Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = x^{n-1}\cos x^n$ на множестве а) $x \in (0;1)$, б) $x \in [0;1-\varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;1)$ — фиксированное число.

Найдём предел функциональной последовательности:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad x \in [0;1).$$

Воспользуемся практическим критерием равномерной сходимости функциональной последовательности. Для этого нам нужно найти

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} f_n(x),$$

где $X = (0;1)$ в случае а) и $X = [0;1-\varepsilon]$ в случае б), и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n$.

Чтобы найти точную верхнюю грань $\sup\limits_{x\in X} f_n(x)$, построим график функции $f_n(x)$ на отрезке $x \in [0;1]$ для достаточно большого фиксированного числа n. Заметим, что при $n > 1$

$$f_n(0) = 0, \;\; f_n(x) > 0 \text{ при } x \in (0;1].$$

Найдём точки локального экстремума функции $f_n(x)$ на отрезке $x \in [0;1]$. Для этого найдём нули производной:

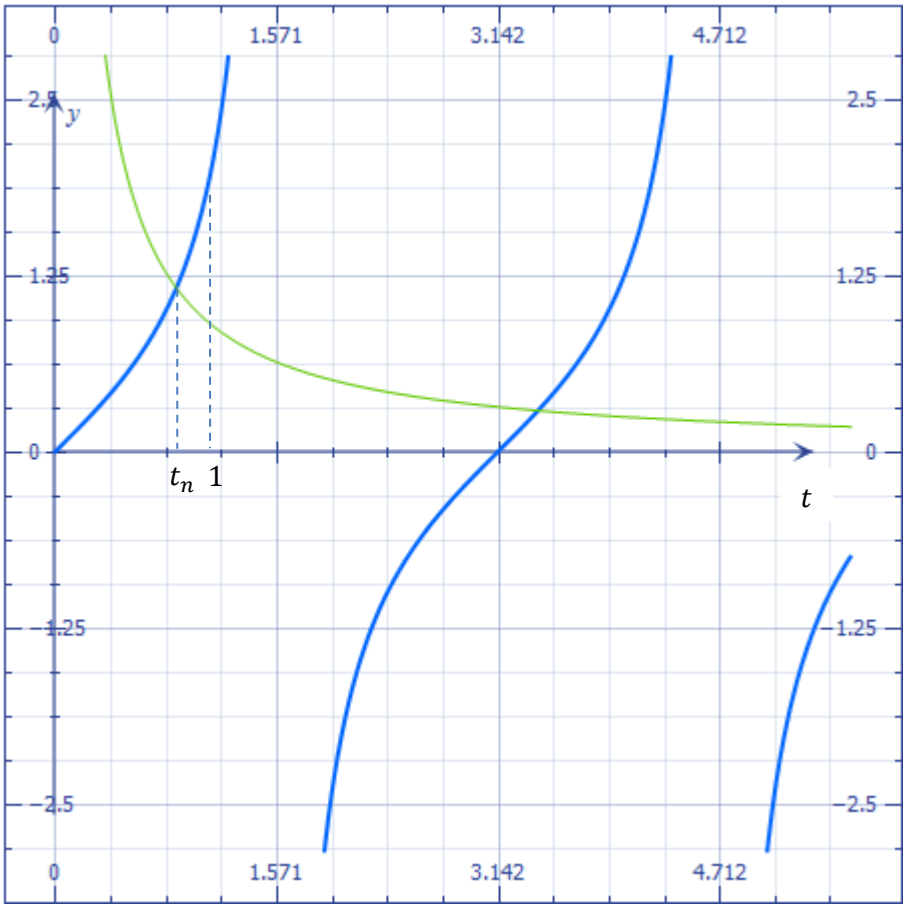
$$f_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\cos x^n - x^{n-1}\sin x^n \cdot nx^{n-1} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x^n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{x^n}.$$

Сделаем замену $x^n = t$. Тогда $t \in [0;1]$ и

$$\operatorname{tg} t = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{t}. \tag{1}$$

