Задания по курсу ДУ. Теормин.

217 группа, Богомолов Александр

1. Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка.

Th.1[Коши о $\exists$ и ! решения]. Пусть в некотором прямоугольнике $R = \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ функция $f(x, y)$:
1) непрерывная по совокупности переменных;
2) удовлетворяет условию Липшица, т.е.:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|,$$

где N - постоянная(не зависит от выбора y_1, y_2, $y_1, y_2 \in R$.
Тогда на сегменте $|x - x_0| \leq H$, где $H = \min(a, \frac{b}{M})$ ($M = \sup_R |f(x, y)|$) существует единственное решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

---

2. Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения y' = f(x,y). Проверьте её выполнение для задачи.

Тоже, что **Th.1[Коши о $\exists$ и ! решения]**. **Проверка выполнения:**
$f(x, y) = 4x - 4y$
1) непрерывность f(x,y): очевидна, но все же. Проверим по определению. Нужно доказать, что: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M, \rho(M(x, y), M_0(x_0, y_0)) < \delta : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда, нужно доказать, что $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$: $|4x - 4y - 4x_0 + 4y_0| = 4|(x - x_0) - (y - y_0)| \leq 4(|x - x_0| + |y - y_0|) < 4(\delta + \delta) = 8\delta < \varepsilon$ 2) условие Липшица проверяется элементарно:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = 4|x - y_1 - x + y_2| = 4|y_1 - y_2| \leq N|y_1 - y_2| \text{ для } N \geq 4$$

Как видим, выбор N не зависит от выбора точек => условие Липшица выполняется. Таким образом, условия теоремы выполнены всюду для x>0.

3. Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения y' = f(x,y). Проверьте её выполнение для задачи.

Тоже, что **Th.1[Коши о $\exists$ и ! решения]**. **Проверка выполнения:**
$f(x, y) = \sqrt[6]{y}$
1) непрерывность: очевидна, но здесь уже лучше доказывать через пределы.
2) условие Липшица:

$$|\sqrt[6]{y_1} - \sqrt[6]{y_2}| \leq N|y_1 - y_2|$$

Легко видеть, что выбор N зависит от y_1, y_2 => условие Липшица не выполняется всюду, в том числе и при x>0. Тем не менее покажем это:

$$\frac{|\sqrt[6]{y_1} - \sqrt[6]{y_2}|}{|y_1 - y_2|} \leq N$$

при $y_2 = 0$ и $y_1 \to 0$:

$$\frac{|\sqrt[6]{y_1} - \sqrt[6]{y_2}|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{y_1^{5/6}} \to \infty$$

4. Сформулируйте теорему Чаплыгина существования и единственности решения задачи Коши.

Th.2[Чаплыгина] Пусть существует нижнее $\alpha(x)$ и верхнее $\beta(x)$ решения задачи Коши, такие что $\alpha(x) < \beta(x)$. Пусть функция f(x,y) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т.е. при каждом $x \in [0; a]$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, y_1, y_2 \in [\alpha(x), \beta(x)].$$

Тогда задача Коши имеет единственное решение, причем:

$$\alpha(x) < y(x) < \beta(x), x \in [0; a]$$

---

5. Дайте определение ФСР линейного однородного ДУ. Вид общего решения.

ФСР - совокупность n линейно независимы на отрезке [a,b] решений линейного однородного ДУ.
Справедлива теорема.

$\boxed{\textbf{Th}}$ Пусть $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ - ФСР линейного однородного уравнения n-го порядка. Тогда любое решение этого уравнение может быть представлено в виде:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x),$$

где c_i - постоянные.

Пример:

$$y'' - 3y' = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Тогда ФСР уравнения:

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{3x}$$

Тогда, из выше сказанного, общее решение:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{3x}$$

6. Метод вариации постоянной для решения НЛ ОДУ 1п.

Суть метода:

Th.3[Метод вариации постоянных] Пусть $y_1(x), .., y_n(x)$ - ФСР однородного уравнения

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$$

Тогда функция $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x)$ будет решением неоднородного линейного уравнения, если $c'(x)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(j)}(x) = 0, \text{ для } j = 0, 1, .., n-2 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Пример: x" = t
Общее решение однородного: $x(t) = at + b$

Варьируем постоянные:$x(t) = a(t)t + b(t)$
Получим:

$$\begin{cases} a't + b' = 0 \\ a' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(t) = -\frac{t^3}{3} + C_2 \\ a(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

Таким образом, $x(t) = (\frac{t^2}{2} + C_1)t + (-\frac{t^3}{3} + C_2)$, где $\vec{C} = (C_1, C_2)^T$- произвольный вектор.

