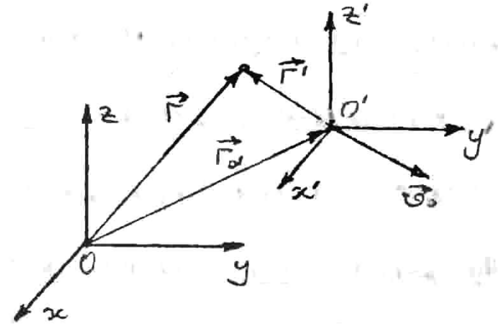
Соколик А.А. 305 гр.

Теоретическая механика

① Покажите, что уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея, а уравнения движения точечной частицы ковариантны относительно преобразований Лоренца.



Возьмём систему отсчёта S', неускоренно движущуюся относительно инерциальной системы S. Тогда система S' тоже будет инерциальной. При этом для любой материальной ~~от~~ точки $\vec r = \vec r_{0'} + \vec r'$, где $\vec r_{0'} = \vec v_0 t + \vec r_0$.

Дифференцируя равенство $\vec r = \vec v_0 t + \vec r_0 + \vec r'$ по времени и учитывая неизменность ориентации осей S' получим $\vec v = \vec v_0 + \vec v'$.

Дифференцируя ещё раз, получим $\vec w = \vec w'$.

Ускорение точки в данный момент времени одинаково относительно любой из системы, неускоренно движущиеся относительно друг друга.

Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе называется преобразованием Галилея.

Согласно классическому принципу относительности законы механики одинаковы в любых инерциальных системах отсчёта. Это значит, что уравнение движения относительно любых инерциальных систем S и S' совпадают друг с другом, т.е. уравнение $m\vec{w}=\vec{F}$ эквивалентно уравнению $m'\vec{w}'=\vec{F}'$. Поскольку в классической механике $m=m'$, а $\vec{w}=\vec{w}'$, то из принципа Галилея следует, что $\vec{F}=\vec{F}'$.

Все величины, входящие в уравнение Ньютона, не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе. Иными словами, уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

Ковариантность уравнений Лагранжа.

Имеем уравнение Лагранжа для частицы в декартовых координатах:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde L}{\partial\dot x^\alpha}-\frac{\partial\tilde L}{\partial x^\alpha}=F_\alpha,\quad \tilde L=\tilde L(x^1,x^2,x^3,\dot x^1,\dot x^2,\dot x^3,t)$$

Перейдём от декартовых координат к новым переменным q^1,q^2,q^3 по формулам: $x^\alpha=x^\alpha(q^1,q^2,q^3,t)$

Единственное требование на такой переход — это существование обратного преобразования

$q^\beta=q^\beta(x^1,x^2,x^3,t)$

$$\dot x^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta}\dot q^\beta+\frac{\partial x^\alpha}{\partial t},\quad \dot q^\beta=\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}\dot x^\alpha+\frac{\partial q^\beta}{\partial t}$$

$$\tilde L(x^1,x^2,x^3,\dot x^1,\dot x^2,\dot x^3,t)=L(q^1,q^2,q^3,\dot q^1,\dot q^2,\dot q^3,t)$$

$$\frac{\partial\tilde L}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial x^\alpha},\quad \frac{\partial\tilde L}{\partial\dot x^\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial\dot x^\alpha},$$

причём $\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial\dot x^\alpha}=\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}$

Учтём то, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)q^\beta=0$

Подставим всё это в уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial\dot x^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\right)-$$
$$-\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^\beta}+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\beta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial x^\alpha}\right)=F_*^\alpha(q,\dot q,t)$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\dot q^\beta}{\partial x^\alpha}=0$, то получим

$$\frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\right) = F^\alpha_\alpha(q,\dot q, t)$$

Умножим это уравнение на $\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\sigma}$ и просуммируем по α. Получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = Q^\alpha_\sigma(q,\dot q,t), \text{ где } Q^\alpha_\sigma = F^\alpha_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\sigma}$$

Мы получили, что уравнения Лагранжа сохраняют свой вид, т.е. являются ковариантными.

Преобразования Лоренца.

В релятивистской механике

$$L_0 = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{m\vec v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec F$$

Уравнение движения не инвариантно относительно преобразований Галилея. Поскольку оно имеет физическое содержание, то должны быть пересмотрены сами преобразования Галилея.

При преобразованиях Галилея инвариантом является расстояние между двумя точками. Теперь инвариантом можно считать скорость света.

Для света $(d\vec r)^2 = c^2dt^2$. За то же время dt материальная точка пройдет меньшее расстояние.

Можно считать, что $ds^2 = c^2dt^2 - (d\vec r)^2 \geq 0$

Для света $ds^2 = 0$. Действие $L\,dt = -mc\,ds$

Постулируем, что для любых двух систем отсчёта K и K' $ds^2 = c^2dt^2 - (d\vec r)^2 = c^2dt'^2 - (d\vec r\,')^2$

Введем четырёхмерный вектор

$$dx^i = \{dx^0, d\vec r\} = \{c\,dt, d\vec r\}$$

Метрический тензор: $g_{ik} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} = g_{i'k'}$

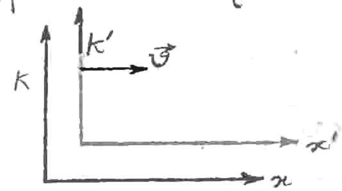
$$g_{ik}dx^i dx^k = g_{i'k'}dx^{i'}dx^{k'}$$

Если преобразование от x^i к $x^{i'}$ вида $x^{i'} = f^{i'}(x^0,x^1,x^2,x^3)$ существует, то для бесконечно малых перемещений $dx^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^k}dx^k = a^{i'}_i dx^i$

Если пространство однородно, то коэффициенты $a^{i'}_i$ не должны зависеть от координат.

$g_{ik} = g_{i'k'}a^{i'}_i a^{k'}_k$ ~~$= g_{ik}$~~. Поскольку g_{ik} и $g_{i'k'}$ известны, то имеем систему десяти уравнений для определения $a^{i'}_i$.

Рассмотрим относительное



движение систем отсчёта только вдоль оси x.

Тогда $a^{2'}_i = \delta^{2'}_i$, $a^{3'}_i = \delta^{3'}_i$

Имеем оставшиеся уравнения:

$$g_{00} = 1 = g_{i'k'} a^{i'}_0 a^{k'}_0 = (a^{0'}_0)^2 - (a^{1'}_0)^2$$

$$g_{01} = g_{10} = 0 = g_{i'k'} a^{i'}_0 a^{k'}_1 = a^{0'}_0 a^{0'}_1 - a^{1'}_0 a^{1'}_1$$

$$g_{11} = -1 = g_{i'k'} a^{i'}_1 a^{k'}_1 = (a^{0'}_1)^2 - (a^{1'}_1)^2$$

Четвёртое уравнение можно получить, рассматривая закон преобразования координат некоторой точки. Если в системе K эта точка движется со скоростью v вдоль оси x, то в системе K' она неподвижна.

$$0 = dx^{1'} = a^{1'}_i dx^i = a^{1'}_0 dx^0 - a^{1'}_1 dx^1 = dx^0 (a^{1'}_0 + \tfrac{v}{c} a^{1'}_1)$$

Отсюда получим четвёртое уравнение.

$$a^{1'}_0 = -\frac{v}{c} a^{1'}_1$$

Решение имеет вид: $\|a^{i'}_i\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Преобразования полученного вида называются преобразованиями Лоренца. Их можно проинтегрировать: $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $t' = \frac{t - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $y' = y$, $z' = z$.

Уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}E_k = (\vec{F}\vec{v}), \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}, \quad \frac{d}{ds}\vec{p} = \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{т.к. } \frac{ds}{dt} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{d}{ds}p^0 = \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p^0 = \frac{E_k}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{dp^i}{ds} = F^i = \left\{\frac{(\vec{F}\vec{v})}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \quad p^i = mc\frac{dx^i}{ds}$$

p^i и F^i преобразуются по преобразованию Лоренца.

② Приведите вывод законов сохранения энергии, импульса и момента импульса точечной частицы в нерелятивистской и релятивистской механике; сформулируйте условие, которым должны удовлетворять силы

1) Закон сохранения импульса

$\dot{\vec p} = \vec F$. Пусть $\vec n$ — некое неподвижное направление в пространстве. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\vec n \vec p) = (\vec F \vec n)$$

Если $(\vec F \vec n) = 0$, то $\frac{d}{dt}(\vec p \vec n) = 0$, $(\vec p \vec n) = const$

Если $\vec F = 0$, то $\vec p = const$

2) Закон сохранения момента импульса

$\dot p_\beta = F_\beta$, $\beta = 1,2,3$

$$\frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta) - \dot x_\alpha p_\beta = x_\alpha F_\beta$$

Для релятивистской и нерелятивистской механики $\dot x_\alpha p_\beta = p_\alpha \dot x_\beta$.

$$\cancel{\Rightarrow \frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta) - \dot x_\alpha p_\beta = \frac{d}{dt}(x_\beta p_\alpha) - x_\beta F_\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta) - x_\alpha F_\beta = \frac{d}{dt}(x_\beta p_\alpha) - x_\beta F_\alpha$$

$\frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = x_\alpha F_\beta - x_\beta F_\alpha$ — тензорная форма записи закона изменения момента импульса точечной частицы.

Каждому антисимметричному тензору можно поставить в соответствие дуальный псевдовектор:

$$\begin{cases} L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = x_2 F_3 - x_3 F_2 \\ M_2 = x_3 F_1 - x_1 F_3 \\ M_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1 \end{cases}$$

Тогда $\vec L \equiv [\vec r \times \vec p]$, $\vec M \equiv [\vec r \times \vec F]$, $\dot{\vec L} = M$

Если $\vec n$ - неподвижное направление в пространстве dt, то $\frac{d}{dt}(\vec n \cdot \vec L) = (\vec n \cdot \vec M)$

Если $(\vec n \vec M) = 0$, то $(\vec n \vec L) = const$

В частности, если $\vec M = 0$, то $\vec L = const$.

Поскольку $\dot{\vec L} = \vec M$, то $\frac{d}{dt}[\vec r \times \vec p] = [\vec r \times \vec F]$

Если ввести $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный тензор Леви-Чивиты, то

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta F_\gamma$$

Пусть частица движется в центральном поле $\varphi = \varphi(t, |\vec r - \vec r_0|)$

$E_\alpha = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$

$$F_\alpha = \int\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right) m\,\delta(\vec r - \vec r(t))\,d\vec r$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(t,|\vec r-\vec r_0|) = -\frac{\partial\varphi}{\partial|\vec r-\vec r_0|}\,\frac{\partial|\vec r-\vec r_0|}{\partial x_\alpha} =$$
$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial|\vec r-\vec r_0|}\cdot\frac{x_\alpha-x_\alpha^0}{|\vec r-\vec r_0|}$$
$$F_\alpha = -\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\, m\,\delta(\vec r-\vec r(t))\,d\vec r = -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$$
$$U = m\varphi(t,|\vec r(t)-\vec r_0|) \qquad U_e = e\varphi(t,|\vec r(t)-\vec r_0|)$$
$$[\vec r\times\vec F] = -\frac{\partial U}{\partial|\vec r(t)-\vec r_0|}\,\frac{1}{|\vec r(t)-\vec r_0|}\,[\vec r(t)\times(\vec r(t)-\vec r_0)] =$$
$$= -\frac{\partial U}{\partial|\vec r(t)-\vec r_0|}\,\frac{1}{|\vec r(t)-\vec r_0|}\,[\vec r(t)\times\vec r_0]$$
Если начало координат совместить с силовым центром, то $\vec r_0=0 \Rightarrow [\vec r\times\vec F]=0$.

$[\vec r\times\vec p]=const$.

$(\vec r\vec L) = (\vec r\cdot[\vec r\times\vec p]) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x^\beta p^\gamma x_\alpha = 0$

Поскольку $\vec L = const$ и $(\vec r\cdot\vec L)=0$, то траектория точки лежит целиком в одной плоскости.

3) Закон сохранения энергии.

$\dot{\vec p}=F$, $(\dot{\vec p}\cdot\vec v)=(\vec F\cdot\vec v)=\dot E_k$

Т.к. $\vec p=m\vec v$, то $(\dot{\vec p}\vec v) = m(\dot{\vec v}\cdot\vec v) = \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt}E_k$

$\Rightarrow E_k=\frac{mv^2}{2}$

В релятивистской механике

$$\vec p = \frac{m\vec v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\vec v\dot{\vec p}) = m\left(\vec v\cdot\frac{d}{dt}\frac{\vec v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m\left[\frac{(\vec v\dot{\vec v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v^2}{c^2}\frac{(\vec v\dot{\vec v})}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}\right] = \frac{m(\vec v\dot{\vec v})}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + K$$

В обоих случаях $\dot E_k = (\vec F\cdot\vec v)$

Представим силу $\vec F$ в виде суперпозиции потенциальной, диссипативной и гироскопической сил: $\vec F = -\frac{\partial U}{\partial\vec r} + \vec F^d + \vec F^g$

Диссипативные силы возникают при движении макроскопических тел в средах.

Тогда $\dot E_k = (\vec F\cdot\vec v) = \cancel{v^\alpha\partial F} - v^\alpha\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + (\vec F^d\cdot\vec v) + (\vec F^g\cdot\vec v)$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v^\alpha\frac{\partial U}{\partial x^\alpha(t)}$$

Вдоль траектории $\frac{d}{dt}(E_k+U) = \frac{\partial U}{\partial t} + (\vec F^d\cdot\vec v)$

$E_k+U=E$ — полная энергия.

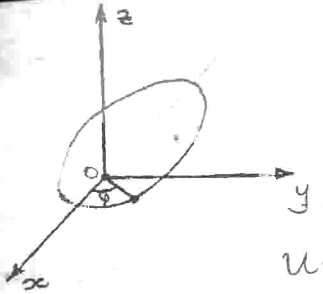
Полная энергия изменяется за счёт нестационарности потенциальных сил и за счёт работы диссипативных сил.

В консервативном поле ($\frac{\partial U}{\partial t}=0$) и в отсутствие диссипативных сил полная энергия частицы сохраняется.

③ Получите выражение для силы гравитационного взаимодействия частицы с силовым центром, считая известными законы ~~Керрело~~ Кеплера

В 1609 г Иоганн Кеплер исследовал экспериментальные данные наблюдений своего учителя Тихо Браге о движении планет Солнечной системы и пришёл к выводу, что планеты движутся по эллиптическим орбитам, причём в одном из фокусов которого эллипса находится Солнце. Секторная скорость движения планеты относительно Солнца постоянна.

Опираясь на эти данные, найдём силу, с которой Солнце действует на планеты. Для этого выберем систему координат так, что орбита будет лежать в плоскости $z=0$. Начало координат поставим в место нахождения Солнца, а ось x направим к перигелию орбиты планеты.



Тогда $\vec{\dot r} = \vec{e}_r \dot r + r\dot\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\vec{\ddot r} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{L}}{2m} = \frac{1}{2}[\vec{r}\times\vec{\dot r}]$$

Из результатов Кеплера

$$|\vec\sigma| = \sigma_z = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi = \sigma_0 = const$$

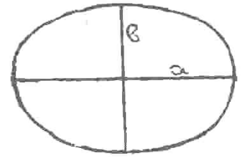
$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{2\sigma_0}{r^2}$ Поскольку $\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = 0$ то $(\vec{\ddot r}\cdot\vec{e}_\varphi) = 0$

$$\Rightarrow \vec{\ddot r} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec{e}_r$$

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{2\sigma_0}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2\sigma_0\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{d\varphi}\dot\varphi = -\frac{(2\sigma_0)^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Откуда $\vec{\ddot r} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\vec{e}_r$



Рассмотрим уравнение эллипса с полуосями a и $в$.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{в^2}{a^2}}, \quad p = \frac{в^2}{a}$$

Тогда $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$

$$\Rightarrow \vec{\ddot r} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{pr^2}\vec{e}_r$$

$$m\vec{\ddot r} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -m\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r} \quad \alpha = const$$

По отношению к гравитационному взаимодействию планета и Солнце — две равноправные материальные точки с различными массами.

Тогда $\alpha = \gamma M$; M — масса Солнца, γ — гравитационная постоянная.

$$\gamma = 6{,}68\cdot 10^{-8}\ \frac{см^3}{г\cdot с^2} \Rightarrow \boxed{\vec F = -\gamma \frac{mM}{r^2}\vec e_r}$$

Для любых двух точечных частиц с массами m_s и m_j: $\vec F_{sj} = -\gamma \frac{m_s m_j}{|\vec r_s - \vec r_j|^3}(\vec r_s - \vec r_j)$

$$\vec F_{sj} = \int\left[-\gamma \frac{m_j}{|\vec r - \vec r_j(t)|^3}(\vec r - \vec r_j(t))\, m_s \delta(\vec r - \vec r_s(t))\right] d\vec r \equiv$$

$$\equiv \int \vec G_j(\vec r,t)\, m_s \delta(\vec r - \vec r_s(t))\, d\vec r, \text{ где } \vec G_j(\vec r,t) = -\gamma \frac{m_j}{|\vec r - \vec r_j(t)|^3}(\vec r - \vec r_j(t))$$

$\vec G_j$ — это напряжённость гравитационного поля, создаваемого частицей с массой m_j, находящейся в точке $\vec r_j(t)$, причём вся зависимость $\vec G_j$ от времени обусловлена только функцией $\vec r_j(t)$.

$$G_j^\alpha = -\gamma \frac{m_j(x^\alpha - x_j^\alpha)}{|\vec r - \vec r_j(t)|^3} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-\gamma \frac{m_j}{|\vec r - \vec r_j(t)|}\right) \equiv -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^\alpha}$$

φ_j — потенциал гравитационного поля

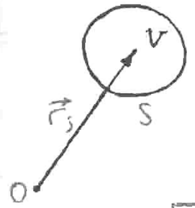
$$\vec G = -\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^\alpha}\vec e_\alpha = -\mathrm{grad}\,\varphi_j \equiv -\nabla\varphi_j$$

$$\boxed{\varphi_j = -\gamma\frac{m_j}{|\vec r - \vec r_j(t)|}}$$

$$\frac{\partial G_j^\alpha}{\partial x^\alpha} \equiv \mathrm{div}\,\vec G_j = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi_j = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha\partial x^\alpha} \equiv -\Delta\varphi = 0,$$

если $\vec r \ne \vec r_j(t)$

$$\vec r' = \vec r - \vec r_j \Rightarrow \int_V \mathrm{div}\,\vec G_j\, d\vec r = \oint_S (\vec G\cdot d\vec S) = -\oint_S \gamma m_j \frac{\vec r'}{|\vec r'|^3}\cdot\frac{\vec r'}{|\vec r'|}|\vec r'|^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = -4\pi\gamma m_j$$



Из сопоставления полученного результата с δ-функцией получим:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec G_j = -\Delta\varphi_j = -4\pi\gamma m_j \delta(\vec r - \vec r_j(t))}$$

Гравитационное поле и силы гравитационного взаимодействия удовлетворяют принципу суперпозиции. Для поля, создаваемого совокупностью частиц,

$$\mathrm{div}\,\vec G = -\Delta\varphi = -4\pi\gamma\sum_{k=1}^N m_k\delta(\vec r - \vec r_k(t))$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi_k, \quad \vec G(\vec r,t) = \sum_{k=1}^N \vec G_k(\vec r,t)$$

Точное решение уравнения

$$\varphi = -\gamma\sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|\vec r - \vec r_k(t)|} = -\gamma\int\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\sum_{k=1}^N m_k\delta(\vec r' - \vec r_k(t))\, d\vec r'$$

Можно провести непрерывную аппроксимацию распределения точечных частиц функцией $\rho(\vec r,t)$

④ Покажите, что общее выражение для силы Лоренца вместе с первой парой уравнений Максвелла может быть получено из уравнений Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил.

Найдем наиболее общий вид силового поля а также функцию Лагранжа в таком поле предполагая, что уравнение движения частицы является уравнением Лагранжа.

Уравнение движения $\dot{p}_\alpha = F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ может быть представлено в виде $\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial v_\alpha} = F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \dots$

Также $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha}$

Вычтем эти уравнения и получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(L_0 - L)}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial(L_0 - L)}{\partial x_\alpha} = F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Пусть $L_0 - L = U(\vec{r}, \vec{v}, t)$, тогда $F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$

– обобщенно-потенциальные силы

$$\Rightarrow F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial v_\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta \partial v_\alpha} v_\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} \dot{v}_\beta - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$$

Если левая часть не зависит от $\dot{\vec{v}}$, то $\frac{\partial^2 U}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} = 0$.

Положим $\frac{\partial U}{\partial v_\alpha} = -a_\alpha(\vec{r}, t)$, тогда

$$U(\vec{r}, \vec{v}, t) = U(\vec{r}, t) - a_\alpha(\vec{r}, t) v_\alpha$$

При этом $U(\vec{r}, t)$ и $a_\alpha(\vec{r}, t)$ – произвольные функции координат и времени.

$$F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} v_\beta + \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} v_\beta - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + v_\beta\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$$

Введем антисимметричный тензор

$b_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} a_\gamma$ или $\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}$

Тогда $\boxed{\vec{F} = -\operatorname{grad} U - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + [\vec{v} \times \vec{b}], \quad \vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}}$

$$L = L_0 - U(\vec{r}, t) + a_\alpha(\vec{r}, t) v_\alpha$$

С позиций динамики частицы поле, заданное четырьмя независимыми функциями, $\varphi(\vec{r}, t)$, $A_\alpha(\vec{r}, t)$, представляет собой единый физический объект в том случае, если частица взаимодействует с таким полем посредством одной и той же постоянной взаимодействия e. Постоянная взаимодействия e содержится в функциях U и $\vec{a}$ в виде множителя. Поэтому выделение постоянной e (электрического заряда) сводится просто к переобозначению функций U и a_α по формулам:

$$U(\vec r(t),t) = \int \varphi(\vec r,t)\, e\,\delta(\vec r-\vec r(t))\,d\vec r = e\varphi(\vec r(t),t)$$

~~$a_\alpha(\vec r,t) =$~~

$$a_\alpha(\vec r(t),t) = \frac{1}{c}\int A_\alpha(\vec r,t)\, e\,\delta(\vec r-\vec r(t))\,d\vec r = \frac{e}{c}A_\alpha(\vec r(t),t)$$

$$b_\alpha(\vec r,t) = \frac{e}{c}B_\alpha(\vec r,t)$$

Постоянная c введена только для соблюдения размерности.

Получим

$$\boxed{\vec F = e\left[-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}\right] + \frac{e}{c}[\vec v\times\vec B], \quad \vec B = \operatorname{rot}\vec A}$$

Введем вектор $\boxed{\vec E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}}$

Выражение для силы не зависит от потенциалов и может быть представлено в терминах $\vec E$ и $\vec B$, которые однозначно определяют силу $\vec F$ если известны e и ~~$v(t)$~~ $\vec v(t)$. Но $\vec E$ и $\vec B$ определены формулами, в которых также необходимо исключить потенциалы.

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ при любых φ

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\varphi \equiv 0$$

Поэтому $\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec A = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}A_\gamma \equiv 0$ при любых A_γ

Поэтому $\operatorname{div}\vec B = 0$

Получили в результате выражение для силы Лоренца вместе с первой парой уравнений Максвелла:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec F = e\vec E + \frac{e}{c}[\vec v\times\vec B]\\ \operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}\\ \operatorname{div}\vec B = 0\end{gathered}}$$

Полученный общий вид силы Лоренца не будет иметь места, если не выполняется первая пара уравнений Максвелла. Задача явного определения $\vec E$ и $\vec B$ – это задача электродинамики. Однако в большинстве теоретических задач вид полей $\vec E$ и $\vec B$ приходится задавать независимо. При этом следует проверить удовлетворяют ли они уравнениям Максвелла, иначе формула для силы Лоренца неверна.

Мы получили формулы для любых L. Они справедливы и в релятивистской, и в нерелятивистской механике, различия между которыми с позиций динамики лишь в области кинематики.

$$\boxed{L = L_0 - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v})}$$

Уравнение движения с силой Лоренца могут быть получены в виде $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0$.

Одно из преимуществ такой формы уравнений движения — это то, что первая пара уравнений Максвелла учтена здесь автоматически.

Если поле стационарны и однородны, то $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \varphi = -(\vec{E}\vec{r})$, $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}\vec{r}]$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = L_0 + e(\vec{E}\vec{r}) + \frac{e}{2c}(\vec{v}\cdot[\vec{B}\times\vec{r}])$$

$$L_0 = \begin{cases} \frac{mv^2}{2} & \text{— нерелятивистский случай} \\ -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & \text{— релятивистский случай} \end{cases}$$

⑤ Покажите, что функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени от произвольной скалярной функции координат и времени. Установите связь таких преобразований функции Лагранжа с калибровочными преобразованиями потенциалов электромагнитного поля.

Функция Лагранжа вводится как удовлетворяющая уравнениям $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^{\lambda}$. Она входит в это уравнение только через производные. Поэтому разные функции Лагранжа могут приводить к одним и тем же уравнениям движения.

Выясним степень неоднозначности функции Лагранжа. Пусть L' и L — две функции Лагранжа, дающие одинаковые уравнения движения. Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\Delta L - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta L = 0, \text{ где } \Delta L = L - L'.$$

Это соотношение должно иметь место при всех $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$, поскольку уравнения Лагранта не налагают каких-либо ограничений на функции $\vec{r}$ и $\vec{v}$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial v_\alpha}\Delta L + v_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\beta\,\partial v_\alpha}\Delta L + \dot{v}_\beta \frac{\partial^2}{\partial v_\beta\,\partial v_\alpha}\Delta L - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta L = 0$$

Поскольку $\dot{v}_\beta$ произвольны, то $\frac{\partial^2}{\partial v_\beta\,\partial v_\alpha}\Delta L = 0$.

Отсюда $\Delta L = \lambda(\vec{r}, t) + v_\alpha \varkappa_\alpha(\vec{r}, t)$,

где λ и $\varkappa_\alpha$ — произвольные функции координат и времени.

Подставляя это, получим

$$\frac{\partial \varkappa_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha} + v_\beta\left(\frac{\partial \varkappa_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varkappa_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = 0.$$

Это выполняется при всех v_β. Поэтому

$$\frac{\partial \varkappa_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varkappa_\beta}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \vec{\varkappa} = 0.$$

Это необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля $\vec{\varkappa}$. Поэтому можно записать $\varkappa_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$.

Получим $\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\right) = 0$ или $\lambda = \frac{\partial f}{\partial t} + \gamma(t)$.

Поскольку $f = f(\vec{r}, t)$ — произвольная функция, то $\gamma(t)$ можно опустить.

Тогда $\boxed{\Delta L = +\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{d f(\vec{r}, t)}{dt}}$

Любые две функции Лагранжа дают одни и те же уравнения движения, если они отличаются на полную производную функции координат и времени. Этим обстоятельством пользуются для упрощения вида функции Лагранжа.

В электромагнитном поле $L = L_0 - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v})$

Добавим производную по времени от функции $f(\vec{r}, t)$: $L = L_0 - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v}) + \frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} f) =$

$= L_0 - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left(\vec{v} \cdot (\vec{A} + \operatorname{grad} f)\right) = L_0 - e\tilde{\varphi} + \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \tilde{\vec{A}})$,

где $\boxed{\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad} f}$

Поскольку уравнения движения при этом не должны измениться, то не должны измениться векторные поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. При помощи непосредственной проверки убеждаемся, что $\tilde{\vec{E}} = \vec{E}$, $\tilde{\vec{B}} = \vec{B}$. Мы видим, что добавление к функции Лагранжа частицы в электромагнитном поле произвольной функции координат и времени эквивалентно калибровочному преобразованию потенциалов, при которых $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не меняются.

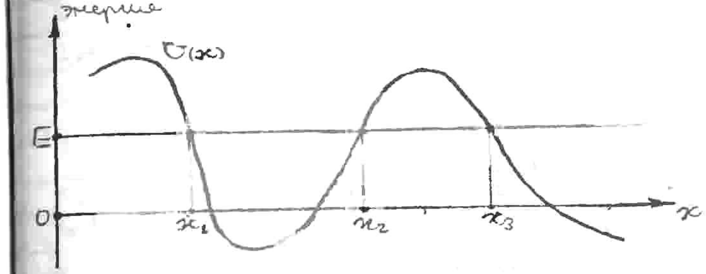
⑥ Исследуйте одномерное движение в консервативном поле; получите формулу для периода нелинейных колебаний. Найдите функцию Лагранжа для одномерного финитного движения частицы во внешнем поле в приближении малых колебаний, линейное уравнение движения при наличии диссипативной силы, пропорциональной скорости, и общее решение неоднородного уравнения движения.

