№1.

Опр:Множеством $\mathbb{R}^N$ для любого конечного натурального N является множество упорядоченных N-ок:

$(x_1, x_2, ..., x_N) = (x_1, (x_2, (..., (x_{N-1}, x_N)...)$ Где каждое из x_N $-$ *вещественное* число.

В данном контексте упорядоченую N-ку мы будем называть столбцом. А само множество: множеством столбцов.

Столбцы будем записывать в виде: $(x_1, x_2, ..., x_N) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}$

Определим следующие операции над столбцами:

1)сложение столбцов: $\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N + y_N \end{pmatrix}$

Замкнутость множества относительно этой операции очевидна. Очевидно, что для этой *операции* существует нейтральный столбец: $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix}$

Из свойств обычной суммы очевидно,что для любого столбца существует обратный стобец: $\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ . \\ . \\ . \\ -x_N \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ . \\ . \\ . \\ -x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$

Ассоциотивность очевидна из свойств обычной суммы: A+(B+C)=(A+B)+C.

Коммутативность очевидна оттуда же: A+B=B+A

2)Произведение числа на столбец.

Определим: $\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}\lambda$

Коммутативность следует из определения.

Дистрибутивность(a(B+C)=aB+aC) также очевидна.

Назовем линейной комбинацией столбцов любую сумма вида $a_1 A_1 + ... + a_k A_k$, где a-числа, а A-столбцы.

Назовем линейной оболочкой столбцов множество всевозможных линейных комбинаций этих столбцов.

Будем говорить, что линейная комбинация столбцов линейно независима, если:

$a_1 A_1 + ... + a_k A_k = \theta <=> \forall i = \overline{1k} : a_i = 0$.

№2, 4

Для начала поймем, что такое E^2. Это суть множество всех точек обычного двумерного евклидового пространства.

Что называется системой координат?

Прежде всего будем говорить, что точки A,B афинно независимы, если они не равны между собой. Далее, будем говорить, что A,B,C афинно независимы, если они не лежат все три сразу на одной прямой.

Рассмотрим три афинно независимые точки O, I_1, I_2.

Проведем два луча - OI_1, OI_2, Рассмотрим некую точку A. Проведем две прямые через A параллельно заданным лучам. Обозначим точки пересечения A_1 и A_2 соответственно.

Будем называть $h^1(A), (A \in E^2) = \dfrac{\rho(A_1 A)}{\rho(OI_1)}, h^2(A) = \dfrac{\rho(A_2 A)}{\rho(OI_2)}$ – *координаты* точки A в карте h.

Афинной системой координат или афинной координатной картой называются указанные три точки с указанным правилом подсчета координат.(фактически, для определения карты достаточно только трех точек. Все остальное следует из геометрии)

Координатами точки A называются все числа: h^i

Отношением эквивалентности упорядоченных пар назовем:

$$\approx: \forall u_1, u_2 \in (E^N)^2 : u_1 \approx u_2 <=> h(u_2^1) - h(u_1^1) = h(u_2^2) - h(u_1^2) <=> \frac{h(u_2^1) + h(u_1^2)}{2} = \frac{h(u_1^1) + h(u_2^2)}{2}$$

Вектором $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ в пространстве называется упорядоченная "пара" $\mathrm{u} \in (\mathrm{E}^N)^2$,

такая что: $\mathrm{u} \approx (\mathrm{A,B})$

Координатами вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ называются числа: $\left(h(A^1) - h(B^1), h(A^2) - h(B^2)\right)$.

Равенство векторов равносильно эквивалентности упорядоченных пар.

Операции :

1)Сумма векторов определяется как их покоординатная сумма: [x](h)+[y](h)=[x+y](h);

Поскольку координаты вектора, очевидно, эквиваленты столбцам той же размерности, то все свойства те же,что и у сложения столбцов.

2) домножение на число - домножение координат вектора на число. Со св-вами та же история.

Касательно 4 билета: искомое расширение совершенно очевидно.

*№*3, 5

После заключительной фразы в предыдущем параграфе или о равенстве векторов столбцам координат по определению, и совершенно непонятно, что писать в этом билете?

По идее, тут нужно тоже рассказывать про столбцы, потому что между ними и векторами нет никакой разницы.

Пусть у нас есть некая координатная карта h, заданная N+1 токами: $\mathrm{O}, \mathrm{I}_1 \ldots \mathrm{I}_N$.

Назовем $\overrightarrow{\mathrm{e}_k} = (O, I_k), k = \overline{1, N}$.

Совокупность $\overrightarrow{\mathrm{e}_k}$ назовем базисом в $\overrightarrow{\mathrm{E}^N}$

Если два вектора линейно зависимы, то они параллельны. В самом деле, пусть:

$\exists \lambda \neq 0 : A\lambda^{'} + B\lambda = 0. => B = -\frac{\lambda^{'}}{\lambda} A.$ Так как $\mathrm{B} \neq 0 => \lambda^{'} \neq 0 => \frac{\lambda^{'}}{\lambda} = -c, c \in \mathbb{R}$:

$B = cA.$ *Пусть* $\mathrm{B} \approx (\mathrm{X,Y}), \mathrm{A} \approx (\mathrm{X,Z}); \mathrm{X,Y,Z} \in \mathrm{E}^N$; X,Y,Z-афинно независимы, т.е.:

$\nexists c \in \mathbb{R} : Z - Y = c(X - Z) <=> B = cA.$ но мы знаем, что $\exists \mathrm{c} = -\frac{\lambda^{'}}{\lambda}$. Противоечие.

+++

Если три вектора линейно зависимы, то они лежат в || плоскостях. В самом деле:

$$\exists \lambda \neq 0 : A\lambda^{'} + B\lambda + C\lambda^{''} = 0 => B = \frac{A\lambda^{'} + C\lambda^{''}}{\lambda}, A\lambda^{'} + C\lambda^{''} \neq 0.$$

Поскльку $A\lambda^{'} + C\lambda^{''} \neq 0,$ то эта сумма описывает некий вектор из плоскости, образованной А и С. Тогда если В пропорционален этому вектору, то он с ним сонаправлен. Значит, через него можно провести параллельную указанной плоскость. Ч.т.д.