7. Метод вариации постоянной для неоднородной линейной нормальной системы.

Нормальная система - система вида: $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F(t)}$, где A(t) - матрица nxn, $\vec{F}(t) = \{f_1(t), .., f_n(t)\}$ - заданная вектор функция(неоднородность), $\vec{x}(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$.
Справедлива следующая теорема:

Th.4 Пусть A(t) и X(t) непрерывны на [a,b] и известно ФСР однородно линейной нормальной системы. Тогда общее решение неоднородной системы находится с помощью квадратур.

Пусть $\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i\vec{x_i}(t)$ - общее решение соответсвующей однородной системы: $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$. Варьируем постоянные => $\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i(t)\vec{x_i}(t)$ (7.1). Подставляем в искомоую систему и получаем:

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t)\vec{x_i}(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i(t)\vec{x_i}'(t)}_{A(t)\sum_{i=1}^n c_i(t)\vec{x_i}(t)} = A(t)\sum_{i=1}^n c_i(t)\vec{x_i}(t) + \vec{F(t)}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t)\vec{x_i}(t) = \vec{F}$$

Если расписать по строчно, получим систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i'(t)x_{1i} = f_1(t) \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)x_{2i} = f_2(t) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)x_{ni} = f_n(t) \end{cases}$$

Так как определитель Вронского $W[\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}] \neq 0$ => система разрешима и $c_i'(t) = \phi_i(t), i = \overline{1, n}$.

$$c_i(t) = \int \phi_i(t)dt + \tilde{c_i},$$

где $\tilde{C} = (\tilde{c_1}, \cdots, \tilde{c_n})^T$ - произвольный вектор. Подставляя выражение для $c_i(t)$ в формулу (7.1) и получаем общее решение для неоднородной ЛНС.
Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{\cos(t)} \end{cases}$$

Общее решение соответсвующей однородной:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos(t) + c_2\sin(t) \\ -c_1\sin(t) + c_2\cos(t) \end{pmatrix}$$

Варьируем постоянные. Получим:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|\cos(t)| + \tilde{c_1} \\ t + \tilde{c_2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, общее решение неоднородной системы запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\ln|\cos(t)| + \tilde{c_1})\cos(t) + (t + \tilde{c_2})\sin(t) \\ -(\ln|\cos(t)| + \tilde{c_1})\sin(t) + (t + \tilde{c_2})\cos(t) \end{pmatrix}$$

8. Покажите равносильность.

Задача Коши для ОДУ n-го порядка ставится так:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

при начальных условиях: $y(x_0) = y_1^0, y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0$.
Пусть теперь $y = y_1, y' = y_2, \cdots, y^{(n-1)} = y_n$. Тогда приходим к системе:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

при начальных условиях: $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \cdots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1}^0$.
Правые части: $f_i = y_{i+1}$ - удовлетворяют всем условиям теоремы о $\exists$ и !, лишь только потребуем непрерывность $f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ и выполнение условие Липшица.
Пример:

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

Пусть $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = F(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

9. Теорема $\exists$ и ! решения з.Коши для системы первого порядка.

Поставим задачу Коши для системы уравнений первого порядка (9.1). Пусть:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

Или в векторном виде: $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$.
Пусть заданы начальные условия: $x_i(t_0) = x_i^0 (i = \overline{1, n})$.

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[Коши]** Пусть:
1) f_i - непрерывны в окрестности начальных значений;
2) f_i удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, начиная со 2-го.
Тогда решение задачи Коши (9.1) $\exists$ и !.

---

10. Фундаментальная матрица и так далее.

Фундаментальная матрица - матрица, составленная из столбцов, образующих ФСР - $X(t) = (\vec{x_1}(t), \cdots, \vec{x_n}(t))$.
Так как каждый столбец матрицы - решение, то справедливо матричное уравнение (10.1):

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

Будем искать решение в виде: $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}$, где $\vec{C}$ - произвольный вектор.
Подставив в (10.1) => тождество => Мы построили общее решение однородной системы.
Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Легко проверить:

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

образуют ФСР этой системы. Тогда, общее решение дается:

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X(T)C = (\vec{x_1}\ \vec{x_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\sin(t) + c_2\cos(t) \\ c_1\cos(t) + c_2\sin(t) \end{pmatrix}$$

11. Теорема $\exists$ и ! решения з.Коши для уравнения n-го порядка.

Поставим задачу Коши (11.1).
Пусть:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

Пусть также начальные условия:

$$y(x_0) = y_1^0, y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0$$

Тогда:

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[Коши]** Решение задачи Коши (11.1) $\exists$ и !, если в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$ функция f:
1) является непрерывной функцией всех своих аргументов;
2) удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со 2-го.