В случае одномерного движения функция Лагранжа имеет вид $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x,t)$, а уравнение движения $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)$. В общем случае это уравнение не допускает разделение переменных. Однако, если поле консервативно, т.е. $U=U(x)$, то $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$ и полная энергия сохраняется: $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = const$.

Тогда переменные в уравнении движения разделяются, $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$

Отсюда $\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} = dt$. Отыскание закона движения сводится к вычислению интеграла

$t = C \pm \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$ Получаем две независимые постоянные: E и C.



Допустимая область движения представляет собой множество точек, для которых $E - U(x) \geq 0$. Граничными точками этой области являются корни уравнения $E = U(x)$. В граничных точках $\dot{x} = 0$, но $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$, вообще говоря, поэтому $\ddot{x} \neq 0$.

Граничные точки — это точки поворота, в них скорость меняет знак. Это соответствует переходу с одной ветви корня на другую.

Если допустимая область движения ограничена двумя точками, то движение называется финитным. Если же точка поворота только одна или таковые вообще отсутствуют то движение называется инфинитным.

Финитное одномерное движение всегда является периодическим. Период при этом равен времени движения от x_1 до x_2 и обратно:

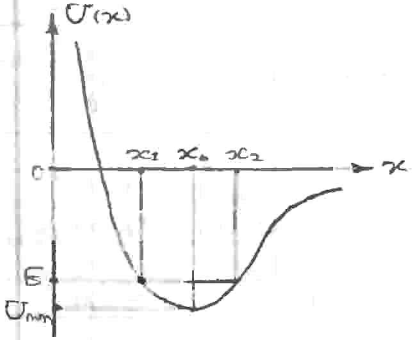
$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{+\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

Если функция $x(t)$ периодическая с периодом T, то $x(t) = x(t+T)$, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{-i\omega n t}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Коэффициенты a_n можно подобрать так, чтобы $dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$

При этом $a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{i\omega n t}\, dt$

Часто получить общее решение не представляется возможным. Тогда приходится прибегать к линейным приближениям.



Если энергия частицы становится близкой к U_{min}, то расстояние между точками поворота x_1 и x_2 становится малым. В этом случае движение частицы будет происходить в малой окрестности точки устойчивого равновесия x_0. ~~В этом~~ Мы можем записать $U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$, где $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2$. Слагаемое $U(x_0)$ опущено ввиду неоднозначности функции Лагранжа.

В выражении для $U(x)$ мы оставили первое не исчезающее по взаимодействию слагаемое.

Если сделать замену $\xi = x - x_0$, то уравнение Лагранжа по форме не изменится. Тогда

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2$$

Уравнение Лагранжа $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$, $\omega_0^2 = \frac{U''(x_0)}{m}$

Уравнением движения частицы вблизи минимума потенциальной энергии является уравнение гармонического осциллятора.

Рассмотрим одномерные вынужденные колебания с диссипацией энергии. Пусть потенциальная энергия $U(x)$ и на частицу действует внешнее поле $U^e(x,t)$. Также на частицу действует диссипативная сила $\cancel{\vec{F} = -k\dot{x}}$

$F^д = -k\dot{x}$.

Будем считать, что движение частицы происходит в окрестности точки x_0, причём $U(x_0)=U_{min}$, $U'(x_0)=0$, $U''(x_0)>0$.

Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2 - \frac{\partial U^e}{\partial x}(x_0,t)\xi$$

Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -k\dot{x}$.

Получим $m\ddot{\xi} + k\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\frac{\partial U^e}{\partial x}(x_0,t)$.

Введем обозначение: $\frac{k}{m} = 2\gamma$, $\omega_0^2 = \frac{U''(x_0)}{m}$,

$-\frac{1}{m}\frac{\partial U^e}{\partial x}(x_0,t) = Q(t)$

Получим линейное неоднородное уравнение:

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = Q(t)$$

Однородное уравнение: $\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$

Ищем решение в виде $\xi = Ae^{-i\omega t}$

$\Rightarrow (-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2)A = 0$

$\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$, $\omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -i\gamma \pm \Omega$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Если $\omega_0 > \gamma$, то $\omega_1 = -i\gamma + \Omega \leftrightarrow Ae^{-i\omega_1 t}$

$\omega_2 = -i\gamma - \Omega \leftrightarrow Ae^{-i\omega_2 t}$

Решение однородного уравнения имеет вид:

$$\xi = Re\left(A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t}\right) = e^{-\gamma t} Re\left(A_1 e^{-i\Omega t} + A_2 e^{i\Omega t}\right) = e^{-\gamma t}(A_1\cos\Omega t + A_2\sin\Omega t)$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения: $Q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{Q}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$, $\tilde{Q}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)e^{i\omega t}dt$

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\xi}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Отсюда $\tilde{\xi}(\omega)(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = \tilde{Q}(\omega)$

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}\tilde{Q}(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t')e^{i\omega t'}dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2}d\omega\right\}Q(t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty}G(t-t')Q(t')dt',$$

где функция Грина

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}d\omega =$$

$$= +\frac{1}{2\pi(\omega_1-\omega_2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega-\omega_1} - \frac{1}{\omega-\omega_2}\right)e^{-i\omega(t-t')}d\omega$$

Подынтегральная функция имеет два полюса в точках $-\Omega - i\gamma$ и $\Omega - i\gamma$

Если $t-t'>0$, то контур интегрирования следует замкнуть в нижней полуплоскости

Тогда $G(t-t') = \frac{2\pi i}{2\pi\cdot 2\Omega}\left[e^{-i\omega_1(t-t')} - e^{-i\omega_2(t-t')}\right] =$

$= e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin\Omega(t-t')}{\Omega}$

Если $t-t'\leq 0$, то контур интегрирования нужно замкнуть в верхней полуплоскости.

При этом $G(t-t')=0$.

Итак, $G(t-t') = \begin{cases} e^{-\gamma(t-t')}\dfrac{\sin\Omega(t-t')}{\Omega}, & t-t'\geq 0 \\ 0, & t-t'<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \xi(t) = \int_{-\infty}^{t} Q(t')e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin\Omega(t-t')}{\Omega}dt'$$

Функция Грина — решение уравнения

$\ddot{G} + 2\gamma\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t-t')$.

Рассмотрим задачу о циклотронном резонансе. Он возникает в условиях движения заряженных частиц в однородном магнитном поле $\vec{B}$. и неоднородных периодических полях $\vec{E}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$.

$\vec{B}_0=(0,0,B)$, $\vec{E}=(0,E(z),0)$, причём функция $E(z)$ — периодическая с периодом l.

Уравнение движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{eB}{mc}\dot{y} & x(0)=y(0)=z(0)=0 \\ \ddot{y} = -\dfrac{eB}{mc}\dot{x} + eE(z) & \vec{v}(0)=(0,u_0,v_0) \\ \ddot{z}=0 & z=v_0t, \quad \dot{x}=-\omega_c y. \end{cases}$$

$\omega_c = \dfrac{|e|B}{mc}$ — циклотронная частота

Тогда $\ddot{y}+\omega_c^2 y = \dfrac{e}{m}E(v_0t)$.

Решение $y = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t + \int_{-\infty}^{t}\dfrac{e}{m}E(v_0t)\dfrac{\sin\omega_c(t-t')}{\omega_c}dt'$

Разложим в ряд Фурье

$E(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{iknz}$, $k=\dfrac{2\pi}{l}$

~~$E_n = \frac{1}{l}\int_{-\infty}^{+\infty} E(z)$~~ $\quad E_n = \dfrac{1}{l}\int_0^l E(z)e^{-iknz}dz$

$y(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{iknv_0t}$

Получим $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-k^2n^2v_0^2+\omega_c^2)y_n e^{iknv_0t} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}E_n e^{iknv_0t}$

$y_n = \dfrac{E_n}{\omega_c^2 - k^2n^2v_0^2}$ — резонанс n-го порядка, если

$\omega_c = knv_0$, $\quad \dfrac{2\pi n}{L}v_0 = \omega_c$, $v_0 = \dfrac{L\omega_c}{2\pi n}$

⑦ Приведите вывод уравнений, определяющих изменение со временем импульса, энергии и момента импульса системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле при наличии диссипативных сил. Получите уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского).

Рассмотрим систему n взаимодействующих частиц. Учтём принцип суперпозиции полей и симметрию относительно изменения частиц: $U_{ij}(|\vec r_i-\vec r_j|) = U_{ji}(|\vec r_i-\vec r_j|)$.

Пусть $n=2$, тогда

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2} - U_{12}(|\vec r_1-\vec r_2|) - U_1(\vec r_1, t) - U_2(\vec r_2, t).$$

Предположим, что внешнее поле зависит от времени за счет зависимости от времени координат третьей частицы, не включённой в состав системы. Тогда

$$U_1(\vec r_1, t) + U_2(\vec r_2, t) = U_{13}(|\vec r_1-\vec r_3|) + U_{23}(|\vec r_2-\vec r_3|)$$

Если учтём эту формулу и тот факт, что при $n=3$ должен соблюдаться произвол относительно нумерации частиц, то получим:

$$L(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3,\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3,t) = \frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}+\frac{m_3 v_3^2}{2} - U_{12}(|\vec r_1-\vec r_2|) -$$
$$- U_{13}(|\vec r_1-\vec r_3|) - U_{23}(|\vec r_2-\vec r_3|) - U_1(\vec r_1, t) - U_2(\vec r_2, t) - U_3(\vec r_3, t)$$

В общем случае

$$L = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}{}' U_{ij}(|\vec r_i-\vec r_j|) - \sum_{i=1}^{n} U_i(\vec r_i, t)$$

Если $\vec F_i^e$ – силы, не включённые в L, то уравнения Лагранжа имеют вид: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec v_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = \vec F_i^e$

$$m_i\ddot{\vec r}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec r_i}\sum_{k=1}^{n}{}' U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|) - \frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i} + \vec F_i^e, \quad i=\overline{1,n}$$

Эти уравнения позволяют узнать $\vec r_i(t)$ и $\vec v_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ по известным $\vec r_i(t_0)$ и $\vec v_i(t_0)$, $i=\overline{1,n}$, если состояние системы при $t=t_0$ может быть определено независимо.

Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec p}_i = -\sum_{i,k=1}^{n}{}' \frac{\partial U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|)}{\partial \vec r_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i} + \sum_{i=1}^{n}\vec F_i^e$$

$$\sum_{i,k=1}^{n}{}' \frac{\partial U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|)}{\partial \vec r_i} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial U_{ik}}{\partial \vec r_i} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial \vec r_k}\right)$$

$U_{ik} = U_{ki} = U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial U_{ik}}{\partial \vec r_i} = U_{ik}'\frac{\partial|\vec r_i-\vec r_k|}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial U_{ki}}{\partial \vec r_k} = -U_{ki}'\frac{\partial|\vec r_i-\vec r_k|}{\partial \vec r_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_{ik}}{\partial \vec r_i} = -\frac{\partial U_{ik}}{\partial \vec r_k}$$

Поэтому $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec v_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i} + \sum_{i=1}^{n}\vec F_i^e$

Полный импульс системы

$$\vec P = \sum_{i=1}^n m_i \vec v_i = \sum_{i=1}^n \vec p_i \Rightarrow \dot{\vec P} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i} + \sum_{i=1}^n \vec F_i^e$$

По теореме о среднем для сумм

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec r_i(t) = \vec r_M(t)\sum_{i=1}^n m_i, \quad \vec P = m\dot{\vec r}_m = m\vec v_m$$

Полный импульс системы взаимодействующих частиц сохраняется, если сумма внешних сил равна нулю.

Найдём теперь закон изменения полного момента импульса системы

$$\begin{cases} \dot p_{i\alpha} = -\sum\limits_{k=1}^N{}' \dfrac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + F^e_{i\alpha}, & i=\overline{1,N} \\ p_{i\alpha} = m_i \dot x_{i\alpha} & i=\overline{1,N} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N \dot x_{i\beta} p_{i\alpha} = -\sum_{i,k=1}^N{}' x_{i\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + \sum_{i=1}^N x_{i\beta}F^e_{i\alpha}$$

Поскольку $U_{ik}=U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|)$, то $\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = -\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{k\alpha}}$

Поэтому
$$\sum_{i,k=1}^N{}' x_{i\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac12\sum_{i,k=1}^N{}'\left(x_{i\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + x_{k\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{k\alpha}}\right) =$$
$$= \frac12 \sum_{i,k=1}^N{}'(x_{i\beta}-x_{k\beta})\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac12\sum_{i,k=1}^N{}' U'_{ik}\frac{(x_{i\beta}-x_{k\beta})(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})}{|\vec r_i-\vec r_k|}$$

При этом учтено то, что $\frac{\partial U_{ik}(|\vec r_i - \vec r_k|)}{\partial x_{i\alpha}} =$
$$= U'_{ik}\frac{\partial|\vec r_i-\vec r_k|}{\partial x_{i\alpha}} = U'_{ik}\frac{x_{i\alpha}-x_{k\alpha}}{|\vec r_i-\vec r_k|}$$

Тогда $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N \dot x_{i\beta}p_{i\alpha} =$
$$= -\frac12\sum_{i,k=1}^N{}' U'_{ik}\frac{(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})(x_{i\beta}-x_{k\beta})}{|\vec r_i-\vec r_k|} + \sum_{i=1}^N x_{i\beta}F^e_{i\alpha}$$

Отсюда следует, что $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N x_{i\beta}F^e_{i\alpha} =$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N x_{i\alpha}p_{i\beta} - \sum_{i=1}^N x_{i\alpha}F^e_{i\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N (x_{i\alpha}p_{i\beta} - x_{i\beta}p_{i\alpha}) = \sum_{i=1}^N (x_{i\alpha}F^e_{i\beta} - x_{i\beta}F^e_{i\alpha})$$

$$\cancel{L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}p_{i\beta} = x_{i\beta}}$$

$$L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}p_{i\gamma}, \quad M_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{i=1}^N x_{i\beta}F^e_{i\gamma}$$

Тогда $\dot L_\alpha = M_\alpha$

Если момент внешних сил равен нулю, то полный момент количества движения системы частиц сохраняется.

Функция Лагранжа системы N частиц

$$L = \frac12\sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - \frac12\sum_{i,j=1}^N{}' U_{ij}(|\vec r_i-\vec r_j|) - \sum_{i=1}^N U_i(\vec r_i,t)$$

$\vec F_i^d$ это $\vec F_i$ — все силы, не включенные в функцию Лагранжа

Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = \vec F_i$

Отсюда
$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec v_i}\right) - \sum_{i=1}^N\left(\dot{\vec v}_i\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec v_i}\right) - \sum_{i=1}^N\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec r_i}\right) -$$
$$- \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N(\vec F_i\cdot\vec v_i)$$

Или $\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^N\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec v_i}\right) - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N(\vec F_i\cdot\vec v_i)$

Энергия системы $E = \sum_{i=1}^N\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec v_i}\right) - L$

$$\vec F_i = \vec F_i^g + \vec F_i^d$$

$$E = \frac12\sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \frac12\sum_{i,k=1}^N{}' U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|) + \sum_{i=1}^N U_i(\vec r_i,t)$$

$$\Rightarrow \dot E = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^N U_i(\vec r_i,t) + \sum_{i=1}^N(\vec F_i^d\cdot\vec v_i)$$

Пусть имеем тело с переменной массой. Его масса $m(t)$ меняется непрерывно.

$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$

$\vec{p}(t+dt) = (m(t) - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|\vec{v}_1$

$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m(t)\,d\vec{v} - |dm|(\vec{v}_1 - \vec{v}_1)$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad \frac{dm}{dt} < 0.$

Тогда $\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ext} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v})}$ — уравнение Мещерского

Если $\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{u} = const$, $\vec{F}^{ext} = 0$, то $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\vec{u}$

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}\ln\frac{m_0}{m}}$ — уравнение Циолковского.

8 Приведите доказательство теоремы о вириале для системы частиц с парным потенциалом взаимодействия, зависящим только от расстояний между частицами, и, в частности, для частиц с кулоновским взаимодействием

Теорема о вириале имеет место для частиц, совершающих финитное движение. Координаты и импульсы таких частиц ограничены. Теорема утверждает, что в таких системах устанавливаются определённые соотношения между средними по времени значениями полной кинетической энергии системы и энергии взаимодействия системы.

Рассмотрим полученное нами уравнение

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} x_{i\beta}p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i\beta}p_{i\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U'_{ik}\frac{(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})(x_{i\beta}-x_{k\beta})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} + \sum_{i=1}^{N} x_{i\beta}F^{e}_{i\alpha}$$

Полагая $\alpha = \beta$ и суммируя, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{p}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N}{}' |\vec{r}_i - \vec{r}_k|U'_{ik} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{F}^{e}_i)$$

$\overline{\varphi} = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varphi(t)\,dt$ — среднее по времени от величины $\varphi(t)$

$$\overline{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N (\vec r_i \vec p_i)} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N(\vec r_i\vec p_i)\,dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\Big[\sum_{i=1}^N(\vec r_i(\tau)\vec p_i(\tau)) - \sum_{i=1}^N(\vec r_i(0)\vec p_i(0))\Big] = 0$$

Отсюда получим $-2\overline{E_k} = -\frac{1}{2}\overline{\sum\limits_{i,k=1}^{N}{}' |\vec r_i - \vec r_k|\, U'_{ik}} + \overline{\sum\limits_{i=1}^N (\vec r_i \vec F_i^e)}$.

$$\boxed{\overline{E_k} = \frac{1}{4}\overline{\sum_{i,k=1}^{N}{}' |\vec r_i-\vec r_k|\, U'_{ik}} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^N(\vec r_i\vec F_i^e)}}$$ — вириал Клаузиуса.

Пусть U — однородная степени n функция, т.е. $U_{ik}(\lambda\xi) = \lambda^n U_{ik}(\xi)$.

Тогда $\xi\frac{\partial U_{ik}}{\partial \xi} = nU_{ik}$ — уравнение Эйлера для однородной функции.

$\Rightarrow |\vec r_i - \vec r_k|\, U'_{ik} = nU_{ik}$

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4}n\,\overline{\sum_{i,k=1}^{N}{}' U_{ik}} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^N(\vec r_i \cdot \vec F_i^e)}$$

Энергия взаимодействия частиц $U_{вз} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{N}{}' U_{ik}$

$$\Rightarrow \overline{E_k} = \frac{n}{2}\overline{U} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^N(\vec r_i\vec F_i^e)}$$

В случае закона Кулона $n = -1$,

$$\overline{E_k} = -\frac{1}{2}\overline{U} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^N(\vec r_i \vec F_i^e)}$$

В случае отсутствия внешних сил

$$\boxed{\overline{E_k} = -\frac{1}{2}\overline{U}}$$

9) Система с заданными уравнениями голономных идеальных связей, приведите вывод уравнений Лагранжа с реакциями связей (1-го рода); получите уравнение для изменения полной энергии системы при наличии связей.

Система частиц, взаимодействующих между собой и с некоторыми частицами другой системы, при определенных физических условиях взаимодействие между частицами может сводиться к ограничению на координаты и скорости N частиц выделенной системы. Например, электроны проводимости в проводнике в определенном интервале T и $\vec E$ движутся в области, ограниченной поверхностью проводника. Движение макроскопических тел часто ограничено поверхностями, нитями и т.д.

Во всех таких случаях будем считать, что движение частиц происходит при на-ними связей, т.е. ограничений на координаты и скорости частиц, а силу взаимодействия с частицами, реализующими связь, представить в виде комбинации реакций связей (силы, препятствующие проникновению частиц сквозь или через связь) и силы сопротивления или трения, обусловленные взаимодействием с частицами, реализующими связь.

$f_\alpha(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) \le 0$

Если $f_\alpha(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$, то связь называется удерживающей.

Если $f_\alpha(t, \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = 0$, то связь называется голономной.

Если $f_\alpha(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = 0$, то связь называется стационарной.

Пусть $\vec{R}_i$ – сила взаимодействия i-ой частицы со всеми частицами, реализующими связь.

Тогда уравнения движения имеют вид:

$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i & , i = \overline{1,N} \\ f_\alpha(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0 & , \alpha = \overline{1,k} \end{cases}$$

Бесконечно малые перемещения, удовлетворяющие уравнениям движения и уравнениям связей, называются действительными перемещениями.

Бесконечно малые перемещения, допускаемые связями, т.е. удовлетворяющие уравнениям связей, называются возможными перемещениями.

Бесконечно малые перемещения, допускаемые остановившимися связями (время фиксировано), называются виртуальными перемещениями.

Если виртуальная работа сил реакции связи равна нулю, то связь называется идеальной.

Силы реакции связей $\vec{R}_i$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$\vec R_i' = \vec R_i + \vec F_i^d$

Слагаемое $\vec F_i^d$ можно ~~учесть~~ включить в состав силы $\vec F_i$. Тогда $m\ddot{\vec r} = \vec R_i + \vec F_i$.

$\vec R_i$ так делятся на идеальные, чтобы $\vec R_i$ были силой реакции идеальных связей, т.е.

$\sum_{i=1}^{N} (\vec R_i \delta \vec r_i) = 0$, где $\delta \vec r_i$ – виртуальные перемещения.

Проварьируем уравнения голономных идеальных связей: $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec r_i}\delta \vec r_i = \sum_{i=1}^{N} \nabla_i f_\alpha \delta \vec r_i = 0$, $\alpha = \overline{1,k}$

$$\sum_{i=1}^{N} \delta\vec r_i \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left(\vec R_i - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\right)\delta\vec r_i = 0$$

В уравнении содержится $3N$ вариаций δx_μ. Они должны удовлетворять k уравнениям связей. Поэтому только $3N-k$ вариаций независимы. Выберем неопределённые множители λ так, чтобы коэффициенты при всех k зависимых вариациях были равны нулю. Тогда остается сумма $3N-k$ слагаемых, содержащих в качестве множителей только независимые вариации δx_μ. Но каждое такое слагаемое должно быть равно нулю.

Поэтому $\vec R_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \\ f_\alpha(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0 \end{cases}}$$

Это уравнение Лагранжа 1-го рода с голономными и идеальными связями.

λ_α – функции координат и времени.

Пример: математический маятник

Связи: $f_1 = \rho - l = 0$

$f_2 = z = 0$

$\vec R = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \vec r} = \{\lambda_1, 0, \lambda_2\}$ – в цилиндрической системе координат.

$$\begin{cases} m(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = mg\cos\varphi + \lambda_1 \\ \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = -mg\sin\varphi \\ m\ddot z = \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho - l = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\varphi - ml\dot\varphi^2$, $\lambda_2 = 0$

Дифференцируя по времени, получим

$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, $\rho = l$, $z = 0$

Изменение полной энергии системы:

$$\dot E = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec F_i^d \vec v_i) + \sum_{i=1}^{N}(\vec R_i \vec v_i)$$

Если связи идеальные, то $\vec R_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha$

Тогда $\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(\nabla_i f_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_i) = -\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$

$f_\alpha(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\cdot\vec{v}_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$

Поэтому $\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^d\cdot\vec{v}_i) - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$

Если $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, $\vec{F}_i^d = 0$, $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ то полная энергия системы сохраняется.

⑩ <u>Приведите вывод уравнений Лагранжа для системы N частиц с S степенями свободы из уравнений Даламбера.</u>

Рассмотрим уравнение движения

$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$

Умножим уравнение на $\delta\vec{r}_i$ и просуммируем их: $\cancel{\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i = 0}$ $\cancel{\sum}$

$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i\delta\vec{r}_i)$

Если $\vec{R}_i$ – реакции идеальных связей, то

$\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i\delta\vec{r}_i) = 0$

Получим уравнение Даламбера

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i = 0 & \cancel{i=\overline{1,N}} \\ f_\alpha(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t) = 0 & \alpha = \overline{1,k} \end{cases}$$

Уравнение связей можно разрешить относительно k координат:

$x_l = x_l(x_{k+1},\dots,x_{3N},t)$, $l = \overline{1,k}$

Конфигурационное пространство системы со связями имеет размерность 3N−k, и эта размерность называется числом степеней свободы системы.

Вместо переменных $x_1,\dots,x_{3N}$ можно ввести новые переменные $q_1\dots q_s$ $(s=3N-k)$. Выбор q_i подчиним условию ~~Det~~ $\det\left\|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right\|\neq 0$

Тогда и все остальные x_i будут функциями $q_1,\dots,q_s \Rightarrow \vec r_i=\vec r_i(q_1,\dots,q_s,t)$ — обращают уравнения связей в тождества.

Переменные $q_1,\dots,q_s$ называются обобщёнными координатами.

Виртуальные перемещения вычисляем по формулам: $\delta\vec r_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\delta q_j$

$$\vec v_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}$$, $\dot q_j$ — обобщённые скорости

Отсюда $$\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\vec F_i\cdot\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)-\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{d\vec v_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)\right\}\delta q_j=0$$

Обобщённые силы: $Q_j=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec F_i\cdot\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)$

$$\frac{\partial\vec v_i}{\partial\dot q_j}=\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j},\quad \cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial t\partial q_j}}$$

~~С другой стороны,~~ $\cancel{\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}=\sum\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot q_k+\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial t}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot q_k+\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial t\partial q_j}$$

С другой стороны, $$\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial^2\vec r}{\partial q_j\partial t}$$

Если смешанные производные равны, то
$$\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right).$$

Отсюда $$-\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{d\vec v_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}m_i\vec v_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\right)=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial\dot q_j}\right)+\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}\right)$$

$$\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial\dot q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot q_j}\left(\frac{v_i^2}{2}\right),\quad \left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$$

Поскольку $m_i=const$, то

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial\dot q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot q_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec v_i\cdot\frac{\partial\vec v_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T(q_1,\dots,q_s,\dot q_1,\dots,\dot q_s,t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}$$

Получим формулу $$\sum_{j=1}^{s}\left\{Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right\}\delta q_j=0.$$

Поскольку виртуальные вариации обобщённых координат независимы, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,\quad j=\overline{1,s}$$

11) Приведите вывод уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия

Рассмотрим систему с голономными, стационарными и идеальными связями, в которой действуют потенциальные силы. Такая система будет консервативной.

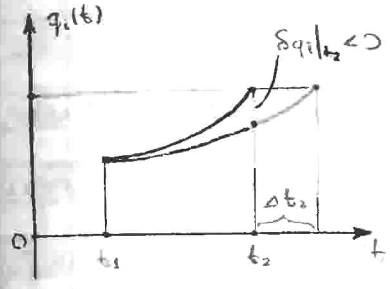
Предположим, что кинетическая энергия системы есть однородная квадратичная положительно определённая функция обобщённых скоростей. Назовём интеграл $\int_{t_1}^{t_2} T\,dt$ действием по Лагранжу. Его экстремальное значение будет представлять собой минимум функционала. Наложим следующие условия:

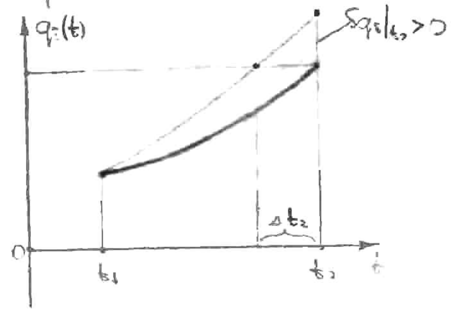
1) начальная и конечная конфигурация системы одинаковы для действительного движения и для всех движений по „окольным" путям;

2) время движения по „окольным" путям не равно времени действительного движения (они различаются на малую величину);

3) движение по всем сравниваемым путям совершается с одной и той же энергией.

Таким образом, нужно доказать, что $\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = 0$, если $\delta q_s|_{t_1} = 0$, $\delta q_i|_{t_2} \neq 0$, $T+U=E_0$, где U — потенциальная энергия системы, E_0 — постоянная полная энергия, $\delta E_0 = 0$.





