Задачи к общему зачету по мат. анализу

notebook

I семестр

Предел последовательности

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N:$
$|x_n - a| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{(-1)^n}{n} < \varepsilon$ $\qquad \frac{(-1)^{2n}}{n^2} < \varepsilon^2$

$n^2 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ $\qquad n > \varepsilon^{1}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,8)^n = 0$

$(0,8)^n < \varepsilon$ $\qquad n > \log_{0,8} \varepsilon$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} = 0$

$\frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} < \varepsilon$

т.к. $n^2 > \sin n^2$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$,

имеем $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} < \varepsilon$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{n}} < \varepsilon$, $\qquad n > \frac{1}{\varepsilon^3}$

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(2^{\frac{1}{2}})^n} = 0$. Возьмем $\beta > 0$ такое, что

$1 + \beta = 2^{\frac{1}{2}}$. Тогда, исп. нер-во

$(a+b)^n > \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2$, имеем:

$(2^{\frac{1}{2}})^n = (1+\beta)^n > \frac{n(n-1)}{2} \beta^2$

Тогда $\frac{n}{(1+\beta)^n} < \frac{2}{(n-1)\beta^2}$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{(n-1)\beta^2}\right)=0$

Возьмем последовательность $x_n=0$ $\lim_{n\to\infty} x_n=0$

Тогда по т. о 3 послед.

если $0 \leq$

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}=0$

Возьмем k - натуральное число, такое, что $k \geq 3$ и пусть $n \geq 2k$

тогда! $\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{3}{2k} \cdot \frac{3}{2k+1} \dots \frac{3}{n}$

Т.к. $k \geq 3$, все числа, следующие после $\frac{3}{2k}$ меньше, чем $\frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{3^n}{n!} \leq 3^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1}$

$\lim_{n\to\infty} 3^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} = 0$, => по т. о 3 послед.

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}=0.$

в) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{5}-1)=0$, $\sqrt[n]{5}-1<\varepsilon$, $\sqrt[n]{5}<\varepsilon+1$

$\frac{1}{n} < \log_5(\varepsilon+1)$ $n > \frac{1}{\log_5(\varepsilon+1)}$

г) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Пусть $\sqrt[n]{n} = 1+\beta_n$ => $n=(1+\beta_n)^n$

$n=(1+\beta_n)^n >$

$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ => $\lim_{n\to\infty} \beta_n+1=1$

notebook

д) $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. Пусть $\sqrt[n]{n!} = 1 + \beta_n \Rightarrow$

$n! = (1+\beta_n)^n$

$n! = (1+\beta_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}\beta_n^2$

$1 + \beta_n < \sqrt{2(n-2)!} + 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(1+\beta_n) = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\beta_n} = 0.$

3. Определение б.б. послед.

$\forall A \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n > A$

а) $a_n = \sqrt{n}$ $\qquad \sqrt{n} > A$ $\qquad n > A^2$

б) $a_n = (-1)^n \cdot n$

4. $(1+(-1)^n)n = n + (-1)^n n$ – имеем две предельные точки: 0 и ∞.

0 4 0 8 0 12 0 16 0 20

7. $x_n = \frac{n^\alpha - 1}{2n^2+n+1}$

$\frac{n^\alpha - 1}{2n^2+n+1} < \varepsilon + a$

Пусть $\alpha = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\alpha = 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\alpha = 2$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\alpha = 3$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{2n^2+n+1} = \infty$

$\Rightarrow$ при $\alpha \leq 2$

$\lim x_n = 0$

при $\alpha > 2$

$\lim x_n = \infty$.

notebook

10.

а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to -8} \dfrac{-(x+8)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)} =$

$= \dfrac{-(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{1-x}+3} = -1$

в) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

г) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{x+2}{x+1} = 1$

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x-2)^{25}} = \lim \dfrac{x^{40}\cdot(5x)^{10}}{(3x^2)^{25}} = \dfrac{5^{10}}{3^{25}}$

е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$. Рассм. послед-ь $x_n = \pi + \pi n,\ n\in N$

видно, что при $n\to\infty$ $x_n\to\infty$, а $\cos$ принимает знач. 1 и -1, $\Rightarrow$ предела не существует.

