Дельта-функция

Определение дельта-функции

Пусть $\varphi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция (т. е. основная функция), $x \in \mathbb{R}$. Будем писать: $\varphi(x) \in D$.

О. Дельта-функцией Дирака называется линейный непрерывный функционал (т. е. обобщённая функция), действующий на основные функции $\varphi(x)$ по правилу:

$\hat{\delta}\varphi = \varphi(0)$.

Действие дельта-функции также обозначают одним из следующих способов:

$$\left(\hat{\delta}, \varphi\right) = \varphi(0)$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Действие дельта-функции согласно этому правилу можно расширить на все функции $\varphi(x)$, определённые и непрерывные в некоторой окрестности нуля (т. к. каждой такой функции можно поставить в соответствие некоторую основную функцию, совпадающую в нуле с исходной функцией).

Поскольку результат действия дельта-функции определяется только значением $\varphi(x)$ в нуле, то

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

для любого отрезка $[a, b]$, содержащего точку 0 внутри: $a < 0 < b$.

Если же отрезок $[a, b]$ не содержит точку 0, то

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Что будет, если точка 0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$? Пока этот вопрос оставим открытым.

Ещё раз подчеркнём, что символ $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле этого слова, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$ не является интегралом в обычном смысле. Это всего лишь такие (удобные) обозначения. Дельта-функция, как и всякая обобщённая функция, является оператором и задаётся исключительно способом её действия на основные функции $\varphi(x)$.

Дельта-функция как слабый предел

Рассмотрим функциональную последовательность:

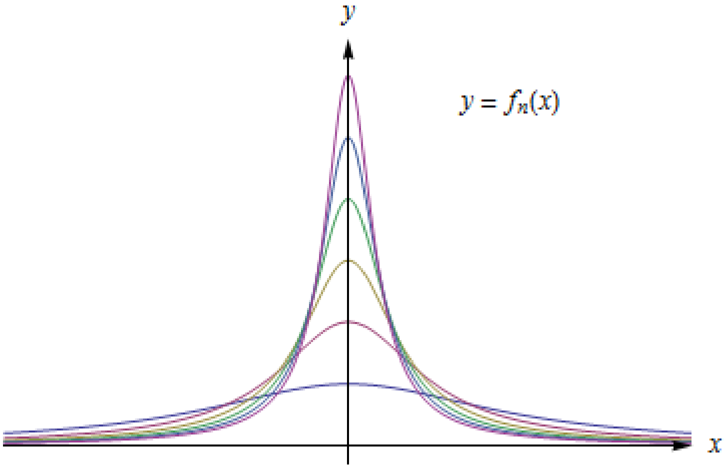
$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1 + n^2x^2}.$$

Для любой функции $\varphi(x) \in D$ справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

(доказательство в приложении).
Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx\,, \qquad \forall\varphi(x) \in D.$$



В таком случае говорят, что последовательность $f_n(x)$ *сходится слабо* к $\delta(x)$.
Поточечный предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}\right) =$$
$$= \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

можно в этом смысле считать значением функции $\delta(x)$, стоящей под интегралом в определении дельта-функции (см. рис.).
Аналогично можно показать, что к дельта-функции слабо сходятся последовательности $\frac{\sin nx}{\pi x}$, $\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$, $\frac{\sin^2 nx}{\pi n x^2}$, а также последовательности вида $f_n(x) = nf(nx)$, где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad f(x) \geq 0.$$

Сдвиг аргумента дельта-функции

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx\,, \qquad \varphi(x) \in D.$$

Сделаем замену переменной $t = x - x_0$ под интегралом так, как если бы это был обычный интеграл. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t + x_0)\,dt = \varphi(x_0).$$

Таким образом, определим значение функционала $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx$ как $\varphi(x_0)$.

Чётность дельта-функции

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)\varphi(x)\,dx.$$

Сделаем замену переменной $t = -x$, как если бы это был обычный интеграл. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)\varphi(x)\,dx = -\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(t)\varphi(-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(-t)\,dt = \varphi(0).$$

Значит, для любой основной функции $\varphi(x) \in D$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx,$$

т.е. $\delta(-x) = \delta(x)$. Это и значит, что дельта-функция является чётной.

