Вопрос №1

Инвариантность уравнений Ньютона относительно преобразований Галилея, уравнений движения релятивистской частицы относительно преобразований лоренца

В преобразованих галилея, для инерциальной СО S и СО S', движущейся относительно S с постоянной скоростью $\overrightarrow{v}_0$, а также для произвольной точки пространства с радиус вектором $\overrightarrow{r}$ в системе S:

$$\overrightarrow{r}' + \overrightarrow{r}_{S'} = \overrightarrow{r}$$

Обыкновенное векторное тождество. В силу инвариантности малых элементов времени в разных СО, мы можем взять одну и ту же производную по времени от обеих частей. Тогда:

$$\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{v}$$

Или Галилеевский закон сложения скоростей. Согласно принципу относительности Галилея, все явления протекают одинаково в разных инерциальных СО. Поскольку S', очевидно, является инерциальной, то в ней работает тот же закон

$$\overrightarrow{F}' = m\overrightarrow{a}'$$

Дифференцируя закон сложения скоростей еще раз, в силу инерциальности S':

$$\overrightarrow{a}' = \overrightarrow{a}$$

А значит, из уравнения выше: $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}'$ А раз все величины одинаковы, то одинаковы будут и сами уравнения.

Для случая релятивистской частицы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}L(x,\dot{x},t) - \frac{\partial}{\partial x_i}L(x,\dot{x},t) = F_i^d$$

Введем замену координат $x = x(q,t)$ с требованием существования обратного преобразования: $q = q(x,t)$. Также нам понадобятся очевидные соотношения: $\dot{x} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}x$, и аналогичные им: $\dot{q} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial q}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial t}q$. Обозначим: $L'(q,\dot{q},t) = L(x(q,t),\dot{x}(q,t),t)$. Тогда, переписываем уравнения Лагранжа:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial L'}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i}\right)\right] - \sum_{j=1}^N\left[\frac{\partial L'}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i}\right)\right] = F_i^d$$

Очевидно, в силу независимости q от $\dot{x}$, что $\frac{\partial q_j}{\partial \dot{x}_i} = 0$, одновременно: $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}$ из записанных выше соотношений. Тогда:

$$\sum_{j=1}^n\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\right] - \sum_{j=1}^N\left[\frac{\partial L'}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i}\right)\right] = F_i^d$$

Раскрывая полную производную на первом слагаемом:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\right] = \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial L'}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial x_i}$$

Подставляя это оборатно и группируя слагаемые, получаем:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j}\right] + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \dot q_j}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L'}{\partial \dot q_j}\right] = F_i^d$$

Вторая группа слагаемых сокращается, а для первой остается:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j}\right] = F_i^d$$

Чтобы избавиться от ненужной суммы в левой части, перепишем уравнение. Введем вектор $F^d = F_i^d$, вектор: $A = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j}$ и матрицу $B = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}$

Тогда уравнение выше переписывается как:

$$BA = F$$

Домножив на обратную к B матрицу $B^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}F_i^d \equiv Q_j^d$$

Что и требовалось показать. Преобразование Лоренца, очевидно, относится к классу таких преобразований. В самом деле, во-первых, у него есть обратное, а во-вторых, старые координаты выражаются только через новые и время.

Вопрос №2

Приведите вывод законов сохранения Энергии, Импульса, Момента импульса у частицы в релятивистской и нерелятивистской механике. Сформулируйте условия, которым должны удовлетворять силы.

1) Закон сохранения импульса. И в релятивистской, и в обычной механике уравнение выглядит как: $\dot{\overrightarrow{p}} = \overrightarrow{F}$. В таком случае, рассмотрим скалярное произведение на любое направление $\overrightarrow{n}$:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n})$$

Отсюда очевидное условие на сохранение проекции импульса на любую ось n: $F_n = 0$, где F_n - сумма всех сил.

2) Закон сохранения момента импульса вытащим в следующем виде:

$$\dot p_i = F_i => \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}[\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{p}] + [\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}]$$

Что в релятивистской, что в нерелятивистской механике, импульс сонаправлен с вектором скорости. Тогда первое слагаемое справа исчезнет.

Останется только момент сил. Откуда очевидно условие на момент вытекает также, как из условия на импульс.

3)Закон сохранения Энергии:

$$\dot{E} = (\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{p}})$$

В это можно поверить, а можно убедиться руками:

$$(\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{p}}) = m(\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{v}}) = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{m}{2}v^2$$

$$(\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{p}}) = \gamma m\left[(\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{v}}) + \gamma^2 v^2 \frac{v\dot{v}}{c^2}\right] = m\gamma^3[v\dot{v}]$$

Последний переход сделан в силу: $(\overrightarrow{v}, \dot{\overrightarrow{v}}) = \sum \dot{x}_i \ddot{x}_i = v\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}v = v\frac{1}{2}\frac{\sum 2\dot{x}_i\ddot{x}_i}{v}$. При этом мощность:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}E = mc^2\left[-\frac{1}{2}\gamma^3\left(-2\frac{v\dot{v}}{c^2}\right)\right]$$

То есть то же самое и в релятивиской механике. В обоих случаях:

$$\dot{E} = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{F})$$

Разложим силу на потенциальную, диссипативную и гороскопическую составляющие $F = F^g + F^d - \bigtriangledown U$. В таком случае:

$$\dot{E} = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{F^d}) - (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\bigtriangledown})U$$

При этом, обратим внимание, что полная производная потенциала $\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}U = \frac{\partial}{\partial t}U + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\bigtriangledown}U)$, что позволяет заменить:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(E + U) = \frac{\partial}{\partial t}U + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{F^d})$$

А значит, полная энергия будет сохраняться в отсутствие диссипативных сил и в консервативных полях.

Вопрос №3

Считая известными заокны кеплера, получите выражение для силы, действующей со стороны силового центра на частицу

Из законов Кеплера следует, что секторальная скорость постоянна. В то же время, что такое секторальная скорость? Это $\overrightarrow{\sigma} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{r} \times \dot{\overrightarrow{r}}]$. В полярных координатах: $\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(r\overrightarrow{e}_r) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi => \overrightarrow{\sigma} = \sigma\overrightarrow{e}_z = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = const = \sigma_0 => \dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{r^2}$

Для второй производной координаты:

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = [\ddot{r}\overrightarrow{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi] + [\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]\overrightarrow{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e}_r = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right]\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left[r^2\dot{\varphi}\right]\overrightarrow{e}_\varphi$$

Подставляя полученное выражение для $\dot{\varphi}$:

$$\overrightarrow{\ddot{r}} = \left[\ddot{r} - \frac{4\sigma_0^2}{r^3}\right]\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left[2\sigma_0\right]\overrightarrow{e}_\varphi$$

А теперь выразим производные по времени $\dot{r} = \frac{\mathtt{d}r}{\mathtt{d}\varphi}\dot{\varphi} = -2\sigma_0\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}\varphi}\frac{1}{r} => \ddot{r} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{r^2}\frac{\mathtt{d}^2}{\mathtt{d}^2\varphi}\frac{1}{r}$ откуда

$$\overrightarrow{\ddot{r}} = -\frac{4\sigma_0^2}{r^2}\left[\frac{\mathtt{d}^2}{\mathtt{d}^2\varphi}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right]\overrightarrow{e}_r$$

Для траекторий планет в виде эллипсов: $r = \frac{\rho}{1+\epsilon\cos\varphi}, \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \rho = \frac{b^2}{a}$ теперь, окончательно:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \frac{\epsilon}{r}\cos\varphi, \frac{\mathtt{d}^2}{\mathtt{d}^2\varphi}\frac{1}{r} = -\frac{\epsilon}{r}\cos\varphi => \overrightarrow{\ddot{r}} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho r^2}$$

Из закона Ньютона: $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\ddot{r}} = \frac{m\alpha}{r^2}\overrightarrow{e}_r$, а из 3 закона Ньютона очевидно, что точно также должна вылезать из выражения и масса второго тела. Значит, окончательно: $\overrightarrow{F} = \gamma\frac{m_1 M_2}{r^2}\overrightarrow{e}_r$

Что и требовалось показать. По желанию можно воспользоваться известными из Кулона финтифлюшками и показать еще, что потенциал обратно пропорционален первой степени радиуса, и выполняется известное из максвелла уравнение о дивергенции напряженности гравитационного поля, но мы не будем страдать такой фигней намеренно.

Вопрос №4

Покажите, что общее выражение для силы Лоренца может быть получено из уравнений Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил вместе с первой парой уравнений Максвелла

Рассмотрим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}L - \frac{\partial}{\partial q_i}L = 0$$

А также уравнение движения:

$$\overrightarrow{\dot{p}}_i = F_i^l = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}L_0 - \frac{\partial}{\partial q_i}L_0$$

Вычитая одно из второго и вводя обозначения: $U(q,\dot{q},t) = L - L_0$:

$$F_i^l = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}U - \frac{\partial}{\partial q_i}U =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}U\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial\dot{q}_i}U\dot{q}_j + \frac{\partial^2}{\partial t\partial\dot{q}_i}U - \frac{\partial}{\partial q_i}U = F_i^l(q,\dot{q},t)$$

Поскольку сила лоренца зависит только от первых производных кординат, то первые смешанные производные должны обращаться в нуль тождественно. Это значит, что обобщенный потенциал U будет лишь линейной формой от скоростей:

$$U(q,\dot{q},t) = V(q,t) + \sum_{j=1}^{N} a_j(q,t)\dot{q}_j$$

Подстановкой в выражение выше имеем:

$$\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial a_i}{\partial q_j} + \frac{\partial a_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial q_i} U = F_i^l(q,\dot{q},t)$$

Нетрудно видеть групировку слагаемых:

$$\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \left[\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial a_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial q_i} V = F_i^l(q,\dot{q},t)$$

Очевидно также, что в первых скобках стоит на самом деле соответствующая компонента ротора, а значит, можно написать, используя два недостающих уравнения:

$$\left[\dot{\overrightarrow{q}} \times \mathtt{rot}\,\overrightarrow{a}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{a} - \mathtt{grad} V = \overrightarrow{F}^l$$

Вводя обозначения: $V = e\varphi, \overrightarrow{a} = \frac{e}{c}\overrightarrow{A}, q = r, \dot{q} = v$:

$$\frac{e}{c}\left[\overrightarrow{v} \times \mathtt{rot}\,\overrightarrow{A}\right] + e\left[-\mathtt{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right] = \overrightarrow{F}^l$$

Что и есть выражение для силы Лоренца в нуэном нам виде. Осталось получить два недостающих уравнения максвелла. Введем обозначения:

$$\overrightarrow{E} = -\mathtt{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} = \mathtt{rot}\,\overrightarrow{A} =>$$

$$\mathtt{div} B = \mathtt{div\ rot}\,\overrightarrow{A} \equiv 0$$
$$\mathtt{rot} E = -\mathtt{rot\ grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathtt{rot}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}$$

Что и требовалось помогать.