Если $\dot q_i|_{t_2} > 0$, то при $\Delta t_2 > 0$ $\delta q_s|_{t_2} < 0$, при $\Delta t_2 < 0$ $\delta q_s|_{t_2} > 0$. При этом $\tilde q_s(t_2 + \Delta t_2) = q_s(t_2)$.

Положим $F = T + \lambda(T + U - E_0)$, $\delta\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = 0$.

Поскольку при варьировании меняется верхний предел, то
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i\right)dt + F|_{t_2}\Delta t_2 = 0$$

Полагая $\delta \dot q_s = \frac{d}{dt}(\delta q_s)$ и интегрируя по частям, получим:
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{s}\left[\frac{\partial F}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_s}\right)\right]\delta q_s\,dt + \sum_{s=1}^{s}\frac{\partial F}{\partial \dot q_s}\delta q_s\Big|_{t_1}^{t_2} + F|_{t_2}\Delta t_2 = 0$$

Из условий на концах промежутка интегрирования $\delta q_s|_{t_1} = 0$, $\delta q_s|_{t_2} = -\dot q_s|_{t_2}\Delta t_2$

Внеинтегральные члены можно представить

в виде $\left[-\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial F}{\partial \dot q_r}\dot q_r + F\right]_{t_2}\Delta t_2$.

Поскольку T — квадратичная функция обобщённых скоростей и $F = T + \lambda(T+U-E_0)$, то

$$\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial F}{\partial \dot q_r}\dot q_r = 2(1+\lambda)T$$

Откуда $\left[-\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial F}{\partial \dot q_r}\dot q_r + F\right]_{t_2}\Delta t_2 = \Big[-(2\lambda+1)T + \lambda(T+U-E_0)\Big]_{t_2}\Delta t_2$

Поскольку $T+U=E_0$, то внеинтегральный член обращается в нуль, если положить $\lambda=-\frac{1}{2}$. При этом $F=\frac{1}{2}(T-U)+\frac{1}{2}E_0=\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}E_0$

Отбрасывая множитель $\frac{1}{2}$, запишем выражение принципа наименьшего действия в форме $\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+E_0)\,dt=0$, $\delta q_r|_{t_1}=0$, $\delta q_r|_{t_2}\neq 0$, $\delta E_0=0$

Варьируя функционал, найдём

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r+\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\delta \dot q_r\right)dt+(L+E_0)_{t_2}\Delta t_2=0.$$

Используя равенство $\delta\dot q_r=\frac{d}{dt}(\delta q_r)$, интегрируем по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)\delta q_r\,dt+\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\delta q_r\right)_{t_2}+(L+E_0)_{t_2}\Delta t_2=0.$$

Используя выражение $\delta q_r|_{t_2}=-\dot q_r|_{t_2}\Delta t_2$, получим

$$\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\delta q_r\right)_{t_2}+(L+E_0)_{t_2}\Delta t_2=\left[-\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\dot q_r+L+E_0\right]_{t_2}\Delta t_2=$$
$$=(-T-U+E_0)_{t_2}\Delta t_2=0.$$

Тогда $\int_{t_1}^{t_2}\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)\delta q_r\,dt=0$

Уравнения действительного движения имеют вид $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0$, $r=\overline{1,s}$

Предположим теперь, что выражение кинетической энергии имеет более общий вид: $T=T_0+T_1+T_2$, где $T_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial \vec r_k}{\partial t}\right)^2$, $T_1=\sum_{r=1}^{s}B_r\dot q_r$, $T_2=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}A_{rj}\dot q_r\dot q_j$

Тогда вместо полной кинетической энергии в качестве подынтегральной функции нужно будет взять функцию $2T_2+T_1$.

Тогда $\delta\int_{t_1}^{t_2}(2T_2+T_1)\,dt=0$ при условиях

$\delta q_r|_{t_1}=0$, $\delta q_r|_{t_2}=-\dot q_r|_{t_2}\Delta t_2$, $T_2-T_0+U-E_0=0$, $\delta E_0=0$

Вводя неопределённый множитель λ, приходим к безусловному экстремуму $\delta\int_{t_1}^{t_2}F\,dt=0$, где $F=(2+\lambda)T_2+T_1-\lambda T_0+\lambda U-\lambda E_0$

Далее находим, что $\lambda=-1$

$F=T_0+T_1+T_2-U+E_0=L+E_0$

Выражение принципа Лагранжа не будет отличаться от ранее рассмотренного.

(12) Получите выражение для функции Лагранжа и уравнение движения системы взаимодействующих частиц в неинерциальной системе отсчета

Динамику системы частиц с потенциалом $U_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|)$ можно задать функцией Лагранжа
$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}{}' U_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|) - \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec r_i, t)$$
и уравнениями Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = \vec F_i$

Движение той же самой системы частиц можно рассматривать и с точки зрения неинерциальной системы отсчета S' с известным законом движения $\vec r_0(t)$ ее начала координат и угловой скоростью $\vec\omega = \vec\omega(t)$ вращения относительно S.

Уравнения Лагранжа ковариантные при преобразованиях обобщённых координат, содержащих время. Поэтому остаётся преобразовать в систему S' только функцию Лагранжа. Координаты одной и той же частицы $\vec r_i$ в S и $\vec r_i'$ в S' связаны формулой $\vec r_i = \vec r_0 + \vec r_i'$.

Поэтому всегда $\vec r_i - \vec r_k = \vec r_i' - \vec r_k'$, значит, $U_{ik}(|\vec r_i - \vec r_k|) = U_{ik}(|\vec r_i' - \vec r_k'|)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц значение прежней.

Для преобразования кинетической энергии необходима формула преобразования скоростей от $\vec v_i$ в S к $\vec v_i'$ в S'.

Так как $\vec v_i'$ — производные от $\vec r_i'$ при фиксированных направлениях осей системы S', то
$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + [\vec\omega \times \ldots]$$
Получим $\vec v_i = \vec v_0(t) + \vec v_i' + [\vec\omega \times \vec r_i']$
$$L = \frac{1}{2}\vec v_0^2(t)\sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i[\vec\omega(t)\times\vec r_i']^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_0(t)\{\vec v_i' + [\vec\omega(t)\times\vec r_i']\} + \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec v_i'\cdot[\vec\omega(t)\times\vec r_i']) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|) - \sum_{i=1}^{N} \cancel{U_i(\vec r_i, t)}\, U_i(\vec r_0(t) + \vec r_i', t).$$
$$\vec v_0(t)\cdot\{\vec v_i' + [\vec\omega(t)\times\vec r_i']\} = \vec v_0(t)\cdot(\vec v_i - \vec v_0(t)) = \vec v_0(t)\frac{d\vec r_i}{dt} -$$
$$- \vec v_0^2(t) = \frac{d}{dt}(\vec v_0(t)\cdot\vec r_i) - (\vec r_i\cdot\dot{\vec v}_0(t)) - \vec v_0^2(t) = \frac{d}{dt}(\vec v_0(t)\vec r_i) -$$
$$-(\vec r_0(t)\cdot\dot{\vec v}_0(t)) - \vec v_0^2(t) - (\vec r_i'\cdot\dot{\vec v}_0(t))$$

Первые три слагаемых могут быть опущены в силу неоднозначности функции Лагранжа.

Поэтому $L = -\vec{v}_0(t)\sum\limits_{s=1}^{N} m_s \vec{r}_s\,' + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{N} m_s \vec{v}_s\,'^2 +$

$+\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{N} m_s\left\{\vec{\omega}^2(t)\vec{r}_s\,'^2 - (\vec{\omega}(t)\vec{r}_s\,')^2\right\} - \frac{1}{2}\sum\limits_{s,j=1}^{N} U_{sj}(|\vec{r}_s\,' - \vec{r}_j\,'|) -$

$-\sum\limits_{s=1}^{N} U_s(\vec{r}_0(t) + \vec{r}_s\,', t) + \sum\limits_{s=1}^{N} m_s(\vec{v}_s\,'\cdot[\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_s\,'])$.

Явный вид уравнений движения дает подстановка L в уравнения $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_s\,'} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_s\,'} = \vec{F}_s$ и вычисление производных.

Обобщенные импульсы в S':

$$\vec{p}_s\,' = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_s\,'} = m_s(\vec{v}_s\,' + [\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_s\,'} = -m_s\vec{v}_0(t) + \frac{1}{2}m_s\left\{2\vec{\omega}^2(t)\vec{r}_s\,' - 2\vec{\omega}(t)(\vec{\omega}(t)\vec{r}_s\,')\right\} +$$
$$+ m_s[\vec{v}_s\,'\times \vec{\omega}(t)] - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}\sum_{k=1}^{N}{}' U_{sk}(|\vec{r}_s - \vec{r}_k|) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}U_s(\vec{r}_0(t) + \vec{r}_s\,', t).$$

Получим уравнение движения:

$$\cancel{m_s\dot{\vec{v}}_s\,' = -m_s\dot{\vec{v}}_0(t) - 2m_s[\vec{\omega}\times\vec{v}_s\,'] - m_s[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']] -}$$
$$\cancel{-m_s[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_s\,']}$$

$$m_s\dot{\vec{v}}_s\,' + m_s[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_s\,'] + m_s[\vec{\omega}\times\vec{v}_s\,'] = -m_s\dot{\vec{v}}_0(t) + m_s\vec{\omega}^2\vec{r}_s\,' -$$
$$-m_s\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}_s\,') + m_s[\vec{v}_s\,'\times\vec{\omega}] - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}\sum_{k=1}^{N}{}' U_{sk}(|\vec{r}_s\,' - \vec{r}_k\,'|) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}U_s(\vec{r}_0 + \vec{r}_s\,', t) + \vec{F}_s$$

Или $m_s\dot{\vec{v}}_s\,' = -m_s\dot{\vec{v}}_0 - 2m_s[\vec{\omega}\times\vec{v}_s\,'] - m_s[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']] -$

$-m_s[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_s\,'] - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}\sum\limits_{k=1}^{N} U_{sk}(|\vec{r}_s - \vec{r}_k|) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_s\,'}U_s(\vec{r}_0 + \vec{r}_s\,', t) + \vec{F}_s$

Эти уравнения можно получить непосредственно из уравнений движения в системе S, $m_s\dot{\vec{v}}_s = -\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{\partial U_{sk}(|\vec{r}_s - \vec{r}_k|)}{\partial \vec{r}_s} - \frac{\partial U_s(\vec{r}_s, t)}{\partial \vec{r}_s} + \vec{F}_s$, если воспользоваться формулами преобразования координат, скоростей и ускорений:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_0 + \vec{r}_s\,'$$

$$\vec{v}_s = \vec{v}_0 + \vec{v}_s\,' + [\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']$$

$$\dot{\vec{v}}_s = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{v}}_s\,' + [\vec{\omega}\times\vec{v}_s\,'] + [\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_s\,'] + [\vec{\omega}\times\vec{v}_s\,'] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']]$$

Первые четыре слагаемых в уравнении движения — это силы инерции.

Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ то обобщенная энергия будет интегралом движения.

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_s\,'}\vec{v}_s\,' - L = \sum_{s=1}^{N} m_s(\vec{v}_s\,' + [\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,'])\vec{v}_s\,' + \vec{v}_0\sum_{s=1}^{N} m_s\vec{r}_s\,' -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}\frac{m_s\vec{v}_s\,'^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']^2 - \sum_{s=1}^{N} m_s(\vec{v}_s\,'\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^{N} U_{sj}(|\vec{r}_s - \vec{r}_j|) + \sum_{s=1}^{N} U_s(\vec{r}_0 + \vec{r}_s\,', t) = \sum_{s=1}^{N}\frac{m_s\vec{v}_s\,'^2}{2} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s[\vec{\omega}\times\vec{r}_s\,']^2 + \vec{v}_0\sum_{s=1}^{N} m_s\vec{r}_s\,' + U$$

(13) Приведите формулировку и доказательство теоремы Нётер. Установите связь законов сохранения энергии, импульса и момента импульса со свойствами симметрии пространства и времени

В 1918 году математик Эмми Нётер установила, что каждой группе преобразований, сохраняющей функцию Лагранжа инвариантной, соответствует определенный закон сохранения.

Применительно к механическим системам с конечным числом степеней свободы теорема Нётер звучит так: каждому бесконечно малому преобразованию, сохраняющему неизменной функцию Лагранжа, отвечает интеграл уравнений движения.

Рассмотрим полные вариации координат, скоростей и функции Лагранжа, вводя не зависящий от времени параметр a и рассматривая $q_i, \dot q_i$ и L как функции параметра a и времени t. Параметр a сохраняет всё значение на каждой действительной траектории.

Полные вариации запишем в виде

$$\Delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial a}\delta a + \frac{\partial q_i}{\partial t}\delta t, \quad \Delta \dot q_i = \frac{\partial \dot q_i}{\partial a}\delta a + \frac{\partial \dot q_i}{\partial t}\delta t,$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial a}\delta a + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

Изохронные вариации будут иметь вид:

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial a}\delta a, \quad \delta \dot q_i = \frac{\partial \dot q_i}{\partial a}\delta a, \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial a}\delta a$$

К тому же мы можем положить:

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)_a = \dot q_i.$$

Обе части каждого уравнения Лагранжа умножим на Δq_i и просуммируем по всем значениям i:

$$\sum_{i=1}^{s} \Delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \sum_{i=1}^{s} \Delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ или}$$

$$\sum_{i=1}^{s}(\delta q_i + \dot q_i \delta t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \sum_{i=1}^{s}(\delta q_i + \dot q_i \delta t)\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial a}\delta a \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial L}{\partial q_i}\right\}\delta a +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left\{\dot q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \dot q_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\right\}\delta t = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial a} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial a}\right\}\delta a + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i - \dot q_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\right\}\delta t =$$

$$= \left\{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial a}\right\}\delta a + \left\{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\right\}\delta t = 0$$

Положим $\delta a \neq 0$, $\delta t = 0$.

Если при этом $\delta L = \frac{\partial L}{\partial a}\delta a = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{\tilde N}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\frac{\partial q_s}{\partial a}=0 \Rightarrow \sum_{s=1}^{\tilde N}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\frac{\partial q_s}{\partial a}=\text{const}$$

Допустим, что q_j – циклическая координата. Пользуясь независимостью изохронных вариаций независимых координат, положим $\delta q_j=\delta a$, $\delta q_1=\ldots=\delta q_{j-1}=\delta q_{j+1}=\ldots=\delta q_s=0$, $(\delta t=0)$. Изменению параметра a будет соответствовать виртуальное перемещение вдоль координатной линии q_j. Тогда, поскольку

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta a=0,\quad \frac{\partial q_s}{\partial q_j}=\delta_{sj}, \text{ то}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\text{const}.$$

Предположим теперь, что функция Лагранжа не зависит явно от времени. Положим

$\delta a=0$, $\delta t\neq 0$. Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, то $\delta t\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{\tilde N}\dot q_s\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}-L\right)=0$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{\tilde N}\dot q_s\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}-L=E_0=\text{const}.$$

Инвариантность функции Лагранжа относительно некоторого преобразования переменных есть достаточное условие существования интеграла уравнений Лагранжа 2-го рода.

(14) Получите в квадратурах общее решение задачи о движении точечной частицы в центральном поле. При каких условиях траектория является замкнутой?

Если сила взаимодействия между частицами зависит только от расстояния между ними, то поле, создаваемое каждой из частиц, является центральным. Центральным является поле сферически симметрично распределённого вещества.

Будем считать, что одна из частиц является неподвижной, и связывать с ней начало координат. Это допустимо, если масса частицы много меньше массы силового центра. В общем случае это не так, и мы будем иметь дело с двумя движущимися и взаимодействующими частицами. Однако, если $U=U(|\vec r_1-\vec r_2|)$, то задача двух тел распадается на две задачи, одной из которых является задача движения квазичастицы в центральном поле.

Функция Лагранжа частицы в центральном поле имеет вид: $L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(|\vec{r}|)$

Уравнение Лагранжа: $m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}}$

Имеет место закон сохранения энергии

$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(|\vec{r}|) = const.$

Кроме того, сохраняются все три проекции момента импульса

$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = [\vec{r} \times \vec{p}] = \overrightarrow{const}.$

Отсюда следует, что $(\vec{L}\vec{r}) = 0$.

Но поскольку $\vec{L} = \overrightarrow{const}$, то формула $(\vec{L}\vec{r}) = 0$ свидетельствует о том, что радиус-вектор частицы $\vec{r}(t)$ лежит в одной и той же плоскости при любых t.

В этой плоскости удобно ввести полярные координаты (r, φ), где $r = |\vec{r}|$

Тогда $\begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E = const \\ mr^2\dot{\varphi} = L = const \end{cases}$

Отсюда $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}$, где $U_{эфф}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$.

$\frac{L^2}{2mr^2}$ – потенциал центробежной силы

Радиальное движение, описываемое этим уравнением, является одномерным, с той лишь разницей, что $r \geq 0$.

Получим $t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}} + const$ – закон движения частицы в радиальном направлении.

Отсюда находим $r = r(t)$.

Тогда $\varphi = \frac{L}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)} + const$ – закон движения частицы в азимутальном направлении.

Отсюда находим $\varphi = \varphi(t)$

В уравнении $L = mr^2\dot{\varphi}$ можно перейти к дифференцированию по r, а не по t.

$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\dot{r}}\frac{L}{mr^2}$. Подставив сюда $\dot{r}$ и интегрируя по r, получим уравнение траектории в виде: $\varphi = \pm\int \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}} + const$

Законы движения содержат 6 произвольных постоянных, в том числе 4 постоянные E и $\vec{L}$

Допустимая область движения в радиальном направлении определяется неравенством

$E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \geq 0$

Знак равенства даёт уравнение для точек поворота в радиальном направлении. В точкак поворота $\dot r = 0$, $\dot r$ меняет знак, что соответствует переходу с одной ветви корня на другую. Отсюда следует, что траектория симметрична относительно точек поворота.

Каждая пара точек поворота r_{min}, r_{max} определяет в плоскости движения две окружности. Поскольку в точках поворота $\dot\varphi = \frac{L}{mr^2} \neq 0$, то в них траектория касается обеих окружностей.

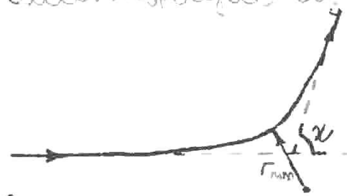
Движение частицы от r_{min} до r_{max} и обратно происходит за время, называемое периодом радиальных колебаний $T = 2\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}}$.

За это время угловая переменная φ изменится на величину $\Phi = 2\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}}$.

Если $\Phi \neq 2\pi \frac{m}{n}$, где m, n – целые числа, то траектория незамкнута и заполняет всю доступную область движения.

Для поля $U = -\frac{\alpha}{r}$ при $\alpha > 0$ и для поля $U = \frac{\alpha r^2}{2}$ траектория оказывается замкнутой кривой.

Если $r_{max} = \infty$, то движение частицы является инфинитным. При этом налетающие из бесконечности частицы ~~частицы~~ отталкиваются силовым центром и снова уходят на бесконечность.



Угол отклонения импульса частицы от первоначального направления называется углом рассеяния: $\chi = \pi - 2\int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}}$

То, что в $U_{эфф}$ входит центробежный потенциал приводит к тому, что не при всех видах притягивающего потенциала частица может достигнуть силового центра. Условие падения частицы на силовой центр: $Er^2 - U(r)\cdot r^2 - \frac{L^2}{2m} = 0$

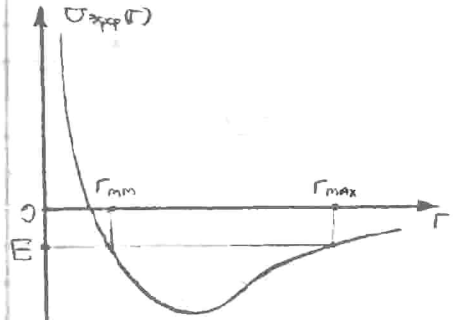
При $r^2 \to 0$ $\quad r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} \leq 0$

$\lim\limits_{r\to 0} r^2 U(r) \leq -\frac{L^2}{2m}$

Если $U = -\frac{\alpha}{r^n}$, то условие выполняется при $r = 2$, $\alpha > \frac{L^2}{2m}$

(15) Найдите траекторию частицы, совершающей финитное движение под действием центральной силы притяжения, $U=-\frac{\alpha}{r}$, а также выражение для периода обращения частицы по эллиптической орбите.

Пусть частица движется в центральном поле $U=-\frac{\alpha}{r}$. В случае гравитационного поля $\alpha = GM_0 m$, электростатического — $\alpha = -ee_0$.



$$U_{эфф}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

При $E<0$ существуют две точки поворота r_{min} и r_{max}, т.е. два корня уравнения $E - U_{эфф}(r)=0$. Движение финитно.

Уравнение траектории имеет вид:

$$\pm(\varphi - C) = \int \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}} = \int \frac{-d(\frac{1}{r})}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}} =$$

$$= -\int \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{2m\alpha}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = -\int\frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}-\left(\frac{1}{r}-\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} =$$

$$= \arccos\frac{\frac{1}{r}-\frac{m\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}\left(1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)}} = \arccos\frac{\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}}{\frac{m|\alpha|}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}$$

Вследствие чётности косинуса

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{m|\alpha|}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)$$

Отсюда $$r = \frac{\frac{L^2}{m|\alpha|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

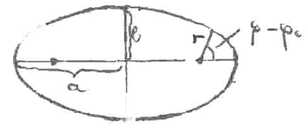
Это уравнение траектории в поле $U=-\frac{\alpha}{r}$ при всех α.

Если ввести обозначения $p=\frac{L^2}{m|\alpha|}$ — параметр траектории, $\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}=\varepsilon$ — эксцентриситет траектории, то $r=\frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$

Если отсчитывать угловую координату от направления на r_{min} (перигелий), то $\varphi_0=0$.

Если $\alpha>0$, то $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$.

В области $U_{эфф}\le E<0$ $0\le\varepsilon<1$, $1+\varepsilon\cos\varphi$ не обращается в ноль ни при каких φ, траекторией является эллипс. Центр поля находится в одном из фокусов эллипса.



$a=\frac{1}{2}(r_{min}+r_{max})$ r_{min} — перигелий, r_{max} — афелий

$$r_{min}=\frac{p}{1+\varepsilon} \quad r_{max}=\frac{p}{1-\varepsilon} \quad a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}=\frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1-1-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}=\frac{\alpha}{2|E|}$$

Величина большой полуоси определяется только ко энергией, но не моментом импульса

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L^2}{m\alpha}\frac{1}{\sqrt{-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

Величина малой полуоси зависит и от E, и от L.

Найдём закон движения в радиальном направлении:

$$\pm(t-C) = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{эфф}(r))}} = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-|E|+\frac{\alpha}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{dr}{\sqrt{-1+\frac{\alpha}{|E|}\cdot\frac{1}{r} - \frac{L^2}{2|E|m}\frac{1}{r^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{dr}{\sqrt{-1+\frac{2a}{r}-\frac{b^2}{r^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+2ar-b^2}}$$

В таком случае принято получать закон движения в параметрической форме.

$r = a(1-\varepsilon\cos\xi)$.

Тогда $\pm(t-C) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, a^2\varepsilon\int\frac{\cancel{1-\cos}\,(1-\varepsilon\cos\xi)\sin\xi\, d\xi}{\sqrt{-a^2(1-\varepsilon\cos\xi)^2+2a^2(1-\varepsilon\cos\xi)-b^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, a\varepsilon\int\frac{(1-\varepsilon\cos\xi)\sin\xi\, d\xi}{\sqrt{-1+2\varepsilon\cos\xi-\varepsilon^2\cos^2\xi+2-2\varepsilon\cos\xi-\frac{b^2}{a^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, a\int(1-\varepsilon\cos\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi)$$

$\xi = 0$ при $t=0$, $\xi\to\infty$ при $t\to\infty$

Отсюда $\begin{cases} r = a(1-\varepsilon\cos\xi) \\ t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi) \end{cases}$

Из уравнения $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ можно найти зависимость $\varphi(\xi)$.

При изменении r от r_{min} до r_{max} переменная ξ меняется от 0 до π.

$r_{min} = a(1-\varepsilon)$, $r_{max} = a(1+\varepsilon)$.

Время движения от r_{min} до r_{max} составляет половину периода.

Период $T = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\, 2\pi$

$L = 2m\sigma$, σ — секторная скорость

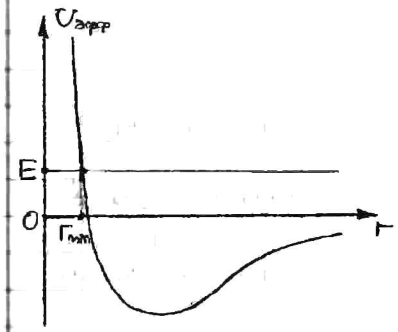
$\sigma = \frac{dS}{dt} \Rightarrow L = 2m\frac{dS}{dt}$, $LT = 2m\pi ab$

При финитном движении траекторией частицы является эллипс. Величины L и σ сохраняются. $\frac{T^2}{a^3}$ не зависит от m и L (если $\alpha = \gamma M m$).

Мы таким образом получили три закона Кеплера.

(16) Найдите траекторию и угол рассеяния частицы при её инфинитном движении в поле центральной силы отталкивания с потенциалом $U=\frac{a}{r}$, а также силы притяжения с потенциалом $U=-\frac{a}{r}$.

Если на частицу действует центральная сила ~~отталкивания~~ притяжения $U=-\frac{\alpha}{r}$, то $U_{эфф}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$.



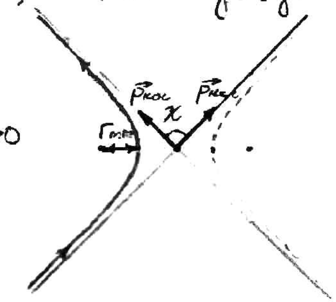
При $E\geq 0$ имеется только одна точка поворота.

При этом $\varepsilon \geq 1$.

В формуле $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ знаменатель может обращаться в ноль.

Это траектория инфинитного движения. Частица налетает из бесконечности на силовой центр, рассеивается им, и снова уходит на бесконечность.

Формула $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ при $E>0$ представляет собой ближнюю к силовому центру ветвь гиперболы.



χ − угол рассеяния, $\chi=\pi-2\int\limits_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{эфф}(r))}}$

Найдём угол рассеяния.

$p=\frac{L^2}{m\alpha}>0$, поэтому поскольку $r>0$, то

$1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\geq 0$

$-\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\leq\varphi\leq\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Полный угол поворота $\varphi_0=\chi-\pi=2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$\chi=\pi-2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\pi-2\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}\right)\Leftrightarrow$

$\boxed{\chi=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2E}}}$

Движению по гиперболе соответствует конечное значение скорости на бесконечности.

Если на бесконечности скорость равна нулю, то $E=0$.

При этом $r=\frac{p}{1+\cos(\varphi-\varphi_0)}$ − уравнение параболы.

$\pm(t-c)=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}}=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+2ar-b^2}}$,

$a=\frac{\alpha}{2E}$, $b=\frac{L}{\sqrt{2mE}}$

Найдём закон движения по гиперболической траектории. Решение будем искать в параметрическом виде: $r=a(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi-1)$.

Тогда $\pm(t-C)=\sqrt{\frac{m}{2E}}\,a\int(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi-1)d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\xi-\xi)$.

При $\xi\geq0$ $t\geq0$

Отсюда $\begin{cases} r=a(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi-1)\\ t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\xi-\xi)\end{cases}$

Из формулы $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ можно найти зависимость $\varphi(\xi)$.

В случае движения по параболе ($E=0$)

$$\pm(t-C)=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Ищем закон движения в виде

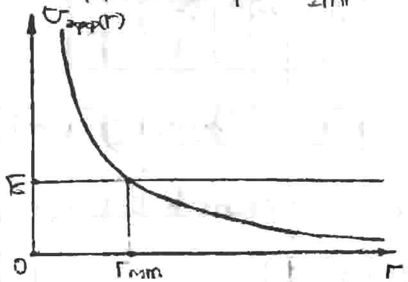
$$r=r_{min}(1+\xi^2),\quad r_{min}=\frac{L^2}{2m\alpha}=\frac{p}{2}\Rightarrow r=\frac{p}{2}(1+\xi^2)$$

Учитывая, что $\xi\geq0$ при $t\geq0$, найдём

$$\begin{cases} r=\frac{p}{2}(1+\xi^2)\\ t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\left(\xi+\frac{\xi^3}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\end{cases}$$

Пусть теперь на частицу действует центральная сила отталкивания: $U=-\frac{\alpha}{r}$, $\alpha<0$.

