ТЕМА 1. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся, а какие – нет.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ - расходится – не выполнено необходимое условие. $\left(\cos\frac{2}{n}\right)^{n^2} \to 0,\ n\to\infty$

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\operatorname{arctg} n$. Применим признак Даламбера:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}\operatorname{arctg}(n+1)\,n!}{3^n\,(n+1)!\operatorname{arctg} n}=\frac{3}{n+1}\,\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\operatorname{arctg} n}\to 0,\ n\to\infty$. Ряд сходится.

В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$. Применим признак сравнения с гармоническим рядом:

$a_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\frac{1}{n^{3/2}}$.

Ряд сходится.

Примеры для самостоятельного решения.

Пример 1. **(лучше выписывать в перепутанном порядке)**

$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{1}{n^2+n+1}$ - расходится (Н.У); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$ - расходится $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ -сходится $\sim\frac{1}{n^2}$.

Пример 2. **(лучше выписывать в перепутанном порядке)**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0,3}}$ - расходится (Н.У); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!}\cdot\frac{1}{3^n}$ - сходится $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}-\sin\frac{\pi}{n^2}\right)$ -сходится $\sim\frac{1}{n^2}$.

Пример 3. **(лучше выписывать в перепутанном порядке)**

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ - расходится (Н.У); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 2^n}$ - расходится $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$ -расходится $\sim\frac{1}{n^{2/3}}$.

ТЕМА 2. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА.

Определить, при каких значениях p ряд сходится абсолютно, а при каких – условно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$

Решение. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$ согласно признаку сравнения с гармоническим рядом. Условная сходимость при $0<p\le 1$ по признаку Лейбница. Ряд знакочередующийся; последовательность $\frac{1}{(n+1)^p}$ монотонно убывая стремится к нулю при $p>0$. Ответ: абсолютно сходится при $p>1$, условно сходится при $0<p\le 1$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}$.

Рассмотрим более общий случай – ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$.

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{N} e^{inx}=e^{ix}\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}=\frac{(1-e^{iNx})(e^{ix}-1)}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})}=\frac{e^{ix}-1-e^{i(N+1)x}+e^{iNx}}{2-2\cos x}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\cos kx\right|=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}|\cos x-1-\cos(N+1)x+\cos Nx|<\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\sin kx\right|=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}|\sin x-\sin(N+1)x+\sin Nx|<\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Последовательности частичных сумм $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ и $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ равномерно ограничены при $x\ne 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. (в исходном примере $x=1$). Последовательность $\frac{1}{n^p}$ монотонно убывая стремится к нулю при $p>0$. Согласно признаку Дирихле-Абеля ряды сходятся при $p>0$.

Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Последний ряд сходится при $p>1$.

Что можно сказать об абсолютной сходимости на множестве $0<p\le 1$? Имеем:

$\frac{|\cos nx|}{n^p}\ge\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2\cdot n^p}+\frac{\cos 2nx}{2\cdot n^p}$. Ряд $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^p}$, как мы знаем, сходится по признаку Абеля-Дирихле, а ряд $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ расходится. Следовательно, ряд $\frac{\cos^2 nx}{n^p}$ – расходящийся, поэтому и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p}$ – расходящийся. Аналогично обстоит дело с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$. Таким образом, на множестве $0<p\le 1$ оба ряда сходятся условно.

Ответ: абсолютно сходится при $p>1$, условно сходится при $0<p\le 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+1}}$ (абсолютно сходится при $\alpha>2$, условно - при $0<\alpha\le 2$);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{1+n^2}}$ (абсолютно сходится при $0<\alpha<2$; условно сходится при $\alpha\ge 2$)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\sin 3n}{(n+1)^p}$ (абсолютно сходится при $p\ge\frac{3}{2}$, условно – при $\frac{1}{2}<p\le\frac{3}{2}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}(n+1)^p}$, (абсолютно сходится при $p>\frac{1}{2}$, условно – при $-\frac{1}{2}<p\le\frac{1}{2}$

ТЕМА 3. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ.

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(0;+\infty)$ функциональная последовательность $f_n(x)=\frac{x\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$.