---

12. Теорема о стрктуре ФСР однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.

Введем пару определений.
Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка - ДУ вида (11.1):

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

при условии, что все $a_i(x)$ и $f(x)$ - непрерывны на множестве X(некотором подмножестве числовой прямой).
Однородное уравнение - уравнение вида (11.1) при $f(x) \equiv 0$.
В противном случае ДУ называется **неоднородным**.
Решение уравнения (11.1) - любая функция $y(x) \in C^n[X]$, удовлетворяющая уравнению.
ДУ (11.1) называется уравнением с постоянными коэффициентами, если $a_i(x) = const_i$.

Нетривиальные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОУсПК) будем строить в виде: $y(x) = Ce^{\lambda x}$, где C$\neq 0$, $\lambda = const$ (метод Эйлера). Подставляя в ЛОУсПК:

$$L[Ce^{\lambda x}] = C\underbrace{[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n]}_{M(\lambda)}e^{\lambda x} = 0$$

Отсюда: $M(\lambda) = 0$.
Характеристический многочлен - многочлен $M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda^{n-i}$.
Характеристическре уравнение - уравнение $M(\lambda) = 0$.

Пусть: характеристическое уравнение имеет n **различных (простых)** корней $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Отсюда, легко показать, что каждому λ_i соответсвует решение: $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$.
Справедлива теорема:

Th Пусть корни характеристического уравнения простые. Тогда функции: $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ $(i = \overline{1, n})$ образуют ФСР этого однородного линейного уравнения.

Замечание:
Если корни λ_i - комплексные, пару функций $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$, отвечающих $\lambda_i = \alpha+i\beta, \lambda_{i+1} = \alpha - i\beta$, обычно заменяют вещественными функциями $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
Пример:

$$y''' - 2y'' - 3y = 0$$

Характеристическое уравнение (ХУ):

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Его решения: $\lambda_{1,2,3} = 0, 3, -1$
Тогда. ФСР однородного линейного уравнения:

$$Y(x) = (1\ e^{3x}\ e^{-x})$$

13. Сформулируйте определение матрицы Коши однородной системы линейных ОДУ.

Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица. Тогда:
Матрица Коши (матрицант) - матрица $K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Она однозначно определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t, t_0) = A(t)K(t, t_0) \\ K(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

Скажем пару слов о построении матрицанта и его использовании.
Для построения матрицы Коши надо решить n векторных задач Коши:

$$\begin{cases} \vec{x_i}' = A(t)\vec{x_i} \\ \vec{x_i}(t_0) = \vec{x_i^0} \\ k = \overline{1, n} \end{cases}$$

Решение задачи Коши для неоднородной линейной системы имеет вид:

$$\vec{x}(t) = K(t, t_0)\vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\vec{F}(\tau)d\tau$$

Пример: пока хз

14. Алгоритм решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка методом Коши.

Вводные определения даны в *12*.
Метод Коши - метод нахождения частного решения: $Ly = f(x)$
Пусть функция $K(x,s)$ - решение специальной задачи Коши:

$$\begin{cases} L[K(x,s)] = 0 \\ K(s,s) = K'(s,s) = \dots = K^{(n-2)}(s,s) = 0 \\ K^{(n-1)}(s,s) = 1 \end{cases}$$

называется **функцией Коши**.
Справедлива следующая теорема:

$\boxed{\textbf{Th}}$ Функция $y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds$ - решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями, т.е:

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ x, x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

Функция $K(x,s)$ - функция Коши.

$\boxed{\textbf{Proof}}$

Проверяем непосредственно подстановкой y(x) в уравнение. Прежде:

$$a_n(x)|y = \int_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds$$

$$a_{n-1}(x)|y' = \underbrace{K(x,x)}_{=0} f(x) + \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s)f(s)ds$$

$$\dots$$

$$a_1(x)|y^{(n-1)} = \underbrace{K_x^{(n-2)}}_{=0} f(x) + \int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)f(s)ds$$

$$|y^{(n)} = \underbrace{K_x^{(n-1)}}_{=1} f(x) + \int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)f(s)ds$$

Умножим каждое $y^{(k)}(x)$ на $a_k(x)$, сложим и получим:

$$Ly = f(x) + \int_{x_0}^{x} L[K(x,s)]f(s)dx = f(x)$$

Отсюда сразу: чтд.