12. $\lim x \operatorname{sgn}(x-1)$ в т. $x=1$ разрыв

13. каждая т. явл. т. разрыва

14. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

15. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim \frac{1 + x\ln a + o(x)}{x} = \ln a$

16. а) $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3)) =$

$= o(-5x + x^2 - x^3) = o(x^3)$, $x \to 0$

б) $\alpha(x) = (x-1)\, o((x-1)^2 + o(x-1))^2$, $x \to 1$

$= o((x-1)^3)$

в) $\alpha(x) = \frac{1}{3x} \cdot o(5x + x^2) = \frac{1}{3x}\, o(x^2) = o(x)$, $x \to 0$.

г) $\alpha(x) = \frac{1}{x^2} \cdot o(2x^4 + o(x^4 + 2x^2)) =$

$= o(x^2)$, $x \to 0$

д) $\alpha(x) = \frac{o(2(x+2)^3)}{(x+2)^2} + \frac{o(4(x+2)^5)}{(x+2)^4} =$

$= \frac{o((x+2)^5) + o((x+2)^5)}{(x+2)^4} = o(x+2)$, $x \to -2$

notebook

18.

а) $\sin^2(5\sqrt{x}+x) = (5\sqrt{x}+x+o(x))^2 =$

$= 25x + 10x\sqrt{x} + x^2 + o(x^2) = 25x + o(x)$

б) $\cos(4x^2+x) = 1 - 8x^4 - 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) =$

$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

в) $\ln(1-x^2+x) = -x^2 + x + o(x) = x + o(x)$

г) $\ln(\cos 2x) = -2x^2 + o(x^2)$

д) $\ln(e^x+\sqrt{x}) = e^x + \sqrt{x} - 1 + o(1+x+\sqrt{x}+o(x)) =$

$= 1 + x + \sqrt{x} - 1 + o(x) + o(1) = o(1)$

е) $\cos\sqrt{\sin x} = 1 - \frac{1}{2}\sin x + o(\sin x) =$

$= 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$.

19. а) $\sqrt{x^2+x} - x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - x + o(x^2) =$

$= \frac{1}{2} + o(1)$

б) $\sqrt[3]{x^3+x} - x = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - x + o(x^3) =$

$= \frac{2}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

в) $\ln\cos\left(\frac{2}{x}\right) = \cos\frac{2}{x} - 1 + o\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{4}{2x}\right)\right) =$

$= -\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{4}{x^2}\right)$

г) $e^{1/\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

20. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + o(1) - \frac{1}{x^2} + \right.$

$\left. + \frac{9}{2} + o(1)\right) = 4$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2\cos x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\cos(t + \frac{\pi}{3})} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\cos t \cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3}\sin t^2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - \cos t + \sin t\sqrt{3}} = \frac{t + o(t)}{1 - 1 + \frac{t^2}{2} + t\sqrt{3} + o(t)} =$

$= \frac{1 + o(1)}{\frac{t}{2} + \sqrt{3} + o(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

в) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)\, tg\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{t\to 0} t\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2} + o(t)\right) = 0$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + bx}}{x} = \frac{1 + \frac{a}{m}x - 1 - \frac{b}{n}x}{x} = \frac{a}{m} - \frac{b}{n}$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right) = 0$

е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{1 + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}}{x^2 + o(x^2)} =$

$= \frac{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) - \frac{1}{6}}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{12}$

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}} = \lim \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tg\, x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (x + o(x))^{x + o(x)} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 + x^2 + o(x)) = 1.$

notebook

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln \cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2x^2+o(x)-1+o(x^2)}{1-\frac{9x^2}{2}+o(x)-1+o(x^2)} =$

$= -\dfrac{4}{9}$

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = \cos\left(\pi n\left(1+\dfrac{1}{2n}+\right.\right.$

$\left.\left.+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \cos\left(\pi n+\dfrac{\pi}{2}+o(1)\right) =$

$= (-1)^n \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\underset{\to 0}{o(1)}\right) = 0.$

л) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}} - x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) - x\left(1-\dfrac{1}{x}-o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right) =$

$= x+1+o(1)-x+1+o(1) = 2$

м) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\ln a+\right.$

$\left.+o\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n+1}\ln a - o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\ln a\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln a$

о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{1}{2x^2}+\right.$

$\left.+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x^2}+1+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)^x =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)+o(x)\right) = 2$

28. а) $y=\sqrt{x}$, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(4)=\frac{1}{4}$

б) $y=x|x|$, $y'(0)=0$.