Вопрос №5

Показать, что функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени от произвольной скалярной функции координат и времени. Установите связь таких преобразований Лагранжа с калибровочными преобразованиями потенциалов элемктромагнитного поля

В самом деле, рассмотрим два лагранжиана, приводящих к одинм и тем же уравнениям движения:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L_1 - \frac{\partial}{\partial q_i}L_1 = 0, \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L_2 - \frac{\partial}{\partial q_i}L_2 = 0$$

Вычитая одно из другого:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\Delta L - \frac{\partial}{\partial q_i}\Delta L = 0$$

Раскрывая полную производную, окончательно:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \Delta L + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j \Delta L + \frac{\partial^2}{\partial t \partial \dot{q}_i}\Delta L - \frac{\partial}{\partial q_i}\Delta L = 0$$

Никаких ограничений на вторую производную накладываться не может, поэтому мы должны потребовать, чтобы первое слагаемое обнулялось тождественно. Это приведет к тому, что ΔL будет лишь линейной формой по скорости. Аналогично 4 вопросы, обозначим:

$$\Delta L = \alpha(q,t) + \sum \dot{q}_i \beta_i(q,t)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{q}_j \beta_i + \frac{\partial}{\partial t}\beta_i - \frac{\partial}{\partial q_i}\alpha - \sum_{j=1}^{N}\dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_i}\beta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N}\dot{q}_j\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\beta_i - \frac{\partial}{\partial q_i}\beta_j\right] + \frac{\partial}{\partial t}\beta_i - \frac{\partial}{\partial q_i}\alpha = 0$$

Это выражение должно выполняться для всех скоростей, а значит, нужно потребовать, чтобы и первая скобка тождественно обнулялось. То есть:

$$\mathtt{rot}\beta = 0 => \beta = \mathtt{grad} f(q,t) =>$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(q,t) - \alpha(q,t)\right] = 0$$

Значит, нам достаточно потербовать: $\alpha(q,t) = \frac{\partial}{\partial t}f(q,t) + \gamma(t)$. Из-за произвольности функции f последнюю неизвестную функцию можно загнать под дифференциал и получить окончательно:

$$\Delta L = \frac{\partial}{\partial t}f(q,t) + \sum_{k=1}^{N}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}f(q,t) = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}f(q,t)$$

Что и требовалось показать. То есть мы можем прибавлять полную провзодную от любой функции лишь координат и времени, при этом без потери вида уравнений движения. Это обстоятельство используется для облегчения записи электромагнитных потенциалов. В самом деле, пусть есть Лагранжиан электромагнитного поля:

$$L_1 = L_0 + \frac{e}{c}(\overrightarrow{A}, \dot{\overrightarrow{q}}) - e\varphi = L_0 + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{N}\dot{q}_k A_k - e\varphi$$

Примнеим к нему калибровочное преобразование и сгруппируем слагаемые:

$$L_2 = L_0 - e\left[\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}f\right] + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{N}\dot{q}_k\left[A_k + \frac{\partial}{\partial q_k}f\right]$$

Видна очевидная замена: $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f$, $\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \mathtt{grad} f$

Непосредственнйо проверкой легко убедиться, что при этом напряженности полей не меняются, что и должно бы тьв соответтсвии с инвариантностью уравнений движения.

Вопрос №6

Исследуйте одномерное движение в консервативном поле. Получите формулу для периода нелинейных колебаний. Найдите функцию Лагранжа для одномреного финитного движения частицы во внешнем поле в приближении линейных колебаний, линейное уравнение движения при наличии диссипативной силы, пропорциональной скорости и общее решение уравнения движения.

В одномерном консервативном поле функция Лагранжа принимают вид:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

В это уравнение не входит явно время, а значит интегралом движения будет являться энергия системы частиц. То есть:

$$E = const = E_0 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) <=> \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U(x)\right]}$$

$$\pm\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U(x)\right]}} = t - t_0$$

Финитное движение подразумевает точки поворота. Тогда, для периода имеется очевдиное выражение:

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U(x)\right]}}$$

В общем виде эту байду решить не удастся, так что мы воспользуемся рпиближением линейных колебаний, а именно, разложим $U(x)$ в ряд в окрестности экстремума потенциала, в нашем случае - минимума. Тогда:

$$U(x) = U_{min} + (x - x_0)U'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}U''(x_0) = U_{min} + \frac{(x - x_0)^2}{2}U''(x_0)$$

Подстановка этого выражения в функцию Лагранжа дает, с опусканием константы:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{(x - x_0)^2}{2}U''(x_0)$$

Теперь сделаем замену координат $q = x - x_0$, запишем уравнение Лагранжа с диссипативной силой во внешнем поле $U_{ext}(x, t)$:

$$m\ddot{q} + qU''(x_0) + \frac{\partial}{\partial q}U_{ext} = F^d = -k\dot{q} <=>$$

$$m\ddot{q} + k\dot{q} + U''(x_0)q = -\frac{\partial}{\partial q}U_{ext}(q, t)$$

Предположим, что внешнее поле меняется слабо, и его производную можно заменить своим значением в минимуме потенциала. Тогда, нетрудно видеть в левой части уравнение колебаний и понять его общее решение: $q(t) = e^{-\frac{k}{2m}t}\left(A\exp\left[\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{U''(x_0)}{m}}t\right]+B\exp\left[-\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{U''(x_0)}{m}}t\right]\right)$

Полагая, что тут есть хоть какие-то колебания, мы потребуем $U''(x_) > \frac{k^2}{4m}$ и введем обозначение $\sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}-\frac{k^2}{4m^2}} = \Omega$, $\frac{k}{2m} = \gamma$, $\frac{U''(x_)}{m} = \omega_0^2$. Тогда, общее решение нашего однородного уравнения дается:

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left(A'\sin[\Omega t] + B'\cos[\Omega t]\right)$$

Отсалось найти частное решение неоднородного уравнения. Для него можно воспользоваться методом преобразований Фурье. Введем обозначение: $-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial q}U(q,t)|_{q=0} \equiv Q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega q(\omega)e^{-i\omega t}, q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dtq(t)e^{i\omega t}$$

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega Q(\omega)e^{-i\omega t}, Q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dtQ(t)e^{i\omega t}$$

Подставляя это в исходное уравнение:

$$q(\omega)(-\omega^2) - 2\gamma i\omega q(\omega) + \omega_0^2 q(\omega) = Q(\omega) <=> q(\omega) = \frac{Q(\omega)}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2} =>$$

$$q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(\omega)\mathtt{d}\omega}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}e^{-i\omega t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathtt{d}\omega e^{i\omega(t'-t)}}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}Q(t')dt'$$

Обозвав $G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathtt{d}\omega e^{i\omega(t'-t)}}{-\omega^2-2i\gamma\omega+\omega_0^2}$, придем к известной формуле для частного решения через функцию Грина:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')Q(t')dt'$$

Явный вид функции грина получается, если руками взять и найти ее интеграл через вычеты. Он имеет два простых полюса в точках $-i\gamma-\Omega, -i\gamma+\Omega$. Чтобы взять интеграл с помощью вычетов, нужно для разных $t-t'$ выбирать контур либо сверху, либо снизу, чтобы был правильный знако в показателе экспоненты. Если $t'-t > 0$, то обходить мы будем сположительной мнимой чатсью, то есть сверху. Тогда нужен вычет ни в одном из полюсов, то есть по теореме коши интеграл занулиться. А вот если $t-t' > 0$, То нам нужны оба полюса и формулы дают:

$$G(t,t') = \frac{2\pi i}{2\pi}\frac{\left[e^{i\omega_1(t'-t)} - e^{i\omega_2(t'-t)}\right]}{\omega_1-\omega_2} = \frac{\sin(\Omega(t-t'))}{\Omega}e^{-\gamma(t-t')}$$

Возвращая это обратно в нашу формулу:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} Q(t')e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin(\Omega(t-t'))}{\Omega}dt'$$

Останется только взять интеграл.

Вопрос №7

Приведите вывод уравнений, определяющих изменение со временем импульса, момента импульса и энергии системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле при наличии диссипативных сил. Получите уравнения движения тела с переменной массой.

1)Рассмотрим систему n взаимодействующих частиц, которые находятся к тому же во внешнем поле и подвержены диссипативным силам. Тогда:

$$L(\overrightarrow{q}_\alpha, \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, t) = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m}{2}|\dot{\overrightarrow{q}}|^2_{alpha} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta}(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|) - \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha)$$

А также множеством диссипативных сил F^d_α, которые учтутся в уравнениях движения. Для такой системы суммарное изменение импульса суть:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\overrightarrow{P} = \sum_{\alpha=1}^{n}\dot{\overrightarrow{p}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n}\left[-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta}(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha) + F^d_\alpha\right]$$

При раскрытии скобок первую двойную сумму можно переписать в виде(благодаря симметрии замены $\alpha <-> \beta$):

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}U_{\alpha\beta}(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_\alpha}U_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial q_\beta}U_{\alpha\beta}\right] = 0$$

Последнее равенство очевидно, так как знаки у разных α и β под аргументом разные. Значит, первая сумма сама себя схлопывает, и остается только внешние поля и внешние силы. Таким образом, полный импульс системы будет сохраняться, если сумма всех внешних сил(потенциальных в том числе) равна нулю, что выразится в нуле справа.

2) Момент импульса ситемы есть сумма моментов отдельных ее слагаемых. Запишем это в виде:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}L = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}[\overrightarrow{q}_\alpha \times \overrightarrow{p}_\alpha] = \sum_{\alpha=1}^{n}[\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha \times \overrightarrow{p}_\alpha] + \sum_{\alpha=1}^{n}[\overrightarrow{q}_\alpha \times \dot{\overrightarrow{p}}_\alpha]$$

Последняя сумма заменяется с помощью уравнений движения, Первая же группа слагаемых обнуляется в силу коллинеарности импульса и скорости:

$$\dot{\overrightarrow{p}}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta}(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha) + F^d_\alpha$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial q_{\alpha i}}U_{\alpha\beta} = U'_{\alpha\beta}\frac{(\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta)_i}{|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|}$. КОгда мы будем векторно перемножать координаты с дивергенциями, то мы получим множество слагаемых вида:

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{n} q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial q_{\alpha j}}U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\left(q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial q_{\alpha j}}U_{\alpha\beta} + q_{\beta k}\frac{\partial}{\partial q_{\beta j}}U_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n}(q_{\alpha k} - q_{\beta k})\frac{\partial}{\partial q_{\alpha j}}U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n}(q_{\alpha k} - q_{\beta k})U'_{\alpha\beta}\frac{q_{\alpha j} - q_{\beta j}}{|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|}$$

Нетрудно видеть, что это слагаемое симметрочно по k и j, и его пара в векторном произведении его самого убьет. В итоге останется:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}L = \sum_{\alpha=1}^{n}\left[\overrightarrow{q}_\alpha \times \left(-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha) + F_\alpha^d\right)\right] \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha$$

То есть изменнеие момент импульса равно моменту всех внешних сил(потенциальных или диссипативных). Ч.т.п.

3) Запишем энергию системы:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_\alpha \dot{q}_\alpha^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta}(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|) + \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha, t)$$

С другой стороны, из уравнений двжиения:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}H = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha}\right) - L\right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\ddot{\overrightarrow{q}}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha}\right) - \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}L =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\ddot{\overrightarrow{q}}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{q}_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{q}_\alpha}\right) - \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}L =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, F_\alpha^d\right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Таким образом,

$$\dot{H} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}_\alpha, F_\alpha^d\right) - \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha^{ext}(\overrightarrow{q}_\alpha, t)$$

Что и требовалось. Как видно, если внешние поля не зависят от времени, то есть являются консервативными, а мощность диссипативных сил равна нулю(то есть они отсутствуют), тогда энергия в системе сохраняется.

4) Выводу равнения мещерского. Рассмотрим импульс системы в два близких момента времени:

$$\overrightarrow{p}(t) = m(t)\overrightarrow{v}(t); \overrightarrow{p}(t+dt) = (m(t) - dm)(\overrightarrow{v} + d\overrightarrow{v}) + dm\overrightarrow{v_1}$$

$$d\overrightarrow{p} = m(t)d\overrightarrow{v} + dm(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v})$$

$$\frac{\mathtt{d}\overrightarrow{p}}{\mathtt{d}t} = m(t)\frac{\mathtt{d}\overrightarrow{v}}{\mathtt{d}t} + \frac{\mathtt{d}m}{\mathtt{d}t}(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{F} = 0 => x \text{ Если } \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} = const:$$

$$d\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\frac{\mathtt{d}m}{m} => \overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{u}\,\mathtt{ln}\frac{m}{m_0}$$

Вопрос №8

Приведите доказательство теоремы о вириале для системы частиц с парным потенциалом взаимодействия, зависящим только от расстояний между частицами, и, в частности, для частиц с кулоновским взаимодействием.