Пример:

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Решаем однородное: $y(x) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$
Теперь из свойств функции Коши:

$$\begin{cases} c_1 \sin(s) + c_2 \cos(s) = 0 \\ c_1 \cos(s) - c_2 \sin(s) = 1 \end{cases}$$

Отсюда сразу:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ -\sin(s) \end{pmatrix}$$

То есть: $K(x,s) = \sin(x-s)$. Тогда решение даётся: $y(x) = \int_0^x \sin(x-s)f(s)ds$.

15. Определение и свойства фундаментальной матрицы однородной линейной системы ОДУ.

Пока хз, чем отличается он от **см. вопрос 10**.

16. Определение и свойства определителя Вронского, построенного из решений однородного ОДУ n-го порядка.

Определитель Вронского (Вронскиан) функций $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ((n-1) раз дифференцируемых на промежутке X) - определитель вида:

$$W(x) = W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Пусть теперь $y_1, y_2, \cdots, y_n$ - решения однородного ОДУ n-го порядка. Тогда справедливы следующие теоремы-свойства:
1) Если функции $y_1, y_2, \cdots, y_n$ - линейно зависимы при $x \in [a; b]$, то вронскиан этой системы $W[y_1, \cdots, y_n] \equiv 0$ на этом отрезке.
(доказывается "в лоб"выписыванием условия линейной зависимости векторов и дифференцированием оного (n-1) раз)
2) Если линейно независимые (лнз) функции $y_1, \cdots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на отрезке [a;b] коэффициентами $p_i(x)$, то вронскиан этой системы

$$W[y_1, \cdots, y_n] \neq 0$$

ни в одной точке этого отрезка.
Пример:

$$y'' - y = 0$$

ХУ: $\lambda^2 = 1$
ФСР:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

Составим вронскиан $W[y_1, y_2]$:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

Как и ожидалось, вронскиан лнз векторов отличен от нуля всюду, где вектора лнз.

17. Сформулируйте теорему $\exists$ и ! решения задачи Коши для нормалной системы ОДУ.

Нормальная система ОДУ - система вида (в векторной записи):

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$$

Задача Коши для нормальной системы ОДУ сводится к нахождению решения системы $\vec{x} = \vec{x}(t)$, удовлетворяющего нач.условиям: $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$.

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[Коши]** Пусть выполнены следующие условия:
1) $\vec{f}(t, \vec{x}) \in C(G)$, т.е. $\exists M = \max_G |\vec{f}(t, \vec{x})| : |\vec{f}| \leq M$ - равномерно ограничена на G;
2) $\vec{f}(t, \vec{x})$ в любой замкнутой ограниченной подобласти :$\bar{g} \subset G$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\vec{f}(t, \vec{x_1}) - \vec{f}(t, \vec{x_2})| \leq N|\vec{x_1} - \vec{x_2}|$$

Тогда для всех $(t_0, \vec{x_0}) \in G$ $\exists$ и ! решение задачи Коши, определенное в некоторой окрестности начальных значений.

---

18. Алгоритм решения задачи Коши.

Тоже, что **14**.

19. Алгоритм построения решения задачи Коши для лин.однородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши.

Определения матрицанта было дано выше. Напомним его.
Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица. Тогда: **Матрица Коши (матрицант)** - матрица $K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Она однозначно определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t, t_0) = A(t)K(t, t_0) \\ K(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

Решение однородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши дается выражением:

$$\vec{x}(t) = K(t, t_0)\vec{C_0},$$

где $\vec{C_0}$ -произвольный вектор.
Пример:

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \end{cases}$$

Общее решение: $\vec{z}(t) = W(t)\vec{C}$

$$y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$K(t, t_0) = W(t)W^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t_0} & -e^{-t_0} \\ 0 & e^{t_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & -2sh(t - t_0) \\ 0 & e^{t_0 - t} \end{pmatrix}$$

20. Алгоритм построения решения задачи Коши для лин.неоднородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши.

Аналогично вопросу **19**. Решение неоднородной системы ОДУ:

$$\vec{x}(t) = K(t, t_0)\vec{C_0} + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\vec{F}(\tau)d\tau$$

Пример:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = -y + 1 \end{cases}$$

$$K(t,t_0) = W(t)W^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t_0} & -e^{-t_0} \\ 0 & e^{t_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & -2sh(t-t_0) \\ 0 & e^{t_0-t} \end{pmatrix}$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)F(s)ds = \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{t-s} & -2sh(t-s) \\ 0 & e^{s-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ 1 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t(t-t_0)+2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2ch(t-t_0) \\ -e^{t_0-t} \end{pmatrix}$$

21. Какому интуру равносильна задача Коши для ОДУ первого порядка?.