29-31. а) $y=|x|$, $y'(x_0+0)=1$ $y'(x_0-0)=-1$

$x_0=1$ $y'(x_0+0)=y'(x_0-0)=1$.

б) $x\,\mathrm{sgn}\,x$, $x_0=0$, $y'(x_0+0)=y'(x_0-1)=-1$

в) $x^2\,\mathrm{sgn}\,x_0$, $x_0=0$, $y'(x_0+0)=y'(x_0-0)=0$

г) $|x-1|e^x$, $x_0=1$ $y'(x_0+0)=e^x+xe^x-e^x=$

$=xe^x=e$

$y'(x_0-0)=e^x-xe^x-e^x=-e$

32. а) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$y'=\frac{1\cdot\left(1+\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=$$

$$=\frac{1+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x^3+x^2\sqrt{x}+(x^2+x\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x})}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x^3+x^2\sqrt{x}+x\sqrt{x^3+3x^2+3x^2\sqrt{x}+x\sqrt{x}}}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8x\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x+3+3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}$$

$dy=dx\cdot y'$

notebook

б) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$

$y' = -\sin x \cos(\cos x) \cdot 2\sin(\cos x) -$

$- \cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot 2\cos(\sin x)$ $\qquad dy = y' dx$

в) $y = e^{x^2} \cos 2x$

$y' = 2x e^{x^2} \cos 2x - 2\sin 2x\, e^{x^2}$

г) $y = x^{\sin x}$ $\qquad y' = \cos x \cdot x^{\sin x} (\ln x + 1)$

д) $y' = e^{e^x} + x^{e^x} = e^x \cdot e^{e^x} + e^x x^{e^x} (\ln(x+1))$

е) $y = \ln^3(\ln^2(\ln x))$

$y' = 3\ln^2(\ln^2(\ln x)) \cdot \frac{1}{\ln^2(\ln x)} \cdot 2\ln(\ln x) \times$

$\times \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

ж) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \times$

$\times \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^2 + 1}$

з) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$

$y' = \frac{1 + \arcsin x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \times$

$\times \left(\frac{(-1-x-1+x)}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{1-x} \right) =$

$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - (1-x)\sqrt{}}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)} =$

$= \frac{x \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$

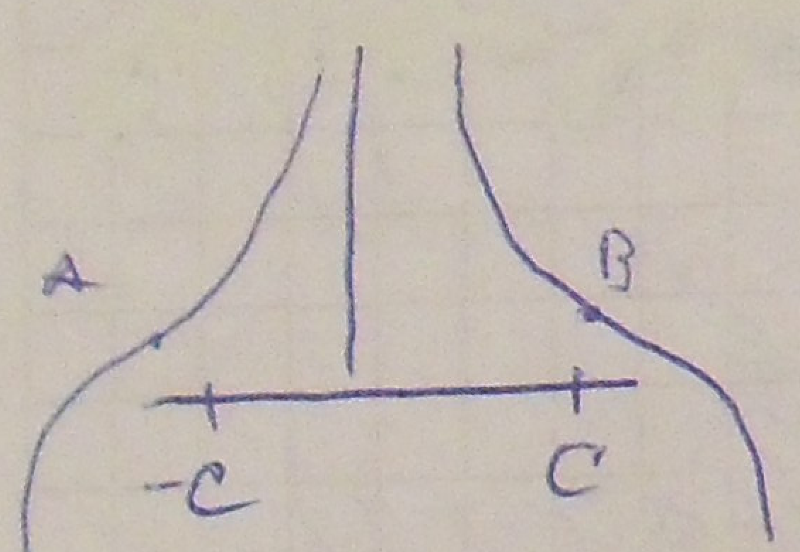
и) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$

$y' = \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) \cdot \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})}{(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) \cdot \sqrt{\ldots}}$

к) $y = \sin x^{\cos x}$; $y' = \cos x^{\cos x} \cdot -\sin x \cdot x^{\cos x}(\ln x + 1)$

33. $f'(x_0) = a$; $f(x_0) = ax + b$

34.