Это теорема о соотношениях между средними значениями полной кинетической энергии системы и энергии взаимодействия её частей. Возьмем полученное нами уравнение движения:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\overrightarrow{p}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta}\left(|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|\right) + F_\alpha^d$$

Домножим это скалярно на $\overrightarrow{q}_\alpha$ и просуммируем по всем α:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\overrightarrow{p}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{p}_\alpha\right) - \sum_{\alpha=1}^{n}(\dot{\overrightarrow{q}}, \overrightarrow{p}) =$$

$$= -\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, U'_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta}{|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{F}_\alpha^d\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n} U'_{\alpha\beta}|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta| + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{F}_\alpha^d\right)$$

Давайте теперь посчитаем среднее значение от:

$$\overline{\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{p}_\alpha\right)} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{p}_\alpha\right)dt =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}(\tau)_\alpha, \overrightarrow{p}(\tau)_\alpha\right) - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}(0)_\alpha, \overrightarrow{p}(0)_\alpha\right)\right] = 0$$

А значит, усредняя выражение выше, пользуясь $\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\dot{\overrightarrow{q}}, \overrightarrow{p}\right) = 2E_k$:

$$-2\overline{E}_k = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{\alpha\beta=1}^{n}|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|U'_{\alpha\beta}} + \overline{\sum_{\alpha=1} n\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{F}_\alpha^d\right)}$$

Вириал клаузиуса:

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4}\overline{\sum_{\alpha\beta=1} n|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta|U'_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{F}_\alpha^d\right)}$$

Для однородных степени n потенциалов, в силу уравнения Эйлера на них:

$$t\frac{df}{dt} = nf$$

$$|\overrightarrow{q}_\alpha - \overrightarrow{q}_\beta| U'_{\alpha\beta} = nU_{\alpha\beta}$$

При этом энергия взаимодействия: $U_{in} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{n} U_{\alpha\beta} =>$

$$\overline{E}_k = \frac{n}{2}U_{in} + \frac{1}{2}\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overrightarrow{q}_\alpha, \overrightarrow{F}_\alpha^d\right)}$$

И для отсутствия диссипативных сил просто $\overline{E}_k = \frac{n}{2}U_{in}$. Для кулона это просто $\overline{E}_k = -\frac{1}{2}U$ Ч.т.п.

Вопрос № 9

Считая заданными уравнения голономных идеальных связей, приведите вывод уравнений Лагранжа с реакциями связей (1-го рода); получите уравнение для изменения полной энергии системы при наличии связей.

Итак, пускай у нас есть k связей, таких, что уравннеия связи $f(\overrightarrow{r_i}) = 0$, то есть они не зависят от скоростей частиц, а также работа их сил реакций на виртуальных перемещениях(на перемещениях. разрешенных уравнениями связей при фиксированном времени) равна нулю. Виртуальное перемещение можно определить по формуле:

$$\bigtriangledown f\delta\overrightarrow{r} = 0$$

Равенство нулю работы сил реакции есть: $\left(\overrightarrow{R_i}, \delta\overrightarrow{r}\right) = 0$. Уравнение движения нам известны в форме:

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{F}^{ext} + \sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{R}_i$$

Введем k постоянных λ_k:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overrightarrow{R}_i - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\overrightarrow{\bigtriangledown}_i f_\alpha\right)\delta\overrightarrow{r} = 0$$

Это 3N уравнений на вариации координат, из которых k должны быть зависимыми. Эти уравнения можно упростить, подобрав коэффициенты λ_i так, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях обращались в ноль. Для всех остальных независимых вариаций необходимо одновременно обращение в нуль коэффициентов при них, что приведет нас к уравнениям на R:

$$\overrightarrow{R} = \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\overrightarrow{\bigtriangledown}_i f_\alpha => m\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{F}_{ext} + \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\overrightarrow{\bigtriangledown}_i f_\alpha, \forall\alpha : f_\alpha = 0$$

Это и есть уравнения лагранжа 1 рода со связями. Изменение полной энергии при наличии связей посчитаем следующим образом:

$$\dot{E} = -\frac{\partial}{\partial t}U^{ext} + \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F}^{d}\overrightarrow{v}_i + \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{R}\overrightarrow{v}_i$$

Которое отличается от обычного уравнения на мощность только третьим слагаемым -работотой сиыл связей. Это слагаемое можн опреобразовать, используя множители Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{R}\overrightarrow{v}_i = \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\left(\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{\nabla}_i f_\alpha\overrightarrow{v}_i\right) = \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\left(\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}f_\alpha - \frac{\partial}{\partial t}f_\alpha\right)$$

Полная производная уравнения связи занулится, так как полное приращение всегда в точности равно нулю. А вот останется слагаемое с частной производной, а значит:

$$\dot{E} = -\frac{\partial}{\partial t}U^{ext} + \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F}^{d}\overrightarrow{v}_i - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial}{\partial t}f_\alpha$$

Нетрудно видеть, что теперь нам потребовалось еще одно условие: условие стационарности связей. С ним энергия будет сохраняться.

Вопрос №10

10. Приведите вывод уравнений Лагранжа для системы N частиц с s степенями свободы из уравнений Даламбера.

Уравнения Даламбера:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overrightarrow{F}_i - m_i\ddot{\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r} = 0, \forall\alpha : f_\alpha = 0$$

Это уравнение получается, когда мы берем уравнение двжиения со связями, домножаем его скалярно на виртуальное перемещение и пользуемся идеальностью связей. С помощью уравнений связей можно исключить k координат, и оставить только $3N - k = s$. Обзовем их $q_i, i = \overline{1, s}$. При этом виртуальные перемещения вычисляются по формулам:

$$\delta\overrightarrow{r}_i = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\overrightarrow{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

В то же время:

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\overrightarrow{v} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{r}$$

Подставляяя виртуальное перемещение по координатам в уравнение Дадамбера, имеем:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{s}\left(\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}-m_i\frac{\mathtt{d}\vec{v}_i}{\mathtt{d}t}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0$$

Введем обобщенную силу $Q_k=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$ и кинетическую энергию: $T=T(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{r}_i^2$. Используем $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}$:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(Q_k-\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left(\vec{v}_i,\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\vec{v}_i\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right]\right)\delta q_k=0$$

Первое слагаемое в квадратных скобках превратится в один нужны нам член, а именно:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left(\vec{v}_i,\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)=\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}v_i^2=\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}T$$

А второе слагаемое преобразуется как:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial q_k}\vec{r}_i=\frac{\partial}{\partial q_k}\vec{v}_i=>$$

Итоговая форма уравнений:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(Q_k-\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial q_k}T+\frac{\partial}{\partial q_k}T\right)\delta q_k=0$$

Так как это должно выполняться независимо для всех вариаций наших новых координат, то мы приходим к уравнениям лагранжа второго рода. Ч.т.п.

Вопрос №11

11. Приведите вывод уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия.

Для начала определим действие: $S=\int_{t_0}^{t}L(q,\dot{q},t)dt$. И проварьируем его:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right]dt$$

Полагая, что $\delta\dot{q}=\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\delta q$ и интегрируя по частям, получаем:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right]\delta q_k dt+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Из-за фиксированных концов подстановки на их границах обращаются в ноль, и мы получаем, в силу независимости вариаций для δq нужные нам уравнения лагранжа.

Вопрос №12

12. Получите выражение для функции Лагранжа и уравнения движения системы взаимодействующих частиц в неинерциальной системе отсчета.

То есть нам необходимо провести замену координат для неинерциальной системы отсчета. В нашем случае, пусть система S' движется относительно системы S по закону $\overrightarrow{r}_{S'}(t)$, а также вращается с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}(t)$, а лагранжиан в старой системе - $L(r, \dot{r}, t)$. Тогда имеется связь между старыми и новыми координатами:

$$\overrightarrow{r}' + \overrightarrow{r}_{S'}(t) = \overrightarrow{r}$$

Тогда, как мы уже показывали в первом вопросе, так как эти преобразования не зависят от скоростей частиц, то уравнения движения будут инвариантны относительно них. Осталось получить новый вид функции Лагранжа. Что ж, из-за вращения системы, закон сложения скоростей будет другим:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{s'}(t) + \overrightarrow{v}' + [\omega(t) \times \overrightarrow{r}']$$

Осталось подставить это в функцию лагранжа. Кинетическая энергия тут же разобьется на 6 слагаемых, три попарных произведения, и три полных квадрата. В силу неоднозначности функции лагранжа, можно первый квадрат выкинуть. Из попарных произведений также удалятся подобные члены. Итоговый лагранжиан выглядит очень громоздко и приведению тут не подлежит, однако он получается простой подстановкой и не содержит никаких лсожностей.

Уравнения движения конкретные получаются подстановкой функции лагранжа в уравнения лагранжа и вычисление производных.

Вопрос №14

Получите в квадратурах общее решение задачи о движении точечной частицы в центральном поле. При каких условиях траектория является замкнутой?

Рассмотрим частицы в центральном поле, где силовой центр совпадает с началом координат:

$$L = \frac{m}{2}v^2 - U(r)$$

Рассмотрим момент импульса этой частицы: $L = [\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}] = const$, так как для центрального поля момент единственной силы, действующей со стороны поля, равен 0, так как она сонаправлена с радиусом. Поскольку момент сохраняется, то движение происходит в одной плоскости, перпендекулярной ему. Отлично, введем на этой плоскости координаты ρ, φ и перепишем Лагранжиан:

$$L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Поскольку в лагранжиан явно не входит угол, то можно написать для момента импульса: $L_\varphi = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}L = \frac{m}{2}2\rho^2\dot{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = const = L_0 => \dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho^2}$. Значит, опять перепишем лагранжиан:

$$L(\rho, \dot{\rho}, t) = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} - U(\rho)$$

Соответственно, для энергии частицы:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} + U(\rho) \equiv \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho) = const$$

Энергия сохраняется из-за консервативности поля. Это уравнение прекрасно решается разделением переменных. В самом деле:

$$\frac{\mathtt{d}\rho}{\mathtt{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}$$

$$t - t_0 = \pm\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}$$

То есть закон движения. Для угла, соответтсвенно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathtt{d}\varphi}{\mathtt{d}\rho}\dot{\rho} => \frac{\mathtt{d}\varphi}{\mathtt{d}\rho} = \frac{1}{\dot{\rho}}\frac{L_0}{m\rho^2} => \varphi - \varphi_0 = \pm\int_{\rho(\varphi_0)}^{\rho(\varphi)} \frac{\frac{L_0}{m\rho^2}\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}$$

Допустимая область движения определяется существованием подынтегрального корня, а именно: $E - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \geq 0$, равенство же определяет точки поворота - точки, где в ноль обращается скорость изменения радиуса. Если есть две конечные точки поворота, то движение будет финитным, заключенным в ограниченной области, с периодом:

$$T = 2\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}$$

Где точки поворота ρ_{min} и ρ_{max} - корни уравнения $E - U_{eff}(\rho) = 0$. Этому периоду соответтсвует изменение угловой компоненты:

$$\Phi = 2\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L_0}{m\rho^2}\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}$$

Если какое-то число оборотов не даст набега фазы, кратного 2π, то траектория будет очевидно незамкнутой. Это условия эквивалентно: $\Phi = 2\pi\frac{m}{n}$, m, n - целые числа.

Для случая инфинитного движения, где $\rho_max = \infty$, вместо набега фазы за период имеется другая характеристика - угол рассеяния. Это угол: $\chi = \pi - \Phi$. Также отметим, что для падения частицы на силовой центр, необходимо, чтобы область около нуля потенциала обладала энергией, меньшей, чем энергия частицы. Это соответствует условию:

$$\lim_{r\to 0} U(\rho)\rho^2 + \frac{L_0^2}{2m} \leq 0$$

Это накладывает ограничение на степень, с которой потенциал ведет себя вблизи нуля.

Вопрос №15

Найдите траекторию частицы, совершающей финитное движение под действием центральной силы притяжения, U = -a/r, а также выражение для периода обращения частицы по эллиптической орбите.