№6

Множество $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$ мы назовем множеством матриц, а упорядоченную $\mathrm{N}_1 - ку$ столбцов из $\mathbb{R}^{N_2}$ $-$матрицей $N_2 \times N_1$.

Сумма - все то же, что и у столбцов. Произведение числа - аналогично.

Линейной комбинацией матриц назовем опять любую сумму вида $\mathrm{a}_i A^i, a_i \in \mathbb{R}, A^i \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.
В общем, и в остальном все точно также, как и у столбцов.
Это было ожидаемо, потому что между этими двумя множествами принципиальной разницы все-таки нет.

№7

Это уже интереснее.
Произведение матриц. Рассмотрим бинарную операцию:
$$*: \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1} \wedge B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_3} => A * B = C, C \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_3}, C^i_j = A^{ik} B_{kj}.$$
Суммирование Эйнштейна. Помним. Любим. Скорбим.
Транспонирование матрицы. Любой матрице $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$ сопоставим матрицу $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$:
$A_{ij} = B_{ji}$.
Эта операция и называется транспонированием.

Назовем следом квадратной матрицы $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$число: $\mathrm{a} = A^i_i$
или сумму ее диагональных элементов.

Про свойства этих операций в билете не написано, так что непонятно, нужно они или нет.
Отметим кое-что:
Произведение матрицы и нулевого столбца даст нулевой столбец некоторой размерности.
Произведение некоммутативно(это следует хотя бы из размерности конечной штуки)
Зато оно асоциативно(очевидно из ассоциативных свойств сумм), дистрибутивно со сложением, с умножением на число.
Транспонирование - обратная сама себе операциия, что очевидно из опр.

№8

Увы, но последуем пути Бадьина и определим скалярное через длины, а не наоборот.

Будем считать, что мы знаем(из Пифагора или другой "левой" мтерики), что такое расстояние между точками. Обозначим его как ρ(A,B).

Тогда для вектора x = $\overrightarrow{AB}: \rho(\text{A,B}) \equiv \|x\|. <-$*модуль* вектора x.

Назовем углом между векторами величину:

$\alpha(x, y) = \arccos \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{-2\|x\|\|y\|}$, *как* видно: $\alpha(x, y) \in [0, \pi]$

Скалярное произведение: (x,y) = $\|x\|\|y\| \cos \alpha(x, y)$

Основные свойства: 1)скалярное произвдение вектора само на себя положительно:

(x,x) = $\|x\|\|x\| \cos \alpha(x, x) = \|x\|\|x\| \geq 0$. Отсюда:

2)Корень из указанного произведения равен длине вектора.

3)Скалярное произведение с нулевым столбцом равно 0 - очевидно ввиду его модуля.

4)В некое карте h, в которой первый вектор параллелен x:

(x,y) = $\|x\| \bullet [y]^1 (h)$

Это доказывается средствами геометрии и означает просто, что салярное произведение суть "проекция" одного вектора на другой.

Покажем это. В самом деле: $\|y\| \cos \alpha(x, y) = \|y\| \cos \alpha(\overrightarrow{OI_1}, y) = [$*из* геометрии$] = [y]^1 (h)$

Ч.т.д.

5)*Скалярное* произведение линейно по каждому аргументу(билинейно)

В самом деле:(x,y+z) =[4]= $\|x\| \bullet [y+z]^1 (h) = [$*по* св-вам карт$] = \|x\| \bullet [y]^1 (h) + \|x\| \bullet [z]^1 (h) =$

$= (x, y) + (x, z);$

$(x, \lambda y) = \|x\|\|\lambda y\| \cos \alpha(x, \lambda y) = |\lambda| \|x\|\|y\| \cos \alpha(x, \lambda y)$. Поскольку для положительных чисел:

$\cos \alpha(x, \lambda y) = \cos \alpha(x, y)$, а для отрицательных: $\cos \alpha(x, \lambda y) = -\cos \alpha(x, y)$:

$\cos \alpha(x, \lambda y) = \operatorname{sgn}(\lambda) \cos \alpha(x, y) => |\lambda| \|x\|\|y\| \cos \alpha(x, \lambda y) = \lambda \|x\|\|y\| \cos \alpha(x, y) = \lambda(x, y)$

Для левого док-ва аналогичны. Ч.т.д.

6) Коммутативность очевидна из коммутативности угла.

Ортогональными векторами по определению назовем те, скалярное произведение которых равно 0.

Линейная независимость: $A\lambda + B\lambda' = \begin{pmatrix} A^1\lambda + B^1\lambda' \\ A^2\lambda + B^2\lambda' \\ \ldots \\ A^N\lambda + B^N\lambda' \end{pmatrix}$.

Если найдется такое ненулевое λ, что их линейная комбинация обратиться в θ, то:

$$A^i\lambda + B^i\lambda' = 0 \Rightarrow A^i = -\frac{\lambda'}{\lambda}B^i \Rightarrow A^i = cB^i \Rightarrow A = cB;$$

Очевидно, тогда A и B должны быть параллельны, что неправда. Ч.т.д.

Скалярное произведение в координатах суть: $(A,B) = [A]^i(h)[B]_i(h)$.

В самом деле:

$$(A,B) = ([A]^i(h)e_i, B) = [\textit{линейность}] = [A]^i(h)(e_i, B) = [A]^i(h)[B]_i(h).$$

Ортогональной проекцией вектора на линейную оболочку(на направление l) будет:

$A_l = (A, \frac{L}{\|L\|})\frac{(A*L)}{\|L\|}$; Очевидно, в виду геометрического смысла скалярного произведения, что это именно то, что нужно.