Начальную задачу мы ставили уже неоднократно (например, в 2-3 вопросах). Справедлива теорема:

Th Пусть f(x,y) непрерывна по совокупности переменных в некотором прямоугольнике $R = (x,y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$.
Тогда задача Коши эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,$$

которое рассматривается в классе непрерывных функций.

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Все условия выполнены: $y(x) = 1 + \int_0^x 5ds = 5x + 1$
Решая, как обычно, получим $y(x) = 5x + 1$.
Что и ожидалось.

22. Что такое характеристическое уравнение линейного однородного ОДУ.

Нетривиальные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОУсПК) будем строить в виде: $y(x) = Ce^{\lambda x}$, где C$\neq 0$, $\lambda = const$ (метод Эйлера). Подставляя в ЛОУсПК:

$$L[Ce^{\lambda x}] = C\underbrace{[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n]}_{M(\lambda)}e^{\lambda x} = 0$$

Отсюда: $M(\lambda) = 0$.
Характеристический многочлен - многочлен $M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda^{n-i}$.
Характеристическре уравнение - уравнение $M(\lambda) = 0$.
Пример :

$$y''' - y = 0$$

ХУ: $\lambda^3 - \lambda = 0$ Решения ХУ: $\lambda = 0, -1, +1$. Тогда ФСР:

$$Z(x) = (1 \ e^{-x} \ e^x)$$

.

23. Запишите математические постановки задачи Коши для нормальной системы ОДУ 1 и линейного ОДУ n-го порядка.

1) Задача Коши для нормальной системы. Пусть:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{F(t)},$$

где A(t) - матрица n x n, $\vec{F}(t)$ - вектор-фукция.
Пусть так же даны начальные условия:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$$

Нахождение решения этой задачи с учетом начального условия - задача Коши для нормальной системы ОДУ.
2) Задача Коши для ОДУ n-го порядка. Пусть:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

Пусть, кроме того даны начальные условия:

$$y(x_0) = y_1^0, y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$$

Нахождение решения этой задачи с учетом начальных условий - задача Коши для линейного ОДУ n-го порядка.

24. Что такое фундаментальная матрица однородной системы линейных ОДУ?.

Однородная система линейных ОДУ - система уравнений:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

Фундаментальная матрица - матрица из столбцов ФСР однородной системы $X(t) = \vec{x_1}(t), \cdots, \vec{x_n}(t)$. Справедливо матричное уравнение:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

ФСР этой системы:

$$z_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Тогда фундаментальная матрица:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

25. Что такое матрица Коши однородной системы линейных ОДУ?.

Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица. Тогда: **Матрица Коши (матрицант)** - матрица $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Она однозначно определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t,t_0) = A(t)K(t,t_0) \\ K(t_0,t_0) = E \end{cases}$$

Для построения матрицы Коши надо решить n векторных задач Коши:

$$\begin{cases} \vec{x_i}' = A(t)\vec{x_i} \\ \vec{x_i}(t_0) = \vec{x_i^0} \\ k = \overline{1,n} \end{cases}$$

26.Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

Прежде поставим задачу и введем пару определений.
Пусть дана нормальная система ДУ (26.1):

$$\left\{ \frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, \cdots, y_n)(i = \overline{1,n}) \right.$$

с начальными условиями: $y_i(t_0) = y_0^i(i = \overline{1,n})$.
Пусть $t \in [t_0; +\infty)$.
Пусть, кроме того, y_i - непрерывны и удовлетворяют условию Липшица на $G = \{(t,\vec{x}) : t \in [t_0; +\infty), \vec{x} \in D -$ открытом множестве$\}$.
Решение $\varphi_i(t)(i = \overline{1,n})$ системы (26.1) называется **устойчивым по Ляпунову(устойчивым)**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y_i(t) - \text{решения той же системы}, |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \forall t \geq t_0 :$$

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon (\text{для каждого} i = \overline{1,n})$$

(т.е., близкие по начальным значения остаются близкими).
Если решение $\varphi_i(t)(i = \overline{1,n})$ не только устойчиво, но:

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0$$

то решение называется **асимптотически устойчивым**.

Пусть теперь (26.2):

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, \cdots, x_n)(i = \overline{1,n})$$

Th **[Ляупнова о устойчивости по 1приб]** Если система уравнений (26.2) стационарна в первом приближении, все члены R_i в достаточно малой окрестности начала координат при $t \geq T \geq t_0$ удовлетворяют неравенствам:

$$|R_i| \leq N(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

где N, α - постоянные ($\alpha > 0$). Пусть, кроме того, все корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $x_i \equiv 0 (i = \overline{1,n})$ ситемы асимптотически устойчивы => возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[Ляупнова о неустойчивости по 1приб]** Если все условия, как в предыдущей теореме, но, хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x_i \equiv 0 (i = \overline{1,n})$ системы неустойчива=> возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

27. Дайте определение устойчивого решения.