Воспользуемся практическим критерием и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(0;1)}f_n(x)$. Для точо, чтобы определить $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)}f_n$ используем достаточное условие экстремума. Найдем производную $f_n'(x)=\sqrt{n}\frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{1+n^2x^2}=\frac{\sqrt{n}}{1+n^2x^2}(1-n^2x^2)$. При переходе через точку $x=\frac{1}{n}$ производная функции меняет знак с положительного на отрицательный, поэтому $x=\frac{1}{n}$ - точка максимума, $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)}f_n(x)=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0,\ n\to\infty$. Последовательность яходится равномерно.

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(1;2]$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$.

Решение. При $x > 1$ ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$. Согласно признаку Вейерштрасса исходный функциональный ряд сходится равномерно.

Задачи для самостоятельного решения.

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(0;+\infty)$ функциональная последовательность $f_n(x) = \sqrt{n} x e^{-nx^2}$ (неравномерно)

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(0;+\infty)$ функциональная последовательность $f_k(x) = \frac{kx}{1+k^3x^2}$ (равномерно)

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(0;+\infty)$ функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$ (равномерно).

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на промежутке $(0;+\infty)$ функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}x}{1+\sqrt{k}x^2}$ (расходится).

ТЕМА 4. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВОГО РЯДА.

Определите область сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+1)^n}{3n^2-2}$.

Сделаем замену переменных $2x+1 = y$. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{3n^2-2}$.

Вычислим $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3n^2-2}} = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{3n^2-2}\right)\right\} = 1$.

Согласно формуле Коши-Адамара $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3n^2-2}}} = 1$.

В граничных точках $y = \pm 1$. получаем ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pm 1)^n}{3n^2-2}$, которые сходятся абсолютно согласно признаку сравнения. Ответ: область сходимости ряда $-1 \le 2x+1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 0$.

Задачи для самостоятельного решения.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$ $-1<x\le 0$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $-\infty<x<+\infty$ это синус!; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x-1)^n}{2^n}$ $-\frac{1}{3}<x<1$.

ТЕМА 5. СУММИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.

Применяя, если надо, почленное дифференцирование или интегрирование, вычислите сумму ряда $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\dots$.

Требуется найти сумму ряда $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Применяя почленное дифференцирование, получаем $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$. Заметим, что $S(0)=0$ и проинтегрируем $S'(x)$ с этим начальным условием. $S(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

Задачи для самостоятельного решения:

Применяя, если надо, почленное дифференцирование или интегрирование, вычислите сумму ряда $2x-\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}-\frac{128x^7}{7}\dots$. Ответ $\operatorname{arctg}2x$.

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ Ответ: $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ Ответ: $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

ТЕМА 6. СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Определить, сходятся или расходятся несобственные интегралы

а) $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$; б) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int_0^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

а) $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx=\int_0^{0.5}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx+\int_{0.5}^{\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$. Интеграл расходится, поскольку расходится второй интеграл: $\frac{\ln(1+2x)}{x}>\frac{1}{x}$, а $\int_{0.5}^{\infty}\frac{1}{x}dx$ -расходится.

б) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$; Заметим, что в точке $x=0$ подынтегральную функцию можно доопределить по непрерывности нулем, поэтому интеграл является несобственным 1 рода, и его сходимость зависит только от сходимости на бесконечности. Сделаем замену переменных $x^2 = t;\ x = \sqrt{t};\ \ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Получим: $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin t}{2t^{\frac{3}{4}}}dt$. Интеграл сходится (условно) по признаку Дирихле-Абеля.

в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int\limits_0^{0.5} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x}} + \int\limits_{0.5}^1 \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x}}$. Первый интеграл расходится, поскольку при $x \to 0$ $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x}} \sim \dfrac{1}{x}$. Значит, расходится и весь исходный интеграл.

Задачи для самостоятельного решения.

$\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(x+1\right)\ln\left(x+2\right)}$ - сходится; $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{x}\ln\left(x+1\right)}$ - расходится.

$\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin\sqrt{x}dx}{x}$ - сходится; $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ - сходится.

ТЕМА 7. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Определить, сходится ли интеграл равномерно или неравномерно на указанном промежутке.

а) $\int\limits_0^\infty pe^{-px}dx,\ p \in \left[0;2\right)$; б) $\int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{x^p}dx,\ \ p \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^p},\ p \in \left[0;\dfrac{3}{5}\right)$.