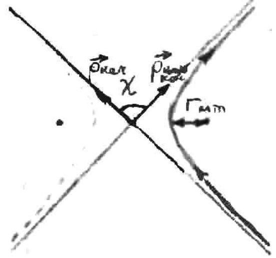
$U_{эфф}(r)=-\frac{\alpha}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}\geq0$ Допустимая область движения ограничена только одной точкой поворота при любых $E>0$.



Уравнение траектории

$$r=\frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}=\frac{p}{-1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\geq1$$



Уравнением представлена дальняя от силового центра ветвь гиперболы.

Угол рассеяния

$$\chi=\pi-2\int\frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{эфф}(r))}}$$

$p=\frac{L^2}{m|\alpha|}>0$, $r>0\Rightarrow -1+\varepsilon\cos\varphi\geq0$

Отсюда аналогично $\pi-\chi=2\arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$,

$$\chi=\pi-2\arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}$$

$\boxed{\chi=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2E}}}$, $\alpha<0$.

(17) <u>Получите общее решение (в квадратурах) задачи двух тел.</u>

Имеем две частицы с массами m_1 и m_2. Они взаимодействуют между собой. Энергия их взаимодействия $U = U_{12} = U_{21} = U(|\vec r_1 - \vec r_2|)$

Построим функцию Лагранжа системы двух частиц.

Пусть известен закон движения $\vec r_2 = \vec r_2(t)$, тогда первая частица находится в центральном нестационарном поле, создаваемом второй частицей.

$$L_1(\vec r_1, \vec v_1, t) = \frac{m_1 \vec v_1^{\,2}}{2} - U(|\vec r_1 - \vec r_2(t)|).$$

Аналогично для ~~частицы~~ второй частицы, находящейся в нестационарном центральном поле, создаваемом первой частицей,

$$L_2(\vec r_2, \vec v_2, t) = \frac{m_2 \vec v_2^{\,2}}{2} - U(|\vec r_2 - \vec r_1(t)|)$$

$L(\vec r_1, \vec r_2, \vec v_1, \vec v_2, t)$ — функция Лагранжа системы двух частиц.

$L_1 = L\Big|_{\substack{\vec r_2 = \vec r_2(t)\\ \vec v_2 = \vec v_2(t)}}$, $L_2 = L\Big|_{\substack{\vec r_1 = \vec r_1(t)\\ \vec v_1 = \vec v_1(t)}}$ при условии, что появившиеся в результате подстановок функции, зависящие только от времени, могут быть опущены вследствие неоднозначности функций Лагранжа L_1 и L_2.

Учитывая также, что в L должен сохраняться произвол в нумерации частиц, т.е. функция Лагранжа должна быть симметричной относительно перестановки $1 \leftrightarrow 2$, из записанных условий получаем:

$$L = \frac{m_1 \vec v_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \vec v_2^{\,2}}{2} - U(|\vec r_1 - \vec r_2|)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec v_1} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec r_1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec v_2} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{\vec r}_1 = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec r_1} \\ m_2 \ddot{\vec r}_2 = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec r_2} \end{cases}$$

Имеем шесть дифференциальных уравнений второго порядка.

Удобнее ввести новые переменные:

$$\begin{cases} \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 \\ \vec r_m = \dfrac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m} \end{cases}, \quad m = m_1 + m_2$$

$\vec r_m$ — радиус-вектор центра масс

$\vec r$ — радиус-вектор относительного движения

Откуда $\vec r = \vec v_1 - \vec v_2$, $m \vec r_m = m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2$.

Подставляя это в функцию Лагранжа, получим: $L = \frac{m\vec{v}_m^2}{2} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(|\vec{r}|)$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m}$ — приведённая масса.

Поскольку L не зависит явно от $\vec{r}_m$, то сохраняется соответствующий обобщённый импульс: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_m} = 0$, $\vec{p}_m = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_m} = m\vec{v}_m = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = const$

Вторая группа уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}}$$

Получим уравнение движения квазичастицы массой μ в центральном поле.

Получим также $\vec{r}_m = \vec{v}_m t + \vec{r}_{m0}$, $(\vec{L}\vec{r}) = 0$

Для квазичастицы $U_{эфф}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

$$t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{эфф}(r))}} + C \qquad \varphi = \pm\int \frac{\frac{L}{\mu r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{эфф}(r))}} + C$$

Обобщённая энергия системы

$$E_{(1,2)} = \vec{v}_m\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_m} + \dot{\vec{r}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - L = \frac{m\vec{v}_m^2}{2} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} + U = \frac{m\vec{v}_m^2}{2} + E$$

$E = const$ — энергия квазичастицы.

Момент импульса системы

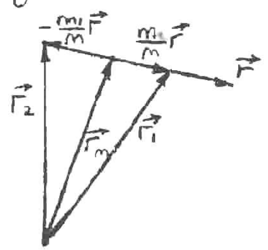
$$\vec{L}_{(1,2)} = [\vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1] + [\vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2] = \vec{L}_{ци} + \vec{L} = const$$

$\vec{L}_{ци} = [\vec{r}_m \times m\vec{v}_m] = const$ — момент импульса центра инерции

$\vec{L} = [\vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}] = const$ — момент импульса квазичастицы.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{r}_m = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_m + \frac{m_2}{m}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_m - \frac{m_1}{m}\vec{r} \end{cases}$$

Мы вынуждены иметь дело с двумя системами отсчёта.



Траектории частиц подобны с коэффициентом подобия, равным отношению масс частиц.

Все выводы о траектории, о финитном движении, о рассеянии и т.д. остаются справедливыми для квазичастицы

Если $U = -\frac{\alpha}{r}$, то третий закон Кеплера принимает вид: $T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}$. Для квазичастицы $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}$, где a — большая полуось эллипса для квазичастицы.

Большие полуоси эллипса для каждой из частиц равны $a_1 = \frac{m_2}{m}a$, $a_2 = \frac{m_1}{m}a$. При этом

$\frac{T^2}{a_1^3} \neq \frac{T^2}{a_2^3}$ — третий закон Кеплера не имеет места.

18) Приведите вывод формулы Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния лёгких заряженных частиц на первоначально неподвижных тяжёлых ядрах.

Рассмотрим задачу двух тел в новой постановке. Рассмотрим импульсы двух частиц $\vec{p}_1(t)$ и $\vec{p}_2(t)$ на таком расстоянии между частицами, когда их взаимодействием можно пренебречь: $\vec{p}_1(-\infty) = \vec{p}_1$, $\vec{p}_2(-\infty) = \vec{p}_2$

При сближении и взаимодействии частиц импульсы будут функциями времени, и их асимптотические значения будут содержать информацию о взаимодействии частиц: $\vec{p}_1(+\infty) = \vec{p}_1'$, $\vec{p}_2(+\infty) = \vec{p}_2'$. Задача состоит в отыскании $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$. Это задача о рассеянии частиц

Если расстояние $|\vec{r}_1(+\infty) - \vec{r}_2(+\infty)|$ остаётся ограниченным, говорят, что имеет место захват частицы. Если же оно стремится к бесконечности и внутренняя энерние которой из частиц является неизменяющей, то говорят, что имеет место упругое рассеяние двух частиц.

Поскольку значения импульсов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ определяются в лабораторной системе отсчёта, а задача двух тел сводится к квадратурам лишь в системе центра масс, то и в задаче о рассеянии также приходится иметь дело с двумя системами отсчёта. Переход между ними осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_m + \frac{m_2}{m}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_m - \frac{m_1}{m}\vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p}_1(t) = \frac{m_1}{m}\vec{p}_m(t) + \vec{p}(t) \\ \vec{p}_2(t) = \frac{m_2}{m}\vec{p}_m(t) - \vec{p}(t) \end{cases}$$

где $\vec{p}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} = \mu\vec{v}$

Положим $t \to -\infty$: $\vec{p}_m = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{p} = \frac{\mu}{m_1}\vec{p}_1 - \frac{\mu}{m_2}\vec{p}_2$

Положим $t \to +\infty$: $\vec{p}_1' = \frac{m_1}{m}\vec{p}_m' + \vec{p}'$, $\vec{p}_2' = \frac{m_2}{m}\vec{p}_m' - \vec{p}'$

В задаче двух тел $\vec{p}_m = \vec{p}_m'$

Сохранение энергии относительного движения частиц: $\frac{\mu v^2}{2} + U = const$

$$\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + U\Big|_{t=-\infty} = \frac{\vec{p}'^2}{2\mu} + U\Big|_{t=+\infty} \Rightarrow |\vec{p}| = |\vec{p}'| = p$$

Модуль импульса квазичастицы массой μ сохраняется, меняется его направление

$\vec{p}' = p\vec{n}$, $\vec{n}$ — единичный вектор направления после ~~рассеян~~ рассеяния.

$$\begin{cases} \vec{p}_1' = \frac{m_1}{m}\vec{p}_m + p\vec{n} \\ \vec{p}_2' = \frac{m_2}{m}\vec{p}_m - p\vec{n} \end{cases}$$

Для центрального взаимодействия $(\vec{L}\vec{r}) = 0$

Поэтому вектор $\vec{n}$ лежит в плоскости орбиты. Для решения задачи нужно определить только один угол $\widehat{\vec{p}\vec{p}'} = \widehat{\vec{p}\vec{n}}$ — угол рассеяния в системе центра инерции.

Угол рассеяния $\chi = \pi - 2\int\limits_{r_{min}}^{+\infty} \frac{\frac{L}{\mu r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{эфф}(r))}}$

Для нашей задачи $E = \frac{\mu v^2}{2}$, $L = |[\vec{r}\times\mu\vec{v}]| = |[\vec{r}\times\vec{p}]| = rp\sin(\widehat{\vec{p}\vec{r}}) \equiv p\rho$, где ρ — расстояние между асимптотами траекторий частиц (прицельный параметр).

Тогда $\chi = \pi - 2\int\limits_{r_{min}}^{+\infty} \frac{\frac{\rho dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}}$

r_{min} — корень уравнения $1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E} = 0$.

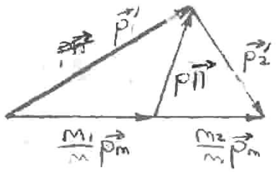
Если $U = -\frac{\alpha}{r}$, то $\chi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{\mu}{2E}} = \cancel{2\,\mathrm{arctg}}$

$= 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\mu\rho v}\sqrt{\frac{\mu}{2E}} = 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\mu\rho v}\sqrt{\frac{\mu}{\mu v^2}}$

$\Rightarrow \boxed{\chi = 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\mu\rho v^2}}$

Если $\vec p_1'$ и $\vec p_2'$ найдены, то углы рассеяния θ_1 и θ_2 частиц в лабораторной системе отсчёта могут быть найдены как углы между векторами $\vec p_1, \vec p_2, \vec p_1', \vec p_2'$.

Изобразим формулы $\begin{cases}\vec p_1' = \frac{m_1}{m}\vec p_m + p\vec n\\ \vec p_2' = \frac{m_2}{m}\vec p_m - p\vec n\end{cases}$

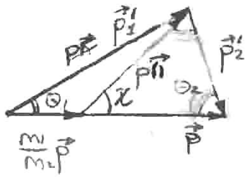


Направление $\vec n$ меняется при изменении параметра ρ. Вектор $p\vec n$ описывает окружность радиуса p при изменении ρ.

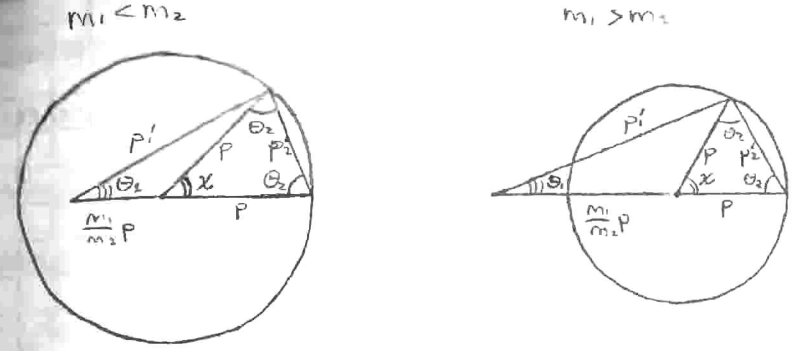
Для случая ~~рассеян~~ рассеяние на неподвижной мишени: $\vec p_2 = 0$

Тогда $\cancel{\frac{m_2}{m}\vec p_m = \vec p \cdot \frac{m}{m}}$ $\vec p_m = \vec p_1$, $\vec p = \frac{\mu}{m_1}\vec p_1$

$\frac{m_2}{m}\vec p_m = \frac{m_2}{m}\cdot m_1\vec v_1 = \vec p$, $\frac{m_1}{m}\vec p_m = \frac{m_1}{m_2}\vec p$



— при фиксированном значении прицельного параметра. При изменении прицельного параметра угол χ меняется.



В обоих случаях $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$, $0<\theta_2<\frac{\pi}{2}$

$\theta_2 = 0$ — рассеяние назад

$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ — отсутствие рассеяния

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{p\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2}p + p\cos\chi} = \frac{\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\chi}$$

В условиях эксперимента имеют дело с пучками частиц, поэтому для изучения рассеяния следует ввести количественную характеристику множества актов рассеяния вместо характеристики рассеяния двух частиц. Такая количественная характеристика должна быть непосредственно измеряемой в условиях эксперимента.

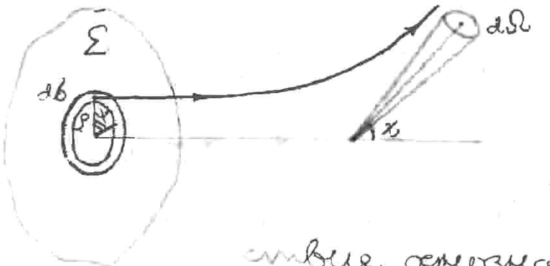
1) Положим, что пучки частиц являются разреженными. В этом случае можно

пренебречь взаимодействием частиц внутри пучка и частицы будут испытывать лишь однократное рассеяние

2) Будем требовать, чтобы пучки были монохроматическими — все частицы имеют одинаковые массы и скорости. В этом случае частицы, имеющие одинаковые прицельные параметры, будут рассеиваться на одинаковые углы

3) Будем считать, что каждый пучок до рассеяния является однородным по сечению.

Интенсивность пучка I — это число частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную пучку.



В направлении φ, χ регистрируется рассеяние частиц. Вследствие однозначности решения уравнений движения частица до рассеяния имела координаты ρ и ψ, зависящие от выбора φ и χ.

Мы имеем реальный механизм отображения плоскости на сферу единичного радиуса. Все частицы, которые рассеются в угол $d\Omega(\varphi,\chi)$, до рассеяния пройдут через площадку $\rho d\rho d\psi = d\sigma(\chi,\varphi)$

Величина $d\sigma(\varphi\chi)$ называется дифференциальным сечением рассеяния

$d\sigma = \frac{I\rho d\rho d\psi}{I} = \frac{dN}{I}$, dN — число частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$.

Полная площадь плоскости Σ, соответствующая рассеянию под всеми конечными углами, называется полным сечением рассеяния $\sigma = \int_{\varphi\chi} d\sigma(\varphi,\chi)$

Та часть плоскости Σ, которая соответствует захвату частиц, называется сечением захвата.

Для центральных взаимодействий $\varphi = \psi$, поэтому удобной количественной характеристикой является рассеяние в кольцо с углами χ и $\chi + d\chi$.

Это определяется формулой

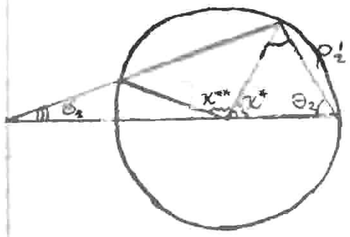
$$d\sigma(\chi) = \int_0^{2\pi} d\sigma(\varphi, \chi) = 2\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Полное сечение рассеяния $\sigma = \pi a^2$, где a — радиус взаимодействия — это радиус на плоскости Σ, начиная с которого рассеяние не происходит.

Для того, чтобы знать $\rho = \rho(\chi)$, требуется вычислить интеграл $\chi = \pi - 2\int_{r_{min}}^{+\infty} \frac{\frac{\rho\, dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}}$

χ - угол рассеяния в системе центра инерции. Если известно $d\sigma(\chi)$ и $\chi(\theta_1)$, $\chi(\theta_2)$, то в лабораторной системе координат $d\sigma_1 = d\sigma(\chi(\theta_1))$, $d\sigma_2 = d\sigma(\chi(\theta_2))$.

Может оказаться так, что функция $\chi(\theta)$ является многозначной (если тяжёлые частицы рассеиваются на более лёгких).



Тогда $d\sigma_1 = d\sigma(\chi)\big|_{\chi=\chi^*(\theta_1)} + d\sigma(\chi)\big|_{\chi=\chi^{**}(\theta_1)}$

Сечение суммируется по всем каналам.

Рассмотрим теперь рассеяние пучка частиц с зарядами e_1 массами m_1 и скоростями v_1. На частицу мишени $m_2, e_2, v_2 = 0$. Предположим, что взаимодействие является кулоновским: $U = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = -e_1 e_2$

$$\chi = \pi - 2\int_{r_{min}}^{+\infty} \frac{\frac{\rho\, dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{\frac{\mu v^2}{2}}}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\mu \rho v^2}$$

$$\rho^2(\chi) = \left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2 \mathrm{ctg}^2 \frac{\chi}{2}$$

$$d\sigma(\chi) = 2\pi \rho(\chi)\, d\rho(\chi) = \pi\, d(\rho^2(\chi)) = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2 2\, \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\frac{\chi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\frac{\chi}{2}}\, d\chi = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{2\pi \sin\chi\, d\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$ — ~~формула Резерфорда~~

$\cancel{d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2m_1 v_1^2}\right)}$ $\quad d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3\theta_2}$

$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\chi}$, $\quad \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \Rightarrow \theta_1 \approx \chi$, $\quad \mu \approx m_1$

$$\Rightarrow \boxed{d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2m_1 v_1^2}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}}}$$ — формула Резерфорда

Выразим сечение рассеяния через энергию, приобретаемую первоначально покоившимися частицами мишени, или равную ей энергию, теряемую налетающими частицами.

$p_2' = 2p\sin\frac{\chi}{2}$, $E = \frac{(p_2')^2}{2m_2} = \frac{4p^2}{2m_2}\sin^2\frac{\chi}{2}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{\chi}{2} = \frac{m_2}{2p^2}E$, $p = \mu\vartheta_1$

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu\vartheta^2}\right)^2 \frac{2\pi\sin\chi\,d\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2\mu\vartheta^2}\right)^2 \frac{4\pi\,d(\sin^2\frac{\chi}{2})}{(\sin^2\frac{\chi}{2})^2} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\mu\vartheta^2}\right)^2 \frac{4\pi\, 2p^2}{m_2}\frac{dE}{E^2} \qquad d\sigma = \frac{2\pi}{m_2}\left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2\cdot\frac{dE}{E^2}$$

Полное сечение рассеяния $\sigma = \int d\sigma$.

При кулоновском взаимодействии полное сечение расходится

(19) Получите формулу для дифференциального эффективного сечения рассеяния жёстких сфер.

Взаимодействие атомов и молекул на малых расстояниях имеет характер отталкивания. Предельный случай такого взаимодействия — потенциал $U(r) = \begin{cases} 0, & r > 2a \\ \to\infty, & r \to 2a+0 \end{cases}$

Такой же потенциал характеризует взаимодействие двух жёстких абсолютно упругих сфер радиуса a. Поэтому рассеяние атомов и молекул, имеющих высокую энергию, можно рассматривать как рассеяние жёстких сфер.

В системе центра инерции

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\,d\rho(\chi)$$

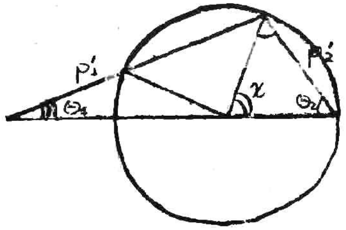
$$\chi = \pi - 2\int_{r_{min}}^{+\infty}\frac{\frac{\rho\,dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{U(r)}{\frac{\mu v^2}{2}}}} = \pi + 2\int_{2a}^{+\infty}\frac{d(\frac{\rho}{r})}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} =$$

$= \pi - 2\arcsin\frac{\rho}{2a}$, $\rho = 2a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\chi}{2}\right) = 2a\cos\frac{\chi}{2}$,

$\rho = 2a\cos\frac{\chi}{2}$, $d\sigma = 2\pi\,\frac{2a\cos\frac{\chi}{2}}{2}\,2a\sin\frac{\chi}{2}\,d\chi =$

$= a^2\cdot 2\pi\sin\chi\,d\chi = a^2\,d\Omega$ где $d\Omega = 2\pi\sin\chi\,d\chi$ — элемент телесного угла.

В системе центра масс сечение изотропно. Формула $d\sigma = a^2 d\Omega$ имеет место независимо от движения частиц в лабораторной системе координат. Рассмотрим случай рассеяния частиц m_1 на частицах m_2. До рассеяния $v_2 = 0$ (или $v_1 >> v_2$), $m_1 > m_2$.



$\chi = \pi - 2\theta_2$

$$d\sigma_2 = d\sigma\Big|_{\chi=\chi(\theta_2)} = 2\pi a^2 \sin(\pi - 2\theta_2) \cdot 2\,d\theta_2 = 2\pi a^2 \cdot 2\sin\theta_2 \cos\theta_2\, 2d\theta_2$$

$$= 4a^2 \cos\theta_2\, d\Omega_2,$$

$$d\sigma_2 = 4a^2 \cos\theta_2\, d\Omega_2.$$

Для налетающей частицы: $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\chi}$

$$\Rightarrow \cos\chi^*, \chi^{**} = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 \pm \cos\theta_1\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}$$

$$d\sigma(\chi) = a^2 \cdot 2\pi \sin\chi\, d\chi = -2a^2\pi\, d(\cos\chi)$$

~~$d\Omega^{*,**}$~~ $\quad d\sigma = a^2\left(|d\Omega^*| + |d\Omega^{**}|\right)$

$$|d\Omega^{*,**}| = \left| 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}} \right|$$

Полное сечение рассеяния $\sigma = \pi a^2$.

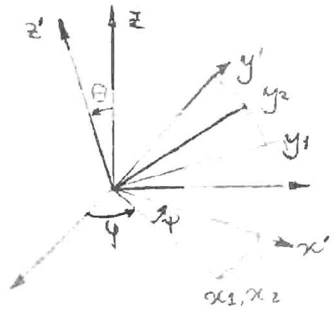
(20) <u>Найдите компоненты угловой скорости твёрдого тела как функции углов Эйлера и их производных по времени.</u>

Множество поворотов твёрдого тела, с которым жёстко связана система отсчёта S' относительно лабораторной системы S, образует группу вращений SO_3.

При этом каждому повороту соответствует ортогональная матрица (3×3) с определителем, равным единице, и любым двум последовательным поворотам соответствует произведение матриц.

Так как ориентация системы S' относительно S определяется тремя параметрами, то группа SO_3 является трёхпараметрической. Эти параметры могут быть выбраны произвольно.

Углы Эйлера могут быть введены как углы последовательных поворотов системы S до совмещения её с системой S'



$0 \le \varphi < 2\pi$ — угол, на который нужно повернуть систему S вокруг оси z пока новые ось x_1 ... S не станет перпендикулярна оси z. Такому повороту соответствует преобразование координат

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$ или

$$\hat{x}_1 = \hat{a}_1(\varphi)\,\hat{x}$$

Следующий поворот — вращение вокруг оси x_1 (ось узлов) до совмещения z и z' на угол $0 \le \theta < \pi$. Соответствующее преобразование

$$\hat{x}_2 = \hat{a}_2(\theta)\,\hat{x}_1 \qquad \hat{a}_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Третий поворот — вокруг оси z (совпадающей теперь с z') до совмещения осей x_2 и y_2 с осями x' и y'. Поворот на угол $0 \le \psi < 2\pi$. Ему отвечает преобразование $\hat{x}' = \hat{a}_3(\psi)\,\hat{x}_2$

$$\hat{a}_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим $\hat{x}' = \hat{a}_3(\psi)\,\hat{a}_2(\theta)\,\hat{a}_1(\varphi)\,\hat{x}$

Любой поворот $\hat{x}' = \hat{a}\,\hat{x}$ может быть совершён при помощи матрицы $\hat{a} = \hat{a}_3(\psi)\,\hat{a}_2(\theta)\,\hat{a}_1(\varphi)$

$$\hat{a}(\varphi, \theta, \psi) = \hat{a}_3(\psi)\,\hat{a}_2(\theta)\,\hat{a}_1(\varphi) =$$

$$= \hat{a}_3(\psi)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Положим $\theta = \varphi = \psi = 0$, тогда $\hat{a}(0,0,0) = \hat{I}$

Бесконечно малым поворотам соответствуют бесконечно малые значения θ, φ и ψ. Для нахождения матрицы необходимо разложить $\hat{a}$ в ряд Тейлора и ограничиться линейными слагаемыми $\hat{a} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$.

Найдём матрицу, обратную $\hat{\varepsilon}$:

$$(\hat{I} + \hat{\varepsilon})(\hat{I} + \hat{\varepsilon}_1) = \hat{I} + \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}$$

Бесконечно малые повороты коммутативны. Если $\hat{\varepsilon}_1 = -\hat{\varepsilon}$, то получим единичную матрицу $\Rightarrow \hat{a}^{-1} = \hat{I} - \hat{\varepsilon}$

Для ~~орт~~ ортогональных матриц обратная матрица совпадает с транспонированной. Поэтому матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрическая, $\varepsilon_{\beta\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Пусть вектор $\vec{n}'$ задан своими компонентами в системе S'.

$n''_\alpha = a_{\alpha\beta} n'_\beta$ — преобразование координат.

Для бесконечно малых поворотов:

$\vec{n}'' = (\hat{I} + \hat{\varepsilon})\vec{n}'$. Отсюда $d\vec{n}' = \vec{n}'' - \vec{n}' = \hat{\varepsilon}\vec{n}'$

Обозначим $d\Omega_1 = \varepsilon_{23}$, $d\Omega_2 = \varepsilon_{31}$, $d\Omega_3 = \varepsilon_{12}$

$d\vec{\Omega} = \{d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3\}$

Тогда $d\vec{n}' = [d\vec{\Omega} \times \vec{n}']$

$d\vec{\Omega}$ — „вектор" бесконечно малого поворота твёрдого тела. Он направлен по оси вращения и равен по модулю углу поворота относительно такой оси.

Реальные повороты твёрдого тела происходят во времени. Поворот $d\vec{n}'$ происходит за время dt. По определению угловая скорость $\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$

$$\frac{d\vec{n}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{n}']$$

Линейная скорость точки $\vec{r}'$ твёрдого тела.

Пусть вектор меняется в системе S' со временем $\vec{A} = A_\alpha(t)\cdot\vec{n}_\alpha = A'_\alpha(t)\,\vec{n}'_\alpha(t)$.

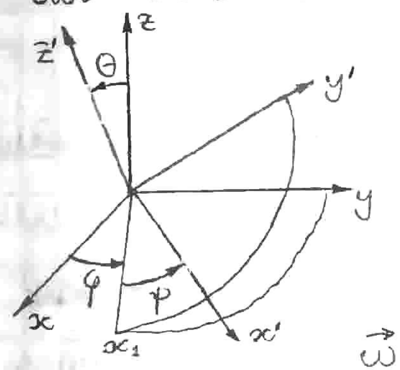
Дифференцируем: $\frac{dA_\alpha}{dt}\vec{n}_\alpha = \frac{dA'_\alpha}{dt}\vec{n}'_\alpha + [\vec{\omega} \times (A'_\alpha \vec{n}'_\alpha)]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + [\vec{\omega} \times \ldots]$

$\hat{a} = \hat{a}_3\hat{a}_2\hat{a}_1$, $\hat{a} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$

$\hat{a} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3$

$d\vec{\Omega} = d\vec{\Omega}_1 + d\vec{\Omega}_2 + d\vec{\Omega}_3 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$



$\omega_1 = \dot{\varphi}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$, $\omega_3 = \dot{\psi}$

$\vec{\omega}_1 = \{\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \dot{\varphi}\cos\theta\}$

$\vec{\omega}_2 = \{\dot{\theta}\cos\psi, -\dot{\theta}\sin\psi, 0\}$

$\vec{\omega}_3 = \{0, 0, \dot{\psi}\}$

$\vec{\omega} = \{\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\}$

$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$

(21) Приведите вывод функции Лагранжа твёрдого тела, принимая в качестве обобщённых координат декартовы координаты центра масс тела и углы Эйлера.