Указанный потенциал уходит на $+\infty$ в нуле и стремиться к 0 снизу на бесконечноости. Финитное движение в нем будет реализовано, если $U_{min} < E < 0$. Точки поворота определяются уравнением:

$$E = \frac{L_0^2}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} <=> E\rho^2 + \alpha\rho - \frac{L_0^2}{2m} = 0;$$

$$D = \alpha^2 + \frac{2E}{m}L_0^2 => \rho_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{2E}{m}L_0^2}}{2E} = \frac{\alpha \pm |\alpha|\sqrt{1 - \frac{2|E|}{m}\frac{L_0^2}{\alpha^2}}}{2|E|}$$

То есть корня как раз два, что нам и требовалось. В таком случае, вернемся к нашим формулам для траектории:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\frac{L_0}{m\rho^2}\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-|E| + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\right)}} =$$

$$= \pm \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{-\frac{L_0}{m}\mathtt{d}\frac{1}{\rho}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-|E| - \frac{L_0^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + \frac{m\alpha^2}{2L_0^2}\right)}} =$$

$$= \pm \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{-\mathtt{d}\frac{L_0}{\sqrt{2m}}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)}{\sqrt{\frac{m\alpha^2}{2L_0^2} - |E| - \frac{L_0^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2}} = \pm\mathtt{arccos}\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2}}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L_0^4} - \frac{2m|E|}{L_0^2}}} =$$

$$= \pm\mathtt{arccos}\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2}}{\frac{m|\alpha|}{L_0^2}\sqrt{1 - \frac{2L_0^2|E|}{m\alpha^2}}}$$

Выражая отсюда ρ, пользуясь четность косинуса:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L_0^2} = \frac{m|\alpha|}{L_0^2}\sqrt{1 - \frac{2L_0^2|E|}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\rho = \frac{\frac{L_0^2}{m|\alpha|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \sqrt{1 - \frac{2L_0^2|E|}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Введя обозначения: $\frac{L_0^2}{m|\alpha|} = p, \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E}{m\alpha^2}} = \varepsilon$:

$$\rho = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Если φ_0 соответствует минимуму радиуса, то $\varphi_0 = 0$. Очевидно, что в нашем случае эксцентриситет ε меньше 1, а значит, все углы являются разрешенными. В таком случае траекторией будут эллипсы, при условии притягивающего потенциала, то есть $\alpha > 0$. Уравнение траектории:

$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \rho_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}, a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{|\alpha|}{2|E|}, b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}sqrt} = \frac{L_0}{\sqrt{2m|E|}}$$

Период обращения по эллиптической орбите посчитаем, найдя закон движения в параметрической форме. Параметр зададим следующим образом: $r(\xi) = a(1-\varepsilon\cos\xi)$. Тогда

$$\pm(t-t_0) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}a^2\varepsilon\int\frac{(1-\varepsilon\cos\xi)\sin\xi\mathtt{d}\xi}{\sqrt{-a^2(1-\varepsilon\cos\xi)^2+2a^2(1-\varepsilon\cos\xi)-b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}}a\int(1-\varepsilon\cos\xi)\mathtt{d}\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi)$$

Отсюда тут же следует период: $T = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}2\pi$

Для гравитационного оптенциала это немедленно приводит к закону Кеплера о кубах больших полуосей. В то же время сохранения момента количества движения тут же рпиводит к секторальному закону кеплера. Таким образом, нами получены вообще все законы кеплера, какие только есть.

Вопрос №16

Найдите траекторию и угол рассеяния частицы при ее инфинитном движении в поле центральной силы отталкивания с потенциалом $U = a/r$, а также силы притяжения с потенциалом $U = -a/r$.

Для обоих потенциалов для реализации инфинитного движения энергия частицы должна быть больше 0. В таком случае поулченная формула для траектории по-прежнему будет верной, но её эксцентриситет теперь станет больше 1 и приведет к тому, что появятся ограничения на возможные углы, а значит траектория выродится в гиперболу. Какие углы запрещены?

$$1+\varepsilon\cos\varphi = 0 => \varphi_1 = \pi - \mathtt{arccos}\frac{1}{\varepsilon}, \varphi_2 = \pi + \mathtt{arccos}\frac{1}{\varepsilon}$$

При этому неизбежно следует угол рассеяния, так как эти два угла - ассимптоты на - и + бесконечностях времени:

$$\chi = \pi - 2\mathtt{arccos}\frac{1}{\varepsilon} = \pi - 2\mathtt{arccos}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2L_0^2E}{m\alpha^2}}} = 2\left(\mathtt{arcctg}\sqrt{\frac{2EL_0^2}{m\alpha^2}}\right)$$

При этом для разных потенциалов ответ будет отличаться только знаком, для отталкивающего - минус, для притягивающего - плюс. Случай $E = 0$ представляет собой уравнение пораболы.

Вопрос №17

Получите общее решение (в квадратурах) задачи двух тел.

По сравнению с уже разобранным материалом, задача двух тел весьма осложняется необходимостью учитывать влияние и второй частицы на первую. сначала напишем нужный нам лагранжиан в наиболее простом виде:

$$L = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 - U(|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|)$$

Этот лагранжиан приводит к 6 уравнениям движения:

$$\begin{cases} m\ddot{\overrightarrow{r}}_1 & = & -\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}}U(|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|) \\ m\ddot{\overrightarrow{r}}_2 & = & -\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_2}}U(|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|) \end{cases}$$

Давайте сделаем замены переменных: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_m = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{r}_1 + \frac{m_2}{m}\overrightarrow{r}_2 => \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v} + \frac{m}{m_2}\overrightarrow{v}_m - \frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{v}_1 => \overrightarrow{v}_1 = \frac{m_2}{m}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}_m; \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_m - \frac{m_1}{m}\overrightarrow{v}$. Лагранжиан превращается в:

$$L = \frac{m_1}{2}(\frac{m_2}{m}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}_m)^2 + \frac{m_2}{2}(\overrightarrow{v}_m - \frac{m_1}{m}\overrightarrow{v})^2 - U(|\overrightarrow{r}|)$$

$$L = \frac{m}{2}\overrightarrow{v}_m^2 + \frac{m_1 m_2}{2m}\overrightarrow{v}^2 - U(|\overrightarrow{r}|) \equiv \frac{m}{2}\overrightarrow{v}_m^2 + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{v}^2 - U(|\overrightarrow{r}|)$$

Те координата центра масс явно исчезла из уравнения, а значит импульс в ее направлении сохраняется. Значит, $v_m = \texttt{const}$ и для энергии системы, которая тоже является интегралом движения, мы получаем:

$$E = \frac{m}{2}v_m^2 + \frac{\mu}{2}v^2 + U(|\overrightarrow{r}|) = const$$

То есть изученную ранее задачу о центральном поле для квазичастицы массы μ с энергией $E - \frac{mv_m^2}{2}$. Для квазичастицы, поскольку это задача о центральном поле, движение происходит в одной плоскости, то есть с постоянным моментом импульса. Теперь, даже в потенциалах вида $\frac{\alpha}{\rho}$, несмотря на то, что мы приходим к той же формуле для периода обращения $T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}$, но полуоси для кждадой из реальных частиц $a_1 = \frac{m_2}{m}a, a_2 = \frac{m_1}{m}a$, то есть масса не исчезнет из выражения для периода.

Вопрос №18

Приведите вывод формулы Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния легких заряженных частиц на первоначально неподвижных тяжелых ядрах.

В этом случае будем пользоваться полученными выводами для задачи двух тел. Дифференциальное сечени рассеяния есть отношение числа рассеявшихся в угол $d\Omega$ частиц к общему их числу. Изначально все частицы летят монохроматическим разреженным пучком в одном направлении, а отличаются друг от друга только своими прицельными параметрами. В зависимости от прицельных параметров частиц, из-за аксиальной симметрии, все частицы в узком кольце на изначальной бесконечно удаленной плоскости, перпендикулярной их направлению движения, рассеются в такое же узкое "кольцо"на поверхности сферы. При этом задачу можно рассматривать только в одной плоскости. Как мы уже получали, угол рассеяния для отталкивающего потенциала:

$$\chi = 2\texttt{arctg}\sqrt{\frac{m\alpha^2}{2EL_0^2}} = 2\texttt{arctg}\frac{\alpha}{L_0}\sqrt{\frac{\mu}{2E}}$$

При этом их момент импульса $L = d\mu v$, где d - их прицельный параметр. $E = \frac{\mu v^2}{2}$ В таком случае:

$$\chi = 2\texttt{arctg}\frac{\alpha}{\mu d v}\sqrt{\frac{\mu}{2E}} = 2\texttt{arctg}\frac{\alpha}{\mu d v^2}$$

v - скорость квазичастицы на минус бесконечности. Сколько частиц рассеивается в телесный угол?

$$\mathtt{d}\sigma = \rho d \mathtt{d}d \mathtt{d}\Psi = \frac{N}{I} => N = Id\mathtt{d}d\mathtt{d}\Psi$$

Для случая рассеяния из кольца:

$$\mathtt{d}\sigma = 2\pi d \frac{\mathtt{d}d}{\mathtt{d}\chi}\mathtt{d}\chi$$

Осталось только найти, как d^2 зависит от χ. Это мы жуе почти получили чуть выше. Раскрывая арктангенс:

$$\frac{\alpha}{\mu d v^2} = \texttt{tg}\frac{\chi}{2} => d = \frac{\alpha}{\mu v^2}\texttt{ctg}\frac{\chi}{2} => d^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v^4} ctg^2\frac{\chi}{2} =>$$

$$\frac{\mathtt{d}d^2}{\mathtt{d}\chi} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v^4}2\texttt{ctg}\frac{\chi}{2}\frac{-1}{\sin^2\frac{\chi}{2}}\frac{1}{2} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v^4}\frac{1}{2}\frac{\sin\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$

Подставляя это обратно:

$$\mathtt{d}\sigma = 2\pi\mathtt{d}\chi\left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2\frac{\sin\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$

Ч.т.п. Запишем это же соотношение через энергию, приобретенную первоначально покоившимися частицами:

$$E = \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{1}{2m_2}\left(2p\sin\frac{\chi}{2}\right)^2 = \frac{2p^2}{m_2}\sin^2\frac{\chi}{2} =>$$

$$\mathtt{d}\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2\frac{4\pi\mathtt{d}(\sin^2\frac{\chi}{2})}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2\frac{4\pi\mathtt{d}\frac{m_2E}{2p^2}}{\left(\frac{m_2E}{2p^2}\right)^2} = \left(\frac{\alpha}{v}\right)^2\frac{2\pi}{m_2}\frac{\mathtt{d}E}{E^2}$$

Вопрос №19

Получите формулу для дифференциального эффективного сечения рассеяния жестких сфер.

Потенциал жестких упругих сфер - это $U(|\overrightarrow{r}|) = 0, r < 2a, U(r) = +\infty, r \leq 2a$. Для этого случая:

$$\chi = \pi - 2\int_{2a}^{+\infty} \frac{\frac{L_0}{\mu\rho^2}\mathtt{d}\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{L_0^2}{2\mu\rho^2}\right)}} = \pi + 2\int_{2a}^{\infty} \frac{\mathtt{d}\frac{d}{\rho}}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{\rho^2}}}$$

Очевидно, $d = \frac{L_0}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{2E}} = \frac{L_0}{\sqrt{2\mu E}}$. Этот интеграл суть арксинус и прекрасно берется, давая:

$$\chi = \pi - 2\mathtt{arcsin}\frac{d}{2a}, d = 2a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = 2a\cos\frac{\chi}{2}$$

Посдтавляя это в формулу для сечения рассеяния:

$$\mathtt{d}\sigma = \pi\frac{\mathtt{d}\left(2a\cos\frac{\chi}{2}\right)^2}{\mathtt{d}\chi}\mathtt{d}\chi = \pi 4a^2 2\cos\frac{\chi}{2}(\sin\frac{\chi}{2})\frac{1}{2}\mathtt{d}\chi = a^2 2\pi\sin\chi d\chi = a^2\mathtt{d}\Omega$$

То есть сечение рассеяния вообще никак не зависит от углов, то есть рассеяние равновероятно во все возможные углы. Это, правда, в системе центра инерции.

Вопрос №20

Найдите компоненты угловой скорости твердого тела как функции углов Эйлера и их производных по времени.

Для твердого тела нужно фиксировать три точки, чтобы однозначно фиксировать его. Для фиксации трех точек в пространстве нужно 3 + 2 + 1 координата, то есть 3 + 3. 3 Пространственных мы сейчас рассматривтаь не будем, а вот оставшиеся 3 выберем в форме так называемых углов эйлера. Это три угла, последовательные повороты на которые совмещают повернутое тело с неповернутой(выбором начала отсчета углов) системой координат. Преобразование координат, которое отвечает повороту на три угла эйлера дается невъебенной матрицей, которая, однако, имеет простую структуру:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma\cos\beta & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{array}\right)$$

Это - матрица поворота $a(\alpha, \beta, \gamma)$. Если углы меняются во времени, причем медленно, то матрицу можно разложить относительно нулевого поворота. Тогда: $a = I + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, где последние три слагаемых - понятно какие частные производные. Рассмотрим, как бесконечно малые повороты влияют на орты системы. Каждый токой поворот можно задать как вектор с модулем равном приращению поворота, а направлением - осью вращения. Очевидно, что приращение некоторого вектора всегда будет перпендекулярно плоскости, включаещей его и ось поворота. В таком случае можно записать: $d\overrightarrow{n} = [d\overrightarrow{\chi} \times \overrightarrow{n}]$

При этом, так как мы пренебрегаем бесконечно малыми высших порядков, то результат двух поворотов не будет требовать перестановки векторных произведений при изменении порядка опворотов, а значит - не будет зависеть от их порядка. В таком случае, для бесконечно малых поворотов вокруг трех различных осей:$d\overrightarrow{\chi} = d\overrightarrow{\Omega} = \{d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3\} => d\overrightarrow{r} = [d\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r}]$.