а) Воспользуемся практическим критерием. $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{p\in\left[0;2\right)}\int\limits_R^\infty pe^{-px}dx = \lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{p\in\left[0;2\right)} e^{-Rp} = 1$ (при $p = 0$).

Интеграл сходится неравномерно.

б) $\int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{x^p}dx$. Интеграл сходится равномерно при $p \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, согласно признаку Дирихле-Абеля:

$\left|\int\limits_1^A \cos xdx\right| < 3$; для любого значения $A > 0$, Функция $\dfrac{1}{x^p}$ монотонно по x и равномерно по p стремиться к нулю при $p \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; $x \to \infty$, покольку $\sup\limits_{p\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\dfrac{1}{x^p} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0,\ x \to \infty$.

в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^p},\ p \in \left[0;\dfrac{3}{5}\right)$

Решение. Для того, чтобы применить практический критерий, сведем несобственный интеграл 2 рода к несобственному интегралу 1 рода при помощи замены

$x=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{dt}{t^2};\ \int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}=\int\limits_1^\infty\frac{t^p dt}{t^2}=\int\limits_1^\infty t^{p-2}dt$. Применим практический критерий:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{p\in\left[0;\frac{3}{5}\right)}\left(\int\limits_R^{+\infty}t^{p-2}dt\right)=\lim_{R\to+\infty}\sup_{p\in\left[0;\frac{3}{5}\right)}\left.\frac{t^{p-1}}{p-1}\right|_R^{+\infty}=\lim_{R\to\infty}\sup_{p\in\left[0;\frac{3}{5}\right)}\frac{R^{p-1}}{1-p}=\lim_{R\to\infty}\frac{R^{\frac{3}{5}-1}}{1-\frac{3}{5}}=0.$$ Сходится равномерно.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p\in(1;2)$. неравномерно
2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p\in(2;+\infty)$. равномерно
3. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$, $p\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. равномерно
4. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$, $p\in(0;1)$. неравномерно
5. $\int\limits_0^{+\infty}pe^{-px}dx$, $p\in[a;b]$, $0<a<b$. -равномерно
6. $\int\limits_0^{+\infty}pe^{-px}dx$, $p\in[0;b]$, $b>0$. -неравномерно
7. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}dx$, $p\in(0;+\infty)$. - неравномерно
8. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}dx$, $p\in[a;+\infty)$, $a>0$. равномерно

ТЕМА 8. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА.

Выразите интеграл через B или Г функцию.

а) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7 x\sin^6 x dx$; в) $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$

а) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4}dx$. Воспользуемся представлением B-функции через несобственный интеграл 1 рода:

$B(p,q)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$. В нашем примере $p=\frac{3}{2};\ p+q=4\ \Rightarrow q=\frac{5}{2}$. Итак,

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4}dx=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

б) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \sin^6 x dx$. Сделаем замену переменных

$\sin^2 x = t$; $dt = 2\sin x\cos x dx$; $\cos x = \sqrt{1-t}$; $\sin x = \sqrt{t}$.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^6 x \sin^5 x \underbrace{\left(2\cos x \sin x dx\right)}_{dt} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-t\right)^3 t^{\frac{5}{2}} dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(4;\frac{7}{2}\right).$$

в) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$. Замена $x^2 = t$; $x = \sqrt{t}$, $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$;

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

$\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x\right)}$. Ответ: $\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. $\int_0^{\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{4}} dx}{\left(1+x\right)^3}$. Ответ: $\mathrm{B}\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{4}\right)$. $\int_0^{\infty} \dfrac{x dx}{\left(1+x\right)^7}$. Ответ: $\mathrm{B}\left(2;5\right)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^8 x dx$; Ответ: $\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1/2} x \sin^{13/2} x dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{4}\right)$;

$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} dx$. Ответ: $2\Gamma\left(6\right) = 240$; $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$. Ответ: $\dfrac{1}{3}\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

$\int_0^1 x\left(-\ln x\right)^2 dx$ Ответ:з.п. $-\ln x = t$; $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} dt = \dfrac{1}{8}\Gamma\left(3\right) = \dfrac{1}{4}$.