Следствие. Рассмотрим интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

Доопределим функцию $\varphi(x)$ чётным образом при $x < 0$. В силу чётности $\delta(x)$, произведение $\delta(x)\varphi(x)$ тоже будет чётной функцией, и

$$\int_{0}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{0} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

А также справедливы равенства:

$$\int_{0}^{b} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(0)}{2}, \qquad b > 0,$$

$$\int_{a}^{0} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(0)}{2}, \qquad a < 0.$$

Растяжение аргумента дельта-функции

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)\,dx\,, \qquad a \neq 0.$$

Сделаем замену переменной: $t = ax$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt\ = \frac{\varphi(0)}{|a|}.$$

Замена переменной

Аналогично можно сделать замену переменной $t = \psi(x)$ под интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi(x))\varphi(x)\,dx.$$

В частности, пусть непрерывно дифференцируемая функция $\psi(x)$ имеет на вещественной оси простые нули x_1, …, x_n. Тогда, разбив область интегрирования на участки монотонности функции $\psi(x)$ и сделав замену $t = \psi(x)$, получим формулу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi(x))\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(x_k)}{|\psi'(x_k)|}.$$

Дифференцирование дельта-функции

Обобщённая производная дельта-функции определяется следующим образом. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Проинтегрируем его по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\,dx = \delta(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)\,dx = -\varphi'(0).$$

Будем считать это правилом, по которому обобщённая функция δ' действует на основную функцию $\varphi(x) \in D$, т. е. определением δ':

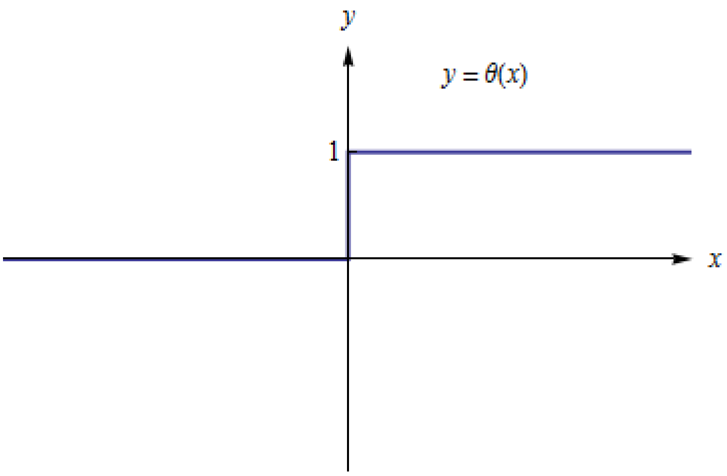
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\,dx = -\varphi'(0).$$

Можно показать, что $\delta'(x)$ является нечётной функцией (аналогично тому, как была показана чётность самой дельта-функции).

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x)\varphi(x)\,dx = \varphi''(0), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

Первообразная дельта-функции



Покажем, что дельта-функция является обобщённой производной ступенчатой функции Хевисайда (тэта-функции):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \theta(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)|_{0}^{+\infty} = \varphi(0) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \forall\varphi(x) \in D.$$

Это и означает, что $\theta'(x) = \delta(x)$, и функция Хевисайда является первообразной дельта-функции.

Преобразование Фурье дельта-функции

Вычислим преобразование Фурье от дельта-функции:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Это даёт нам интегральное представление дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Заметим, что в обычном смысле (как несобственный интеграл) этот интеграл расходится. В силу чётности дельта-функции справедливо также интегральное представление:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\, d\lambda.$$

Многомерная дельта-функция

Действие дельта-функции в двумерном и трёхмерном случае определяется следующим образом:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \delta(M, M_0)\varphi(M)\, dx\, dy = \varphi(M_0), \qquad M_0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(M, M_0)\varphi(M)\, dx\, dy\, dz = \varphi(M_0), \qquad M_0 \in \mathbb{R}^3.$$

В декартовых координатах многомерная дельта-функция есть произведение одномерных:

$$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \qquad \text{где } M(x, y), \qquad M_0(x_0, y_0),$$

$$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \qquad \text{где } M(x, y, z), \qquad M_0(x_0, y_0, z_0).$$

Посмотрим, как будет выглядеть дельта-функция в криволинейных координатах. Пусть при $M \in \mathbb{R}^2$ криволинейные координаты (ξ, η) точки M изменяются в области G. Тогда

$$\varphi(M_0) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(M)\delta(M, M_0)\, dx\, dy = \iint\limits_{G} \varphi(\xi, \eta)\delta(M, M_0) \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta.$$