Решение $\varphi_i(t)(i = \overline{1,n})$ системы (26.1) называется **устойчивым по Ляпунову(устойчивым)**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y_i(t) - \text{решения той же системы}, |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \forall t \geq t_0 :$$

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon (\text{для каждого} i = \overline{1,n})$$

(т.е., близкие по начальным значения остаются близкими).
Пример:
пока хз

28. Дайте определение асимптотически устойчивого решения.

Решение $\varphi_i(t)$ называется **асимптотически устойчивым**, если $\forall y_i(t), \exists \delta, |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta$:

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0$$

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 8\sin(y) \\ \frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - \cos(y) \end{cases}$$

Разложим $\sin(y), e^x, \cos(y)$ в ряд Тейлора, представим систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 8y + R_1 \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2 \end{cases}$$

Где R_1, R_2 удовлетворяют условию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

$$\begin{pmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{pmatrix} \Bigg| = 0$$

Его корни: $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} = >$ точка покая $x = 0$ - асимптотически устойчива.

29. Дайте определение неустойчивого решения.

Решение $\varphi_i(t)(i = \overline{1,n})$ системы (26.1) называется **неустойчивым**, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta(\varepsilon) > 0, \exists y_i(t) - \text{решения той же системы}, |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \forall t \geq t_0 :$$

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| > \varepsilon$$

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^2 + y^2\sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y^2 \end{cases}$$

Нелинейные члены удовлетворяют условию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (или неустойчивости).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \Bigg| = 0$$

Его корни: $k_{1,2} = 1 \pm i => $ точка покая $x = 0$ - неустойчива.

30. Сформулируйте критерий устойчивости решений линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

Для нормальной системы в векторной записи вида:

$$\vec{t'} = A\vec{x}$$

Справедлива теорема.

Th Для того чтобы положения равновесия $\vec{x} = \vec{\theta}$ было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_k матрицы A имели отрицательные действительные части.

31. Сформулируйте критерий устойчивости решений линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

см. **30**.

32. Устойчивый и неустойчивый узлы. Примеры.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Точки покоя этой системы - $x = y = 0$. ХУ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Или:

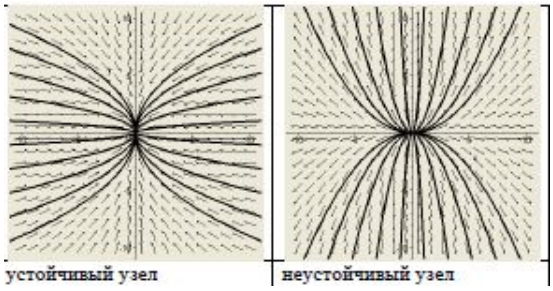
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

Если:
1) Собственные значения - вещественные различные ненулевые:
Общее решение имеет вид: $x = C_1 e^{\lambda_1 t}, y = C_2 e^{\lambda_2 t}, t = \frac{1}{\lambda_1}\ln(\frac{x}{C_1})$ или:

$$y = C_2(\frac{x}{C_1})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Если $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 => x \to 0, y \to 0$ при $t \to \infty$ - точка покоя - **устойчивый узел** - асимптотически устойчива.
Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 => x \to \infty, y \to \infty$ при $t \to \infty$ - точка покоя - **неустойчивый узел** - неустойчива.

Пример:



$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

ХУ:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

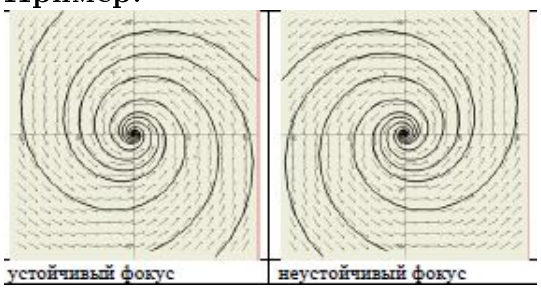
Решения: $\lambda_{1,2} = -5, -2$. Точка покоя - устойчивый узел.

33. Устойчивый и неустойчивый фокусы. Примеры.