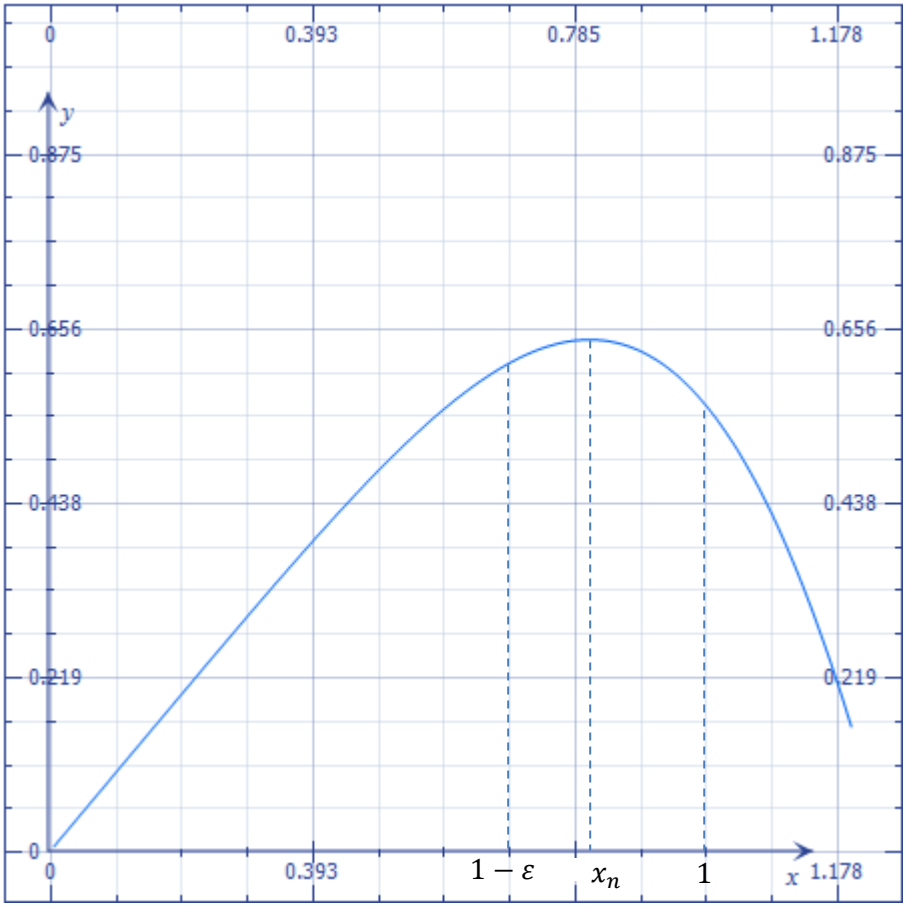


Построив графики функций $g_1(t) = \operatorname{tg} t$ (синяя кривая) и $g_2(t) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{t}$ (зелёная кривая), мы убеждаемся в том, что уравнение (1) имеет единственный корень t_n на отрезке $[0; 1]$, причём этот корень лежит строго внутри отрезка, поскольку

$$g_1(1) = \operatorname{tg} 1 > 1 > \frac{n-1}{n} = \\ = g_2(1),$$

и значит, в точке $t = 1$ график тангенса $g_1(t)$ уже лежит выше графика гиперболы $g_2(t)$, т. е. абсцисса точки первого пересечения графиков t_n лежит левее 1.

Итак, существует число $t_n \in (0; 1)$ — единственный корень уравнения (1) на отрезке $[0; 1]$. Ему соответствует $x_n = \sqrt[n]{t_n} \in (0; 1)$ — единственный нуль производной функции $f_n(x)$ на отрезке $[0; 1]$. Тогда график функции $f_n(x)$ выглядит следующим образом:



Отсюда в случае а):

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in (0;1)} f_n(x) = f_n(x_n) = \\ = x_n^{n-1} \cos x_n^n = \frac{t_n \cos t_n}{\sqrt[n]{t_n}}.$$

Отметим, что при $n \to \infty$ число t_n — минимальный положительный корень уравнения (1) — стремится к t_0 — минимальному положительному корню уравнения $\operatorname{tg} t = \frac{1}{t}$. Отметим, что $t_0 \in (0; 1)$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n \cos t_n}{\sqrt[n]{t_n}} = \\ = t_0 \cos t_0 \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{t_0}}}_{1} = t_0 \cos t_0 \neq \\ \neq 0,$$

откуда, согласно практическому критерию равномерной сходимости, следует отсутствие равномерной сходимости функциональной последовательности $f_n(x)$ на множестве $x \in (0; 1)$.

Рассмотрим случай б). Требуется определить $\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in[0;1-\varepsilon]} f_n(x)$. Заметим, что число $x_n = \sqrt[n]{t_n}$ при $n \to \infty$ стремится к значению $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_0} = 1$, поэтому при достаточно больших n имеем: $x_n > 1 - \varepsilon$. Тогда на отрезке $[0; 1-\varepsilon]$ функция $f_n(x)$ является монотонно возрастающей, и

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[0;1-\varepsilon]} f_n(x) = f_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{n-1}\cos(1-\varepsilon)^n.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^{n-1}\cos(1-\varepsilon)^n = 0.$$

Согласно практическому критерию равномерной сходимости функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве $x \in [0; 1-\varepsilon]$.

Ответ: а) сходится неравномерно, б) сходится равномерно.