в т. А: $f'(x) = -\frac{m^2}{x}$, $f'(x) = \frac{m^2}{x^2}$

$g'(x) = 2bx$

$f'(-c) = g'(-c)$ $\quad \frac{m^2}{c^2} = -2bc$

$b = -\frac{m^2}{2c^3}$

$f(c) = g(c) - \frac{m^2}{c} = a + bc^2$

$\frac{m^2}{c} = a - \frac{m^2}{2c}$ $\quad a = -\frac{m^2}{2c}$

в т. В $\quad f(x) = \frac{m^2}{x}$

$f'(x) = -\frac{m^2}{x^2}$ $\quad g'(x) = 2bx$

$-\frac{m^2}{c^2} = -2bc$ $\quad b = -\frac{m^2}{2c^3}$

$f(c) = g(c)$; $\frac{m^2}{c} = a + bc^2$; $\frac{m^2}{c} = a - \frac{m^2}{2c}$ $a = -\frac{m^2}{2c}$

Ответ: $a = -\frac{m^2}{2c}$; $b = -\frac{m^2}{2c^3}$.

notebook

35 Т.к. $\Delta y \approx dy$, то $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

а) $A = \sqrt[3]{1{,}01} = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} \cdot 0{,}1 = 1 + \frac{0{,}1}{3} = \frac{3{,}1}{3}$

б) $A = \operatorname{arctg} 1{,}1 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}1}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}05$

в) $A = e^{0{,}2} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

Формула конечных приращений Лагранжа

39. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$f(0) = \frac{3}{2}$ $\quad f(2) = \frac{1}{2}$ $\quad f(2) - f(0) = -1$

$-1 = f'(c) \cdot 2$

$f'(c) = -\frac{1}{2}$

$f'(x)$ на $[0;1]$ $\quad -x \quad -c = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$

$f'(x)$ на $[1;+\infty)$ $\quad -\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2}$, $c = \sqrt{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$.

40. Правило Лопиталя

если 1) $f(x)$ и $g(x)$ дифф-мы в окр-ти т. a

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

3) $g'(x) \neq 0$ в окр-ти

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

а) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{a^x \ln a - a x^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a$

б) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x^x(\ln x + 1) = a^a(\ln a + 1)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \infty$

33

34 г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{2} = 0$

д) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} = \lim\limits_{x\to +0} \frac{\sin \beta x}{\sin \alpha x} \cdot \frac{\alpha \cdot \cos \alpha x}{\beta \cdot \cos \beta x} =$

$= \lim\limits_{x\to +0} \frac{\beta x + o(x)}{\alpha x + o(x)} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1.$

41. Формула Тейлора

$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$, где

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)} \frac{x_0}{k!} (x - x_0)^k$

$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$

а) $f(x) = (2+x)^3$, $x_0 = 1$, $n = 3$

$f(x) = 3^3 + \frac{3 \cdot 3^2}{1}(x-1) + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3 \cdot 18}{6} =$

$= 27 + 27x - 27 + 9x^2 - 18x + 9 = 9x^2 + 9x + 9 + o(x-1)^3$

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$

$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1) + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot (x-1)^2 + \left(-\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{(x-1)^3}{6} =$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{x^3}{32} + \frac{3x^2}{32} - \frac{3x}{32} + \frac{1}{32} =$

$= \frac{13}{32} - \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{32} + \frac{5}{32}x + o(x-1)^3$

в) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 0,36$, $n = 2$

$$f(x) = 0,8 + \frac{1}{1,6} \cdot (x - 0,36) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,512} \cdot$$

$$\cdot (x - 0,36)^2$$

$$0,8 + \frac{x}{1,6} - \frac{0,36}{1,6} - \frac{x^2 - 0,72x + 0,1296}{4,096}$$

г) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$, $n = 3$

$$f(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3 =$$

$$= e^2 + \cancel{\frac{e^2}{2}x^2} - 2e^2x + \cancel{2e^2} + e^2x - 2e^2 +$$

$$+ \frac{e^2}{6}x^3 - \cancel{\frac{e^2x^2}{2}} + \frac{e^2x}{2} - \frac{4e^2}{3} = \frac{e^2x^3}{6} - \frac{e^2x}{2} - \frac{1}{3}e^2 +$$

$$+ o(x-1).$$