2) Собственные значения - комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тогда бщее решение:

$$x = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t), y = C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) \to \frac{x^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_2^2} = e^{2\alpha t}$$

а) Если $\alpha < 0$ => точка покоя $(0;0)$ - **устойчивый фокус** - асимптотически устойчива;
б) Если $\alpha > 0$=> точка покоя $(0;0)$ - **неустойчивый фокус** - не устойчивая.
Пример:



$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{cases}$$

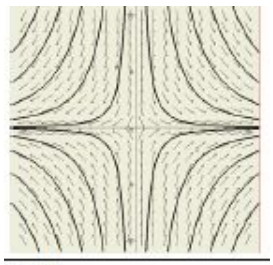
ХУ:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решения: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Точка покоя - неустойчивый фокус.

34. Седло. Примеры.

Если собственные значения вещественные различные и ненулевые и: Если $\lambda_1 < 0 < \lambda$=> $x \to 0, y \to \infty$ при $t \to \infty$ - точка покоя - **седло** - неустойчива.
Пример:



седло

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

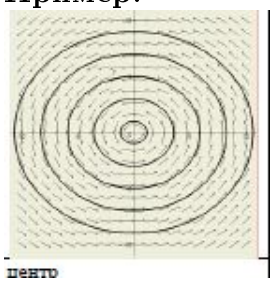
ХУ:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решения: $\lambda_{1,2} = -1, 2$. Точка покоя - седло.

35. Центр. Примеры.

Собственные значения - комплексно-сопряженные.
Если $\alpha = 0 =>$ точка покоя - **центр** - устойчива, но не асимптотически.
Пример:



центр

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

ХУ:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решения: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Точка покоя - центр.

36. Теорема о единственности решения краевой задачи и теорема о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной краевой задачи с условиями первого рода.

Поставим задачу.
Пусть:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f_1(x), 0 < x < l$$

с дополнительными условиями первого рода(задача Дирихле),

$$u(0) = u^0, u(l) = u^1$$

в предположении, что $a_1, a_2, f_1 \in C[0; l]$.
Классическим решением задачи Дирихле будем называть функцию $u(x) \in C^2(0; l) \cap C[0; l]$, удовлетворяющую уравнению и краевым(граничным условиям).
Справделивы теоремы:

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[! решения]**Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то соответсвтующая неоднородная не более одного решения.

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[достаточные условия !]** Пусть в операторе $L[u]$ $q(x) \geq 0$. Тогда однородная краевая задача имеет:
1) в случае граничных условий 1-го рода только тривиальное решение;

Напомним, что оператор $L[u] = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) - q(x)u$.

37. Теорема Нагумо о существовании решения нелинейной краевой задачи.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу (37.1):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u, x), x \in D = (0; 1)$$

$$u(0) = u^0, u(1) = u^1$$

Введем пару определений:
Функции $\alpha(x), \beta(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ называются соответсвенно **нижним и верхним решениями** задачи (37.1), если:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x), x) \geq 0 \geq \frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta(x), x), x \in D$$

$$\alpha(0) \leq u^0 \leq \beta(0), \alpha(1) \leq u^1 \leq \beta(1)$$

$\boxed{\textbf{Th}}$ **[Нагумо]** Пусть существуют $\alpha(x), \beta(x)$ - нижнее и верхнее решение задачи (37.1), причем $\alpha(x) \leq \beta(x), x \in [0; 1]$, а функция $f(u, x)$ - непрерывная и удовлетворяет условию Липшица по переменной $u \in [\alpha; \beta], x \in [0; 1]$.
Тогда $\exists$ решение задачи (37.1) $u(x)$, причем:

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x), x \in [0; 1]$$

---

38. Теорема о представлении решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Справедлива теорема:

$\boxed{\textbf{Th}}$ Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда $\exists!$ решение неоднородной задачи, которое может быть выражено через функцию Грина:

$$y(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$$

---

39. Определение функции Грина краевой задачи для ДУ 2 порядка.

Функцией Грина краевой задачи (37.1) называют функцию 2-х переменных $G(x, s)$:
1) $G(x, s)$ определена и непрерывна в $R = \{(x, s) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq s \leq l\}$;
2) $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению: $L_x[G] = 0, 0 < x, s < l$;
3) $G(x, s)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям: $G(0, s) = G(l, s) = 0$;
4) $G(x, s)$ имеет разрыв первого рода в $x = s$:

$$[G'_x(s + 0) - G'_x(s - 0)] = \frac{1}{p(s)}$$

40. Алгоритм построения ф.Грина и решения первой краевой задачи для неоднородного ДУ 2-го порядка.