№9 – *копипастим* с 8

№10

Из нашей геометрии очевидно, что новый базис также есть объект нашего исходного пространства. Тогда новый базис - суть какие-то вектора нашего пространства, а значит - они описывались в нашем старом базисе. То есть в общем случае если e' – *новый* :

$e'_i = f(e_1 \ldots e_N)$, f – *линейная* функция по каждому аргументу.

Очевидно, сожно создать матрицу столбцов для новго базиса: $\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \ldots \\ e'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_1 \ldots e_N) \\ f_2(e_1 \ldots e_N) \\ \ldots \\ f_N(e_1 \ldots e_N) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} A_1^{\ 1}e_1 & A_1^{\ 2}e_2 & \ldots & A_1^{\ N}e_N \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_N^{\ 1}e_2 & A_N^{\ 2}e_2 & \ldots & A_N^{\ N}e^N \end{pmatrix} \Leftrightarrow e'_i = A_i^{\ j}e_j$$

Пусть $X^{'} = X^i e_i^{'} = X^i A_i^j e_j = A_i^j X^i e_j = A_i^j X$. Матрица A_i^j называется матрицей перехода.

Очевидно из последнего: $\mathrm{A}_i^j = [e^{'}_i]^j(e)$.

Будем называть базисы одинаково ориентироваными, если определитель матрицы перехода из одного в другой положителен.

Будем называть e_0 – *правовинтовой* базис в $\overrightarrow{\mathrm{E}^N}$.

Соответственно, все одинаково ориентированные с ним базисы - правые. Не одинаково - левые.

*Определение №*1

Векторное рпоизведение:Б.г. $\|[\mathrm{x},\mathrm{y}]\| = \|x\|\|y\|\sin\alpha(x,y), [\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \overrightarrow{E^N}, ([x,y],x) = 0; ([x,y],y) = 0;$ $x, y, [x,y]$ – *правый* базис.

Смешанное произведение: обозначим $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = ([x,y],z)$;

*Определение №*2

Векторное рпоизведение:Б.г. $[\mathrm{x},\mathrm{y}]_e = \mathrm{sgn}(e)\widetilde{\varepsilon_{k_1,k_2,k_3}}[x]^{k_1}(e)[y]^{k_2}(e)e_{k_3}$ <=> $[x](e) = \widetilde{x}, [y](e) = \widetilde{y}:$

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]_e = \mathrm{sgn}(e)\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение: обозначим $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})_e = \mathrm{sgn}(e)\widetilde{\varepsilon_{k_1,k_2,k_3}}[x]^{k_1}(e)[y]^{k_2}(e)[z]^{k_3}(e)$ <=>

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})_e = \mathrm{sgn}(e)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Св – ва :1)*Смешанное* произведение 2 линейно по каждому аргументу: это очевидно из св-ва *скалярного* и векторного

2)Смешанное произведение 2 ассиметрично: очевидно из св-ва определителя(перестановок)

3)С.п. линейно зависимых равно нулю.

4)смешанное произведение правого базиса больше нуля. Левого - меньше.

5)$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})_e = ([x,y]_e, z) = (x,[y,z]_e)$

6)Линейность и ассиметричность векторного произведения.

7) бац минус цаб.

8)$\|[\mathrm{x},\mathrm{y}]_e\| = \|x\|\|y\|\sin\alpha(x,y)$

9)Векторное произведение линейно зависимых =0 по второму опр.

10)Векторное произведение линейно независимых не равно нулю по второму опр.

11)Перпендекулярность векторного произведения каждому из его аргументов по второму опр.

11)Перпендекулярность векторного произведения каждому из его аргументов по второму опр.

12)Док-во того, что x,y,$[x,y]_e$ -правый базис.

13)$(x,y,z)_e = (x,y,z)$

14)$[x,y]_e = [x,y]$

Доказательства.

1)$(x, y, z+w)_e = (x, y, z)_e + (x, y, w)_e <-$*из* св-в определителя

остальное аналгично

2)*опять* из св-в определителя.

3)$\exists \lambda_i \neq 0 : \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0.$Пусть $\lambda_1 \neq 0 => x = \dfrac{\lambda_2 y + \lambda_3 z}{\lambda_1}$:

$$(x,y,z)_e = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda_2 y_1 + \lambda_3 z_1}{\lambda_1} & \dfrac{\lambda_2 y_2 + \lambda_3 z_2}{\lambda_1} & \dfrac{\lambda_2 y_3 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_1}\begin{vmatrix} \lambda_2 y_1 + \lambda_3 z_1 & \lambda_2 y_2 + \lambda_3 z_2 & \lambda_2 y_3 + \lambda_3 z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}\begin{vmatrix} \lambda_2 y_1 & \lambda_2 y_2 & \lambda_2 y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\lambda_1}\begin{vmatrix} \lambda_3 z_1 & \lambda_3 z_2 & \lambda_3 z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = [\textit{из}$$ известных свойств уже известных нам трехмерных определителей$] = 0.$

4)Если x,y,z-базис, то существует матрица перехода A_{ij}:e$->$ x,y,z.

$$A_{ij} = [e'_i]^j(e) => (x,y,z)_e = \begin{vmatrix} [x]^1(e) & [x]^2(e) & [x]^3(e) \\ [y]^1(e) & [y]^2(e) & [y]^3(e) \\ [z]^1(e) & [z]^2(e) & [z]^3(e) \end{vmatrix} \equiv \det(A_{ij})$$

Ч.т.д.