Введем понятие угловой скорости: $\overrightarrow{\omega} = \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}$. Тогда, очевидно:

$$\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}]$$

При этом будет уместно привести разложение ω по углам Эйлера через орты исходной системы. $\omega_1 = \dot{\gamma}, \omega_2 = \dot{\beta}, \omega_3 = \dot{\alpha}$

$$\omega_{x'} = \dot{\gamma} \sin\alpha \sin\beta + \dot{\beta} \cos\alpha$$

$$\omega_{y'} = \dot{\gamma} \cos\alpha \sin\beta - \dot{\beta} \sin\alpha$$

$$\omega_{z'} = \dot{\gamma} \cos\beta + \dot{\alpha}$$

$$\omega_x = \dot{\beta} \cos\gamma + \dot{\alpha} \sin\beta \sin\gamma$$

$$\omega_y = \dot{\beta} \sin\gamma - \dot{\alpha} \sin\beta \cos\gamma$$

$$\omega_z = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos\beta$$

Вопрос №21

Приведите вывод функции Лагранжа твердого тела, принимая в качестве обобщенных координат декартовы координаты центра масс тела и углы Эйлера.

Рассмотрим твердое тело как совокупность точечных масс. Это допущение можно будет потом заменить на интегрирование, в силу линейности уравнений, никакой качественной разницы не будет. Итак, координата любой точки твердого тела: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_m + \overrightarrow{r}'$ => $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_m + \overrightarrow{v}' + [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}']$. Поскольку тело - твердое, то $\overrightarrow{v}' = 0$, и мы можем продолжать подстановку в исхоные уравнения:

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} (\overrightarrow{v}_m + \overrightarrow{v}'_i + [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}'_i])^2 =$$

$$= v_m^2 \sum_i \frac{m_i}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2} + \sum_i \frac{m_i}{2} (\omega^2 r_i'^2 - (\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{r}'_i)^2) +$$

$$+ \overrightarrow{v}_m \sum_i \overrightarrow{v}'_i + [\overrightarrow{v}_m \times \overrightarrow{\omega}] \sum_i m_i \overrightarrow{v}'_i + \sum_i m_i (\overrightarrow{v}_m [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}'_i]) =$$

$$= v_m^2 \sum_i \frac{m_i}{2} + \sum_i \frac{m_i}{2} (\omega^2 r_i'^2 - (\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{r}'_i)^2) + \sum_i m_i (\overrightarrow{v}_m [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}'_i])$$

Последнюю сумму можно протащить внутрь векторного произведение и получить вместо нее $m(\overrightarrow{v}_m [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_m])$. соответственно, 0, так как в смешанном проивзедении можно переставить скобки. Второе же слагаемое мы преобразуем, вытащим из $\omega^2 = \delta_{ik} \omega_i \omega_k$. То же самое из скалярного. Останется окнструкция:

$$\sum_i \frac{m_i}{2} (r_{i\alpha}'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}) = I_{\alpha\beta}$$

Последний объект называется тензором инерции системы. Итоговый вид функции лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} v_m^2 + \overrightarrow{\omega}^T \widehat{I} \overrightarrow{\omega}$$

Углы Эйлера входят сюда через скорости вращения.

Вопрос №22

Приведите формулы преобразования тензора инерции твердого тела при поворотах и параллельных переносах координатных осей. Покажите, каким образом тензор инерции твердого тела приводится к главным осям инерции.

При параллельном переносе: $\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{a}$:

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left((\overrightarrow{r}_\alpha + \overrightarrow{a})^2\delta_{\alpha\beta} - (\overrightarrow{r} + \overrightarrow{a})_{i\alpha}(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{a})_{i\beta}\right) =$$

$$= I_{\alpha\beta} + \sum_i \frac{m_i}{2}\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + \sum_i \frac{m_i}{2}\left(2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a})\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha a_\beta - a_\alpha r_\beta\right) =$$

$$I_{\alpha\beta} + \frac{m}{2}(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha b_\beta) + \frac{m}{2}(2(\overrightarrow{r}_m, \overrightarrow{a})\delta_{\alpha\beta} - r_{m\alpha}a_\beta - a_\alpha r_{m\beta})$$

Если исходно начало координат у нас былы в ц.м., то последняя скобка исчезает, остается только первая.

При поворотах оси координат тензор инерции преобразуется, как и любой другой тензор, с помощью матриц поворота:

$$I_{\alpha\beta} = A_{\alpha k} I_{kj} A_{\beta j}$$

Главными осями инерции называются такие оси, в которых тензор инерции имеет диагональный вид. ЧТобы привести его к ним, необходимо: найти какое-нибудь собственное значение, если все три одинаковые, то можно взять любой ортогональный базис, тензор инерции и так будет диагонален. Иначе найдется одно отличное: тогда мы найдем собственный вектор, соответствующий этом собственному значению и совместим одну из наших осей с этим вектором. Тогда останется диагонализовать только матрицу 2 на 2. Для нее делаем тот же фокус, только для ограничения задачи на плоскость, перпендекулярную новой оси. Находим новое собственное значение, если два различных - сопоставляем оси с ними, иначе - берем любую пару ортагональных. В итоге получим диагонализованный тензор инерции.

Вопрос №23

23. Приведите вывод уравнений Эйлера движения твердого тела с одной неподвижной точкой. Найдите частоту прецессии свободного симметричного твердого тела.

Если у тела есть неподвижная точка, удобно с этой точкой совместить начало координат. Для такогопосчитаем момент импульса:

$$L = \sum_i m_i[(\overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{r}'_i) \times (\overrightarrow{v}_0 + [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}'])] =$$

$$= \sum_i m_i[\overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0] + \sum_i m_i[\overrightarrow{r}'_i \times \overrightarrow{v}_0] +$$

$$+ \sum_i m_i[\overrightarrow{r}_0 \times [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}']] + \sum_i m_i[\overrightarrow{r}'_i \times [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}']] =$$

$$= L_0 + m[r'_m \times \overrightarrow{v}_0] + \overrightarrow{\omega} m(\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{r}'_m) - \overrightarrow{r}'_m m(\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{\omega}) +$$
$$+ \overrightarrow{\omega} \sum_i m_i r_i'^2 - \sum_i m_i \overrightarrow{r}'_i(\overrightarrow{r}'_i, \overrightarrow{\omega}) =$$

Последние две суммы есть ни что иное, как $\widehat{I}\overrightarrow{\omega}$ для моментов инерции, вычисленых относительно точки 0. Совместим начало отсчета с каким-либо положением точки 0. Поскольку она покоится, то одновременно координатные и сокростные составляющие обнулятся. В таком случае,. можно записать:

$$L = L_0 + \widehat{I}\overrightarrow{\omega}$$

Если мы возьмем производную от этого, то первое слагаемое убьется об момент сил, действующих на все тело. Останется, в предположении главных осей инерции:

$$\dot{L} = \widehat{I}\frac{d}{dt}\overrightarrow{\omega} + [\omega \times I\omega] =>$$
$$M_x = I_1\dot{\omega}_1 + \omega_3\omega_2(I_3 - I_2)$$
$$M_y = I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3)$$
$$M_z = I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)$$

Если наш волчок симметричен относительно оси z, тогда $I_1 = I_2 =>$ $I_3\dot{\omega}_3 = 0$ при условии отсутствия моментов внешних сил. Значит $\omega_3 = const$. Решение для двух других уравнение удобной найти, записав $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, откуда сразу эе следует:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 &= -\frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\omega_1 \end{cases}$$

$$\dot{\omega} = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 i\omega = \Omega i\omega => \omega(t) = Ae^{i\Omega t}, \omega_1^2 + \omega_2^2 = const$$

Частота Ω - частота прецессии.

Вопрос №24.

Исследуйте движение тяжелого симметричного волчка с одной неподвижной точкой.

Запишем Лагранжиан этой штуки с началом кординат, совмещенным с неподвижной точкой:

$$L = \frac{m}{2}v_0^2 + m(\overrightarrow{v}, [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_m]) + \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta - U$$

Поскольку мы скреплены с неподвижной точкой, а тензор инерции симметричен по двумя главным осям, то, записывая все в последних:

$$L = \frac{1}{2}I_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 - mgl\cos\theta$$

Где, как мы уже получали:

$$\begin{cases} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

Подстановка в лагранжиан дает:

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$$

Очевидно, что циклическими являются углы ψ и φ, в то же время сохраняется и полная энергия, так как потенциал консервативен. В таком случае, для импульсов получаем:

$$p_\psi = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = const$$

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + \cos\theta p_\psi = const$$

$$E = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2I_3}p_\psi^2 + mgl\cos\theta = const$$

Из второго равенства вытаскиваем: $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$. Вводим замену $\cos\theta = \xi, -\sin\theta\dot{\theta} = \dot{\xi}$ и подставляем все вы выражение для энергии:

$$E' = \frac{I_1}{2}\left(\frac{p_\varphi - p_\psi\xi}{I_1(1-\xi^2)}\right)^2 + \frac{I_1}{2}\frac{\dot{\xi}^2}{1-\xi^2} + mgl\xi = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}$$

Это нетрудно свести к следующему соотношению:

$$\dot{\xi}^2 = (1-\xi^2)\left(\frac{2E'}{I_1} - \frac{2mgl}{I_1}\xi\right) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\xi)^2}{I_1^2}$$

Нетрудно увидеть дальнейшее разделение переменных и получение закона изменения ξ во времени. Функция справа, как и любой другой многолчен 3 степени имеет 3 нуля. Самый правый из них нефизичен, а вот два по обе стороны от нуля нас интересуют. Между ними реализуется как раз разрешенная область значений этого полинома, а сами нули определяют два угла $\theta_1.\theta_2$, и вся динамика рпоисходит между ними. Эти углы на сфере, а конец волчка описывает на сфере циклоидоподобные траектории, к сожалениЮ .непередаваемые в печатном виде.

Вопрос №25

25. Найдите общее решение уравнений движения консервативной системы в малой окрестности положения равновесия. При каких условиях система будет все время оставаться в этой окрестности?

Рассмотрим общий вид лагранжиана консервативной системы:

$$L = a(q)_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$$

Предположим наличие устойчивого положения: $\bigtriangledown U = 0$, реализующегося при q_0 и разложим потенциал в ряд по $q - q_0$ до второго члена включительно. Перейдем теперь к координатам $\xi = q - q_0$. С той же степень точности можно заменить и кинетическую форму её значением в точке равновесия:

$$L = a(\xi_0)_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}U(\xi_0)\frac{\xi_i\xi_j}{2}$$

Эта штука приводит к следующим уравнениям движения:

$$\sum_i a(\xi_0)_{ij}\ddot{\xi}_i + \sum_i \frac{\partial^2 U(\xi_0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\frac{\xi_i}{2} = 0$$

В таком случае, прослеживая связь с уравнением колебаний, удобно сделать замену: $\xi_i = \mathtt{Re}\left[A_i e^{i\omega t}\right], \ddot{\xi}_i = \mathtt{Re}\left[-A_i\omega^2 e^{i\omega t}\right]$:

$$\sum_i \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U(\xi_0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j} - \omega^2 a(\xi_0)_{ij}\right)A_i = 0$$

Очевидно, что это система алгебраических уравнений. Имеем s уравнений и s неизвестных векторов A_i. Она будет иметь нетривиальное решение тогда, когда её определитель равен нулю. Это дает нам характеристическое уравнение на определение собственных частот ω_i. Эти частоты, очевидно из линейной алгебры. будут вещественными. Пусть все ω_i различны. Тогда у нас только одно уравнение будет следствием остальных и решение дается нам по формулам крамера или как-нибудь еще: $A_i^\mu = c_\mu\Delta_i^\mu$, где индекс μ нумерует собственные значения, а $Delta$ - Дополнительный минор к i-ой строке и s-ому столбцу. Общее решение будет представлять собой суперпозицию всех полученных таким образом решений, а именно:

$$\xi_i = \sum_{\mu=1}^{s}\Delta_i^\mu \mathtt{Re}[c_\mu e^{i\omega_\mu t}]$$

Значит, система будет находиться вблизи положения равновесия при любом t, а не только при рассматрвиаемом, если $\omega_\mu^2 \geq 0$ для всеъ μ. Если хотя бы для какой-то это условие не выполнится, то мы получим расходящиеся во времени решения. Для того, чтобы частоты удовлетворяли этому условию, достаточно потребовать, чтобы $\frac{\partial^2 U(\xi_0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$ была положительно определенной квадратичной формой. В этом случае потенциальная энергия будет иметь изолированный минимум.

