ряда:

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-pt}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(p).$$

Заметим, что поскольку n-й остаток этого сходящегося ряда равен $\int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-pt}f(t)dt$, то согласно прошлой теореме этот ряд сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p\geq x_0>a$. Каждая из функций $u_n(p)=\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-pt}f(t)dt$. определена как интеграл, зависящий от параметра p, по отрезку конечной длины на комплексной плоскости t. На основании общих свойств интегралов от функций двух комплексных переменных, зависящих от параметра, функции $u_n(p)$ являются целыми функциями p. Из проведенных рассуждений следует, что ряд $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-pt}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(p)$ в области $\operatorname{Re} p>a$ удовлетворяет всем условиям теоремы Вейерштрасса, а значит, функция $F(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p>a$ и её производные можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию в $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ по параметру p.

Теорема о формуле Меллина.

Известно, что заданная функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p>a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t, обладающей степенью роста a.

Тогда $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)dp$, $x>a$.

Доказательство: По условию теоремы функция $f(t)$ существует и нам известна её степень роста. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t)=e^{-xt}f(t)$, $x>a$. Эта функция является кусочно-гладкой, на $\forall$ ограниченном участке оси t имеет конечное число точек разрыва первого рода и экспоненциально стремится к нулю при $t\to\infty$. Она может быть представлена с помощью интеграла Фурье

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\,e^{i\xi(t-\eta)}d\eta$$

Подставляя в этот интеграл выражение функции $\varphi(t)$ через искомую функцию $f(t)$, получаем:

$$e^{-xt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x\eta}f(\eta)\,e^{i\xi(t-\eta)}d\eta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi t}d\xi\int_{0}^{\infty}e^{-(x+i\xi)\eta}f(\eta)d\eta,$$

так как $f(\eta)\equiv0$ при $\eta<0$.

Обозначим $p = x + i\xi$ (заметим, что внутренний интеграл в $e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_{0}^{\infty} e^{(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta$ представляет собой заданное изображение $F(p)$ искомой функции $f(t)$. Тогда интеграл принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$ – формула Меллина.

Теорема о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$ комплексной переменной p.

Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(p)$ – аналитическая функция в области $\operatorname{Re} p > a$;

б) в области $\operatorname{Re} p > a$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = x > a$ сходится интеграл $\int_{z-i\infty}^{z+i\infty} |F(p)| dy < M$, $x > a$

Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением: $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp$, $x > a$. (1)

Доказательство:

Надо доказать, что интеграл (1) является оригиналом функции $F(p)$. Первым делом возникает вопрос о существовании этого несобственного интеграла. Очевидно, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{z-i\infty}^{z+i\infty} |e^{pt} \cdot F(p)| \cdot |dp| = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy \le \frac{M}{2\pi} e^{xt}. \quad (2)$$

Откуда и следует сходимость интеграла (1) при $\forall x > a$. Отметим для дальнейшего, что из оценки (2) следует равномерная сходимость интеграла (1) по параметру t на $\forall$ конечном промежутке $0 \le t \le T$.

Для того, чтобы доказать, что интеграл (1) – оригинал заданной функции $F(p)$, следует установить, что:

1° Интеграл (1) не зависит от x и определяет функцию $f(t)$ лишь одной переменной t, причем эта функция обладает ограниченной степенью роста.

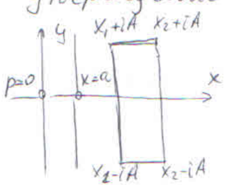
2° При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

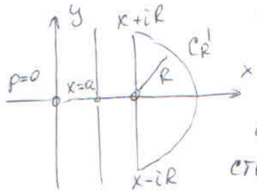
3°. Изображением Лапласа функции $f(t)$ является заданная функция $F(p)$

Докажем каждое из ~~вышеприведенных~~ высказанных утверждений:

1° Рассмотрим в области $\operatorname{Re} p > a$ замкнутый контур Γ, состоящий из отрезков прямых $[x_1 - iA, x_1 + iA]$ и $[x_2 - iA, x_2 + iA]$, параллельных мнимой оси, и соединяющих их отрезков прямых $[x_1 - iA, x_2 - iA]$, $[x_1 + iA, x_2 + iA]$, параллельных действительной оси. Здесь $A > 0$; x_1, x_2 – произвольные числа, бо́льшие a. Так как функция $F(p)$ – аналитическая в области $\operatorname{Re} p > a$, то в силу теоремы Коши интеграл от функции $e^{pt} F(p)$ по контуру Γ равен 0.

Устремим A к бесконечности, оставляя фиксированными x_1, x_2. Тогда по условию б) теоремы интегралы по горизонтальным отрезкам пути интегрирования дадут в пределе нуль. В то же время интегралы по вертикальным прямым перейдут в интеграл (1). Отсюда $\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp$, что в силу произвольности x_1 и x_2 доказывает утверждение 1.





Итак интеграл (1) - функция всего лишь одной переменной t. Отметим, при этом из оценки (г) сразу следует, что интеграл (1) представляет собой функцию ограниченной степени роста по t, причем показатель степени роста этой функции равен a.

2°. Рассмотрим значение интеграла (1) при $t<0$. Для этого в области $\operatorname{Re} p>a$ рассмотрим замкнутый контур C, состоящий из отрезка прямой $[x-iR, x+iR]$, $x>a$, и замыкающей его дуги C_R' полуокружности $|p-x|=R$. По теореме Коши интеграл от функции $e^{pt}F(p)$ по данному контуру равен 0. В силу замечания к лемме Жордана при $R\to\infty$ интеграл по дуге C_R' стремится к 0 при $t<0$.

Поэтому $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp\equiv 0$, $t<0$, $\operatorname{Re} p>a$, и утв. 2° доказано.

3°. Построим изображение Лапласа функции (1) и рассмотрим его значение при некотором произвольном p_0, где $\operatorname{Re} p_0>a$:

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_0t}dt\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

Внутренний интеграл не зависит от x. Выберем значение x, удовл. условию $a<x<\operatorname{Re} p_0$, и изменим порядок интегрирования, что возможно в силу равномерной сходимости соответствующих интегралов; получим:

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F(p)dp\int_0^\infty e^{-(p_0-p)t}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F(p)\cdot\frac{dp}{p_0-p}$$

Последний интеграл может быть вычислен с помощью вычетов, т.к. в силу условия б) теоремы подынтегральная функция стремится к 0 при $|p|\to\infty$ быстрее, чем функция $1/p$. Поэтому, учтя, что единственной особой точкой подынтегральной функции - полюсом первого порядка - является точка $p=p_0$ и что при замыкании последнего интеграла в правой полуплоскости интегрирование производится в отрицательном направлении, получим:

$$f(t)\doteqdot\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)dt=F(p_0).$$

Поскольку p_0 - произвольная точка в области $\operatorname{Re} p>a$, теорема доказана.