$$5)(x,y,z)_e = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x^1 e_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x^2 e_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} +$$

$$+x^3 e_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x_i([y,z]_e)^i = (x,[y,z]_e)$$

$$(x,y,z)_e=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=z_1\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}-z_2\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}=z^1e_1\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}-z^3e_2\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}+$$

$$+z^3e_3\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}=z_i([x,y]_e)^i=(z,[x,y]_e)=([x,y]_e,z)$$

$$6)[x,y+z]_e=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ (y+z)_1 & (y+z)_2 & (y+z)_3\end{vmatrix}=[\textit{очевидно}\text{ из св-в столбцов.}]=\ldots$$

$$7)[a,[b,c]_e]_e=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_2c_3-c_2b_3 & b_3c_1-c_3b_1 & b_1c_2-c_1b_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(b_2c_3-c_2b_3\right)\begin{vmatrix}e_2 & e_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}-\left(b_3c_1-c_3b_1\right)\begin{vmatrix}e_1 & e_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}+\left(b_1c_2-c_1b_2\right)\begin{vmatrix}e_1 & e_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(b_2c_3-c_2b_3\right)\left(e_2a_3-e_3a_2\right)-\left(b_3c_1-c_3b_1\right)\left(e_1a_3-e_3a_1\right)+\left(b_1c_2-c_1b_2\right)\left(e_1a_2-e_2a_1\right)=$$

$$=e_2((b_2c_3-c_2b_3)a_3-a_1(b_1c_2-c_1b_2))+e_3(a_1(b_3c_1-c_3b_1)-a_2(b_2c_3-c_2b_3))+e_1(a_2(b_1c_2-c_1b_2)-$$

$$-a_3(b_3c_1-c_3b_1))=e_2(b_2(c_3a_3+a_1c_1)-c_2(b_3a_3+a_1b_1))+e_3(b_3(a_1c_1+a_2c_2)-c_3(b_1a_1+a_2b_2))+$$

$$+e_1(b_1(c_2a_2+c_3a_3)-c_1(b_2a_2+a_3b_3))=e_2(b_2a_ic^i-c_2a_ib^i)+e_3(b_3a_ic^i-c_3b_ia^i)+e_1(b_1c_ia^i-c_1b_ia^i)=$$

$$=b(a,c)-c(a,b)$$

$$8)\|[x,y]_e\|=\left\|\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\right\|=\sqrt{\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\sqrt{\left(x_2y_3-x_3y_2\right)^2+\left(x_1y_3-x_3y_1\right)^2+\left(x_2y_1-x_1y_2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x_2^2y_3^2-2x_2y_3x_3y_2+x_3^2y_2^2+x_1^2y_3^2-2x_1y_3x_3y_1+x_3^2y_1^2+x_2^2y_1^2-2x_2y_1x_1y_2+x_1^2y_2^2}=$$

$$=\sqrt{x_2^2y^2-x_2^2y_2^2-2x_2y_3x_3y_2+x_3^2y^2-x_3^2y_3^2+x_1^2y^2-x_1^2y_1^2-2x_1y_3x_3y_1-2x_2y_1x_1y_2}=$$

$$=\sqrt{x^2y^2-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2}$$

$$\sin\alpha(x,y)=\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2-(x+y)^2}{2\|x\|\|y\|}\right)^2}=\sqrt{\frac{4x^2y^2-\left(x^2+y^2-(x+y)^2\right)^2}{4x^2y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\|x\|\|y\|}\sqrt{x^2y^2-\frac{1}{4}\left(x^2+y^2-(x+y)^2\right)^2};\left(x^2+y^2-(x+y)^2\right)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2}-$$

$$-(x_1+y_1)^2-(x_2+y_2)^2-(x_3+y_3)^2=-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

Ч.т.д.

9)*Очевидноно из свойств определителя.*

10)*Очевидно* из свойств определителя

11)$([\mathrm{x,y}]_e,x)=[x,y]_e^{\ i}x_i=x_1\left(x_2y_3-x_3y_2\right)-x_2\left(x_1y_3-x_3y_2\right)+x_3\left(x_1y_2-x_2y_1\right)=0$

Ч.т.д.

12)*Во − первых,* это ортогональный базис пространства в силу доказанных выше свойств.

Во-вторых: $(\mathrm{x,y},[\mathrm{x,y}]_e)_e=([\mathrm{x,y}]_e,[\mathrm{x,y}]_e)>0=>$ *ч.т.д.*

14)*Очевидно,* мы доказали все возможные свойства, которые приняли за первое определение векторного произведения. Ч.т.д.

15)Очевидно из предыдущего и свойства 5.

№11

Поскольку мы уже прекрасно понимаем, что такое прямая из элементарной геометрии, то всем нам будет очевидно,что с прямой можно естественным образом связать вектор, коллинеарный всем векторам на этой прямой. Тогда для фиксированной точки О на прямой можно будет получить все возможные вектора, если домножать направляющий на все вещественные числа.

Обычно направляющий вектор выбирают единичным, хотя это не принципиально.

Нормаль к прямой. Тут стоит отметить странность постановки вопросов в билете. Связать с прямой направляющий вектор можно везде - во всех плоских пространствах. А вот выбрать к ней нормаль(без дополнительных оговорок) - только в E^2. Ну чтож, нормаль к прямой - такой вектор $\vec{n} : \vec{n} \perp \vec{\tau}; \vec{\tau} \parallel l; \vec{\tau}, \vec{n} - \textit{образуют}$ правый базис.

Соответственно сказанному в первом абзаце: $l := O + t\vec{\tau}, t \in \mathbb{R}, O \in E^N$. Решением этого уравнения будут все точки,принадлежащие прямой. Это называется параметрическим уравнением.

Каноническим уравнением прямой называется система уравнений, связывающих $x_1, x_2, ..., x_N$:

$$\frac{x_1 - O_{x_1}}{a_1} = \frac{x_2 - O_{x_2}}{a_2} = ... = \frac{x_N - O_{x_N}}{a_N}, (a_1, a_2, .., a_N) = \vec{\tau}$$

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0.

Это в E^2. В более высоких измерениях мы получим систему уравнений, описывающее пересечение нескольких плоскостей.

Нормальное уравнение прямой - это сугубо в E^2. Бредовое на самом деле уравнение.

Пусть прямая задана общим уравнением: l:Ax+By+C=0

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}, tg\varphi = \frac{A}{B}, \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} => p = \rho(O, l) = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos\theta =$$

$= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. знак внизу выбираем так, чтобы p>0.