Вопрос №26

Преобразуйте функцию и уравнения Лагранжа системы с многими степенями свободы в приближении линейных колебаний к нормальным координатам.

Лагранжиан нашей системы такой же, как и в предыдщем случае. Мы сделаем замену переменных $\xi_i = \sum_\mu \Delta_i^\mu\theta_\mu$ => для кинетической энергии получаем выражение вида:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij\mu\mu'} a_{ij}\Delta_i^\mu\Delta_j^{\mu'}\theta_\mu\theta_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\mu'}\dot{\theta}_\mu\dot{\theta}_{\mu'}$$

Покажем, что матрица $\varepsilon_{\mu\mu'}$ является диагональной. В самом деле, для двух разных собственных значений из уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} \partial^2_{ij} U \Delta^\mu_i \Delta^{\mu'}_j & = & \omega^2_\mu a_{ij} \Delta^\mu_i \Delta^{\mu'}_j \\ \partial^2_{ij} U \Delta^\mu_i \Delta^{\mu'}_j & = & \omega^2_{\mu'} a_{ij} \Delta^\mu_i \Delta^{\mu'}_j \end{cases}$$

Вычитая одно из другого, получаем:

$$(\omega^2_\mu - \omega^2_{\mu'})\varepsilon_{\mu\mu'} = 0$$

Для различных корней, очевидно, мы получим необходимую нам диагональность. Раз ε диагонально, то выражение для T:

$$T = \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_{\mu\mu}\dot{\theta}^2_\mu$$

В то же время потенциал:

$$\frac{1}{2}\partial^2_{ij} U \xi_i \xi_j = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \partial^2_{ij} U \Delta^\mu_i \Delta^\nu_j \theta_\nu \theta_\mu$$

Здесь опять воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \partial^2_{ij} U \Delta^\mu_i \Delta^\nu_j \theta_\nu \theta_\mu = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \omega^2_\mu \varepsilon_{\mu\nu}\theta_\nu\theta_\mu = \frac{1}{2}\sum_\mu \omega^2_\mu \varepsilon_{\mu\mu}\theta^2_\mu$$

Итоговый Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_{\mu\mu}\left(\dot{\theta}^2_\mu - \omega^2_\mu \theta^2_\mu\right)$$

Уравнения Лагранжа дадут:

$$\ddot{\theta}_\mu + \omega^2_\mu \theta^2_\mu = 0$$

То есть уравнения гармонического осциллятора. Для него $\theta_\mu = a_\mu \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu)$.

Очевидно, что если характеристическое уравнение будет иметь кратные корни, нам не удасться так хорошо провернуть замену кординат. В таком случае есть способ выкрутиться - немного изменить a и U, чтобы кратные корни исчезли, и перейти обратно предельным переходом.

Вопрос №27

В приближении линейных колебаний найдите общее решение уравнений движения системы частиц с s степенями свободы при наличии диссипативных сил.

Опять тот же самый Гамильтониан, но тепреь уже с диссипативными силами, входящими в уравнения движения. Мы будем записывать диссипативные силы с помощью функции Релея: $D = \frac{1}{2}d_{ij}(q_1, .., q_s)\dot{q}_i\dot{q}_j$. Тогда уравнения Лагранжа примут вид, с учетом рассуждений выше:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L - \frac{\partial}{\partial q_j}L = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}D$$

Что эквивалентно системе уравнений:

$$\sum_i a_{ij}\ddot{q}_i + \sum_i d_{ij}\dot{q}_i + \sum_i \partial^2_{ij} U \dot{q}_j = 0$$

Все это в предположении нахождения минимума потенциала в 0 обобщенных координат и вблизи него. Все функции беруться в этой точке, если потенциал в другом месте, сдвинуть его не составляет труда. Это уравнение уже не есть уравнение на грамонические осцилляторы, Однако можно воспользоваться тем же преобразованием: $q_k = \texttt{Re}[A_k e^{-i\omega t}]$. Тогда уравнения становятся:

$$\left(a_{ij}(-\omega^2) - i\omega d_{ij} + \partial^2_{ij} U\right) A_i = 0$$

Это лагебраическая система уравнений. Равенство нулю её определителя дает нам характеристические числа, определяющие ее собственные колебания. Затем по ним определяются амплитуды A_i. Отметим, что в силу вещественности коэффициентов, если ω_k - комплексный корень характеристического уравнения, то и ω^*_k - тоже будет его корнем. Тогда общее решение можно записать в виде:

$$q_i(t) = \sum_k \texttt{Re}\left[\Delta_i(\omega_\mu) c_k e^{-i\omega_k t} + c^*_k Delta_i(\omega^*_\mu) e^{i\omega^*_k t}\right]$$

Вопрос №28

28. Найдите общее решение для вынужденных колебаний системы с s степенями свободы под действием периодической внешней силы, а также диссипативных сил.

Та же самая задача, но теперь в правой частий уравнений лагранжа появится обобщенная сила: Q_j. В таком случае мы уже нашли в прошлом пункте решение однородного уравнения, осталось найти частное решение неоднородного. Для этого придется разложить внешнюю силу в ряд фурье:

$$Q_j(t) = \sum_n Q_{nj} e^{-i\Omega n t}, \Omega = \frac{2\pi}{T}, Q_{kj} = \frac{2}{T}\int_0^T Q_j(t) e^{ik\Omega t} dt$$

На постоянную составляющую можно положить болт, так как она легко варьируется сдвигом минимума потенциала. Частное решение будем искать в виду: $\xi_j = \sum_n A_{nj} e^{-in\Omega t}$, откуда незамедлительно:

$$(-\Omega^2 n^2 a_{ij} - in\Omega d_{ij} + \partial^2_{ij} U) A_{nj} = Q_{nj}$$

Система алгебраических уравнений, которая разрешима всегда, если её определитель отличен от нуля, например, по формулам Крамера:

$$A_{nj} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Здесь Δ - определитель системы выше, а Δ - определитель матрицы, полученной из исходной заменой i- го столбца на Q_{nj}. Затем из этого собирается исходное решение.

Вопрос №30

Методом Крылова-Боголюбова получите формулы первого приближения для асимптотических решений уравнений движения систем, близких к линейным.

Вот это полная жопа, а по сути - теория возмущений. Мы рассматриваем основное, линейное колебание системы как основное состояние, а все нелинейности пихаем в возмущенные. Рассмотрим уравнение колебаний:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$$

При $\varepsilon = 0$, мы имеем на руках обычные гармонические колебания с постоянной амплитудай и линейно меняющейся фазой: $\xi = A\cos\psi$. Чтобы найти поправки, которые вносит наличие нелинейности, разложим все в ряды по степеням ε:

$$\xi = A\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\xi_2(a,\xi)$$

$$\dot{a} = 0 + \varepsilon f_1(a) + ...$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(A) + ...$$

Решаем задачу:

$$\dot{\xi} = -\dot{\psi} a \sin\psi + \dot{a}\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial \xi_1}{\partial a}\dot{a} + \varepsilon\frac{\partial \xi_1}{\partial \psi}\dot{\psi} =$$

$$= -(\omega_0 + \varepsilon\omega_1)a\sin\psi + \varepsilon f_1 \cos\psi + \varepsilon\frac{\partial \xi_1}{\partial \psi}\dot{\psi}$$

Аналогично:

$$\ddot{\xi} = -a\omega_0^2\cos\psi - a\varepsilon\omega_0\omega_1\cos\psi - \omega_0\varepsilon f_1\sin\psi - a\varepsilon\omega_0\omega_1\cos\psi -$$

$$-\varepsilon\omega_0 f_1 \sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\omega_0^2$$

$$\ddot{\xi} = -a\omega_0^2\cos\psi - 2a\varepsilon\omega_0\omega_1\cos\psi - 2\varepsilon\omega_0 f_1\sin\psi + \varepsilon\omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \varepsilon\omega_0^2\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2} + \xi_1\right) - 2a\omega_0\omega_1\varepsilon\cos\psi - 2\omega_0\varepsilon f_1\sin\psi$$

С другой стороны, по той же теории возмущений:

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) + ...$$

Сопоставляя оба выражения, имеем:

$$\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2} + \xi_1\right) = 2\frac{\omega_1}{\omega_0}a\cos\psi + 2\frac{f_1}{\omega_0}\sin\psi + \frac{1}{\omega_0^2}Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)$$

Нетрудна заметить, что справа стоит периодическая функция по ψ. Значит, и слева тоже должна быть такая функция. ОТлично. Теперь раскладываем все в ряды фурье.

$$Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \sum_n [\alpha_n(a)\sin n\psi + \beta_n(a)\cos n\psi]$$

$$\xi_1 = \sum_n [\gamma_n \sin n\psi + \nu_n \cos \psi n]$$

Подставив их в исходное уравнение и приравняв нужные нам коэффициенты:

$$\nu_0(a) = \frac{\beta_0(a)}{\omega_0^2}, \gamma_n(a) = \frac{\alpha_n(a)}{(1-n^2)\omega_0^2}, \nu_n(a) = \frac{\beta_n(a)}{(1-n^2)\omega_0^2}$$

Откуда

$$\xi = a\cos\psi + \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left\{\alpha_n(a)\sin n\psi + \beta_n(a)\cos n\psi\right\}$$

Для $n = 1$:

$$\omega_1(a) = -\frac{\beta_1(a)}{2a\omega_0}, f_1(a) = -\frac{\alpha_1(a)}{2\omega_0} =>$$

$$\dot{a}(t) = \frac{-\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \dot{\psi}(t) = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_n(a)}{2a\omega_0}$$

Отсюда находятся a и ψ в первом приближении. При этом сохранять все слагаемые, содержащие ε не имеет смысла, так как за времена порядка ε эти слагаемые дадут погрешность порядка ϵ, а не ϵ^2. В таком случае мы оставим только:

$$\xi = a\cos\psi, \dot{a} = \frac{-\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \dot{psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}$$

Для консервативной системы $Q = Q(\xi)$:

$$\dot{a} = 0, a = const => \psi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}t => \xi = a\cos(\psi + \psi_0)$$

Вопрос №31

Исследуйте автоколебания на примере маятника с вращающейся муфтой подвеса при наличии сухого трения (маятник Фроуда).

Здесь нам припомнится метод крылова-боголюбова. Запишем уравнение движения для указанного маятника:

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - l\dot{\theta}\lambda + f(\Omega - \dot{\theta})$$

При некоторых значениях Ω должно быть возможно положение равновесия, а именно:

$$\sin\theta_{eq} = \frac{f(\Omega)}{mgl}; \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$$

Отсюда неизбежно требуется $f(\Omega) < mgl$. Разложим уравнения в ряд по отклонению $\xi = \theta - \theta_{eq}$:

$I\ddot{\xi} = -mgl\sin\theta_{eq} - mgl\cos\theta_{eq}\xi + mgl\frac{1}{2}\sin\theta_{eq}\xi^2 + mgl\frac{1}{6}\cos\theta_{eq}\xi^3 - l\dot{\xi}\lambda + f(\Omega) - f'(\Omega)\dot{\xi} + f''(\Omega)\frac{\dot{\xi}^2}{2} - f'''(\omega)\frac{\dot{\xi}^3}{6}$

Предположим дополнительно, что мы находимся в окрестности точки перегиба функции $f <=> f'' = 0$. Введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}\cos\theta_{eq}, æ_1 = -\frac{l\lambda}{I}, æ_2 = \frac{f'''}{6I}$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{\omega_0^2}{2}\tan\theta_{eq}\xi^2 + \frac{\omega_0^2}{6}\xi^3 + æ_1\dot{\xi} - æ_2\dot{\xi}^3 = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$$

Здесь мы и применим наш метод. По К-Б:

$$\varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \frac{\omega_0^2}{2}\tan\theta_{eq}a^2\cos^2\psi + \frac{\omega_0^2}{6}a^3\cos^3\psi - æ_1 a\omega_0\sin\psi +$$

$$+ æ_2 a^3\omega_0^3\sin^3\psi$$

Это дает первые три гармоники по ψ. Соответственно, разложение обобщенной силы в ряд фурье имеет следующие первые компоненты:

$$\varepsilon\alpha_1(a) = -a\omega æ_1 - \frac{3}{4}a^3 æ_2\omega_0^3$$

$$\varepsilon\beta_1(a) = \frac{\omega_0^3 a^3}{8}$$

Подстановка же дает:

$$\dot{a} = \frac{aæ_1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{æ_2}{æ_1}a^2\omega_0^2\right)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{a^2\omega_0^2}{16}$$

Откуда мы можем указать автоколебательный режим:

$$\dot{a} = 0 <=> a^2 = \frac{4}{3}\frac{æ_1}{æ_2}\omega_0^{-2}$$

Вопрос №32

Получите формулы первого приближения метода Крылова-Боголюбова для нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами. Приведите примеры адиабатических инвариантов.