Для получения уравнений движения твёрдого тела можно рассмотреть систему N частиц со связями $f_{ij} = |r_i - r_j| - c_{ij} = 0$.

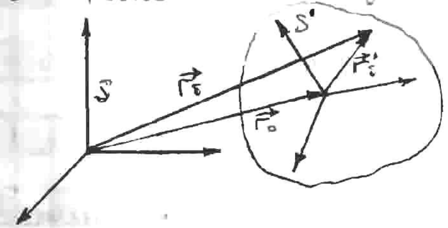
После наложения связей остаётся 6 независимых обобщённых координат. При переходе к ним уравнения Лагранжа не изменяют своего вида, и нам только остаётся преобразовать функцию Лагранжа.

Второй способ — это использовать уравнения изменения полного импульса и момента импульса системы. Мы будем иметь 6 дифференциальных уравнений, и нам останется только преобразовать полный импульс и момент импульса системы к обобщённым координатам.

Потенциальная энергия взаимодействия частиц $U_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|)$, внешнее поле также потенциально.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i^2 - U(|\vec r_1 - \vec r_2|, |\vec r_2 - \vec r_3|, |\vec r_1 - \vec r_3|, \dots) - \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec r_i, t)$$

Пусть выполнены физические условия, при которых достаточно точно выполняется $f_{ij} = |\vec r_i - \vec r_j| - c_{ij} = 0$. Система может рассматриваться как твёрдое тело. Тогда $U = const$ и может быть опущена вследствие неоднозначности функции Лагранжа. Относительные скорости частиц равны нулю, поэтому кинетическая энергия зависит только от $\dot{\vec r}_0$ — скорости начала координат S', $\vec\omega_0$ и расположения частиц.



$\vec r_i = \vec r_0 + \vec r_i'$

$\vec v_i = \vec v_0 + 0 + [\vec\omega \times \vec r_i']$

$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\vec v_0^2}{2} + (\vec v_0 \cdot [\vec\omega \times \vec r_i']) + \frac{1}{2}[\vec\omega \times \vec r_i']^2\right]$$

Центр масс твёрдого тела: $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i' = \vec r_m' \sum_{i=1}^{N} m_i = m \vec r_m'$

Теперь для вычисления $\vec r_m'$ ~~центр~~ не предyстоило знать законы движения всех N частиц. Учтём, что $\vec{\omega}^2 = \delta_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$

$$E_k = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + m(\vec{v}_0\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}_m']) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i'^2\vec{\omega}^2 - (\vec{r}_i'\vec{\omega})^2) =$$

$$= \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + m(\vec{v}_0\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}_m']) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i'^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}'x_{i\beta}')\omega_\alpha\omega_\beta$$

$$I_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i'^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}]$$

Тогда $L = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + m(\vec{v}_0\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}_m']) + \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta -$
$- \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_0 + \vec{r}_i', t).$

Существует преимущественный выбор системы координат ~~при~~ S, при котором функция Лагранжа приобретает наиболее простой вид:

1) O' – центр масс, $\vec{r}_0 = \vec{r}_m$, $\vec{r}_m' = 0$

$$L = \frac{m\vec{v}_m^2}{2} + 0 + \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}^{(m)}\omega_\alpha\omega_\beta - U$$

2) O' – мгновенный центр вращения, $\vec{v}_0 = 0$

$$L = \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}^{(P)}\omega_\alpha\omega_\beta - U$$

Если число частиц очень велико, то можно перейти от суммирования перейти к интегрированию: $I_{\alpha\beta} = \int\rho[r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)\,dV$

ω_α можно выразить через углы Эйлера

22) Приведите формулы преобразования тензора инерции твёрдого тела при поворотах и параллельных переносах координатных осей. Покажите, каким образом тензор инерции твёрдого тела приводится к главным осям инерции.

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i'^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}'x_{i\beta}']$$

При смене ориентации системы S' компоненты $I_{\alpha\beta}$ преобразуются по тензорному закону. $x_{i\alpha}'' = a_{\alpha\beta}x_{i\beta}'$

При поворотах $\vec{r}_i'^2$ и $\delta_{\alpha\beta}$ не меняются.

Поэтому $I_{\alpha\beta}' = a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}I_{\mu\nu} \Rightarrow I_{\alpha\beta}$ – тензор второго ранга.

Его свойства:

1) $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ – тензор симметричен.

2) Тензор аддитивен – тензор для системы тел равен сумме тензоров для подсистем.

3) Его компоненты зависят от ориентации и выбора начала координат системы S'.

Любой симметричный тензор второго ранка можно привести к диагональному виду

Если x_α – вектор, тесно связанный с телом, то $I_{\alpha\beta}x_\beta$ – тоже вектор, т.е. каждому вектору $\vec{x}$ оператор $\hat{I}$ с матрицей $I_{\alpha\beta}$ ставит в соответствие новый вектор $\hat{I}\vec{x}$. Если этот новый вектор такой, что $\hat{I}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то он называется собственным вектором оператора $\hat{I}$.

$I_{\alpha\beta}x_\beta = \lambda x_\alpha$, λ называется собственным значением оператора $\hat{I}$

Собственные векторы определены с ~~точност~~ точностью до произвольного инвариантного множителя. Единичный собственный вектор $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

Для нахождения вектора $\vec{n}$ нужно решить систему уравнений $(I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta})n_\beta = 0$. Эта однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$\det\|I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}\| = 0$. Это кубическое уравнение относительно λ, и все его корни вещественны.

$I_{\alpha\beta}n_\alpha^* n_\beta = \lambda\delta_{\alpha\beta}n_\alpha^* n_\beta$. $I_{\beta\alpha}n_\beta^* n_\alpha = \lambda\delta_{\beta\alpha}n_\beta^* n_\alpha$

$\Rightarrow I_{\alpha\beta}(n_\alpha^* n_\beta + n_\beta^* n_\alpha) = 2\lambda n_\alpha^* n_\alpha$

$n_\alpha n_\alpha^*$ – вещественно и положительно

$n_\alpha^* n_\beta + n_\beta^* n_\alpha$ – вещественно, $I_{\alpha\beta}$ – вещественны

$\Rightarrow$ все λ тоже вещественны.

Пусть I_3 – корень уравнения $(I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta})n_\beta = 0$

Подставляя, находим $\vec{n}^{(3)}$: $I_{\alpha\beta}n_\beta^{(3)} = I_3 n_\alpha^{(3)}$.

Ось z' системы S' направим вдоль $\vec{n}^{(3)}$. В этой системе $\vec{n}^{(3)} = \{0,0,1\}$, $I_{33} = I_3$, $I_{23} = I_{13} = 0$

Рассмотрим все векторы, перпендикулярные $\vec{n}^{(3)}$. Если $\vec{n} \perp \vec{n}^{(3)}$, то $\hat{I}\vec{n} \perp \vec{n}^{(3)}$

Оператор $\hat{I}$ переводит векторы $\vec{n}$, ортогональные $\vec{n}^{(3)}$, в векторы, ортогональные $\vec{n}^{(3)}$. На множестве таких векторов снова можно поставить двумерную задачу на собственные значения.

Находим собственное значение I_2, вдоль собственного вектора $\vec{n}^{(2)}$ направим ось y'

Аналогично находим собственное значение I_1, вдоль собственного вектора направим жь x

Получим, что всегда можно так указать направления осей системы S', чтобы тензор инерции принял диагональный вид:

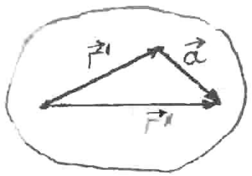
$\|I_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$. Это главные оси инерции, I_1, I_2 и I_3 — главные моменты инерции.

Если O' совпадает с центром масс то I_1, I_2, I_3 называются главными центральными моментами инерции.

Если $I_1 = I_2$ то любой вектор, перпендикулярный $\vec{n}^{(3)}$ является собственным. Твёрдое тело симметрично относительно оси $\vec{n}^{(3)}$.

Если $I_1 = I_2 = I_3$ то твёрдое тело называется шаровым волчком.

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}_m^2 + \frac{1}{2}\left(I_1^{(m)}\omega_1^2 + I_2^{(m)}\omega_2^2 + I_3^{(m)}\omega_3^2\right) - U$$



$$I^{(O'')}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[(\vec{r}_i'')^2 \delta_{\alpha\beta} - x''_{i\alpha} x''_{i\beta}\right] = I^{(O')}_{\alpha\beta} + m(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) + m\left[2(\vec{a}\vec{r}_m')\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha x_{m\beta} - a_\beta x_{m\alpha}\right]$$

$I^{(O'')}_{\alpha\beta} = I^{(m)}_{\alpha\beta} + m(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)$, если $\vec{r}_m' = 0$

(23) Приведите вывод уравнений Эйлера движения твёрдого тела с одной неподвижной точкой. Найдите частоту прецессии свободного симметричного ~~волчка~~ твёрдого тела

Используем законы изменения импульса и момента импульса твёрдого тела.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i, \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$$

$$m\ddot{\vec{r}}_m = \dot{\vec{P}}_m = \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$$

Для твёрдого тела $\vec{r}_m$ может быть вычислено.

$\vec{r}_i = \vec{r}_m + \vec{r}_i'$ и $\vec{v}_i = \vec{v}_m + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i']$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\vec{r}_m + \vec{r}_i') \times (\vec{v}_m + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i'])] = m[\vec{r}_m \times \vec{v}_m] + \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i' \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i']] = \vec{L}_m + \vec{L}'_m$$

$$\dot{\vec{L}}_m = [\vec{r}_m \times \vec{F}_o^{ext}] = [\vec{r}_m \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}]$$

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{L}}_m + \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{L}'] = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\vec{r}_m + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{L}'] = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{ext}]$$

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[(\vec{r}_i')^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i'(\vec{\omega}\vec{r}_i')\right]$$

$$\Rightarrow L'_\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[(\vec{r}_i')^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta\right]\omega_\beta = I_{\alpha\beta}\omega_\beta$$

Получим $L'_x = I_1\omega_x$, $L'_y = I_2\omega_y$, $L'_z = I_3\omega_z$ — для главных осей инерции

$$\boxed{\begin{cases} I_1\dot\omega_x - (I_2 - I_3)\,\omega_y\,\omega_z = M_x \\ I_2\dot\omega_y - (I_3 - I_1)\,\omega_z\,\omega_x = M_y \\ I_3\dot\omega_z - (I_1 - I_2)\,\omega_x\,\omega_y = M_z \end{cases}}$$

Если начало координат находится в неподвижной точке твёрдого тела, то в выражении $\vec L = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec r_i \times \vec v_i]$, $\vec v_i = \vec v_0 + [\vec\omega \times \vec r_i]$, $\vec v_0 = 0$

$\Rightarrow \vec L = \vec L'$ $L_\alpha = I_{\alpha\beta}\,\omega_\beta$.

Уравнения имеют тот же вид, кроме того, что моменты $I_{\alpha\beta}$ вычисляются относительно неподвижной точки. В таком случае уравнения называются уравнениями Эйлера.

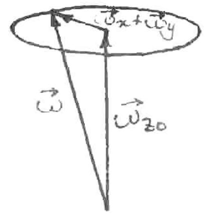
Если тело симметрично относительно оси z', то $I_1 = I_2 \neq I_3$. Тогда

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_x - (I_1 - I_3)\,\omega_y\omega_z = 0 \\ I_1\dot\omega_y - (I_3 - I_1)\,\omega_x\omega_z = 0 \\ I_3\dot\omega_z = 0 \end{cases}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} = \mathrm{const}$$

$$\begin{cases} \dot\omega_x = -\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_{0z}\,\omega_y \\ \dot\omega_y = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_{0z}\,\omega_x \end{cases} \Bigg|\cdot i$$

Отсюда $\frac{d}{dt}(\omega_x + i\omega_y) = \Omega i(\omega_x + i\omega_y)$



$\Rightarrow \omega_x + i\omega_y = Ae^{i\Omega t}$ $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_{z0}$

При этом $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \mathrm{const}$

Ω – частота прецессии

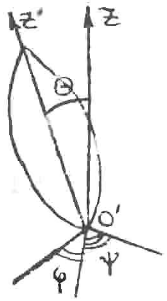
Для земного шара $\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx \frac{1}{300}$

ω_{z0} – угловая скорость суточного вращения Земли

$\Omega = \frac{\omega_{z0}}{300}$, период прецессии земного шара около 300 дней.

На самом деле период прецессии земного шара 429 дней, радиус ~ 5 м

24 Исследуйте движение тяжёлого симметричного волчка с одной неподвижной точкой



Начало системы отсчёта S' совместим с неподвижной точкой. При этом единственная отличная от нуля координата центра масс $z'_m = l$

Главные моменты инерции $I_1 = I_2$ и I_3.

Ориентацию осей симметрии можно задать углами Эйлера.

$\dot\psi$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси симметрии

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}_0^{\,2} + m(\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_m]) + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta - U$$

$$v_0 = 0 \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{2} I_1(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 - mgl\cos\theta,$$

где
$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta\cos\psi \\ \omega_{y'} = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi \\ \omega_{z'} = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} I_1(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2} I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\theta$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{\partial L}{\partial\psi} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta}$$

$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial\psi} = 0$ $\Rightarrow$ координаты φ и ψ — циклические

Соответствующие им обобщённые импульсы

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = const$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = const$$

L не зависит явным образом от t и отсутствуют диссипативные силы, поэтому сохраняется полная энергия волчка:

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 + mgl\cos\theta = const$$

$$p_\psi = I_3\omega_{z'} = const \Rightarrow \omega_{z'} = const$$

Сохраняется часть обобщённой энергии

$$\tilde{E} = E - \frac{I_3}{2}\omega_{z'}^2 = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + mgl\cos\theta = const.$$

Получили три интеграла движения:

$$p_\varphi = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta \quad \text{или} \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

$$\frac{2\tilde{E}}{I_1} = \dot\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{I_1^2\sin^2\theta} + \frac{2mgl\cos\theta}{I_1}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 = \frac{2\tilde{E}}{I_1}\sin^2\theta - \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{I_1^2} - \frac{2mgl}{I_1}\cos\theta\sin^2\theta$$

Положим $\cos\theta = \xi$, тогда $-\sin\theta\cdot\dot\theta = \dot\xi$

$$\Rightarrow \dot\xi^2 = \frac{2\tilde{E}}{I_1}(1-\xi^2) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\xi)^2}{I_1^2} - \frac{2mgl}{I_1}\xi(1-\xi^2)$$

$$\dot\xi^2 = (1-\xi^2)\left(\frac{2\tilde{E}}{I_1} - \frac{2mgl}{I_1}\xi\right) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\xi)^2}{I_1^2} = \varkappa(\xi)$$

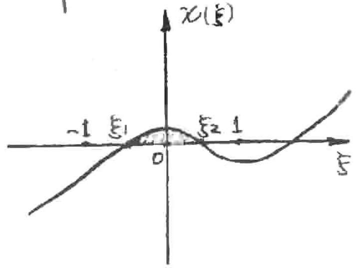
$$t = \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \left[(1-\xi^2)\left(\frac{2\tilde{E}}{I_1} - \frac{2mgl}{I_1}\xi\right) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\xi)^2}{I_1^2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

Отсюда находим $\Theta = \Theta(t)$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\Theta}{I_1 \sin^2\Theta}, \quad \dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot\varphi\cos\Theta.$$

Интеграл $\Theta(t)$ вычисляется только через эллиптические функции.

При больших ξ $\quad \chi(\xi) \to \frac{2mgl}{I_1}\xi^3$



Она положительна при $\xi>0$ и отрицательна при $\xi<0$. В точках $\xi=\pm1$ $\chi(\xi)<0$.

Один из корней при $\xi>0$ является нефизическим

$\chi(\xi)$ имеет два корня. Область допустимого движения $\xi_1 \le \xi \le \xi_2$, при этом $\Theta_1 \le \Theta \le \Theta_2$

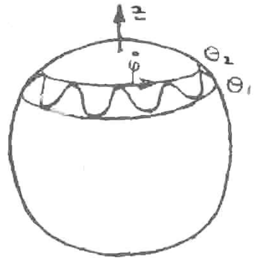
Конец вектора $\vec{k}'$ системы S' называется апексом. Представление о движении можно получить по траектории, описываемой апексом. Это траектория на единичной сфере — сферическая кривая.

$\dot\varphi$ называется угловой скоростью прецессии.

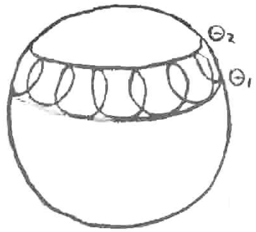
$\dot\psi$ называется угловой скоростью нутации

Волчок прецессирует и нутирует одновременно.

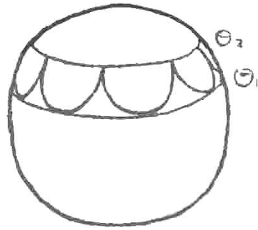
$\frac{p_\varphi}{p_\psi} > \cos\Theta_2$



Если $\cos\Theta_1 < \frac{p_\varphi}{p_\psi} < \cos\Theta_2$, то $\dot\varphi$ меняет знак



Если $\frac{p_\varphi}{p_\psi} = \cos\Theta_1$ или $\frac{p_\varphi}{p_\psi} = \cos\Theta_2$, то $\dot\varphi = 0$ на одной из граничных окружностей



25 Найдите общее решение уравнения движения консервативной системы в малой окрестности положения равновесия. При каких условиях система будет всё время оставаться в этой окрестности?

Консервативная система — это такая система, функция Лагранжа которой имеет вид: $L=\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_1,\dots q_s)\dot q_\alpha \dot q_\beta - U(q_1\dots q_s)$, и диссипативными силами в которой можно пренебречь

Пусть существует положение равновесия $\{q_\alpha^{eq}\}$, $\frac{\partial U}{\partial q_1}\Big|_{q_\alpha^{eq}} = \dots = \frac{\partial U}{\partial q_s}\Big|_{q_\alpha^{eq}} = 0$, $\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{q_\alpha^{eq}}}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\Big|_{q_\alpha^{eq}} = \dots = \frac{\partial^2 U}{\partial q_s^2}\Big|_{q_\alpha^{eq}} \neq 0$$

Найдём закон движения для случая, когда отклонения $\xi_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^{eq}$ и скорости $\dot\xi_\alpha = \dot q_\alpha$ малы. Это возможно всегда на достаточно малых временах t. На таком интервале времени потенциальную энергию U можно заменить её разложением в ряд Тейлора:

$$U(q_1,\dots,q_s) = U(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq}) + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq})\xi_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}U(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq})\xi_\alpha\xi_\beta + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta \partial q_\gamma}(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq})\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma + \dots$$

В функцию Лагранжа можно ввести только квадратичное по ξ слагаемое.

С той же степенью точности

$$\dot q_\alpha \dot q_\beta a_{\alpha\beta}(q_1,\dots,q_s) = a_{\alpha\beta}(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq})\dot\xi_\alpha\dot\xi_\beta.$$

$$L \approx \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha\dot\xi_\beta - \frac{1}{2} U_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta,$$ где

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}(q_1^{eq},\dots,q_s^{eq}).$$

$$U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{eq} \ *$$

Уравнения Лагранжа в переменных ξ_α приводят к уравнениям эволюции малых возмущений: $a_{\alpha\beta}\ddot\xi_\beta + u_{\alpha\beta}\xi_\beta = 0$, $\alpha = \overline{1,s}$ $\beta = \overline{1,s}$

Решение системы удобно искать в виде вещественной части комплексного набора функций $\xi_\alpha = A_\alpha e^{-i\omega t}$. Такая подстановка сводит линейные дифференциальные уравнения к алгебраическим для комплексных амплитуд A_α

$$(u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta})A_\beta = 0$$

Система алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения, если det

$\det \|u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}\| = 0.$

Это даёт нам характеристическое уравнение для определения собственных частот системы.

Все корни ω_μ^2 являются вещественными

$(u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}) A_\alpha^* A_\beta = 0$

$(u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}) A_\alpha A_\beta^* = 0$

$\Rightarrow u_{\alpha\beta}(A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*) = \omega^2 a_{\alpha\beta}(A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*)$

ω^2 – вещественна

Предположим, что все ω_μ^2 различны (невырожденный случай) и рассмотрим один из таких корней. Получим уравнение для комплексной амплитуды, соответствующей этому корню:

$(u_{\alpha\beta} - \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}) A_\beta^{(\mu)} = 0$

Определитель системы равен нулю. Значит не все уравнения являются независимыми. Только одно уравнение (s-е) является следствием остальных.

$\Delta_s^{(\mu)} = \det \|u_{\alpha\beta} - \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\| \neq 0, \quad \alpha,\beta = \overline{1,s-1}$

Тогда $(u_{\alpha\beta} - \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}) \dfrac{A_\beta^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = -u_{\alpha s} - \omega_\mu^2 a_{\alpha s}, \quad \alpha = \overline{1,s-1}$

Имеем неоднородную СЛАУ с определителем, отличным от нуля. Мы можем разрешить её по формулам Крамера.

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = -\frac{1}{\Delta_s^{(\mu)}} \begin{vmatrix} u_{1s}-\omega_\mu^2 a_{1s} & u_{12}-\omega_\mu^2 a_{12} & \dots & u_{1,s-1}-\omega_\mu^2 a_{1,s-1} \\ u_{2s}-\omega_\mu^2 a_{2s} & u_{22}-\omega_\mu^2 a_{22} & \dots & u_{2,s-1}-\omega_\mu^2 a_{2,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{s-1,s}-\omega_\mu^2 a_{s-1,s} & u_{s-1,2}-\omega_\mu^2 a_{s-1,2} & \dots & u_{s-1,s-1}-\omega_\mu^2 a_{s-1,s-1} \end{vmatrix}$$

В определителе первый столбец можно переставить так, чтобы он стал последним. Он будет равен минору характеристического определителя $\Delta_1^{(\mu)}$ (вычёркивание 1-го столбца и s-й строки).

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = \frac{\Delta_1^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}} \Rightarrow \frac{A_1^{(\mu)}}{\Delta_1^{(\mu)}} = \frac{A_2^{(\mu)}}{\Delta_2^{(\mu)}} = \dots = \frac{A_s^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}} \equiv c_\mu$$

c_μ – комплексный коэффициент.

Все амплитуды $A_\alpha^{(\mu)} = c_\mu \Delta_\alpha^{(\mu)}$

Мы можем также записать решение, соответствующее корню ω_μ^2 в виде

$Re(\xi_\alpha^{(\mu)}) = Re(A_\alpha^{(\mu)} e^{-i\omega_\mu t}) = \Delta_\alpha^{(\mu)} Re(c_\mu e^{-i\omega_\mu t})$

Общее решение системы уравнений движения – это суперпозиция решений, соответствующих всем корням характеристическою уравнения

$$\mathrm{Re}\,\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^{s} \mathrm{Re}(\Delta_\alpha^{(\mu)} c_\mu e^{-i\omega_\mu t})$$

Из найденного решения непосредственно вид но, что система будет находиться вблизи положения равновесия при любом, а не при только малом t, в том и только том случае, если все $\omega_\mu^2 > 0$. В этом случае система представляет собой суперпозицию s гармонических колебаний. Если хотя бы одно $\omega_\mu^2 < 0$, то решение будет содержать экспоненциально нарастающие слагаемые и будет описывать эволюцию малых возмущений лишь на малых малых временах t, пока будет ~~оно~~ оставаться справедливым использованное разложение функции Лагранжа. В этом случае положение равновесия является неустойчивым.

Подставим найденные значения амплитуд: $u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$.

Квадратичная форма $a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$ – положительно определённая (она равна $2T$). Если при этом будет положительно определена и $u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$, то все $\omega_\mu^2 > 0$ (например, если все $u_{\alpha\beta} > 0$). Потенциальная энергия в этом случае имеет изолированный минимум

(26) Преобразуйте функцию и уравнение Лагранжа системы с многими степенями свободы в приближении малых колебаний к нормальным координатам.

Воспользуемся неоднозначностью выбора обобщённых координат и введём вместо переменных ξ_α новые обобщённые координаты по формулам $\xi_\alpha = \sum_\mu \Delta_\alpha^{(\mu)}\Theta_\mu \equiv \Delta_\alpha^\mu \Theta_\mu$

При этом кинетическая энергия

$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha\dot\xi_\beta = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\Delta^\mu_\alpha\Delta^\nu_\beta\dot\Theta_\mu\dot\Theta_\nu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}\dot\Theta_\mu\dot\Theta_\nu$, где

$\varepsilon_{\mu\nu} = a_{\alpha\beta}\Delta^\mu_\alpha\Delta^\nu_\beta$, матрица $\|\varepsilon_{\mu\nu}\|$ диагональна.

$u_{\alpha\beta}\Delta^{(\mu)}_\beta = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\Delta^{(\mu)}_\beta$ — из системы уравнений.

$u_{\alpha\beta}\Delta^{(\nu)}_\alpha\Delta^{(\mu)}_\beta = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\Delta^{(\nu)}_\alpha\Delta^{(\mu)}_\beta$

Поменяем местами α и β, μ и ν. Поскольку $u_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ симметричны, то

$u_{\alpha\beta}\Delta^{(\nu)}_\alpha\Delta^{(\mu)}_\beta = \omega_\nu^2 a_{\alpha\beta}\Delta^{(\nu)}_\alpha\Delta^{(\mu)}_\beta$

Вычитая, получим $(\omega_\mu^2-\omega_\nu^2)\varepsilon_{\mu\nu}=0$

$\Rightarrow \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}$ (без суммирования по μ).

В новых переменных $E_{кин} = \sum_{\mu\nu}\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2}\dot\Theta_\mu\dot\Theta_\nu =$

$= \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_\mu\dot\Theta_\mu^2$

$U = \frac{1}{2} u_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta = \frac{1}{2} u_{\alpha\beta}\Delta^{(\mu)}_\alpha\Delta^{(\nu)}_\beta\Theta_\mu\Theta_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}\omega_\mu^2\Theta_\mu\Theta_\nu =$

$= \frac{1}{2}\sum_\mu\varepsilon_\mu\omega_\mu^2\Theta_\mu^2$

Функция Лагранжа принимает вид:

$L = \sum_\mu \frac{\varepsilon_\mu}{2}(\dot\Theta_\mu^2 - \omega_\mu^2\Theta_\mu^2)$

Уравнение Лагранжа: $\ddot\Theta_\mu + \omega_\mu^2\Theta_\mu = 0$

Получаем s независимых уравнений, каждое из которых представляет собой уравнение гармонического осциллятора.

$\Theta_\mu = a_\mu\cos(\omega_\mu t+\varphi_\mu)$

Если характеристическое уравнение имеет кратные корни ω_μ^2, то формулы $A_\alpha^{(\mu)} = c_\mu\Delta_\alpha^{(\mu)}$ не имеют места. Но решение системы можно по-прежнему искать в виде $\xi_\alpha = A_\alpha e^{-i\omega_\mu t}$. Можно также искусственно изменить $u_{\alpha\beta}$ или $a_{\alpha\beta}$ на малые величины так, чтобы кратные корни исчезли, а затем перейти к пределу. Кратным корням будут соответствовать нормальные колебания на одинаковых частотах, но с разными амплитудами и фазами.

(27) В приближении линейных колебаний найдите общее решение уравнений движения системы частиц с s степенями свободы при наличии диссипативных сил.