Икскомое уравнение:

$y\sin\theta + x\cos\theta - p = 0$

Ортогональная проекция точки на прямую. Все бы хорошо, но мы пока умеем проектировать только вектора. Не проблема. Что такое координата точки? Это радиус вектор в нее из начала координат. Выберем где-то это начало O. Тогда пусть у нас есть точка $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, прямая $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\vec{\tau}t, C \in l$;

Лучше тут нарисовать чертеж со всем этим добром. Чтобы получить $\overrightarrow{\mathrm{OX}'}, X' \in l$:

$\overrightarrow{\mathrm{OX}'} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \left|(\overrightarrow{OC},\vec{n})\right|\vec{n} - \left|(\overrightarrow{OX},\vec{n})\right|\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \left(\left|(\overrightarrow{OX},\vec{n})\right| - \left|(\overrightarrow{OC},\vec{n})\right|\right)\vec{n}.$

$\left|(\overrightarrow{OC},\vec{n})\right|$ – расстояние от начала координат до прямой. $\left|(\overrightarrow{OX},\vec{n})\right|$ – нормальная к прямой составляющая вектора OX., $\left\|\vec{n}\right\| = 1, \vec{n} \perp \vec{\tau}; \vec{n}, \vec{\tau}$ – правый базис.

$\left|\left(\left|(\overrightarrow{OX},\vec{n})\right| - \left|(\overrightarrow{OC},\vec{n})\right|\right)\right| = \rho(X,l)$ – *расстояние* от точки до прямой.

Отклонение точки от прямой $\delta = \left(\left|(\overrightarrow{OX},\vec{n})\right| - \left|(\overrightarrow{OC},\vec{n})\right|\right)$.

№12

Плоскости в E^3.

Из геометрии очевидно, что любые два несовпадающих ненулевых вектора вместе с какой-то точкой задают плоскость. Это значит, что если $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ – *направяющие*:

$O + L(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) \in \pi \Leftrightarrow \pi = O + u\vec{\tau}_1 + v\vec{\tau}_2; u, v \in \mathbb{R}.$

Это уравнение и называется параметрическим уравнением плоскости. Характерно наличие двух параметров. Гипотетически, это свойственно любым двумерным поверхностям.

Нормалью к плоскости разумно назвать вектор $\vec{\mathrm{n}} = \dfrac{[\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2]}{\left\|[\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_1]\right\|}$.

Отсюда(и из геометрии) очевидно, что этот вектор перпендекулярен любому вектору в плоскости, а также образует с направляющими правый базис. Плюс, он единичный, что, на самом деле, вовсе не обязательно.

Каноническим уравнением плоскости называется уравнение проходящей через три точки плоскости, или уравнение плоскости,проходящей через точку и параллельной двум заданным векторам.(эквивалентность их очевидна):

$$\pi : \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ \tau_{1x} & \tau_{1y} & \tau_{1z} \\ \tau_{2x} & \tau_{2y} & \tau_{2z} \end{vmatrix} = 0$$

Общим уравнением плоскости называется всем известное:Ax+By+Cz+D=0<=>

$$\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+B(\mathrm{y}-y_0)+C(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ \tau_{1x} & \tau_{1y} & \tau_{1z} \\ \tau_{2x} & \tau_{2y} & \tau_{2z} \end{vmatrix} = 0$$

Нормальным уравнением плоскости называется: $\left(\vec{\mathrm{r}}, \vec{n}\right) - \vec{p} = 0$

$\vec{r} = (x, y, z), \left\|\vec{n}\right\| = 1, \vec{p} -$ расстояние от начала координат до плоскости.

Проекция точки на плоскость:

из геометрии очевидно: $\overrightarrow{\mathrm{OX}}' = \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \vec{p} - \left|(\overrightarrow{\mathrm{OX}}, \vec{n})\right|\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \left(\left|(\overrightarrow{\mathrm{OX}}, \vec{n})\right| - \left|(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \vec{n})\right|\right)\vec{n}$

Отклонение и расстояние вводятся также.

№13

Собственно, большинство я уже показал в 11 билете. Из того, что нет:

Нормаль к прямой. Очевидно, что называть нормалью можно что угодно, поскольку в нашем пространстве нет выделенных направлений. Поэтому это очень странное место в билете.

Обычно делается так: во всех задачах, где нам по каким-то причинам нужна нормаль, мы сводим все к какой-то(каким-то) плоским задачам и проводи соответствующие плоскости, *для которых* уже понятно, что писать.

Нормальное уравнение, гипотетически: $\vec{\mathrm{r}} - \left(\vec{\mathrm{r}}, \overrightarrow{\mathrm{N}}\right)\overrightarrow{N} = \vec{p}; \vec{\mathrm{r}} - \left(\vec{\mathrm{r}}, \overrightarrow{\mathrm{N}}\right)\overrightarrow{N} -$ *составляющая* радиус вектора, не параллельная нормали к некоторой плоскости. $\vec{p} -$ *расстояние* до прямой из начала координат.

Для нахождения расстояния до точки проведем прямую через эту прямую и точку и сведем все к плоской задаче.

№14

Собственно, весь билет посвязен выводу алгебры на линейном пространстве. Окей.

Для определения линейного пространства сначала проведем ряд вспомогательных определений.

Во-первых, пусть у нас есть поле K.

Во – вторых, пусть M - произвольное множество.

Рассмотрим функцию: $F\!:\!M^2 \to M$. По определению функции $D(F)=M^2, R(F)=M$.

$F(x,y) \equiv x+y; x,y \in M$.

Рассмотрим функцию: $F' : K \times M$ (*прямое произведение,* множество упорядоченных пар) $\to M$. $F(\lambda,x) \equiv \lambda x$.

Пусть у нас есть множество M с этими двумя функциями на нем.

Потребуем, чтобы M была абелевой группой по операции F, т.е.:

1)F-ассоциативна:x+(y+z)=(x+y)+z

2)существует нейтральный элемент $u \in M : \forall x, x+u=x$

3)для любого элемента существует обратный: $\exists y=x^{-1}: x+y=u$

– – –

4)*F – коммутативна*(*абелевость*)

Потребуем, операция F' на M:

1)Была *ассоциативной*.