Эти системы отличаются от рассмотренных тем, что они параметрические. Введем в системе медленное время $\tau = \varepsilon t$ и запишем её лагранжиан в виде:

$$L = \frac{1}{2}c(\tau)\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}k(\tau)\xi^2 + \varepsilon\chi(\xi, \tau)$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(c(\tau)\dot{\xi}) + k(\tau)\xi - \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\chi(\xi, \tau) = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, t)$$

Загнав потенциал χ в обобщенные силы, получаем:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2(\tau)\xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, t) - \varepsilon \frac{1}{c(\tau)} \frac{dc}{d\tau}\dot{\xi}, \omega_0^2(\tau) = \frac{k(\tau)}{c(\tau)}$$

Решение опять ищется методом К-Б. Все утверждения сохраняют свою силу, однако в выражениях появляются лишние слагаемые. Это критично для первого приближения:

$$\begin{cases} 2\omega_0\varepsilon f_1 + \varepsilon\alpha_1 + \frac{\varepsilon a}{c}\frac{d}{d\tau}(\omega c) &= 0 \\ 2a\omega_0\varepsilon\omega_1 + \varepsilon\beta_1 &= 0 \end{cases}$$

Откуда находятся:

$$\begin{cases} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0} - \frac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\frac{d}{d\tau}(\omega c) = 0 \\ \dot{\psi} &= \omega(\tau) - \frac{\varepsilon\beta_1}{2a\omega_0(\tau)} \end{cases}$$

В отсутствие диссипативных сил: $\dot{a} = -\frac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\frac{d}{d\tau}(\omega c) => a^2\omega_0 c = const.$

Адиабатическими инвариантами называются величины, которые меняются медленно даже относительно медленно меняющихся параметров системы. Они, очевидно, должны быть составлены только из a ψ и параметров системы.

Пример адиабатического инварианта: рассмотрим математический маятник с медленно меняющейся длинной нити:

$$L = \frac{ml^2(\tau)}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl(\tau)\varphi^2$$

$$c(\tau) = ml^2(\tau), \omega_0^2(\tau) = \frac{g}{l(\tau)} => a^2 l^{3/2} = const$$

Это и будет адиабатическим инвариантом. Из записанного выше.

Вопрос №33

Найдите выражение для эффективной потенциальной энергии «медленного» одномерного движения системы при наличии высокочастотных возмущений.

Опять пункт на теорию возмущений. Последний, благо. Рассмотрим систему с диссипацией и потенциальными силами:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q, t)$$

Предполагаются малыми отклонения $\xi = q - \overline{q}; \overline{q(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T q(t+\tau)d\tau$

Тогда, подставив ξ в исходное уравнение, раскладывая все по ξ как по малым возмущениям:

$$m\ddot{\xi} + m\ddot{\overline{q}} = -\frac{\partial}{\partial \overline{q}}U - \frac{\partial^2}{\partial \overline{q}^2}U\xi + Q(\overline{q}, t) + \frac{\partial Q}{\partial \overline{q}}\xi$$

после усреднения по периоду, мы получим:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial \overline{q}} + < \frac{\partial Q}{\partial \overline{q}}, \xi >$$

Тогда, в первом порядке малости:

$$m\ddot{\xi} = Q(\overline{q}, t)$$

Причем $\overline{q}$ полагается постоянной величиной. В таком случае можно проинтегрировать выражение выше и получить: $\dot{\xi} = \frac{1}{m}\int Qdt$

$$\xi\frac{\partial Q}{\partial \overline{q}} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(\xi\int\frac{\partial}{\partial \overline{q}}Qdt) - \dot{\xi}\int\frac{\partial Q}{\partial \overline{q}}dt$$

Усреднение почему-то убивает среднее слагаемое и дает:

$$<\xi\frac{\partial Q}{\partial \overline{q}}>= -<\frac{1}{m}\int Qdt\frac{\partial}{\partial \overline{q}}\int Qdt>= -\frac{1}{2m}<\frac{\partial}{\partial \overline{q}}(\int Qdt)^2>$$

Эта штука будет идти добавкой к основным потенциалам через свой квадрат. В самом деле:

$$m\ddot{\xi} = -\frac{\partial}{\partial \overline{q}}U_{eff}, U)eff = U + \frac{1}{2m}<(\int Qdt)^2>$$

Вопрос №34

Получите канонические уравнения Гамильтона для системы с s степенями свободы при наличии диссипативных сил, исходя из лагранжевой формы уравнений движения.

Поскольку эта ересь с теорией возмущения наконец-то кончилась, можно приступить к нормальным задачкам. Например, этой. Рассмотрим замену $\varphi_i = \varphi(q, \dot{q}, t)$. Такую, чтобы якобиан перехода к ней от переменных $(q, \dot{q})$ был отличен от нуля. С помощью последнего мы получим уравнения: $\dot{q}_i = f_i(q, \varphi, t)$ в дополнение к уравнения движения. то есть мы получим 2s уравнений 1 порядка, вместо s уравнений 2 порядка, совершенно аналогичных исходным. Наиболее физично в качестве такой функции брать обощенный импульс нашей системы:

$$\varphi_i = p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t)$$

Поскольку якобиан перехода в данном случае: $|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}|$ - остаток кинетической формы, то он по определению последней положительно определен. Давайте покажем, что нужные нам обратные преобразования $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ также могут быть предсталвены как преобразования Лежандра. Для этого рассмотрим лагранжиан:

$$dL(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k + p_k d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$d[p_k\dot{q}_k - L] = -\frac{\partial}{\partial q_k}Ldq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t}dt \equiv dH$$

Приравнивая коээфициенты при одинаковых диффиренциалах, получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}, \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Тогда, исключая из уравнений лагранжа его производную по координате:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Что нам и требовалось найти. Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона в канонических переменных.

Вопрос №35

Приведите вывод канонических уравнений Гамильтона из вариационного принципа.

Постулируем функционал:

$$F = p_k \dot{q}_k - H$$

, где H - функция гамильтона. Свяжем с ним действие:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F dt => \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt$$

Раскрывая частные производные, используя определение F:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}(p_k \delta q_k) - (p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}) \delta q_k + (q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}) \delta p_k \right) dt$$

Предположив, что начальная и конечная вариации сиситемы неизестны, то есть δq_k обнуляется на границах, можно, интегрируя по частям, привести вариацию действия к виду:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left(p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right) dt$$

А это, в силу независимости вариаций, как раз приводит к каноническим уравнениям гамильтона.

Вопрос №36

36. Приведите определение скобок Пуассона. Докажите теорему Пуассона.

Определение скобок пуассона:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}$$

Докажем свойство скобок пуассона:

$$f = f(q, p, t) => \frac{d}{dt} f = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k^d + \frac{\partial f}{\partial t}$$

В самом деле:

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial p_k} Q_k + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ч.т.д. Покажем теорему пуасона. Пусть $\varphi = [f, g]$. Тогда $\frac{d}{dt}\varphi = ?$

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) =$$

$$= [\dot{f}, g] + [f, \dot{g}]$$

Ч.т.д. Это приводит нас к утверждению о том, что если f и g - интегралы движения, то и их скобка пуассона - интеграл движения.

Вопрос №38

Покажите, что для любого канонического преобразования существует производящая функция. Получите формулы канонических преобразований в терминах четырех возможных типов производящих функций.

Какое преобразование называется каноническим? То, которое не меняет вид уравнений Гамильтона. То есть это переход $Q = Q(q, p, t), P = P(q, p, t)$: $Q_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, P_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$. Как связать эти два преобразования? Ведь они приводят, в общем-то, к разным гамильтонианам? Оказывается, их можно связать через инварианты Пуанкаре-Картана, которые мы тут выводить не будем. Суть их в формуле:

$$\delta\Phi_1(q, Q, t) = -\sum_k P_k \delta Q_k + \sum_k p_k \delta q_k + (H' - H)\delta t$$

Очевидно сопоставление приводит к:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_k} = -P_k, \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_k} = p_k, \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H' - H$$

Как получать формулы канонических преобразований остальных типов? Их производящие функции связаны преобразованиями лежандра, а именно:

$$\Phi_2(p, Q, t) = \Phi_1 - \sum_k p_k q_k$$

$$\Phi_3(q, P, t) = \Phi_1 + \sum_k P_k Q_k$$

$$\Phi_4(p, Q, t) = \Phi_1 - \sum_k p_k q_k + \sum_k P_k Q_k$$

Откуда соотношения на их вариации, а значит и на преобразования следуют очевидным образом. Убедимся теперь, что якобиан канонического преобразования равен 1. А именно:

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} \Big/ \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, P)}$$

Из вида для матрицы обеих якобианов(большой диагональный кусок из единичек где надо), следует, что:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} = \frac{\partial Q}{\partial q}; \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)} = \frac{\partial p}{\partial P}$$

Для существования второй функции(а это разлжение якобианов для нее), мы требовали существование и получали равенство таких якобианов как смешанных производных производящей функции. Ч.т.п.

Вопрос №39

Приведите вывод уравнения Гамильтона-Якоби и доказательство теоремы Якоби.

Уравнения Гамильтона-Якоби - уравнения в частных производных, которые заменяют уравнения лагранжа. Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0$$

Это и есть уравнение гамильтона-якоби, а $S = S(q, \alpha, t_0, t)$ - его полный интеграл, оно же действие, тут представленное в форме, зависящей от s переменных и s произвольных постоянных. Покажем прежде всего, что уравнения Гамильтона-Якоби в самом деле эквивалентны уравнениям Лагранжа второго рода. Исходное уравнение выполняется тождественно, поэтому мы можем его продифференцировать. Продифференцируем сначала по параметрам:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \alpha_k} S + \sum_j \frac{\partial}{\partial p_j} H \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial q_j} S = 0$$

Но, как мы знаем: $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$, а

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \alpha_k} S + \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial q_j} S \dot{q}_j = 0$$

Поскольку смешанные производные нигде не равны нулю, то системы должны иметь тождественно равные корни, а именно:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Дифференцируя теперь тождество по координатам:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_k} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

В то же время:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_k} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j$$

Как мы уэе нашли $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$, а поскольку действие - потенциал поля импульсов, то имеем окончательно: $\frac{d}{dt} p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

А это доказывает теорему Якоби, то есть показывает, что любой полный интеграл уравнений Г-Я индуцирует решения системы уравнения Гамильтона. Вывести само уравнения можно следующим образом. Из определения очевидно:

$$\frac{dS}{st} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q_j} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j p_j\dot{q_j} = L$$

Вот оно и вывелось.

Вопрос №40

Сформулируйте метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и его особенности для консервативных систем. Продемонстрируйте эффективность этого метода на примере.