Динамика диссипативной системы определяется характером функции Лагранжа и характером диссипативных сил. Диссипативные силы, пропорциональные скоростям частиц, могут быть записаны с помощью диссипативной функции Рэлея:

$D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta}(q_1,\dots,q_s)\dot q_\alpha \dot q_\beta$, $d_{\alpha\beta} \geq 0$

В приближении линейных колебаний

$L = \frac12 a_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha\dot\xi_\beta - \frac12 u_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$, $D = \frac12 d_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha\dot\xi_\beta$, где

$d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} = d_{\alpha\beta}(q_1,\dots,q_s)\big|_{q_0}$

Уравнение Лагранжа с диссипативными силами такого ~~вида~~ типа записывается в виде: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\xi_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = -\frac{\partial D}{\partial\dot\xi_\alpha}$

Получаем систему уравнений:

$a_{\alpha\beta}\ddot\xi_\beta + d_{\alpha\beta}\dot\xi_\beta + u_{\alpha\beta}\xi_\beta = 0$, $\alpha,\beta = \overline{1,s}$

Линейным преобразованием обобщённых координат эта система не сводится к системе независимых уравнений осцилляторов.

Ищем решение в виде $\xi_\alpha = A_\alpha e^{-i\omega t}$ (выделяя действительную часть)

Тогда получаем $(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta})A_\beta = 0$.

Равенство нулю определителя системы $\Delta = \det\|-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}\| = 0$ даёт характеристическое уравнение для частот.

Так как все $a_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ и $u_{\alpha\beta}$ вещественны, то корни этого уравнения $\lambda = -i\omega$ либо вещественные (ω мнимые), либо ~~комп~~ попарно комплексно сопряжённые. Мнимые части всех комплексных ω отрицательны.

Из характеристического уравнения следует, что $\cancel{(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta})A_\alpha = 0}$

$(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta})(A^*_\alpha A_\beta + A_\alpha A^*_\beta) = 0$ — квадратное уравнение относительно корней $\lambda = -i\omega$

$\Rightarrow$ по формулам Виета

$\cancel{i\omega + i\omega^*}$ $\lambda_1+\lambda_2 = -\frac{d_{\alpha\beta}(A^*_\alpha A_\beta + A_\alpha A^*_\beta)}{a_{\mu\nu}(A^*_\mu A_\nu + A_\mu A^*_\nu)} = -i\omega + i\omega^*$, т.к. $\lambda_1^* = \lambda_2$

Числитель неотрицателен, а знаменатель положителен. Поэтому ~~или~~ правая часть отрицательна. Если $\omega = \nu - \gamma i$, то $\gamma > 0$.
Предположим, что все ω_μ нам известны. Подставляя каждый корень в уравнение, найдём $A_\alpha^-(\omega_\mu)$, а подставляя ω_μ^*, найдём $A_\alpha^*(\omega_\mu^*)$.
Используя формулы Крамера, нетрудно показать, что A_α^- и A_α^+ пропорциональны минорам характеристического определителя.

$$A_\alpha^-(\omega_\mu) = C_\mu^- \Delta_\alpha(\omega_\mu), \quad A_\alpha^+(\omega_\mu^*) = C_\mu^* \Delta_\alpha(\omega_\mu^*)$$

Общее решение уравнений движения

$$\xi_\alpha = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\mu=1}^{2s} \Delta_\alpha(\omega_\mu) C_\mu^- e^{-i\omega_\mu t} + \Delta_\alpha(\omega_\mu^*) C_\mu^* e^{i\omega_\mu^* t}\right\}$$

Колебаниям соответствуют только ~~мним~~ комплексно сопряжённые корни, причём амплитуда колебаний убывает как $e^{-\gamma_\mu t}$, $\gamma_\mu > 0$ – ~~зат~~ декремент затухания. Если ω_μ чисто мнимые, то имеет место апериодическое затухание.

(28) Найдите общее решение для вынужденных колебаний системы с s степенями свободы под действием периодической внешней силы, а также диссипативных сил.

Рассмотрим ~~кон~~ систему, обладающую положением устойчивого равновесия:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right|_{eq} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right|_{eq} > 0$$

Пусть на систему действует внешнее поле $U^e(q_1, \ldots, q_s, t)$, являющееся потенциальным, и диссипативные силы, заданные функцией $D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta}(q_1 \ldots q_s)\dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta$, $d_{\alpha\beta}(q_1 \ldots q_s) \geq 0$.

~~В приближении линейных~~

Тогда $L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_1 \ldots q_s)\dot q_\alpha \dot q_\beta - U(q_1 \ldots q_s) - U^e(q_1 \ldots q_s, t)$.

В приближении линейных колебаний

$\cancel{L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot q_\alpha \dot q_\beta}$ $\quad L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta}\xi_\alpha \xi_\beta + Q_\alpha \xi_\alpha$,

$D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta}\dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta$, где $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q_1 \ldots q_s)|_{eq}$,

$u_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right|_{eq}$, $\quad d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}(q_1 \ldots q_s)|_{eq}$,

$Q_\alpha = -\left.\frac{\partial U^e}{\partial q_\alpha}\right|_{eq} = Q_\alpha(t)$ – обобщённая сила, взятая в положении равновесия.

Такое разложение имеет смысл в только в том случае, если внешняя сила является достаточно слабой, чтобы не вызвать слишком больших отклонений от положения равновесия.

Уравнение Лагранжа имеют вид:

$$a_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta + d_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\beta + u_{\alpha\beta}\xi_\beta = Q_\alpha(t)$$

Линейным преобразованием обобщённых координат ξ_α систему s уравнений нельзя свести к системе независимых гармонических осцилляторов.

Общее решение системы — суперпозиция общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Найдём частное решение. Предположим, что все $Q_\alpha(t)$ являются периодическими функциями времени с некоторым периодом T.

Тогда $Q_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{\alpha n} e^{-in\Omega t}$, где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$Q_{\alpha n} = \frac{2}{T}\int_0^T Q_\alpha(t)\, e^{in\Omega t}\, dt$$

Постоянная составляющая $(n=0)$ может быть исключена путём сдвига ξ_β на ~~...~~ постоянную величину. Будем считать, что это проделано.

Частное решение системы ищем в виде ряда Фурье: $\xi_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n} e^{-i\Omega n t}$

Отсюда $(-n^2\Omega^2 a_{\alpha\beta} - in\Omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}) A_{\alpha n} = Q_{\alpha n}$

$$A_{\alpha n} = \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)}$$

, где $\Delta(n\Omega) = \det\| -n^2\Omega^2 a_{\alpha\beta} - in\Omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}\|$, $\Delta_\alpha(n\Omega)$ — определитель, полученный заменой столбца α определителя $\Delta(n\Omega)$ на столбец $Q_{\alpha n}$.

Тогда $\xi_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n} e^{-in\Omega t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)} e^{-in\Omega t} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)\Delta^*(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)\Delta^*(n\Omega)} e^{-in\Omega t}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 a_{\alpha\beta} + \lambda d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta})$$

Δ — полином степени $2s$, поэтому

$$\Delta(\lambda) = \text{const}\cdot(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_{2s})$$

& если $\lambda = -i\omega$, то

$$\Delta(\omega) = \text{const}\,(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\dots(\omega-\omega_{2s}) = \text{const}\cdot\prod_{k=1}^{2s}(\omega-\omega_k)$$

$$\Delta(n\Omega) = \text{const}\cdot\prod_{\mu=1}^{2s}(n\Omega-\omega_\mu)$$

Поэтому $\Delta(n\Omega)\Delta^*(n\Omega) = (\text{const})(\text{const})^*\prod\limits_{\mu=1}^{2s}(n\Omega-\omega_\mu)\cdot$

$\cdot(n\Omega-\omega_\mu^*) = (\text{const})\cdot(\text{const})^*\prod\limits_{\mu=1}^{2s}[(n\Omega-\nu_\mu)^2+\gamma_\mu^2]$

Если $\gamma_\mu \ll \nu_\mu$, то наибольшее значение в сумме будет иметь амплитуда, соответствующая $\nu_\mu = n\Omega$ – резонанс n-го порядка.

29. Получите общее решение задачи о малых колебаниях линейной симметричной трёхатомной молекулы

Квадратичная форма, полученная путём разложения потенциальной энергии, может не быть положительно определённой. В этом случае в выражении для частот

$u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$ левая часть может обращаться в ноль при $\Delta_\alpha^{(\mu)} \neq 0 \Rightarrow \omega_\mu^2 = 0$.

Из уравнений для нормальных колебаний следует, что $\ddot{\Theta}_\mu = 0$, $\Theta_\mu(t) = \dot{\Theta}_\mu^0 t + \Theta_\mu^0$, что соответствует трансляции или вращению системы. Наряду с колебательными степенями свободы система может иметь степени свободы, соответствующие поступательному и вращательному движению системы. Такое чаще всего случается при движении молекул.

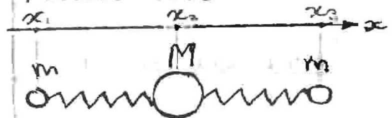
Вращательные и поступательные степени свободы можно исключить, если перейти в систему центра масс (суммарные импульс и момент импульса равны нулю). Соотношения, при помощи которых проводится такое исключение, можно получить, если обозначить:

$$\vec r_i = \vec r_{i0} + \vec\xi_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i = M\vec r_{i0} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec\xi_i$$

В системе центра масс $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec\xi_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i[\vec r_i \times \vec v_i] = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec r_{i0} \times \dot{\vec\xi}_i] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i[\vec r_{i0} \times \vec\xi_i]$$

Полагая $\sum_{i=1}^{N} m_i[\vec r_{0i} \times \vec\xi_i] = 0$ получаем вторую группу уравнений для нахождения нужной нам системы координат.



$$L = \frac{m}{2}(\dot x_1^2 + \dot x_3^2) + \frac{M}{2}\dot x_2^2 - U_1(x_2 - x_1) - U_1(x_3 - x_2) - U_2(x_3 - x_1)$$

Если $k_1 = \left.\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right|_{x=0}$, $k_2 = \left.\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}\right|_{x=0}$,

то $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m}$, $\omega_3 = \frac{k_1(m+M)}{Mm}$

30. Методом Крылова–Боголюбова получите формулы первого приближения для асимптотических решений уравнений движения систем, близких к линейным.

Основа этого метода — это представление о том, что линейные колебания системы — это её „основное" состояние, а её нелинейные колебания — это возмущение основного состояния.

Уравнение колебаний $\ddot\xi + \omega^2\xi = \varepsilon Q(\xi, \dot\xi)$

При $\varepsilon = 0$ колебание являются гармоническими с постоянной амплитудой и равномерно вращающейся фазой:

$$\xi = A\cos\psi, \quad \dot A = 0, \quad \dot\psi = \omega_0$$

При появлении нелинейной силы в уравнении колебания не будут гармоническими — появятся кратные гармоники, частота станет зависящей от амплитуды а сама амплитуда может медленно изменяться со временем.

$$\xi = A\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\xi_2(a,\psi) + \dots$$

$$\dot\psi = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(A) + \varepsilon^2\omega_2(A) + \dots$$

$$\dot a = 0 + \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots$$

Будем предполагать, что a — амплитуда основной гармоники колебаний.

Это означает, что $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \xi_s(a,\psi)\begin{pmatrix}\sin\psi\\ \cos\psi\end{pmatrix} d\psi = 0$

Т.е. $\xi_s(a,\psi)$ — периодические функции ψ.

$f_s(a)$ — не зависят от ψ. Если бы зависимость была, а $\psi \sim \omega_0 t$, то для консервативной системы было бы $\dot a \neq 0$, что неверно. Из теории одномерного движения период колебаний

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$ — не зависит от времени.

Решаем задачу:

$$\ddot\xi + \omega_0^2\xi = \varepsilon Q(\xi,\dot\xi)$$

$$\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \dots$$

$$\dot\psi = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \dots$$

$$\dot a = \varepsilon f_1(a) + \dots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \xi_n(a,\psi)\begin{Bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{Bmatrix} d\psi = 0$$

ξ_n не содержит функций $\cos\psi$ и $\sin\psi$

Нужно найти вид функций и решение порядка ε

$$\dot\xi = -\dot\psi a\sin\psi + \dot a\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial\xi_1}{\partial a}\dot a + \varepsilon\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\dot\psi$$

$$\dot\xi = -a\omega_0\sin\psi - a\varepsilon\omega_1(a)\sin\psi + \varepsilon f_1(a)\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\omega_0$$

$$\ddot\xi = -a\omega_0^2\cos\psi - a\omega_0\varepsilon\omega_1(a)\cos\psi - \omega_0\varepsilon f_1(a)\sin\psi -$$
$$- a\varepsilon\omega_0\omega_1(a)\cos\psi - \varepsilon\omega_0 f_1(a)\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi}\omega_0^2$$

$$\ddot\xi = -a\omega_0^2\cos\psi - 2a\varepsilon\omega_0\omega_1(a)\cos\psi - 2\varepsilon\omega_0 f_1(a)\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi}\omega_0^2$$

$$\ddot\xi + \omega_0^2\xi = \varepsilon\omega_0^2\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2} + \xi_1\right) - 2a\omega_0\varepsilon\omega_1(a)\cos\psi - 2\omega_0\varepsilon f_1(a)\sin\psi$$

$$\varepsilon Q(\xi,\dot\xi) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) + \varepsilon^2 Q'_\xi(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)$$
$$\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2 Q'_{\dot\xi}(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)(\cancel{-a\omega_0\sin\psi} - a\omega_1(a)\sin\psi + f_1(a)\cos\psi + \frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\omega_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \omega_0^2\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2} + \xi_1\right) = 2a\omega_0\omega_1(a)\cos\psi + 2\omega_0 f_1(a)\sin\psi +$$
$$+ Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)$$

Правая часть является периодической функцией ψ. Решение можно искать в виде ряда Фурье. Разложим известную нам функцию Q в ряд Фурье:

$$Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n(a)\sin n\psi + \beta_n(a)\cos n\psi\right]$$

$$\xi_1(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma_n(a)\sin n\psi + \nu_n(a)\cos n\psi\right] =$$
$$= \nu_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\gamma_n(a)\sin n\psi + \nu_n(a)\cos n\psi\right]$$

Подставим ряды в уравнение:

$$\omega_0^2\left\{v_0(a)+\sum_{n=2}^{\infty}(1-n^2)\left[\gamma_n(a)\sin n\psi+v_n(a)\cos n\psi\right]\right\}=$$

$$=2a\omega_0\omega_1(a)\cos\psi+2\omega_0 f_1(a)\sin\psi+\beta_0(a)+\alpha_1(a)\sin\psi+$$

$$+\beta_1(a)\cos\psi+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\alpha_n(a)\sin n\psi+\beta_n(a)\cos n\psi\right]$$

Функции $\alpha_n(a)$ и $\beta_n(a)$ известны.

$$\Rightarrow v_0(a)=\frac{\beta_0(a)}{\omega_0^2}\quad;\ n=0$$

$$\gamma_n(a)=\frac{\alpha_n(a)}{\omega_0^2(1-n^2)}\qquad v_n(a)=\frac{\beta_n(a)}{\omega_0^2(1-n^2)}\quad,\ n=2,3,\dots$$

Отсюда $\xi=a\cos\psi+\frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2}+\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left\{\alpha_n(a)\sin n\psi+\beta_n(a)\cos n\psi\right\}$

Если $n=1$, то

$$\begin{cases}2a\omega_0\omega_1(a)+\beta_1(a)=0\\ 2\omega_0 f_1(a)+\alpha_1(a)=0\end{cases}$$

$$\omega_1(a)=-\frac{\beta_1(a)}{2a\omega_0}\quad,\quad f_1(a)=-\frac{\alpha_1(a)}{2\omega_0}$$

$$\dot a=\varepsilon f_1(a)+\dots\quad,\quad\dot\psi=\omega_0+\varepsilon\omega_1(a)+\dots$$

$$\Rightarrow\dot a=-\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}\quad,\quad\dot\psi=\omega_0-\frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}$$

Эти уравнения являются уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

Отсюда находим $a=a(t)$, $\psi=\psi(t)$

a и ψ могут получать заметные приращения за счёт нелинейной силы

$$\Delta a=a(t)-a(0)=-\frac{\varepsilon t}{2\omega_0}\overline{\alpha_1(a)}$$

$$\Delta\psi=\psi(t)-\omega_0 t-\psi(0)=\frac{\varepsilon t}{2\omega_0}\cdot\frac{\overline{\beta_1(a)}}{a}$$

$t\sim\frac{1}{\varepsilon}$ — достаточно большое, если ε мало. При получении формул мы опустили слагаемые порядка ε^2, а также погрешность в значениях производных приводит к погрешности в значениях самих функций a и ψ порядка $\varepsilon^2 t$, что на временах $t\sim\frac{1}{\varepsilon}$ даёт погрешности в значениях амплитуды и фазы порядка ε. Поэтому сохранять все слагаемые, содержащие ε, не имеет смысла. Окончательно первое приближение метода Крылова-Боголюбова для систем, близких к линейным, определяется формулами:

$$\xi=a\cos\psi\quad,\quad\dot a=-\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}\quad,\quad\dot\psi=\omega_0-\frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon\alpha_1(a)\\ \varepsilon\beta_1(a)\end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon Q(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\begin{Bmatrix}\sin\psi\\ \cos\psi\end{Bmatrix}d\psi$$

Если система консервативная, т.е.

$\varepsilon Q=\varepsilon Q(\xi)=\varepsilon Q(a\cos\psi)$, то

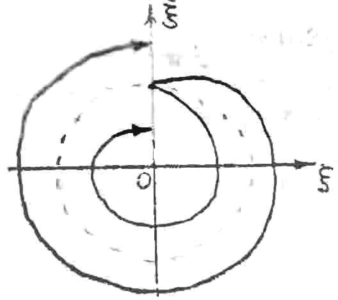
$$\varepsilon\alpha_1(a)=0\quad,\quad\dot a=0\quad,\quad a=a_0=const$$

$$\psi=\omega_0 t-\frac{\varepsilon\beta_1(a_0)}{2\omega_0 a_0}t$$

$$\xi=a_0\cos\left[\left(\omega_0-\frac{\varepsilon\beta_1(a_0)}{2a_0\omega_0}\right)t+\psi_0\right]$$

(31) Исследуйте автоколебания на примере маятника с вращающейся муфтой подвеса при наличии сухого трения (маятник Фроуда).

Существуют механические системы, когда для поддержания колебаний не требуется периодической внешней силы. При убывании амплитуды в таких системах энергия увеличивается за счёт внешних сил, а при возрастании амплитуды возрастает диссипация энергии. Стационарному режиму автоколебаний соответствует точный баланс за период колебаний между этими двумя процессами.

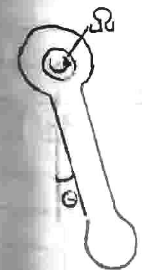


Автоколебания удобно изображать в фазовом пространстве (фазовая плоскость $(\xi, \dot\xi)$). Пусть $\xi(0)=0$, $\dot\xi(0)>0$.

Поскольку в режиме колебаний $\dot\xi$ убывает с ростом ξ, то изображающая точка будет двигаться по часовой стрелке и окажется в точке $(\xi(T)=0,\ \dot\xi(T))$. Если начальное состояние принадлежит области, в которой преобладает диссипация энергии, то $\dot\xi(T)<\dot\xi(0)$.

Если, наоборот, начальное состояние принадлежит области, в которой энергия возрастает, то $\dot\xi(T)>\dot\xi(0)$. Границей между двумя такими областями служит предельный цикл (фазовая кривая автоколебаний). Для многомерных систем это поверхность — аттрактор.

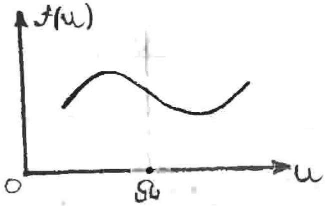
Особая точка (фокус), с которой система уходит на автоколебательный режим, соответствует положению неустойчивого равновесия.



Маятник Фроуда: между валом и муфтой существуют силы сухого трения

$$I\ddot\theta = -mgl\sin\theta - l\dot\theta\lambda + f(\Omega-\dot\theta)$$

При некоторых значениях Ω возможно



положение равновесия

$\sin\theta_{равн} = \frac{f(\Omega)}{mgl}$, $\dot\theta=0,\ \ddot\theta=0$

Отсюда $f(\Omega) < mgl$.

Пусть $\xi = \theta - \theta_{равн}$, $\dot\xi = \dot\theta$

Разложим уравнение в ряд:

$$\ddot\xi = -\frac{mgl}{I}\sin\theta_{равн} - \frac{mgl}{I}\cos\theta_{равн}\,\xi + \frac{mgl}{2I}\sin\theta_{равн}\,\xi^2 + \frac{mgl}{6I}\cos\theta_{равн}\,\xi^3 - \frac{\lambda l\dot\xi}{I} + \frac{f(\Omega)}{I} - \frac{f'(\Omega)}{I}\dot\xi + \frac{f''(\Omega)}{2I}\dot\xi^2 - \frac{f'''(\Omega)}{6I}\dot\xi^3$$

Предположим, что мы находимся в окрестности точки перегиба: $f''(\Omega)=0$.

Введем обозначения: $\frac{mgl}{I}\cos\theta_{равн} = \omega_0^2$,

$-\frac{\lambda l}{I} - \frac{f'(\Omega)}{I} = \varkappa_1$; $\frac{f'''(\Omega)}{6I} = \varkappa_2$.

$$\ddot\xi + \omega_0^2\xi = \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_{равн}\,\xi^2 + \frac{\omega_0^2}{6}\xi^3 + \varkappa_1\dot\xi - \varkappa_2\dot\xi^3$$

Для метода Крылова-Боголюбова:

$$\ddot\xi + \omega_0^2\xi = \varepsilon\Theta(\xi,\dot\xi)$$

$$\varepsilon\Theta(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_{равн}\,a^2\cos^2\psi + \frac{\omega_0^2}{6}a^3\cos^3\psi - a\omega_0\varkappa_1\sin\psi + \varkappa_2 a^3\omega_0^3\overbrace{\left(\frac34\sin\psi - \frac14\sin3\psi\right)}^{\sin^3\psi} =$$

$\cancel{\dot a = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}}$, $\cancel{\dot\psi = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}}$

$\cancel{\dot a = -\frac{1}{2\omega_0}}\{$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_{равн}\,a^2\left(\frac12 + \frac12\cos2\psi\right) + \frac{\omega_0^2}{6}a^3\left(\frac34\cos\psi + \frac14\cos3\psi\right) -$$

$$- a\omega_0\varkappa_1\sin\psi + \varkappa_2 a^3\omega_0^3\left(\frac34\sin\psi - \frac14\sin3\psi\right)$$

$\dot a = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}$, $\dot\psi = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}$

$$\dot a = -\frac{1}{2\omega_0}\left(-a\omega_0\varkappa_1 - \frac34 a^3\varkappa_2\omega_0^3\right) = \frac{a\varkappa_1}{2}\left(1 - \frac34\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}a^2\omega_0^2\right)$$

$$\dot\psi = \omega_0 - \frac{a^2\omega_0^2}{16} = \omega_0\left(1 - \frac{a^2\omega_0}{16}\right)$$

Из формулы видно, что возможен режим колебаний с постоянной амплитудой

$$a_0^2 = \frac43\frac{\varkappa_1}{\omega_0^2\varkappa_2}$$

(32) <u>Получите формулы первого приближения метода Крылова–Боголюбова для нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами. Приведите примеры адиабатических инвариантов.</u>

Рассмотрим механическую систему, у которой параметры меняются мало на интервале времени, равном периоду колебаний системы: $\frac{|\dot{f}T|}{|f|} \ll 1$

Из-за того факта, что функция f меняется медленно по сравнению с другими функциями, вводится „медленное" время $\tau = \varepsilon t$.

Тогда функцию Лагранжа системы можно записать в виде: $L = \frac{1}{2}c(\tau)\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}k(\tau)\xi^2 + \varepsilon\chi(\xi,\tau)$

Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = F(\xi, \dot{\xi})$

$$\frac{d}{dt}\left(c(\tau)\dot{\xi}\right) + k(\tau)\xi = \varepsilon\tilde{Q}(\xi,\dot{\xi},t)$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2(\tau)\xi = \varepsilon Q(\xi,\dot{\xi},t) - \varepsilon\frac{1}{c(\tau)}\frac{\partial c}{\partial \tau}\dot{\xi}, \text{ где}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k(\tau)}{c(\tau)}, \quad \varepsilon Q = \frac{\varepsilon\tilde{Q}}{c(\tau)}$$

Ищем решение методом Крылова–Боголюбова:

$$\xi = a\cos\psi + \cancel{\varepsilon f_1(a,t,\tau)+\ldots} + \varepsilon\xi_1(a,t,\tau) + \ldots$$

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a,\tau) + \ldots$$

$$\dot{\psi} = \omega_0(\tau) + \varepsilon\omega_1(a,\tau) + \ldots$$

$$\Rightarrow \varepsilon\omega_0^2\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2} + \xi_1\right) = 2a\omega_0\varepsilon\omega_1\cos\psi + 2\omega_0\varepsilon f_1\sin\psi +$$
$$+ \varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) + \varepsilon a\frac{d\omega_0}{d\tau}\sin\psi + \frac{\varepsilon}{c}\frac{dc}{d\tau}a\omega_0\sin\psi$$

$$\varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon\alpha_n\sin n\psi + \varepsilon\beta_n\cos n\psi\right)$$

Если $n=1$, то $\begin{cases} 2\omega_0\varepsilon f_1 + \varepsilon\alpha_1 + \frac{\varepsilon a}{c}\frac{d}{d\tau}(\omega c) = 0 \\ 2a\omega_0\varepsilon\omega_1 + \varepsilon\beta_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0} - \frac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\cdot\frac{d}{d\tau}(\omega c) = 0 \\ \dot{\psi} = \omega_0(\tau) - \frac{\varepsilon\beta_1}{2a\omega_0(\tau)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi = a\cos\psi$$

Для таких систем, так же, как и для консервативных, могут быть реализованы физические условия, при которых будет достаточным приближение линейных колебаний. В этом случае в отсутствие диссипативных сил $\varepsilon Q = 0 \Rightarrow \varepsilon\alpha_1 = 0, \varepsilon\beta_1 = 0$.

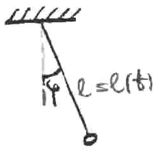
Тогда $\dot{a} = -\frac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\frac{d}{d\tau}(\omega_0 c) \Rightarrow a^2\omega_0 c = const$

Для систем с медленно меняющимися параметрами энергия не сохраняется. Однако существуют определенные комбинации

a, φ и параметров системы, которые изменяются ещё более медленно, чем параметры системы. Поэтому в первом приближении метода Крылова–Боголюбова производные по времени от них равны нулю. Такие величины называются адиабатическими инвариантами.

$\xi = a\cos\psi$, $\dot\xi = -a\omega\sin\psi$

$$E = \frac{1}{2}c(\tau)a^2(t)\omega^2(t) \Rightarrow \frac{E(t)}{\omega(t)} = const$$



Для математического маятника с медленно меняющейся длиной нити $L = \frac{m l^2(\tau)}{2}\dot\varphi^2 - \frac{1}{2} m g l(\tau)\varphi^2$

$$c(\tau) = m l^2(\tau), \quad \omega_0^2(\tau) = \frac{g}{l(\tau)} \Rightarrow a^2 l^{3/2} = const.$$

(33) Найдите выражение для эффективной потенциальной энергии „медленного" одномерного движения системы при наличии высокочастотных возмущений.

Рассмотрим одномерное движение частицы в поле $U(q)$ под действием быстро осциллирующей силы $\cancel{Q(t)}$. $Q(q,t)$.

Пусть T — период движения в ~~но~~ поле $U(q)$.

Характерная частота поля Q $\omega \gg \frac{2\pi}{T}$

Поскольку задан явный вид осциллирующего поля, то $Q = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\omega t} Q_n\cancel{(t)}(q)$

Уравнение движения ~~мё~~ $m\ddot q = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q,t)$.