2)*существовал* нейтральный, причем он совпадал с мультипликативной единицей поля K(с 1)

Потребуем "дистрибутивность" F и F'

Тогда назовем эти операции линейными операциями на M, а множество (M,F,F') – *линейным* пространством над полем K. Элементы множества M будем называть векторами, само множество M - носителем пространства. F -сложение, F' -умножение на нашем пространстве. Далее будем опускать наши функции, называя M само линейным пространством.

Нулевой вектор, или нейтральный элемент операции сложения: будем обозначать его просто θ. По определению M, M - группа по сложению. Значит у нее существует нейтральный элемент. Единственность нейтрального вообще говоря показывается в любой группе, но покажем его тут отдельно:

Пусть существует еще вектор $w\!:\!(\forall x \in M)(x+u = x \wedge x+w=x) \Rightarrow u+w=u, w+u=w$.

Из абелевости группы M: $u+w=w+u \Rightarrow u=w$.

Ч.т.д.

Существование обратного очевидно по определению группы.

Пусть их два: $(\exists x \in M)(\exists x_1, x_2 \in M):(x + x_1 = u \wedge x + x_2 = u) => x_1 + x + x_2 = x_1 + u =>$
$x_2 = u + x_2 = x_1 + u = x_1$.

Ч.т.д.

Основные свойства указаны в определении М. + два предыдущих. Примером линейного пространства является пространство векторов или пространство упорядоченных пар как над полем $\mathbb{R}$, так и над полем K.

№15

Линейной комбинацией называется выражение вида: $\lambda_i x^i, \forall i: \lambda_i \in K, x^i \in M$.

Линейной оболочкой называется множество всех возможных линейных комбинаций с фиксированными векторами.

Линейная зависимость вводится также: существование ненулевых коэффиентов:
$\exists \lambda_к \in K, \lambda_к \neq 0 : \lambda_i x^i = \theta$

Для определения линейного пространства функций сначала определим множество: Fun(Q,L).

Рассмотрим функции $\varphi_1, \varphi_2 : Q \to L, Q -$ *некое* множество, L - линейное пространство.

Тогда *обозначим* $:(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_1(x), x \in Q$.

Будем говорить, что $\{\varphi_1 + \varphi_2\} -$ *операция* сложения на множестве Fun(Q,L)

Пусть $\varphi : Q \to L, \lambda \in K$:

Тогда обозначим:$(\lambda\varphi)$(x)=$\lambda\varphi$(x),x $\in$ Q.

Будем говорить, что $\{\lambda\varphi\} -$ *стандартная* операция умножения на Fun(Q,L).

Обозначим Θ(x)=$\theta, x \in Q$.

Будем говорить, что $\{\Theta\} -$ *стандартный* нулевой элемент на Fun(Q,L).

Очевидно, что фактически мы задали некоторую алгебру функций, эквивалентную алгебре на некотором линейном пространстве.

Совершенно очевидно,что (Fun(Q,L),$\{\varphi_1 + \varphi_2\}, \{\lambda\varphi\}) -$ *линейное* пространство по определению.

Это пространство и называется пространством векторных функций.

№16

Подпространство линейного пространства - обыкновенное его подмножество, которое является замкнутым относительно операций над линейным пространством.

Рассмотрим линейную оболочку любых элементов линейного пространства:
$L=\{x:x=\lambda_i x^i; i=\overline{1r}, r\in\mathbb{N}, x^i\in Q, \lambda_i\in \mathrm{K}\}$. Очевидно ввиду замкнутости, что $x\in Q$, т.е.:
$L\subseteq Q$;
Поскольку все свойства опреаций, очевидно, работают, то покажем только:
$\theta\in Q \Rightarrow \theta\in L.$ В самом деле,выберем все коэффициенты $\lambda_i=0$; Ч.т.д.
$\forall a_1,a_2\in L: a_1+a_2\in L: a_1+a_2=(\lambda_i^{'}+\lambda_i)x^i=c_i x^i, c\in \mathrm{K}.$ ч.т.д.
Замкнутость по умножению очевидна.
Значит, L является линейным пространством. Ч.т.д.

Рассмотрим произвольное подпространство. Ограничим на него наши операции.
Так как в нем операции все те же(только с другой областью определения), то все их свойства, очевидно, работают. Замкнутость следует из определения.
Ввиду единственности нейтрального, очевидно, что он обязан принадлежать и подпространству.
Ч.т.д.

Теорема о пересечении подпространств:
Пересечение подпространств - подпространство. Во-первых, очевидно, что это - подмножество исходного пространства. Осталось показать их замкнутость. В самом деле, пусть $x,y\in Q_i$. $\Rightarrow x+y\in Q_i$, но x,y принадлежат также любому другому подпространству из пересечения, про каждое из них можно сказать то же самое. Относительно каждой операции $\oplus_i: x\oplus_i y\in Q_i$. Но $\forall i,j: x\oplus_i y=x\oplus_j y$. Значит, это один и тот же элемент, то есть он принадлежит пересечению всех наших множеств. Ч.т.д.
Замкнутость по умножению доказывается также.

Афинное пространство.
Пусть M - множество, L - линейной пространство. Введем операцию $F{:}M^2\to L$.
1)$M - непусто.$
2)$(p_1,p_2)+(p_2,p_3)=(p_1,p_3); p_1,p_2,p_3\in M$
3)$\forall p_0\in M, \forall x\in L:\exists! p:(p_0,p)=x$
Тогда назовем операцию F - векторизацией, а упорядоченные пары - ветокрами.
Назовем множество (M,L,F) афинным пространством над полем K.
Элементмы M назовем точками, а L - векторами.

№17

Базис линейного пространства.

Базисом линейного пространства разумно называть такое множество его элементов, что их линейная оболочка совпадает с самим пространством.