С другой стороны, $\varphi(M_0)$ можно записать в виде:

$$\varphi(M_0) = \varphi(\xi_0, \eta_0) = \iint\limits_{G} \varphi(\xi, \eta)\delta(\xi - \xi_0)\delta(\eta - \eta_0)\, d\xi\, d\eta,$$

где (ξ_0, η_0) — криволинейные координаты точки M_0. Сравнивая эти два представления, приходим к выводу, что в криволинейных координатах (ξ, η) дельта-функция имеет вид:

$$\delta(M,M_0)=\frac{\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)}{\left|\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|}.$$

Аналогичная формула справедлива и в трёхмерном случае.

В частности,

$$\delta(M,M_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2\sin\theta}$$ в сферических координатах,

$$\delta(M,M_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)}{r}$$ в цилиндрических координатах,

$$\delta(M,M_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}$$ в полярных координатах (на плоскости).

Физический смысл дельта-функции

Плотность массы материальной точки, расположенной в точке M_0:

$$\rho(M)=m\delta(M,M_0),\qquad M\in\mathbb{R}^3.$$

В самом деле, тогда

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\rho(M)dV=\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}m\delta(M,M_0)dV=m.$$

Аналогично: плотность точечного заряда, расположенного в точке M_0:

$$\rho(M)=q\delta(M,M_0).$$

Если есть несколько точечных зарядов q_k, расположенных в точках M_k, то

$$\rho(M)=\sum_{k=1}^{n}q_k\delta(M,M_k).$$

Плотность заряда тонкой заряженной нити, расположенной на оси Oz:

$$\rho(x,y,z)=\kappa(z)\delta(x)\delta(y),$$

где $\kappa(z)$ — заряд на единицу длины нити.

Плотность заряда тонкой заряженной пластины, расположенной в плоскости Oxy:

$$\rho(x,y,z)=\sigma(x,y)\delta(z),$$

где $\sigma(x,y)$ — заряд на единицу площади пластины.

Плотность заряда, распределённого равномерно по сфере радиуса R, в сферических координатах:

$$\rho(r,\theta,\varphi)=\sigma\delta(r-R),$$

где σ — заряд на единицу площади сферы.

В самом деле, полный заряд равен:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\rho(M)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{+\infty}r^2\,dr\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}\rho(r,\theta,\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\sigma\int\limits_0^{+\infty}r^2\delta(r-R)\,dr\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi}_{4\pi}=4\pi R^2\sigma.$$

Приложение

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \qquad \forall\varphi \in D,$$

где

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,dx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(nx)}{1+(nx)^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} nx|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Рассмотрим интеграл:

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx\,, \qquad \varphi \in D.$$

При этом

$$I_n - \varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x)-\varphi(0)]\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx.$$

Сделаем замену: $nx = t$. Тогда

$$I_n - \varphi(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right]\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right]\frac{dt}{1+t^2}}_{J_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right]\frac{dt}{1+t^2}}_{J_2} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right]\frac{dt}{1+t^2}}_{J_3}.$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна и финитна, то она ограничена на $\mathbb{R}$.
Тогда $|\varphi(x)| \le M$ и

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right| \le \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| + |\varphi(0)| \le 2M.$$

Отсюда

$$|J_3| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty} \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right|\frac{dt}{1+t^2} \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$|J_1| \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Выберем A настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $|J_1| < \varepsilon, |J_3| < \varepsilon$. Это можно сделать в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \pi$.
Далее,

$$|J_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| \frac{dt}{1+t^2}.$$

Выберем такой (достаточно большой) номер N, чтобы при каждом $n > N$ выполнялось неравенство $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$ для всех $x \in \left[-\frac{A}{n}, \frac{A}{n}\right]$ (это можно сделать в силу непрерывности функции $\varphi(x)$). Тогда

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| < \varepsilon \text{ для всех } t \in [-A, A],$$

и

$$|J_2| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-A}^{A} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|I_n - \varphi(0)| \leq |J_1| + |J_2| + |J_3| \leq 3\varepsilon$$

при всех достаточно больших n. Поскольку ε мы можем брать сколь угодно малым, отсюда следует, что $I_n \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$, ч. т. д.