Рассмотрим прежде однородную краевую задачу.

$$Ly = 0$$

$$y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$$

Пусть $y_1(x)$ - решение этой задачи, но удовлетворяющее лишь первому граничному условию.
Пусть $y_2(x)$ - решение этой задачи, но удовлетворяющее лишь второму граничному условию.
Пусть$y_1(x), y_2(x)$ - нетривиальны.
Функцию Грина ищем в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1 y_1(x), x_0 \leq x \leq s; \\ c_2 y_2(x), s \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

Выберем постоянные c_1, c_2 так, чтобы удовлетворить определению функции Грина:

$$c_1 y_1(s) = c_2 y_2(s)$$

$$c_2 y_2'(s) - c_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}$$

Так как $y_1(x_1) \neq 0$ решения y_1, y_2 - лнз $=>$ вронскиан $W[y_1, y_2] \neq 0$ в точке $x = s = >$

$$c_1 = \frac{y_2(s)}{p(s)W(s)}, c_2 = \frac{y_1(s)}{p(s)W(s)}$$

Отсюда:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)}{p(s)W(s)} y_1(x), x_0 \leq x \leq s; \\ \frac{y_1(s)}{p(s)W(s)} y_2(x), s \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

Тогда, решение неоднородной краевой задачи:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds$$

41. Определение и алгоритм построения функции Грина первой краевой задачи.

см. **39 - 40**

42. Определение и свойства функции Грина.

см. **39**

43. Запишите математические постановки известных Вам краевых задач.

Возьмем задачу из лекции о профиле струны.

$$y''(x) = f(x), 0 < x < l, f(x) \in C[0; l]$$

$$y(0) = y(l) = 0$$

Решение:
Рассмотрим однородную задачу.
$y'' = 0 \to y(x) = C_1 x + C_2$ с учетом граничных условий: $y(x) \equiv 0$. Следовательно, исходная

задача имеет единственное решение.
Постром функцию Грина.

$$y_1(x) : \begin{cases} y_1''(x) = 0 \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \to y_1(x) = x$$

$$y_2(x) : \begin{cases} y_2''(x) = 0 \\ y_2(l) = 0 \end{cases} \to y_1(x) = x - l$$

$$W[y_1, y_2] = 1$$

$$p(s) = 1$$

Тогда:

$$G(x, s) = \begin{cases} x(s-l), 0 \le x \le s; \\ (x-l)s, s \le x \le l \end{cases}$$

Тогда: $y(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds$
Физ.смысл - профиль струны при стат.нагрузке f(x).

44. Линейное однородно уравнение в частных производных певрого порядка. Алгоритм решения.

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка - уравнение вида:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

Пусть, далее:
1) X_i - определены и дифференцируемы в области D;
2) $\forall \vec{x} \in D : \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\vec{x}) \neq 0$;
Пусть (44.1):

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}$$

Первым интегралом называется функция $\Psi(x_1, \cdots, x_n)$, такая, что вдоль интегральной кривой (44.1) :$\Psi(x_1, \cdots, x_n) = C$. Пусть известны n-1 независимых интегралов (44.1), причем:

$$\frac{D(\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}}{D(x_1, \cdots, x_{n-1}} \neq 0, \vec{x} \in D$$

Тогда общее решение уравнения является

$$z = \Phi(\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1})$$

. где Φ - произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

45. Характеристическая система и характеристики.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 (45.1)$$

Характеристической системой, соответсвующей (45.1), называется система из n-1 уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}$$

Харакетристиками уравнения (45.1) называются решения характеристической системы.

46. Первый интеграл характеристической системы.

Первым интегралом характеристической системы называется функция $\Psi(x_1, \cdots, x_n)$, такая, что вдоль интегральной кривой (45.1) :$\Psi(x_1, \cdots, x_n) = C$.

47. Теорема о решении квазилинейного уравнения в ч.п. первого порядка.

Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка -уравнение вида:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, \cdots, x_n, z)$$

Будем искать решение в неявном виде: $V(x_1, \cdots, x_n, z) = 0$. Пусть: $\frac{\partial V}{\partial z} \neq 0$.
Пусть ур-ие разрешимо относительно z: $z = \Psi(x_1, \cdots, x_n)$.
Тогда, с учетом:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Получим из первоначальной системы:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial V}{\partial x_i} + Z(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

1) Запишем, как и прежде, характеристическую систему:

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x})} = \frac{dz}{Z(\vec{x})}$$

Её решения - интегральные кривые в пространстве $(x_1, \cdots, x_n, z)$.
2) Найдем, как и раньше, n первых интегралов системы.

$$\Psi_1(x_1, \cdots, x_n, z) = C_1$$
$$\cdots$$
$$\Psi_n(x_1, \cdots, x_n, z) = C_2$$

Тогда, запишем: $V = \Phi(\Psi_1, \cdots, \Phi_n)$.
3) $V = \Phi(\Psi_1, \cdots, \Phi_n)$ дает решение поставленной задачи в неявном виде.