Очевидным образом вводится понятие базиса подпространства.

Координатами вектора разумно назвать его коэффициенты разложения(принадлежащие, очевидно, K) в соответствующем базисе.

Пусть введен базис e на $Q(Q \subseteq L):Q \subseteq L(e_1,...,e_r)$

Очевидно, тогда любой элемент из Q принадлежит их линейной облочке, то есть существуют такие r коэффициентов, что они определяют разложение этого элемента по базисным векторам. Это значит, что координаты определены для любого элемента из Q.

Очевидно,что при сложении векторов, складываются и их координаты. При умножении на число: еще очевиднее.

Очевидным образом определяем столбцы координат.

Покажем, что если e - базис M, то e - базис L(M).

В самом деле, так как любой элемент из M представим в виде: $\lambda_k e^k$, то любой элемнет из L(M) представим в таком же виде(просто сложится туча коэффициентов). Ч.т.д.

Покажем, что если e - базис L(M), то e - базис M. В самом деле, выберем коэффицинеты в L(M) как (0,...,1,...,0). Это соостветтсвует какому-то эл-ту из M. Поскольку этот элемент принадлежит L(M), то найдется такое разложение его по базисным векторам. Повторив рассуждение для любого эл-та из M, ч.т.д.

Очевидно, столбцы координат базисных векторов - столбцы с одной единицей.

Очевидно, столбец координат нулевого вектора - нулевой столбец.

Линейная зависимость вводится также,как и всегда.

Простейшим базисом пространства упорядоченных N-ок является базис из "единичных" N-ок, т.е.:e_i=(0,0,...,1,....,0)

Простейшим базисом пространства $N_1 * N_2$ – базис из матриц с одной единицей на нужном месте.

Назовем размерностью линейного пространства максимальное число линейно независимых ненулевых векторов.
У любого пространства конечной размерности N существует по определению размерности: N линейно независимых векторов. Возьмем их за базисные и рассмотрим их линейную оболочку. Утверждается, что эта оболочка будет совпадать с исходным пространством.

В самом деле, принадлежность любого элемнета из этой оболочки к исходному пространству очевидно. Пусть теперь какой-то элемент исходного не принадлежит к этой линейной оболочке, т.е.:$\nexists\lambda_i : \lambda_i e^i = x \Rightarrow \nexists\lambda_i : \lambda_i e^i - x = \theta \Leftrightarrow \nexists\lambda_i^{'} : \lambda^{'}_i e^i + \lambda^{'}_{N+1} x = \theta$
Т.е. совокупность e и x - линейно независима. Но e - максимальное число линейно независимых! Противоречие.
Ч.т.д.
№18
Определители.
Рассмотрим функцию F: $\mathrm{K}^{N\times N} \to \mathrm{K}$.
$F -$ линейна по каждому аргументу. F равна нулю, если хотя бы 2 аргумента совпадают. На единичной матрице I эта функция выдает единицу.

Эту функцию и назовем определителем в пространстве $\mathrm{K}^{N\times N}$.
Чтобы доказать как существование, так и единственность, нам так или иначе придется вникнуть в теорию перестановок. Будем делать это по ходу.

1) Покажем, что $\mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_k A_{m+1}..) = -F(..)$
В самом деле: $\mathrm{F}(..A_{k-1}A_m + A_k A_{k+1}..A_{m-1}A_k + A_m A_{m+1}..) = 0 = \mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_k + A_m A_{m+1}..) +$
$+\mathrm{F}(..A_{k-1}A_k A_{k+1}..A_{m-1}A_k + A_m A_{m+1}..) = \mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_k A_{m+1}..) +$
$+\mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_m A_{m+1}..) + \mathrm{F}(..A_{k-1}A_k A_{k+1}..A_{m-1}A_k A_{m+1}..) + \mathrm{F}(..A_{k-1}A_k A_{k+1}..A_{m-1}A_m A_{m+1}..) =$
$= \mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_k A_{m+1}..) + \mathrm{F}(..A_{k-1}A_k A_{k+1}..A_{m-1}A_m A_{m+1}..) = 0 \Rightarrow$
$\mathrm{F}(..A_{k-1}A_m A_{k+1}..A_{m-1}A_k A_{m+1}..) = -F(..)$

Покажем теперь, что любую произвольную перестановку индексов можно представить в виде композиции "элементарных" перестановок (свапающих два соседних элемента).
В самом деле, возьмем перестановку: $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), ..., \sigma(\mathrm{N})\}$

Найдем в нем первый элемент. Он будет на k-ом месте. Тогда с помощью k-1 элементарной подстановки поставим его на 1 место. При этом все $\sigma(\mathrm{i}),\mathrm{i}=\overline{1k-1}$
Сдвинуться вправо на 1. С помощью еще k-2 перестановок поставим $\sigma(1)$ на k-ое место.
Теперь, очевидно,мы получили: $\{\sigma(\mathrm{k}),\sigma(2),...,\sigma(\mathrm{k}\text{-}1),\sigma(\mathrm{k}),\sigma(\mathrm{k}+1),...,\sigma(\mathrm{N})\}$
А композиция всех сделанных нами элементарных - простой обмен 1 и k элемента.
Повторим указанную операцию для всех последующих чисел. Очевидно, что мы произвольную перестановку разложили в виде кучи элементарных. Поскольку для каждой перестановки: $\mathrm{F}(\mathrm{A}_{\sigma(1)},...,A_{\sigma(\mathrm{k})},A_{\sigma(\mathrm{k}+1)},...,A_{\sigma(\mathrm{N})})=-\mathrm{F}(\mathrm{A}_{\sigma(1)},...,A_{\sigma(\mathrm{k}+1)},A_{\sigma(\mathrm{k})},...,A_{\sigma(\mathrm{N})})$, то:
$\mathrm{F}(\mathrm{A}_{\sigma(1)},...,A_{\sigma(\mathrm{N})})=(-1)^M F(..).\ M-\textit{количество}$ элементарных в разложении σ

можем число $(-1)^{\mathrm{M}}$ само по себе назвать знаком перестановки, обойдя вообще функцию хевисайда, беспорядки и тому подобное. Я думаю, мы так и поступим, а докажем их позже.