Сила $Q(q,t)$ не предполагается малой, но малым считается отклонение $\xi = q - \bar q$.

$$\bar q(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} q(t+t')\,dt' \qquad |\xi| \ll q, \bar q$$

Тогда $$m\ddot{\bar q} + m\ddot\xi = -\frac{\partial U}{\partial \bar q} - \frac{\partial^2 U}{\partial \bar q^2}\xi + Q(\bar q, t) + \frac{\partial Q}{\partial \bar q}\xi$$

После усреднения получим:

$$m\ddot{\bar q} = -\frac{\partial U}{\partial \bar q} + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial \bar q}\xi \right\rangle.$$

Ограничимся первым порядком малости:

$m\ddot\xi = Q(\bar q, t)$. При этом можно считать, что $\bar q = const$.

$$\xi = \frac{1}{m}\int \dot Q(\bar q, t)\,dt$$

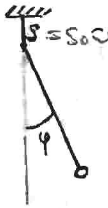
$$\xi \frac{\partial Q}{\partial \bar q} = \frac{d}{dt}\left(\xi \int \frac{\partial Q}{\partial \bar q}dt\right) - \dot\xi \int \frac{\partial Q}{\partial \bar q}dt$$

$$\Rightarrow \left\langle \xi \frac{\partial Q}{\partial\bar q}\right\rangle = \left\langle -\dot\xi\int\frac{\partial Q}{\partial \bar q}dt\right\rangle = -\left\langle \frac1m \int Q\, dt \int \frac{\partial Q}{\partial\bar q}dt\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial \bar q}\left\langle\left(\int Q\, dt\right)^2\right\rangle$$

$$\Rightarrow m\ddot{\bar q} = -\frac{\partial U_{эфф}}{\partial \bar q}$$, где $U_{эфф} = U + \frac{1}{2m}\left\langle\left(\int Q\, dt\right)^2\right\rangle$.

Пример.



$$U_{эфф} = -mgl\cos\varphi + \frac{1}{2ml^2}\left\langle\left(\int ml\, \cancel{\sin}\, s_0\omega^2\cos\omega t \sin\varphi\, dt\right)^2\right\rangle =$$

$$= -mgl\cdot\left(\cos\varphi - \frac14 \frac{s_0^2\omega^2}{l^2\omega_0^2}\sin^2\varphi\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$U' = mgl\left(\sin\varphi + \frac14\frac{s_0^2\omega^2}{l^2\omega_0^2}2\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$\varphi=\pi$: $U'' = mgl\left(-1+\frac12\frac{s_0^2\omega^2}{l^2\omega_0^2}\right)>0$ при $\frac{s_0^2\omega^2}{l^2\omega_0^2}>2$

(34) Получить канонические уравнения Гамильтона для системы с s степенями свободы при наличии диссипативных сил исходя из лагранжевой формы уравнений движения.

Уравнение движения любой физической системы с идеальными голономными связями или без них могут быть получены как уравнения Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^д$, если известны $L(q_1\ldots q_s, \dot q_1 \ldots \dot q_s, t)$ и $Q_\alpha^д$, s – число степеней свободы системы.

Введём вместо $\dot q_1 \ldots \dot q_s$ новые функции $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(q_1\ldots q_s, \dot q_1\ldots\dot q_s, t)$ и будем рассматривать новые функции $\varphi_\alpha(t)$ в качестве независимых наряду с функциями $q_\alpha(t)$. Единственное требование для функций φ_α состоит в том, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля.

Получим уравнения $\dot q_\alpha = \dot q_\alpha(q_1\ldots q_s, \varphi_1\ldots\varphi_s, t)$. Эти уравнения вместе с преобразованными уравнениями Лагранжа составляют $2s$ уравнений движения 1-го порядка. Такая система полностью эквивалентна системе уравнений Лагранжа.

Наиболее продуктивным оказывается выбор обобщённых импульсов p_α в качестве функций φ_α. В этом случае

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} = p_\alpha(q_1 \dots q_s, \dot q_1 \dots \dot q_s, t) = p_\alpha(q,\dot q,t)$$

Преобразования такого рода, когда вводятся новые переменные путём дифференцирования производящей функции по старым переменным, называются преобразованиями Лежандра. Якобиан преобразований $\det\left\|\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\right\| = \det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\alpha \partial \dot q_\beta}\right\| \neq 0$ ввиду положительной определённости кинетической энергии. Поэтому всегда существуют формулы обратных преобразований: $\dot q_\alpha = \dot q_\alpha(q,p,t)$. Эти обратные преобразования также могут быть представлены в виде преобразований Лежандра с некоторой производящей функцией обратного преобразования. Докажем это.

Поскольку обратное преобразование существует, то мы можем выразить $\dot q_\alpha$ через функцию Лагранжа так, что

$$dL(q,\dot q(q,p,t),t) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} d\dot q_\alpha(q,p,t) + \frac{\partial L}{\partial t}dt = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + p_\alpha d\dot q_\alpha(q,p,t) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$\Rightarrow d\{p_\alpha \dot q_\alpha(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t),t)\} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \dot q_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Пусть $H(q_1\dots q_s,p_1\dots p_s,t) = p_\alpha \dot q_\alpha(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t),t)$ — функция Гамильтона или гамильтониан системы.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, находим:

$$\dot q_\alpha = +\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_\alpha}, \quad -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Big|_{\dot q=\dot q(q,p,t)} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_\alpha},$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t}\Big|_{\dot q=\dot q(q,p,t)} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t}$$

Из уравнений Лагранжа, исключая $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, получим $\dot p_\alpha = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^d(q,p,t)$

Получим: $\boxed{\begin{cases} \dot q_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^d \end{cases}}$

Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона в канонических переменных

35. Приведите вывод канонических уравнений Гамильтона из вариационного принципа.

С уравнениями Гамильтона можно связать вариационный принцип. Постулируем функционал $S=\int_{t_1}^{t_2}\{p_\alpha \dot q_\alpha(q,p,t) - H(q,p,t)\}dt$.

q_α и p_α — независимые функции.

Варьируя функционал, получим

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{p_\alpha\delta\dot q_\alpha+\dot q_\alpha\delta p_\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right\}dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{d}{dt}(p_\alpha\delta q_\alpha)-\left(\dot p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\left(\dot q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha\right\}dt=$$

$$=(p_\alpha\delta q_\alpha)\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right\}dt$$

Предположим, что начальная и конечная конфигурации системы неизменны, т.е. $\delta q_\alpha|_{t_1}=\delta q_\alpha|_{t_2}=0$. Потребуем, чтобы $\delta S=0$.

Отсюда
$$\begin{cases}\dot q_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\ \dot p_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\end{cases}$$

— уравнения Гамильтона в отсутствие диссипативных сил.

36. Приведите определение скобок Пуассона. Покажите, что множество динамических функций образует алгебру Ли. Докажите теорему Пуассона.

Динамическая функция — это вещественная функция $2s$ канонических переменных и времени: $f=f(q_1\ldots q_s,p_1\ldots p_s,t)$.

$$\dot f=\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\Theta_\alpha^d+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Определим скобку Пуассона двух функций ~~f~~ h и g равенством:

$$\boxed{[g,h]=\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\equiv\left(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right)g}$$

— линейный оператор, действующий на g.

Тогда $\dot f=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\Theta_\alpha^d+\frac{\partial H}{\partial t}$

Полагая $h=p_\sigma$ и $h=q_\sigma$,

$\cancel{[g,p_\sigma]=-\frac{\partial g}{\partial p_\sigma}=[p_\sigma]g}$ $\quad\cancel{[g,q_\sigma]=\frac{\partial g}{\partial q_\sigma}=[q_\sigma]g}$

$\cancel{\dot f=[f,H]+[f,}$

$\cancel{[g,q_\sigma]=-\frac{\partial g}{\partial p_\sigma}=[q_\sigma]g}$, $\quad\cancel{[g,p_\sigma]=\frac{\partial g}{\partial q_\sigma}=[p_\sigma]g}$

$\cancel{\dot f=[f,H]+[f,p_\alpha]}$

~~получим~~ $\cancel{[g,p_\sigma]=-\frac{\partial g}{\partial p_\sigma}=[p_\sigma]g}$

$\cancel{[g,q_\sigma]=\frac{\partial g}{}}$

$[g, p_\sigma] = \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} = [p_\sigma] g$, $[g, q_\sigma] = -\frac{\partial g}{\partial p_\sigma} = [q_\sigma] g$

$\Rightarrow \boxed{\dot f = [f, H] - [f, q_\alpha] Q^d_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t}}$ – основное уравнение гамильтоновой динамики

Уравнения Гамильтона получаются, если положить $f = p_\sigma$ и $f = q_\sigma$

Тогда $\dot p_\sigma = [p_\sigma, H] - [p_\sigma, q_\alpha] Q^d_\alpha + \frac{\partial p_\sigma}{\partial t}$

$\dot q_\sigma = [q_\sigma, H] - [q_\sigma, q_\alpha] Q^d_\alpha + \frac{\partial q_\sigma}{\partial t}$

$$\begin{cases} [q_\alpha, q_\sigma] = [p_\alpha, p_\sigma] = 0 \\ [q_\alpha, p_\sigma] = \delta_{\alpha\sigma} \end{cases}$$ – фундаментальные скобки Пуассона.

Отсюда получим канонические уравнения Гамильтона.

Свойства скобок Пуассона:

1) антикоммутативность $[f, g] = -[g, f]$, или $[g] f = -[f] g$;

2) „0" с постоянной: $[f, c] = 0$, если $c = const$.

3) некоммутативность (тождество Якоби):

$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$

Заметим, что в сумме нет слагаемых, не содержащих второй производной одной из функций f, g, h. Поэтому достаточно показать, что слагаемые, содержащие вторые производные какой-либо из функций взаимно сокращаются (например, функции f)

$[h][g] f + [g][f] h + [f][h] g = 0$

$[h][g] f - [g][h] f + [f][h] g = 0$

Отсюда видно, что вторые производные функции f входят только в первые два слагаемых. Пусть $q_1 = x_1$, $p_1 = x_2$, $q_2 = x_3$, $p_2 = x_4, \dots$

Тогда $[g] = \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha} = \sum_{k=1}^{2s} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

$[h] = \frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha} = \sum_{l=1}^{2s} \eta_l \frac{\partial}{\partial x_l}$

$$[h][g] = \sum_{k,l=1}^{2s} \left[\eta_l \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} + \eta_l \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\right]$$

$$[g][h] = \sum_{k,l=1}^{2s} \left[\eta_l \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right]$$

$\Rightarrow$ вторые производные функции f сокращаются.

Любая абстрактная операция, обладающая указанными тремя свойствами, называется в алгебре скобкой Ли.

Из определения скобок Пуассона очевидны также равенства: $[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$

$[cf, g] = c[f, g]$, $c = const$, $[f_1 f_2, g] = [f_1, g] f_2 + [f_2, g] f_1$

ими устанавливается связь скобки Пуассона с другими алгебраическими операциями — сложением и умножением. При помощи трёх операций — сложения, умножения и скобок Пуассона можно комбинировать любые элементы множества динамических функций, не выходя за пределы этого множества. Такое множество называется алгеброй Ли.

~~Теорема~~ Алгебра Ли может быть реализована не только на множестве динамических функций, но и на множестве эрмитовых операторов. В этом случае скобки Пуассона $[\hat f, \hat g] = \frac{[\hat f \hat g - \hat g \hat f]}{i\hbar}$

Уравнения Гамильтона переходят в уравнение Шрёдингера: $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\psi, \hat H]$

Теорема Пуассона. Пусть $\varphi = [f, g]$. Найдём соотношение между $\dot\varphi$, $\dot f$ и $\dot g$.

$$\dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + [\varphi, H] = \frac{\partial}{\partial t}[f,g] + [[f,g],H] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}] + [[f,H],g] + \cancel{[[f,g],H]}\, [f,[g,H]] =$$

$$= [\frac{\partial f}{\partial t} + [f,H], g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g,H]] = [\dot f, g] + [f, \dot g]$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi = [\dot f, g] + [f, \dot g], \text{ если } \varphi = [f,g]}$$

Если f и g — интегралы движения, то $[f,g]$ — тоже интеграл движения.

37. Покажите, что каждый элемент алгебры динамических функций порождает однопараметрическую группу Ли автоморфизмов алгебры.

Центральная задача гамильтоновой динамики найти динамическую функцию $f(q(t),p(t),t) \equiv f(t)$ если известно её значение в момент $t=0$ и уравнение эволюции во времени $\dot{f}=[f,H]$, $t=0$: $f(q,p)=f(0)$

Предположим, что $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, $H=H(p,q)$.

Перейдём от дифференциального к интегральному уравнению:

$$f(q(t),p(t)) = f(q,p) + \int_0^t [f(q(t'),p(t')),H(q(t'),p(t'))]\,dt'.$$

Интегральное уравнение можно решать методом итераций $f=f_0+f_1+f_2+\dots$, предполагая интегральный член малым.

Тогда $f_0=f(p,q)$, $f_1=\int_0^t [f(p,q),H(p,q)]\,dt' =$

$= t[f,H] = t[H]f$

$$f_2=\int_0^t t'[[f(p,q),H(p,q)],H(p,q)]\,dt' = \frac{t^2}{2}[[f,H],H] =$$

$$= \frac{t^2}{2}[H][H]f = \frac{t^2}{2}[H]^2 f$$

значение приобретает вид экспоненциального ряда: $f(q(t),p(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[H]^n f(p,q)$

Обозначение: $\hat{U} \equiv e^{t[H]} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[H]^n f(p,q)$

Тогда $f(q(t),p(t)) = \hat{U} f(q,p) = e^{t[H]} f(q,p)$.

Оператор $\hat{U}$ называется пропагатором.

Если положить f равным q или p, то $\hat{U}$ – преобразование фазового пространства в себя – каждой точке (q,p) ставится в соответствие новая точка.

Из определения $\hat{U}$ следует, что $\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1+t_2)$, $\hat{U}(0)=1$, $\hat{U}(-t)=\hat{U}^{-1}(t)$

Множество преобразований $\hat{U}(t)$ образует однопараметрическую непрерывную группу (группу Ли).

Сумма двух динамических функций снова преобразуется в сумму, произведение – в произведение, а скобка Пуассона – в скобку Пуассона.

Вследствие непрерывности группы можно построить инфинитезимальные преравными нулю следом, антисимметричного и диагонального.

Доказательство:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} +$$
$$+\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

Поэтому $\sigma_{\alpha\beta} = \eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) +$
$+\zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}$

η - сдвиговая вязкость, ζ - объёмная вязкость.

Уравнение баланса импульса принимает вид:

$$\rho\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}v_\alpha\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho f_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right\}$$

Если $\eta, \zeta = const$, то уравнение может быть записано в векторном виде:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v})}$$

- уравнение Навье-Стокса.

(51) Приведите полную систему уравнений гидродинамики

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v}) \\ \rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\varepsilon + P_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ P_{\alpha\beta} = p\,\delta_{\alpha\beta} - \eta\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right] + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \\ \vec{q} = -æ\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \quad \text{- закон Фурье} \end{cases}$$

образования.

$$f(\delta t) = f + \delta t[f,H]$$

$$[f(\delta t), g(\delta t)] = [f+\delta t[f,H], g+\delta t[g,H]] = [f,g] +$$
$$+ \delta t\{[f,[g,H]] + [[f,H],g]\} + \bar{o}(\delta t) = [f,g]+[[f,g],H]$$

Преобразование $\hat{U}$ оставляет инвариантной всю алгебраическую структуру динамических функций. Поэтому преобразование $\hat{U}$ ~~назы~~ является автоморфизмом.

Если в момент времени $t=0$ q_α и p_α такие, что $[q_\alpha,q_\beta]=[p_\alpha,p_\beta]=0$, $[q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$, то это будет верно и в момент времени $t+\tau$.

t: $\dot f = [f,H]$

$t+\tau$: $f(t+\tau) = f(t) + \tau[f,H]$

$$\dot f(t+\tau) = \dot f(t) + \tau[\dot f,H] = \dot f(t) + \tau[[f,H],H] =$$
$$= [f(t)+\tau[f,H],H] = [f(t+\tau),H].$$

Получим, что гамильтонова динамика инвариантна относительно сдвигов во времени.

При доказательстве автоморфизма алгебры динамических функций использовался оператор $\hat{U}$ и свойства скобок Пуассона. Гамильтониан выполняет свойства генератора группы. Если его заменить любым другим элементом g, то доказательство автоморфизма не изменится. Имеем множество $\{\hat{U}\} = \{e^{\alpha[g]}\}$ преобразований — канонические преобразования. Они оставляют инвариантной алгебру динамических функций. При этом $\delta f = \delta\alpha[f,g]$

Полный импульс системы P_α является генератором группы пространственных сдвигов.

$$\delta x_\alpha = \delta\sigma_\mu[x_\alpha,P_\mu], \quad \delta p_\alpha = \delta\sigma_\mu[p_\alpha,P_\mu]$$

$$[x_\alpha,P_\mu] = \delta_{\alpha\mu}, \quad [p_\alpha,P_\mu]=0$$

$\Rightarrow \delta x_\alpha = \delta\sigma_\alpha$ — сдвиг на $\delta\sigma_\alpha$, $\delta p_\alpha = 0$.

Полный момент импульса L_μ — генератор поворотов в пространстве на бесконечно малый угол.

$$\delta x_\alpha = \delta\sigma_\mu[x_\alpha,L_\mu], \quad \delta p_\alpha = \delta\sigma_\mu[p_\alpha,L_\mu]$$

$$[x_\alpha,L_\mu] = \varepsilon_{\alpha\mu\nu}x_\nu, \quad [p_\alpha,L_\mu] = -\varepsilon_{\alpha\mu\nu}p_\nu$$

$$\Rightarrow \delta x_\alpha = \varepsilon_{\alpha\mu\nu}\delta\sigma_\mu x_\nu, \quad \delta p_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\delta\sigma_\mu p_\nu$$

(38) <u>Покажите, что для любого канонического преобразования существует производящая функция. Получите формулы канонических преобразований в переменных четырёх возможных типов производящих функций.</u>

Представление канонических преобразований в виде степенных рядов неудобно, если необходимо иметь явный вид:

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q,p,t) \end{cases}$$

Найдём правила нахождения таких преобразований: Пусть $\frac{\partial(Q_1 \dots Q_s, P_1 \dots P_s)}{\partial(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)} \neq 0$

Кроме того, в ~~ких~~ старых переменных

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\cancel{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

В новых переменных должно быть также

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha}, \text{ где } H' = H'(Q,P,t).$$

Снимем ограничение $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$. Заметим, что из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q,p,t)]\, dt = 0$$

Поэтому в новых переменных получим

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H'(Q,P,t)]\, dt = 0$$

Но при таком преобразовании подынтегральная функция может получить дополнительное слагаемое в виде полной производной по времени от функции $F(q,p,Q,P,t)$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = \delta(F(t_2) - F(t_1)) = 0$$

Получим $p_\alpha dq_\alpha - H(q,p,t)dt = P_\alpha dQ_\alpha - H'(Q,P,t)\,dt + dF(q,p,Q,P,t)$

1) Пусть $Q_\alpha = \cancel{Q_\alpha(q,Q,t)}\, Q_\alpha(q,p,t) \Rightarrow p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t)$.

Это возможно, если $\det\left\|\frac{\partial p_\alpha}{\partial Q_\alpha}\right\| \neq 0$

Тогда $P_\alpha = P_\alpha(q,Q,t)$, $F = F_1(q,Q,t)$.

$$dF_1(q,Q,t) = p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H' - H)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &p_\alpha = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_\alpha} \\ &H' = H + \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

Эти формулы определяют канонические преобразования при условии $\det\left\|\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right\| \neq 0$.

Можно выбрать $F_1 = q_\alpha Q_\alpha$.

Тогда $p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$, $P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha$, $H' = H$

2) $dF(q,p,Q,P,t) = p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H' - H)\,dt$.

Пусть $\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q,p,t) \end{cases}$

$p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t) \Rightarrow F_1$

Пусть $P_\alpha = P_\alpha(q,p,t)$, тогда $p_\alpha = p_\alpha(q,P,t)$, если $\frac{\partial(P_1 \dots P_s)}{\partial(p_1 \dots p_s)} \neq 0$.

$d(F_2 - P_\alpha Q_\alpha) = p_\alpha dq_\alpha - Q_\alpha dP_\alpha + (H' - H)dt$

$\Rightarrow dF_2(q,P,t) = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H'-H)dt$

$$\Rightarrow \boxed{p_\alpha = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_\alpha}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}}$$

Можно положить $F_2 = f_\alpha(q_1 \dots q_s, t) P_\alpha$

$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = f_\alpha(q_1 \dots q_s, t)$ - точечное преобразование

$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_\alpha} P_\gamma$ - ковариантный вектор

$H' = H + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} P_\alpha$, $\det \left\| \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \right\| \neq 0$.

Частные случаи:

а) $f_\alpha = a_{\alpha\beta} q_\beta$, $a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$

б) $f_\alpha = q_\alpha$.

3) Пусть $Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t)$, $q_\alpha = q_\alpha(p,Q,t)$, если $\frac{\partial(Q_1 \dots Q_s)}{\partial(q_1 \dots q_s)} \neq 0$

Тогда $dF_3(p,Q,t) = -q_\alpha dp_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H'-H)dt$

$$\boxed{q_\alpha = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_\alpha}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial t}}$$

Условие существования: $\det \left\| \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q_\beta} \right\| \neq 0$.

4) Пусть $P_\alpha = P_\alpha(q,p,t) \to q_\alpha = q_\alpha(p,P,t)$

$dF_4(p,P,t) = -q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H'-H)dt$

$$\Rightarrow \boxed{q_\alpha = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_\alpha}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial t}}$$

Условие существования: $\det \left\| \frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta} \right\| \neq 0$.

Заметим, что $\frac{\partial(Q_1 \dots Q_s, P_1 \dots P_s)}{\partial(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)} \neq 0$.

Поэтому определители $\frac{\partial(Q_1 \dots Q_s)}{\partial(q_1 \dots q_s)}$, $\frac{\partial(Q_1 \dots Q_s)}{\partial(p_1 \dots p_s)}$, $\frac{\partial(P_1 \dots P_s)}{\partial(q_1 \dots q_s)}$, $\frac{\partial(P_1 \dots P_s)}{\partial(p_1 \dots p_s)}$ не могут быть одновременно равны нулю. Поэтому всегда существует производящая функция канонического преобразования.

При помощи канонических преобразований при решении задач можно получить более простое выражение для гамильтониана и более простые уравнения движения.

(39) <u>Приведите вывод уравнения Гамильтона-Якоби и доказательство теоремы Якоби.</u>

Движение механической системы с s степенями свободы в фазовом пространстве имеет вид: $\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(q_{01} \dots q_{0s}, p_{01} \dots p_{0s}, t), \\ p_\alpha = p_\alpha(q_{01} \dots q_{0s}, p_{01} \dots p_{0s}, t) \end{cases}$

Или $\begin{cases} q_{0\alpha} = q_{0\alpha}(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s, t), \\ p_{0\alpha} = p_{0\alpha}(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s, t) \end{cases}$

Эти формулы определяют каноническое преобразование, для него существует производящая функция. Если удастся найти эту производящую функцию, то закон движения системы можно получить простым дифференцированием этой производящей функции. Метод Гамильтона-Якоби включает в себя вывод уравнения для производящей функции, метод его решения и формулировку правил получения уравнений для $q_\alpha, p_\alpha, q_{0\alpha}, p_{0\alpha}$.

Получим уравнение Гамильтона-Якоби. Удобнее рассматривать общие формулы канонических преобразований: $\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) \end{cases}$

и потребовать, чтобы P_α, Q_α были ~~nocmo~~ постоянными. Это выполняется, если новый гамильтониан $H' = H'(t)$. Тогда $\dot{Q}_\alpha = 0, \dot{P}_\alpha = 0$.

Обозначим $Q_\mu = \beta_\mu$, $P_\mu = \alpha_\mu$ – традиция.

Мы можем положить $H' = 0$, т.к. H' определён с точностью до произвольной функции времени. Если задан старый гамильтониан $H(q, p, t)$ системы, то новый гамильтониан $H' = H + \frac{\partial F_a}{\partial t} = 0$, где $a = 1, 2, 3, 4$. F_a – одна из четырёх производящих функций.

Ищем F_a в классе функций $F_2(q, P, t)$

При этом $p_\alpha = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_\alpha}$, $Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_\alpha}$,

$H' = H + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}$, $\det\left\|\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta}\right\| \neq 0$

$P_\mu = \alpha_\mu = const$, обозначим $F_2(q,P,t)\big|_{P_\mu = \alpha_\mu} = S(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_s, t) = S(q, \alpha, t)$

$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$

Нужно преобразовать данный гамильтониан $H(q,p,t)$ к переменным q,P,t при $P_\mu=\alpha_\mu$

Заметим, что в новых обозначениях

$$p_\alpha = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_\alpha}, \quad \beta_\mu = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_\mu}$$

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\mu}\right\| \neq 0$$

$$\Rightarrow H(q,p,t) = H\left(q, \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_\alpha}, t\right).$$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1 \dots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0}$$ — уравнение Гамильтона – Якоби.

В механике имеет смысл лишь такое решение уравнения Гамильтона – Якоби, которое содержит s произвольных постоянных α_μ. Такое решение называется полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби. Ни одна из постоянных α_μ не может содержаться в полном интеграле аддитивно, т.е. в виде $S = S'(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}, t) + \alpha_s$. В этом случае $\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\mu}\right\| = 0$

$$\frac{d}{dt} S(q(t),\alpha,t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_\mu}\dot q_\mu = -H + p_\mu \dot q_\mu = L$$

$$\boxed{S = \int_{t_0}^{t} L\, dt'}$$ S – действие как функция верхнего предела интегрирования

Если $S(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_s, t)$ известно, то

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_s, t)$$

$$\beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_s, t)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно p и q: $\begin{cases} q_\mu = q_\mu(\alpha_1 \dots \alpha_s, \beta_1 \dots \beta_s, t) \\ p_\mu = p_\mu(\alpha_1 \dots \alpha_s, \beta_1 \dots \beta_s, t) \end{cases}$

<u>Теорема Якоби.</u> Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби, то $S(q,\alpha,t)$, то решение канонических уравнений Гамильтона даётся формулами:

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q_\mu} = p_\mu(q,\alpha,t), \quad \beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu(q,\alpha,t)$$

<u>Док-во.</u>

Пусть известна $S(q,\alpha,t)$. Тогда, подставляя её в уравнение Гамильтона-Якоби, получим: $\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q}, t\right) = 0.$

Это тождество, которое можно почленно дифференцировать (по α_μ)

Отсюда $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} = 0.$

С другой стороны, $\cancel{\dot\beta_\mu = 0} \quad \cancel{\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_\mu}} = \cancel{\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial t}}$

$$\dot\beta_\mu = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_\mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma}\dot q_\sigma = 0.$$

Получим $\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \dot q_\sigma\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\mu} = 0$

Но $\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma}\right\| \neq 0$. Система имеет только нетривиальное решение: $\dot q_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$

Продифференцировав тождество по q_σ, получим $\frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial q_\mu} = 0$.

$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q_\sigma} \Rightarrow \dot p_\sigma = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma}\dot q_\mu = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$

$\Rightarrow \dot p_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}$ — уравнение Гамильтона удовлетворяются тождественно.

40. Сформулируйте метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и его особенности для консервативных систем. Продемонстрируйте эффективность этого метода на примере.

Для консервативных систем $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ и диссипативные силы отсутствуют. В этом случае $H = H(q,p)$ является интегралом движения, так что $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = -E = const$

$\Rightarrow S = -Et + W(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_{s-1})$.

W — укороченное действие. Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$H(q_1 \dots q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_s}) = E$

Решение канонических уравнений Гамильтона по-прежнему даётся формулами:

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} \\ \beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu}, & \mu = \overline{1, s-1} \\ p_\nu = \frac{\partial S}{\partial q_\nu} = \frac{\partial W}{\partial q_\nu}, & \nu = \overline{1, s} \end{cases}$$

Уравнение траектории в конфигурационном пространстве $\beta_\mu = \beta_\mu(q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}, E)$. Они получаются непосредственно, а не путём исключения t из закона движения

Метод разделения переменных

Предположим, что $H = H\left(\psi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \dots, \psi_m\left(q_m, \frac{\partial S}{\partial q_m}\right), q_{m+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_{m+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right)$

ψ_τ – некоторые функции, не содержащие t.

Тогда $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\psi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \dots, \psi_m\left(q_m, \frac{\partial S}{\partial q_m}\right), q_{m+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_{m+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$

Решение ищем в виде: $S = \sum_{\sigma=1}^{m} S_\sigma(q_\sigma) + S^*(q_{m+1}, \dots, q_s, t)$

$\Rightarrow \frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(\psi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right), \dots, \psi_m\left(q_m, \frac{dS_m}{dq_m}\right), q_{m+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S^*}{\partial q_{m+1}}, \dots, \frac{\partial S^*}{\partial q_s}, t\right) = 0.$

~~Уравнен~~ уравнение удовлетворяется во всей области изменения переменных q, только если все $\psi_\tau = \mathrm{const}$.