Рассмотрим прежде всего гамильтониан определенного вида:

$$H = H(q_1, ..., q_m, p1, ..., p_m, f_1(q_{m+1}, p_{m+1}), ..., f_{s-m}(q_s, p_s))$$

То есть гамильтониан зависит от последних координат-импульсов только через функции. Тогда Нам следует укоротить действие следующим образом:

$$S = W(q_1, ..., q_m, \alpha_1, ..., \alpha_s, t) + \sum_{j=m+1}^{s} W_j(q_j, \alpha_1, ..., \alpha_s)$$

Теперь нетрудно видеть, что $\frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}W_j, k > m$; $\frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}W, k < m$; Тогда запишем для них уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(q_1, ..., q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_m}, f_1(q_{m+1}, \frac{\partial W_{m+1}}{\partial q_{m+1}}), ..., f_{k-m}(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s})) = 0$$

Если наше действие является полным интегралом, то оно должно обращать это уравнение в тождество при любых значения q_{m+k}. Однако они входят только под аргумент функций f_k. Значит, сами эти функции не должны зависеть от изменения этих переменнных, то есть быть константами. В таком случае мы получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(q_1, ..., q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_s) = 0$$

$$f_k(q_{m+k}, \frac{\partial W_{m+k}}{\partial q_{m+k}}) = \alpha_{m+k}$$

Из которых последние уравнения просто обыкновенные дифференциальные. Рассматриваемый случай разделяющихся переменных включает в себя также и случай циклических координат. Действительно, если положить $f_j = p_j$, то зависимости от q_j не будет, а все рассуждения остануться в силе. Очевидно, чтобы добить уравнение, необходимо снова применить к нему теорему якоби уже для укороченного действия. Ответы даются:

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, k = \overline{1, m}; \frac{\partial W_j}{\partial q_j} = p_j, j = \overline{m+1, s}, \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$$

Ч.т.п.

Вопрос №41

Введите переменные «действие-угол» для системы, совершающей условно-периодическое движение. Сформулируйте, основанный на этих переменных, метод вычисления собственных частот колебаний системы с s степенями свободы.

Рассмотрим систему, являющуюся обобщенно-консервативной, и хотя бы один набор канонических переменных разделяется, причем, либо каждая из переменных является периодической функцией времени с одинаковым периодом, либо каждый импульс является периодической функцией координаты, не являющейся периодической функцией времени. Движение первого типа называют - либрацией, а второго типа - вращением.

Для рассмтариваемых систем действие полностью разделяется, так как оно еще и не зависит от времени, то есть:

$$S(q_i, p_i) = \sum_j W_j(q_j, \alpha)$$

Уравнения же ГАмильтона-Якоби принимают вид:

$$H\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), ..., f_s\left(q_s, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)\right) = H_0$$

Подстановкой получаем тоот же результат, что и в метоже разделения переменных. Каждая переменная попадает под свою функцию и для тождественного выполнения уравнений Г-Я необходимо, чтобы каждая из функций была постоянной величиной. А именно, система уравнений:

$$f_k\left(q_k, \frac{\partial W_k}{\partial q_k}\right) = \alpha_k$$

Также есть дополнительное условие на связь между постоянными:

$$H(\alpha_1, ..., \alpha_s) = H_0$$

Разрешив эту систему относительно производных, найдем по определению действия и импульсов:

$$\frac{\partial W_k}{\partial q_k} = p_k$$

Теперь введем новые переменные и перейдем к новым переменным. Поскольку по условию у нас p периодическая функция введем $I_j = \frac{1}{2\pi}\oint p_j dq_j$, где интегралы беруться по полным периодам. Эти величины мы назовем переменными действия. Очевидно:

$$I_j = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W_j}{\partial q_j} dq_j = I_j(\alpha_1, ..., \alpha_s)$$

Нам необходимо разрешить эту систему уравнений относительно $\alpha_k = \alpha_k(I_1, .., I_s)$. ПРоделав это, поставляем эти переменные в исходную систему:

$$S = S(q_1, ..., q_s, I_1, ..., I_s)$$

Это действие можно использовать в качестве производящей функции от старых координат и новых импульсов и получить:

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_i, \frac{\partial S}{\partial I_k} = \varphi_i$$

Величины φ_i соответтсвуют новым координатам, связанным с новыми импульсами. Они называются угловыми переменными. Вернемся же к уравнению Г-Я:

$$H(I_1, ..., I_s) = H_0$$

То есть гамильтониан в новых переменных зависит только от импульсов, то есть все координаты циклические, а значит:

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0, \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$$

Откуда тут же следует:

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + \frac{\partial H}{\partial I_i} t$$

При этом частота, которая соответствует их изменению есть ни что иное, как частота изменения импульса. В самом деле:

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial I_i} dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j \equiv 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = 2\pi \delta_{ij}$$

С другой стороны:

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} T_i$$

Ч.т.д.

Вопос №42

Приведите доказательство теоремы Лиувилля.

Сначала сформулируем её: фазовый объем ансамбля механических систем с обобщенно-поетнциальными силами, голономными идеальными связями, а также отсутствием диссипации, сохраняется.

Рассмотрим фазовый объем системы в два близких момента времени. Поскольку реальное движение ансамблей подчинено уравнениям движения, то конечные координаты будут выражаться через начальные координаты. В таком случае, для нового фазового объема можно записать:

$$\Gamma = \oint D \delta q_{01} \delta q_{02} ... \delta q_{0s} \delta p_{01} \delta p_{0s}$$

$$\Gamma_0 = \oint \delta q_{01} \delta q_{02} ... \delta q_{0s} \delta p_{01} \delta p_{0s}$$

D - якобиан перехода от старых (q_0, p_0) координат к новым (q, p). Теперь ясно, что что для изучения поведения фазового объема надо понять, как себя ведет якобиан. Итак, в два близких момента времени:

$$q_i = q_{i0} + \dot{q}_{i0} \Delta t; p_i = p_{i0} + \dot{p}_{i0} \Delta t$$

Тогда мы можем переписать элементы якобиана:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_{0i}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{j0}}{\partial q_{i0}}\Delta t, \frac{\partial q_j}{\partial p_{0i}} = \frac{\partial \dot{q}_{j0}}{\partial p_{i0}}\Delta t,$$
$$\frac{\partial p_j}{\partial q_{0i}} = \frac{\partial \dot{p}_{j0}}{\partial q_{i0}}\Delta t, \frac{\partial p_j}{\partial p_{0i}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{p}_{j0}}{\partial q_{p0}}\Delta t$$

Откуда следует точное и приближенное значение якобиана:

$$D(t_0) = 1, D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right) \Delta t$$

То есть учитываются только члены с первой степнеь млаости по Δt, которые образуются лишь из диагональных элементов. И, переходя к пределу, имеем:

$$\dot{D}(t_0) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right)$$

Так как движение нашего ансамбля подчинено уравнениям Гамильтона, то:

$$\frac{\partial \dot{q}_{j0}}{\partial q_{j0}} = \frac{\partial}{\partial q_{j0}} \frac{\partial H}{\partial p_{j0}} = -\frac{\partial \dot{p}_{j0}}{\partial p_{j0}} + \frac{\partial}{\partial p_{j0}} Q_j^d$$

В отсутствие диссипации:

$$\left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right) = 0 => \dot{D} = 0$$

И фазовый объем сохраняется. Ч.т.д.

Вопрос №43

Приведите вывод уравнения непрерывности.

Запишем определения для плотности множества точечных частиц:

$$\rho(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{\Delta(\overrightarrow{r})} \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{1}{\Delta \overrightarrow{r}} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^{N} m_i \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i(t)) dV$$

Возьмем производную по времени от этого выражения и учтем, что: $\frac{\partial}{\partial t}\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i(t)) = -\overrightarrow{v}_i \frac{\partial \delta}{\partial \overrightarrow{r}}$ ТОгда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r}} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} \sum \overrightarrow{v}_i m_i \delta dV$$

Производная действует только на *delta*- функцию. В таком случае для любого момнета времени можно произвести суммирование, перейдя к скорости центра масс:

$$\sum \overrightarrow{v}_i m_i = \overrightarrow{v}_m m = \overrightarrow{v}_m \rho \Delta V$$

Подставляя это в интеграл выше:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathtt{div}(\rho \overrightarrow{v}) = 0$$

Это и есть уравнение непрерывности. В ряде случае, перенебрегая изменением плотности по координате:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{v}\nabla\rho = -\rho\,\mathtt{div}\,\overrightarrow{v}$$

Вопрос №47

Сформулируйте условия применимости приближения идеальной жидкости и идеального газа. Получите в этом приближении уравнение Эйлера.

Идеальной жидкостью называется такая сплошная среда, в которой при любой деформации и скорости деформации касательные напряжения пренебрежимо малы по сравнению с нормальными, а все нормальные напряжения одинаковы. Модель идеальной жидкости применима ко многим задачам с пренебрежимо малой вязкостью при условии хорошей обтекаемости тел в рпиграничных слоях. Уравнения движения идеальной жидкости:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathtt{div}\,\overrightarrow{v} & = & 0 \\ \rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} & = & -\mathtt{grad}p + \rho\overrightarrow{f} \\ \rho\frac{de}{dt} & = & -\rho\,\mathtt{div}\,\overrightarrow{v} \\ \frac{ds}{dt} & = & 0 \end{array}$$

Их дополняют два уравнения состояния: калорическое и термическое:

$$e = e(\rho, T), p = p(\rho, T)$$

Второй из уравнений движения сверху и называется уравнением эйлера. Его исходный вариант - уравнение изменения импульса:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

Переход из него обратно пр иусловии несжимаемости жидкости и одинаковости нормальных напряжений совершенно очевиден.

Вопрос №48

Получите интеграл Бернулли для стационарного движения идеальной жидкости.

Это интеграл для изэнтропических течений, то есть течений с постоянной энтропией. Запишем уравнение кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u^e\right) = \frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$$

Для случая стационарных силовых полей:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u^e + h\right) = 0$$

тут мы убили все частные производны и воспользовались определением энтальпии: $dh = \frac{dp}{\rho}$. Это и дает нам интегралл Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + u^e + h = const$$

Вопрос №49

Получите интеграл Лагранжа-Коши для безвихревого движения идеальной жидкости.

Прежде всего, для нашего случая рассмотрим уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v} = -\mathtt{grad}(h + u^e)$$

Здесь учтена потенциальность объемных сил, а также опреееделение энтальпии. Покомпонентно:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j = -\frac{\partial}{\partial x_i}(h + u^e)$$

Теперь воспользуемся потенциальностью течения и введем $\overrightarrow{v} = -\mathtt{grad}\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(h + u^e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h + u^e + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

Откуда следует интеграл КОши:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + u^e = f(t)$$

Произвольная функция f одинакова для любой точки среды.

Вопрос №50

Приведите вывод уравнения Навье-Стокса.

Преобразуем тензор давлений к виду $p_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}$, где σ - тензор касательных напряжений. Последние возникают из-за несоответтсвие скоростей и разных слоев жидкости. Значит, они должны зависеть от градиентов этих скоростей. Мы предположим, что наш тензхор зависит только от них и разложим его по ним в ряд тейлора до линейных членов. Тензор симметричен, а значит будет зависеть от симметричных линейных комбинаций этих градиентов. Как они могут выглядеть? Тензор градиентов скоростей можно разложить на симметричный, антисимметричный и диагональный следующим образом(как и любой другой тензор, конечно же):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

нас интересует первая симметричная компонента с нулевым следом. Поэтому:

$$\sigma_{ij} = \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \tau\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

ν - сдвиговая вязкость, τ - объемная вязкость. Тогда уравнение сохранения импульса примет вид:

$$\rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial}{\partial x_k}v_i\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}p + \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \tau\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)$$

Для постояных значений вязкости уравнение может быть записано в векторном виде:

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\nabla)\right]\overrightarrow{v}=-\nabla p+\rho\overrightarrow{f}+\nu\Delta\overrightarrow{v}+(\frac{\nu}{3}+\tau)\nabla(\mathtt{div}\,\overrightarrow{v})$$

А это и есть уравнение Навье-Стокса.

Вопрос №51

Приведите полную систему уравнений гидродинамики.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathtt{div}(\overrightarrow{v}\rho)=0$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\nabla)\right]\overrightarrow{v}=-\nabla p+\rho\overrightarrow{f}+\nu\Delta\overrightarrow{v}+(\frac{\nu}{3}+\tau)\nabla(\mathtt{div}\,\overrightarrow{v})$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\nabla)\right]e+P_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0$$

$$P_{ij}=p\delta_{ij}-\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+\tau\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

$$\overrightarrow{q}=-æ\nabla T$$

Уравнение Непрерывности, уравнение Навье-Стокса, Уравнение баланса энергии, определении тензора напряжений и уравнение Фурье.