2)$\mathrm{F}(\mathrm{A}_{\sigma(1)},...,A_{\sigma(\mathrm{N})})=\mathrm{sgn}(\sigma)F(..)$
3)$F(\mathrm{I}_{\sigma(1)},...,I_{\sigma(\mathrm{N})})=\mathrm{sgn}(\sigma)F(I)=\mathrm{sgn}(\sigma)<-\textit{оч}-\textit{но}$ из второго.
4)$\mathrm{F(A)=F}(\mathrm{A}_1,...,A_{\mathrm{N}})=\sum\limits_{\substack{k_1,k_2,...,k_N-\\-\textit{различные}\\\textit{числа}}}\mathrm{F}(\mathrm{I}_{k_1},...,I_{k_N})A^{k_1}...A^{k_N}<-$очевидно из линейности.

В самом деле: $\mathrm{A}_i=I_{k_i}A_i^{k_i}<-\textit{разложение}$ любого по бизисным. Дальше просто выносим и раскладываем.
5)$\mathrm{F(A)}=\sum\limits_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)A^{\sigma(1)}{}_1...A^{\sigma(\mathrm{N})}{}_N,\ S_N-\textit{множество}$ всех престановок.
Это очевидно из 4 + 3, где каждое k заменяется на какую-то перестановку.

Отсюда следует единственность определителя,поскольку для любой матрицы A:
$\mathrm{F}_1(A)=\sum\limits_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)A^{\sigma(1)}{}_1...A^{\sigma(\mathrm{N})}{}_N=F_2(A)=>F_1=F_2.$
Покажем, что эта сумма сама по себе есть определитель.
Линейность очевидна из свойств суммы. Определитель 1 матрицы равен 1-очевидно, потому что все слагаемые, кроме одного (содержащего A_k^k) *равны* 0, а он - единице.

Равенство нулю на одинаковых столбцах:
введем перестановку σ, меняющую местами m и k элементы и только их. Обозначим:
$\mathrm{S}_{N1}=\{\sigma:\sigma\in S_N\wedge\sigma(k)<\sigma(m)\},\mathrm{S}_{N2}=\{\sigma:\sigma\in S_N\wedge\sigma(k)>\sigma(m)\}$

Очевидно, их объединение есть S_N ($k, m-$ *различны*), а пересечение пусто.
Тогда:
$F(..A_{k-1}XA_{k+1}..A_{m-1}XA_{m+1}..)=$
$= \sum_{\sigma\in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)}{}_1..A_{k-1}{}^{\sigma(k-1)}X^{\sigma(k)}A_{k+1}{}^{\sigma(k+1)}..A_{m-1}{}^{\sigma(m-1)}X^{\sigma(m)}A_{m+1}{}^{\sigma(m+1)}..A^{\sigma(N)}{}_N =$
$= \sum_{\sigma\in S_{N1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)}{}_1..A_{k-1}{}^{\sigma(k-1)}X^{\sigma(k)}A_{k+1}{}^{\sigma(k+1)}..A_{m-1}{}^{\sigma(m-1)}X^{\sigma(m)}A_{m+1}{}^{\sigma(m+1)}..A^{\sigma(N)}{}_N +$
$+ \sum_{\sigma\in S_{N2}} \operatorname{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)}{}_1..A_{k-1}{}^{\sigma(k-1)}X^{\sigma(k)}A_{k+1}{}^{\sigma(k+1)}..A_{m-1}{}^{\sigma(m-1)}X^{\sigma(m)}A_{m+1}{}^{\sigma(m+1)}..A^{\sigma(N)}{}_N =$
$=0$. Это можно понять исходя из того,что в одной сумме на один беспорядок больше,чем в другой. Поэтому у них разные знаки. Поскольку других отличий в суммах нет, то у них будут только разные знаки. И их сумма обратится в ноль.
Одинаковое число элементов следует из того, что любую из S_{N2} можно представить как $\sigma_0 * \sigma, \sigma \in S_{n1}$. σ_0 свапает k и m. Верно и обратное.
Ч.т.д.
Значит, эта функция и есть поределитель, то есть он существует.

Теперь о перестановках.
Во − первых, перестановкой σ множества M *обратимая* функция σ:M $\to$ M.
Обозначим через S_M множество всех перстановок M.
Обозначим композицию перестановок как их произведение. Очевидно,композиция перестановок - перестановка, причем опять из M $\to$ M(обе предыдущие перестановки сами были тоже на M)
Введем тождественную перестановку e.
*О*чевидно ввиду определения,что у каждой перестановки существует обратная, композиция с которой дает единичную перестановку. Ассоциативность по композиции перестановок еще более очевидно.
Таким образом перестановки M - группа по операции их композиции.
Если перестановка меняет метсами только два элемента - она простая. Если два соседних, то элементарная.
Разложение в произведение элементарных было показано выше.
Будем говорить, что h - функция Хэфисайда, если она равна 1 на неотрицательных $x \in \mathbb{R}$ *и* 0 на отрицательных.
Обозначим число беспорядков: $P(\sigma) = \sum_{1\le i<j\le N} h(\sigma(i)-\sigma(j))$
Обозначим $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$. Покажем:
$\operatorname{sgn}(\sigma\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma), \sigma_1 -$ элементарная.

В самом деле, пусть у нас есть какая-то перестановка с каким-то числом беспорядков. Очевидно, что у двух соседних либо правый больше левого, либо левый - правого. Если мы их поменяем, то число беспорядков изменится - мы либо создадим новый, либо уберем старый. Значит, число беспорядков поменяет свою четность, т.е. изменится знак перестановки. Отсюда очевидно, что, разложив σ в элементарные, $(-1)^{M} = (-1)^{P(\sigma)}$, *как* мы и приняли раньше.