ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ

Вы могли задуматься, почему вычислении пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

мы пользовались теоремой о непрерывности композиции функций и ни словом не обмолвились о кажущейся естественной теореме о пределе композиции функций.

Дело в том, что правильно сформулировать теорему о пределе композиции функций несколько сложнее, чем теорему о непрерывности композиции функций, и, чтобы не запутаться, можно всегда обходиться построением соответствующих непрерывных функций и их композиции.

Внимание! Сейчас будет сформулировано *неверное* утверждение!

«Теорема». Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$, причём $\lim_{x\to a} f(x)=b$. Пусть функция $z=g(y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $y=b$, причём $\lim_{y\to b} g(y)=c$. Тогда 1) сложная функция $F(x)\equiv g(f(x))$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ и 2) $\lim_{x\to a} F(x)=c$. (НЕВЕРНО!!!)

Задание. 1. Показать, что каждое из утверждений данной теоремы неверно. Для этого рассмотреть примеры:
а) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $g(y)=\frac{\sin y}{y}$,
б) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$,
в) $f(x)=0$, $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$.
Объяснить, в чём заключаются «проблемы» и каковы их «источники».

2. Изменить формулировку «теоремы» так, чтобы утверждение стало верным. Это можно сделать двумя способами:
1) потребовать, чтобы функция $g(y)$ («внешняя») была непрерывной в точке $y=b$, и тогда будет верно, что $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))$;
2) не изменять требования на функцию $g(y)$, но наложить дополнительное требование на функцию $f(x)$.
Анализ приведённых в задании 1 примеров должен помочь вам правильно сформулировать нужные условия и доказать верные утверждения. Требуется *подробно доказать* получившиеся теоремы.

3. Пользуясь доказанными вами теоремами, *подробно* объяснить вычисление пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot 5=5$$

(теорема из п. 2) части 2 задания);

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\right)=\sin 0=0$$

(теорема из п. 1) части 2 задания).

4. Придумать свои примеры вычисления пределов типа двух предложенных, а также свои контрпримеры в духе части 1 задания.