Задача сводится к интегрированию m дифференциальных уравнений 1-го порядка $\psi_\sigma = \mathrm{const}$ и отысканию полного интеграла уравнения $\frac{\partial S^*}{\partial t} + H(\alpha_1 \dots \alpha_m, q_{m+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S^*}{\partial q_{m+1}}, \dots, \frac{\partial S^*}{\partial q_s}, t) = 0$

Если какие-либо переменные – циклические, то для них $\frac{dS_\mu}{dq_\mu} = 0$. В этом случае

$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_{m-1}(q_{m-1}) + \alpha_m q_m + S^*(q_{m+1}, \dots, q_s)$

S является линейной функцией циклических координат.

Пример. Движение частицы в однородном электрическом поле.

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - eEx_3$$

Координаты x_1 и x_2 – циклические

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right\} - eEx_3 = 0$$

Ищем решение в виде:

$$S = -\mathcal{E}t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + S_3(x_3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \alpha_1, \ \frac{\partial S}{\partial x_2} = \alpha_2 \ \Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_3}{\partial x_3}\right)^2 - eEx_3 = \alpha_3 = \psi_3(x_3)$$

$$\Rightarrow -\mathcal{E} + \frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3 = 0$$

Выберем α_1, α_2 и α_3 как независимые постоянные $\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3$.

$$\frac{dS_3}{dx_3} = \pm\sqrt{2m(\alpha_3 + eEx_3)}$$

$$\Rightarrow S = -\left\{\frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3\right\}t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \pm \int \sqrt{2m(\alpha_3 + eEx_3)}\,dx_3$$

Тогда решение уравнений Гамильтона:

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1} = \alpha_1, \ p_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} = \alpha_2, \ p_3 = \frac{\partial S}{\partial x_3} = \pm\sqrt{2m(\alpha_3 + eEx_3)}$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{m}t + x_1 \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{m}t + x_2$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -t \pm \int \frac{m\,dx_3}{\sqrt{2m(\alpha_3 + eEx_3)}} = -t \pm \frac{1}{eE}\sqrt{2m(\alpha_3 + eEx_3)}$$

(41) Введите переменные „действие-угол" для системы, совершающей условно-периодическое движение. Сформулируйте основанный на этих переменных метод вычисления частот нормальных колебаний

Метод Гамильтона-Якоби позволяет сформулировать эффективное правило для вычисления частот периодических движений системы без отыскания её законов движения. Мы будем считать, что $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, $q_1,p_1,\dots,q_s,p_s$ — набор канонических переменных, в которых уравнение Гамильтона-Якоби допускает полное разделение переменных.

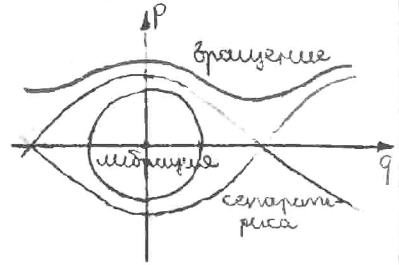
Тогда $H\left(\psi_1\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right),\dots,\psi_s\left(q_s,\frac{\partial W}{\partial q_s}\right)\right)=E$

Полный интеграл $S=-Et+\sum_{\delta=1}^{s} W_\delta(q_\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_s)$,

причём $\alpha_\delta=\psi_\delta\left(q_\delta,\frac{dW_\delta}{dq_\delta}\right)$, $H(\alpha_1\dots\alpha_s)=E$

Согласно теореме Якоби $p_\delta=\frac{dW_\delta}{dq_\delta}=p_\delta(q_\delta,\alpha_1\dots\alpha_s)$

Будем говорить, что система совершает условно периодическое движение, если либо каждая из переменных q_δ,p_δ меняется периодически с течением времени, либо каждый импульс p_δ — периодическая функция координаты q_δ. В первом случае имеет место либрация, во втором — вращение. Состояние системы будет меняться периодически со временем только в случае вырождения, т.е. когда частоты изменений q_δ относятся друг к другу как целые числа.



Тогда периодичность $p_\delta(q_\delta)$ можно использовать для введения новых постоянных импульсов вместо набора $\alpha_1\dots\alpha_s$ старых постоянных импульсов по формулам $J_\delta=\oint p_\delta\, dq_\delta = I_\delta(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$. Интеграл берётся по периоду изменения $p(q)$.

Переменные J_δ называются действием. Уравнения $J_\delta=I_\delta(\alpha_1\dots\alpha_s)$ все независимы вследствие независимости пар p_δ,q_δ, и их можно разрешить относительно α

$\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(J_1 \dots J_s)$

Получим $W = W(q_1 \dots q_s, J_1 \dots J_s)$, $H = H(J_1 \dots J_s) = E$

Новые координаты Θ_σ канонически сопряженные импульсам J_σ связаны со старыми координатами через производящую функцию $W(q,J)$: $\Theta_\sigma = \frac{\partial W}{\partial J_\sigma} = \Theta_\sigma(q,J)$

Θ_σ — угловые переменные.

В этих переменных уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot\Theta_\sigma = \frac{\partial H}{\partial J_\sigma} = \nu_\sigma(J_1 \dots J_s) = const \qquad \nu_\sigma \equiv \frac{\partial H}{\partial J_\sigma}$$

$$\Rightarrow \Theta_\sigma = \nu_\sigma t + \vartheta_\sigma^0.$$

Обозначим через τ_σ время, в течение которого координата q_σ изменяется на величину, равную полному циклу всего изменения (периоду $p_\sigma(q_\sigma)$).

За время τ_σ $\Delta\vartheta_\sigma = \vartheta_\sigma(\tau_\sigma) - \vartheta_\sigma(0) = \nu_\sigma\tau_\sigma$

С другой стороны, изменение Θ_σ за этот изменение на полный собственный период координаты q_μ можно вычислить по формуле

$$\Delta_\mu\Theta_\sigma = \oint \frac{\partial \Theta_\sigma}{\partial q_\mu} dq_\mu = \oint \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left(\frac{\partial W}{\partial J_\sigma}\right) dq_\mu =$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\sigma}\oint \frac{\partial W}{\partial q_\mu} dq_\mu = \frac{\partial}{\partial J_\sigma}\oint p_\mu dq_\mu = \frac{\partial J_\mu}{\partial J_\sigma} = \delta_{\mu\sigma}$$

если $\mu = \sigma$ то $\Delta\Theta_\sigma = 1 \Rightarrow \nu_\sigma = \frac{1}{\tau_\sigma}$ — частота

Для вычисления частот системы без отыскания её законов движения нужно вычислить действие, выразить через них гамильтониан, и тогда частоты $\nu_\mu = \frac{\partial H}{\partial J_\mu}$

<u>Пример</u>: трёхмерный анизотропный осциллятор

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2} + \frac{k_3x_3^2}{2}$$

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2\right\} + \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2} + \frac{k_3x_3^2}{2} = E$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\sigma}\right)^2 + \frac{k x_\sigma^2}{2} = \alpha_\sigma, \quad W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$J = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} p\,dx = 2\int_{-\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}}^{\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}} \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{kx^2}{2}\right)}\,dx = \pi\sqrt{2m\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha}{k}} =$$

$$= 2\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Получаем $J_\sigma = 2\pi\alpha_\sigma\sqrt{\frac{m}{k_\sigma}}$ $\qquad \alpha_\sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\sigma}{m}}J_\sigma$

$$H = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E$$

$$H(J_1, J_2, J_3) = \frac{1}{2\pi}\left\{J_1\sqrt{\frac{k_1}{m}} + J_2\sqrt{\frac{k_2}{m}} + J_3\sqrt{\frac{k_3}{m}}\right\}$$

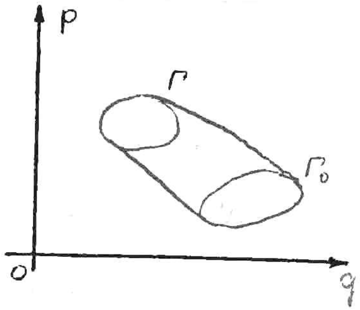
$$\nu_\sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_i}{m}}$$

42) Приведите доказательство теоремы Лиувилля.

Состояние системы с S степенями свободы геометрически изображается точкой в $2s$-мерном фазовом пространстве (объём в фазовом пространстве равен нулю). Рассмотрим множество различных когда-нибудь одной и той же системы с одним и тем же гамильтонианом H или множество состояний различных систем с одним и тем же гамильтонианом H. Если число состояний $N \to \infty$, то мы получим область Γ состояний (изображающих точек) в фазовом пространстве. Объём области $\int_\Gamma dq_1\dots dq_s dp_1\dots dp_s$.

Найдём, как изменяется объём ансамбля Гиббса с течением времени. При отображении $q_\alpha = q_\alpha(q_0,p_0,t)$, $p_\alpha = p_\alpha(q_0,p_0,t)$ область Γ_0 переходит в область Γ. Заменяя переменные, получим $\int_\Gamma dq_1\dots dq_s dp_1\dots dp_s =$

$= \int_{\Gamma_0} I\, dq_{10}\dots dq_{s0}\, dp_{10}\dots dp_{s0}$



$$I = \frac{\partial(q_1\dots q_s, p_1\dots p_s)}{\partial(q_{01}\dots q_{0s}, p_{01}\dots p_{0s})}$$

Обозначим $q_1=x_1,\ p_1=x_2,\ q_2=x_3,\ p_2=x_4,\dots$

$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} = a_{ik}$, $i,k=\overline{1,2s}$ $\qquad I = \det\left\|\frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}}\right\| = \det\|a_{ik}\|$

$$\delta_{il} I = \sum_{l=1}^{2s} a_{ik} I_{lk}$$

$$\dot I = \sum_{i,k=1}^{2s} \frac{\partial I}{\partial a_{ik}} \dot a_{ik} = \sum_{i,k=1}^{2s} I_{ik}\dot a_{ik} = \sum_{i,k=1}^{2s} I_{ik}\frac{\partial \dot x_i}{\partial x_{0k}} = \sum_{i,k,l=1}^{2s} I_{ik}\frac{\partial \dot x_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_{0k}} =$$
$$= \sum_{i,k,l=1}^{2s} I_{ik}\frac{\partial \dot x_i}{\partial x_l} a_{lk} = \sum_{i,l=1}^{2s} I\delta_{il}\frac{\partial \dot x_i}{\partial x_l} = I\sum_{i=1}^{2s}\frac{\partial \dot x_i}{\partial x_i} = I\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial \dot p_\alpha}{\partial p_\alpha}\right) =$$
$$= I\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial q_\alpha}\right) = 0 \Rightarrow I = const.$$

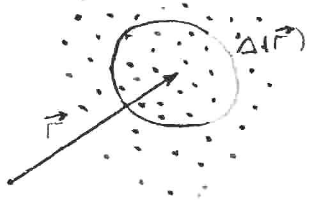
Получим, что $\int_\Gamma dq_1\dots dq_s dp_1\dots dp_s = \int_{\Gamma_0} dq_{10}\dots dq_{s0} dp_{10}\dots dp_{s0}$ — фазовый объём, занятый изображающими точками ансамбля Гиббса, с течением времени сохраняется.

43. Приведите вывод уравнения непрерывности

Скалярное поле плотности вещества

$$\rho(\vec r, t) = \frac{1}{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{n(\vec r, t)} m_i =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\vec r)} \int\limits_{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta(\vec r - \vec r_i(t))\, dV$$



Продифференцируем $\rho(\vec r, t)$ по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec r + \vec\xi - \vec r_i(t)) = \frac{\partial \delta}{\partial x_\alpha}(-\dot x_{i\alpha}(t)) = -\vec v_i(t) \frac{\partial \delta}{\partial \vec r}$$

Обозначим $\delta(\vec r + \vec\xi - \vec r_i(t)) \equiv \delta_i(\vec r + \vec\xi, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial \vec r} \delta_i(\vec r + \vec\xi, t)\, \vec v_i(t)\, d\vec\xi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec r}\left\{\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i(\vec r + \vec\xi, t)\, \vec v_i(t)\, d\vec\xi\right\} = 0$$

$$\boxed{\vec J_m(\vec r, t) = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i(\vec r + \vec\xi, t)\, \vec v_i(t)\, d\vec\xi}$$ — плотность потока массы частиц.

Получим уравнение непрерывности

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec J_m = 0}$$

Можно найти скорость центра масс всех частиц в области $\Delta(\vec r)$:

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n(\vec r, t)} m_i \vec v_i(t) \equiv \vec v(\vec r, t) \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n(\vec r, t)} m_i = \vec v(\vec r, t) \rho(\vec r, t) = \vec J_m(\vec r, t)$$

Поэтому $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec v) = 0}$.

Для некоторых задач можно пренебречь изменением плотности. Для учёта этого запишем уравнение непрерывности в виде: $\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec v \nabla)\right]\rho = -\rho \operatorname{div} \vec v$

$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec v \vec\nabla)$ — субстанциональная производная,

$(\vec v \vec\nabla)$ — конвективная производная.

Если определить линии тока, как линии, к которым векторное поле $v(\vec r, t)$ является касательным в каждой точке $\left(\frac{dx}{v_x(\vec r, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec r, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec r, t)}\right)$, то тогда субстанциональную производную можно рассматривать как полную производную по времени вдоль этих фиктивных линий.

Если ρ не меняется в процессе движения жидкости, то $\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec v \vec\nabla)\right)\rho = 0}$ — ~~это~~ определение несжимаемой жидкости

$\operatorname{div} \vec v = 0$. Если при этом движение также безвихревое ($\operatorname{rot} \vec v = 0$), то существует потенциал $\varphi(\vec r, t)$ векторного поля $\vec v(\vec r, t)$, такой, что $\vec v(\vec r, t) = \operatorname{grad} \varphi(\vec r, t)$

При этом $\Delta \varphi(\vec r, t) = 0$. Поле скоростей несжимаемой ~~сре~~ жидкости полностью определяется уравнением непрерывности.

(44) Найдите общий вид уравнения баланса импульса для системы частиц с парными потенциалами взаимодействия, зависящими только от расстояния между частицами.

$$\vec J_r = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n(\vec r,t)} m_i \vec v_i(t) = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i(t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{i\alpha}(t)(-v_{i\beta})\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi + \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot v_{i\alpha}(t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

Тензорное поле плотности потока импульса: $\boxed{\Pi_{\alpha\beta}=\Pi_{\beta\alpha}=\frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} p_{i\alpha}v_{i\beta}\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi}$

Учтём уравнение движения:

$$m_i\dot v_{i\alpha} = F_{i\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\sum_{k=1}^{N}{}' U_{ik}(|\vec r_i-\vec r_k|)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha)+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} F_{i\alpha}(\vec r+\vec\xi,t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi + \Phi_\alpha(\vec r,t),$$ где

$$\Phi_\alpha(\vec r,t) = -\frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i,k=1}^{N}{}' \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}}(|\vec r_i-\vec r_k|)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

Заметим, что $\frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec v_i(t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi = \vec v(\vec r,t)\cdot\rho(\vec r,t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec u_i(t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi = 0,$$ где $\vec u_i(t)=\vec v_i(t)-\vec v(\vec r, t)$ — скорость теплового движения частицы.

$$\Rightarrow \Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i(v_\alpha v_\beta + u_{\alpha i}v_\beta + u_{\beta i}v_\alpha + u_{i\alpha}u_{i\beta})\cdot\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi = \rho v_\alpha v_\beta + P_{\alpha\beta}(\vec r,t).$$

Плотность потока импульса частиц на скоростях теплового движения или тензор кинетического давления:

$$\boxed{P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} m_i u_{i\alpha}u_{i\beta}\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi}$$

Если $u_{i\alpha}=0$, то $P_{\alpha\beta}=0$ — приближение холодной гидродинамики. Уравнение баланса импульса можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha)+\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\alpha v_\beta)+\frac{\partial}{\partial x_\beta}P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{i=1}^{N} F_{i\alpha}(\vec r+\vec\xi,t)\,\delta_i(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi + \Phi_\alpha.$$

Согласно уравнению непрерывности

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\vec v\nabla)\right]v_\alpha = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha)+\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\alpha v_\beta).$$

Внешнее поле гравитационное и электромагнитное. В гравитационном поле $F_i\sim m_i \Rightarrow \frac{F_{i\alpha}}{m_i} = f_{\alpha}(\vec r+\vec\xi,t)$. В электромагнитном поле $\vec F_i(\vec r+\vec\xi,t) = e_i\vec E(\vec r+\vec\xi,t)+\frac{e_i}{c}[\vec v_i(t)\times\vec B_i(\vec r+\vec\xi,t)]$.

Как правило, внешние поля меняются слабо на расстояниях порядка $\Delta^{1/3}$. Поэтому для таких медленно меняющихся малой: $\vec F_\delta(\vec r+\vec \xi,t)\approx \vec F_i(\vec r,t)$ (разложение в ряд Тейлора).

Тогда общий вид уравнения баланса импульса системы частиц:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\vec v\vec \nabla)\right]v_\alpha+\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=f_\alpha\rho(\vec r,t)+\rho_e E_\alpha(\vec r,t)+\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J_{e\beta}B_\gamma(\vec r,t)+\Phi_\alpha}$$

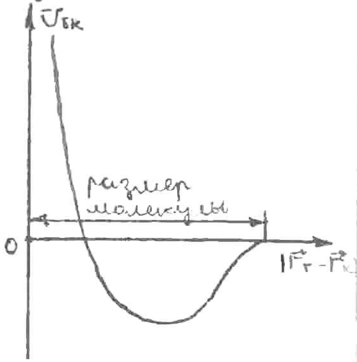
Поведение системы определяется видом взаимодействия частиц $U_{\delta k}$ и начальным состоянием системы.

$$\Phi_\alpha=-\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\partial U_{\delta k}}{\partial x_{\delta\alpha}}\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)=-\frac{1}{\Delta}\sum_{\delta=1}^{n(\vec r,t)}\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\partial U_{\delta k}}{\partial x_\delta}$$

– сила взаимодействия частиц в объёме $\Delta(\vec r)$ со своим окружением.

(45) Приведите вывод уравнений баланса импульса для жидкостей и газов (короткодействующие потенциалы взаимодействия между частицами)

Пусть потенциал $U_{\delta k}$ короткодействующий и быстро спадает с расстоянием.



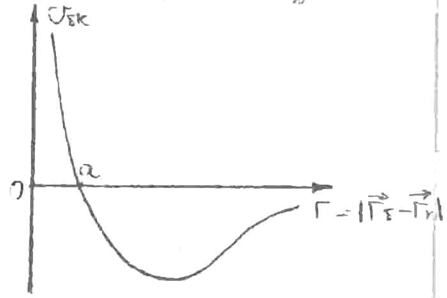
Уравнение баланса импульса в общем виде: $\rho\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)+\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\rho f_\alpha(\vec r,t)+\rho^{(e)}E_\alpha(\vec r,t)+\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J^{(e)}_\beta(\vec r,t)B_\gamma(\vec r,t)+\Phi_\alpha$, где

$$\Phi_\alpha=-\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta,k=1}^{N}{}'\frac{\partial U_{\delta k}}{\partial x_{\delta\alpha}}(|\vec r_\delta-\vec r_k|)\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi.$$

Потенциал Леннарда-Джонса или „6-12":

$$U=4\varepsilon\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12}-\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

Этот потенциал моделирует взаимодействие неполярных и незаряженных молекул.



Поменяем индексы суммирования δ и k:

$$\Phi_\alpha=+\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta,k=1}^{N}{}'\frac{\partial U_{\delta k}}{\partial x_{\delta\alpha}}(|\vec r_\delta-\vec r_k|)\,\delta_k(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

45) Приведите вывод уравнения баланса энергии.

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(\vec r,t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{\delta=1}^{N(\vec r,t)} \frac{m_\delta \vec v_\delta^2}{2} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta \vec v_\delta^2(t)}{2}\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta \vec v_\delta^2}{2} v_{\delta\alpha}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N} m_\delta v_{\delta\gamma}\dot v_{\delta\gamma}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta \vec v_\delta^2}{2} v_{\delta\alpha}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$ – плотность потока кинетической энергии.

$$\vec v_\delta = \vec v(\vec r,t) + \vec u_\delta$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta \vec v_\delta^2}{2}\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi = \frac{\rho\vec v^2}{2}+\rho\mathcal{E}_k,$$ где

$$\rho\mathcal{E}_k = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta \vec u_\delta^2}{2}\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$ – плотность кинетической энергии теплового движения

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N}\frac{m_\delta}{2}(\vec v+\vec u_\delta)^2(v_\alpha+u_{\delta\alpha})\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi =$$

$$= \frac{\rho v^2}{2}v_\alpha + \rho\mathcal{E}_k v_\alpha + v_\beta p_{\alpha\beta} + q_\alpha,$$ где

$$q_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N} m_\delta\frac{\vec u_\delta^2}{2}u_{\delta\alpha}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$ – плотность потока тепла.

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_\alpha = \rho v_\alpha\left(\frac{v^2}{2}+\mathcal{E}_k\right) + p_{\alpha\beta}v_\beta + q_\alpha}$$

Получим:

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}_k}{\partial t} + \frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{v^2}{2}+\mathcal{E}_k\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\rho v_\alpha\left(\frac{v^2}{2}+\mathcal{E}_k\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{p_{\alpha\beta}v_\beta\} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = \rho v_\alpha\left\{\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right\} +$$

$$+ \rho\left\{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}_k + v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathcal{E}_k\right\} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(p_{\alpha\beta}v_\beta) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

Домножим уравнение баланса импульса

$$\rho\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right) + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N} m_\delta\dot v_{\delta\alpha}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

на v_α и просуммируем. Получим

$$\rho v_\alpha\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right) + v_\alpha\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N} m_\delta v_{\delta\alpha}\dot v_{\delta\alpha}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi$$

Получим в результате:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\mathcal{E}_k + p_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec r)}\sum_{\delta=1}^{N} m_\delta u_{\delta\gamma}\dot v_{\delta\gamma}\,\delta_\delta(\vec r+\vec\xi,t)\,d\vec\xi}$$

$$m_\delta\dot v_{\delta\gamma} = m_\delta f_\gamma - \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\partial U_{\delta k}}{\partial x_{\delta\gamma}}$$

На $\mathcal{E}_k$ гравитационные силы не оказывают никакого влияния.

Для газов работа сил взаимодействия на тепловых скоростях может быть положена равной нулю.

(47) Сформулируйте условие применимости приближения идеальной жидкости и идеального газа. Получите в этом приближении уравнение Эйлера

Для достаточно медленных движений разумно предположить, что в каждой $\Delta(\vec{r})$ окрестности частицы находится в равновесном состоянии, которое характеризуется отсутствием потоков. Оно не меняется если обратить тепловые скорости частиц ($\vec{u}_i \to -\vec{u}_i$). Это состояние локального термодинамического равновесия. Тогда

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec{r})}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^{\alpha} u_i^{\beta} \delta_i d\vec{\xi} = 0 \text{ если } \alpha \neq \beta$$

$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} \neq 0$

В состоянии равновесия

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec{r})}\sum_{i=1}^{N} m_i u_{ix} u_{ix} \delta_i d\vec{\xi} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec{r})}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i^2 \delta_i d\vec{\xi} = p(\vec{r},t) \quad p = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_k$$

$$\frac{1}{n(\vec{r},t)}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec{r})}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u_i^2}{2}\delta_i d\vec{\xi} = \frac{3}{2}T \Rightarrow p = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_k = nT$$

$$P_{\alpha\beta} = p(\vec{r},t)\delta_{\alpha\beta}$$

(48) Рассматриваем такую среду для которой $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \neq 0$

Для идеальной жидкости $P_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} = p(\vec{r},t)\delta_{\alpha\beta}$

Тогда уравнение баланса импульса

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\delta}P_{\alpha\delta} = \rho f_\alpha$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right)\vec{v} + \vec{\nabla}P = \rho\vec{f}}$$ – уравнение Эйлера

Если $\vec{v} = 0$ (гидростатика), то $\vec{\nabla}p = \rho\vec{f}$

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\delta_{\alpha\beta}p)dV = \oint \delta_{\alpha\beta}p\,dS_\beta$$

$$\Rightarrow \int \vec{\nabla}p\,dV = \oint p\,d\vec{S}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right)\vec{v} + \vec{\nabla}p = \rho\vec{f} \\ \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right)\varepsilon + P_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \end{cases}$$

Если жидкость идеальная, то

$$q_\alpha = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i u_i^2}{2} u_i \delta_i \right\rangle = 0$$ – адиабатические процессы

Для идеальной жидкости

$$\rho\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\varepsilon\right] + p\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

(48) Получите интеграл Бернулли для стационарного движения идеальной жидкости

$\mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + [\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}]$

Уравнение Эйлера принимает вид

$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}] = -\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} - \vec{\nabla}U - \vec{\nabla}\frac{p}{\rho}$, где $\vec{f} \equiv -\vec{\nabla}U$

Для идеальной жидкости

$\rho\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\varepsilon\right] + p\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})$ – субстанциональная производная

$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{p}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{v}$

Согласно уравнению непрерывности

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho) - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ или $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}$

$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = -p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$\frac{1}{\rho}$ – объём единичной массы жидкости.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dt}$

$\varepsilon + \frac{p}{\rho} = w(\vec{r},t)$ – энтальпия или тепловая функция

$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \Rightarrow w = w(p)$ – функция только p,

а $\frac{dw}{dp} = \frac{1}{\rho}$.

Тогда $\vec{\nabla}w(p) = \frac{dw}{dp}\vec{\nabla}p = \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$

Поэтому уравнение Эйлера можно записать в виде: $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + U + w\right)$

Пусть поток стационарный, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$

Вектор $\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v}$ – касательный к линии тока.

Домножим уравнение на $\vec{l}$, получим

$(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{v^2}{2} + U + w\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2} + w + U\right) = 0$

~~Вд~~ Вдоль линии тока величина

$\boxed{\frac{v^2}{2} + U + w = \mathrm{const}}$ – интеграл Бернулли

Для несжимаемой жидкости $w = \frac{p}{\rho}$

$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const}$ – уравнение Бернулли

49) Получите интеграл Лагранжа–Коши для безвихревого движения идеальной жидкости

Для идеальной жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + U + W\right)$$

$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$ – движение жидкости безвихревое.

Тогда $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\varphi \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U + W\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U + W = \psi(t)}$ – интеграл Лагранжа–Коши. Он справедлив для всего объёма жидкости. Можно положить $\psi(t) = 0$.

Для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U + \frac{P}{\rho} = \psi(t)$$

Если $\frac{d\rho}{dt} = 0$, то $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$.

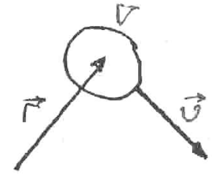
50) Приведите вывод уравнения Навье–Стокса

Преобразуем тензор давлений к виду

$P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}$. Если $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, то это идеальная жидкость.

$\sigma_{\alpha\beta}$ – тензор вязких напряжений

Сила, действующая на объём V, возникает, если $\vec{v}(\vec{r}, t) \neq \vec{v}(\vec{r}', t)$



Возникают силы внутреннего трения.

Тогда $\sigma_{\alpha\beta}$ – функция только градиентов скорости $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$

В линейном приближении $\sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial v_\kappa}{\partial x_\nu}\right)$ раскладывается в ряд Тейлора до линейных членов.

$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ – симметрический тензор, поэтому он зависит только от симметрической комбинации градиентов скоростей. Найдём её.

Любой тензор второго ранга (в том числе $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$) может быть представлен в виде суммы трех тензоров: симметричного с равными нулю следом, антисимметричного и диагонального.

Доказательство:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

Поэтому $\sigma_{\alpha\beta} = \eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}$

η – сдвиговая вязкость, ζ – объёмная вязкость.

Уравнение баланса импульса принимает вид:

$$\rho\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}v_\alpha\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho f_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right\}$$

Если $\eta, \xi = const$, то уравнение может быть записано в векторном виде:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v})}$$

– уравнение Навье-Стокса.

51) Приведите полную систему уравнений гидродинамики

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v}) \\ \rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right]\varepsilon + P_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ P_{\alpha\beta} = p\,\delta_{\alpha\beta} - \eta\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right] + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \\ \vec{q} = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \quad \text{– закон Фурье} \end{cases}$$