1. **Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка.**
   Два случая.

   - Линейное: $\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = f(x), y(x_0) = y_0$
     Пусть $p(x)$ и $f(x) \in C(a, b)$. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы $(a, b) \times R$ проходит одна и только одна интегральная кривая, определенная при всех $x \in (a, b)$.
   - В полных дифференциалах: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
     Пусть в прямоугольнике $Q = (a, b) \times (c, d)$ функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$, причем всюду в Q выполнены условия

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

$$N(x,y) \neq 0 \tag{2}$$

     Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in Q$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения.

2. **Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Проверьте условия выполнения этой теоремы для задачи**

$$y' = 4x - 4y, x > 0, y(0) = 0$$

3. **Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Проверьте условия выполнения этой теоремы для задачи**

$$\sqrt[6]{y}, x > 0, y(0) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   Пусть $f(x, y)$ задана в области G плоскости (x, y), содержащей замкнутый прямоугольник $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b], D \subset G$ и выполнены условия:

   - $f(x, y)$ непрерывна в области D и, следовательно, равномерно ограниченна

$$\exists M : |f(x,y)| \leq M \text{ в } D, \text{ то есть } M = \max_D |f(x,y)|$$

   - $f(x, y)$ удовлетворяет в D условию Липшица по y:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \text{ где N - постоянная Липшица, не зависящая от x и y}$$

$$\text{Или же: } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \in C(D)$$

   Тогда на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ существует единственное решение задачи, где $H = \min(a, \frac{b}{M})$.
   Проверка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x - 4y, \\ y(0) = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = 4x - 4y$ непрерывна в $(0,a] \times R$ при $\forall a$. Условие Липшица:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |4x - 4y_2 - 4x + 4y_1| = 4|y_1 - y_2'| \leq N|y_2 - y_1|$$

Значит, условия выполнены, **ЧТД**.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{y}, \\ y(0) = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = \sqrt[6]{y}$ непрерывна в $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$; значит, она не является непрерывной в прямоугольнике $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ даже учитывая дополнительное условие $x > 0$. Условия теоремы **не** выполнены.

4. **Сформулируйте теорему Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.**
Сама задача:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(0) = y_0, \\ 0 < x \leq a \end{cases}$$

Для начала определение верхнего и нижнего решений (верхней и нижней ф-й Чаплыгина):
Функция $z \in C^{-1}(0,a] \cap C[0,a]$ называется нижним решением задачи, если выполнены неравенства

$$0 < x \leq a, \frac{dz}{dx} < f(x, z(x)), z(0) < y_0$$

или же следующие неравенства, если речь о верхнем решении задачи

$$0 < x \leq a, \frac{dz}{dx} > f(x, z(x)), z(0) > y_0$$

Тогда при $\forall x \in [0,a]$: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$, где α, β - нижнее и верхние решения, $y(x)$ - просто решение этой системы.
Сама теорема:
Пусть $\exists \alpha(x), \beta(x)$ - верхнее и нижнее решения задачи соответственно и $\alpha(x) < \beta(x)$ (хз зачем написано), $x \in [0,a]$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то есть

$$\forall x \in [0,a] : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < N|y_1 - y_2|; y_1, y_2 \in [\alpha(x), \beta(x)]$$

Тогда описанная выше задача Коши имеет единственное решение $y(x)$, причем

$$\alpha(x) < y(x) < \beta(x), 0 \leq x \leq a$$

.

5. **Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ). Какой вид имеет общее решение такого уравнения? Приведите пример.**

   - Пускай есть ЛОДУ

   $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

   Совокупность любых n (n - порядок уравнения) линейно независимых на отрезке $[a,b]$ решений этого уравнения называется ФСР ЛОДУ.

- Общее решение: $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, где $y_1 \dots y_n$ - ФСР уравнения.
- Пример: общее решение уравнения $y'' - y = 0$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \text{ а его ФСР, соответственно}$$

$$\{e^x, e^{-x}\}$$

6. **Метод вариации постоянной для решения неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (НЛДУ) первого порядка. Приведите пример.**

   - Пускай есть НЛДУ
   $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$
   Пусть $y_1(x) \dots y_n(x)$ - ФСР однородного уравнения $y^{(n)} + \dots + a_n(x)y = 0$.
   Тогда $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x)$ будет решением НЛДУ, если $C_i(x)$ удовлетворяют системе уравнений
   $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(j)}(x) = 0, & j = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$
   - Для НЛДУ первого порядка, соответственно:
   $$y' + a(x)y(x) = f(x);$$
   $$y(x) = C_1(x)y_1(x);$$
   Дальше просто подставляем это в исходное уравнение, так как систему мы написать не можем. Из этого находим $C(x)$ и вуаля.

7. **Метод вариации постоянных для решения неоднородной линейной нормальной системы ОДУ (НЛНС) первого порядка. Приведите пример.**
   Пусть есть система $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t)$, где $A(t)$ - матрица $n \times n$, $\vec{F}(t)$ - заданная вектор-функция, определенная при $t \in [a, b]$, $\vec{x} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$. Элементы$a_{i,j}$ матрицы $A(t)$, а так же функции $f_i(t)$ из $\vec{F}(t)$ непрерывны на $[a, b]$.
   Пусть известна фундаментальная матрица $W(t)$ (см. вопрос 10) однородной системы (матрица, стобцы которой - ФСР однородной системы), $W(t)$ и $F(t)$ непрерывны на $[a, b]$. *(Цитата из лекции: Тогда общее решение НЛНС находится с помощью квадратур и дальше док-во метода вариации постоянных).* Тогда общее решение однородной системы будет в виде $\vec{y} = W(t)\vec{C}$, а частное решение неоднородной ищем в виде $\tilde{\vec{y}} = W(t)\vec{C}(t)$. Подставляя это в систему, получаем
   $$W(t)\dot{\vec{C}} = \vec{F}(t) \text{ в силу того, что } \dot{W} = A(t)W(t).$$
   Отсюда находим $\vec{C}(t)$; подставляем в $\vec{y} = W(t)\vec{C}$ и получаем частное решение НЛНС, а, значит, и ее общее решение, так как известно общее решение однородной системы. Пример приводить лень.

8. **Покажите равносильность задачи Коши для ОДУ n-го порядка задаче Коши для нормальной системы 1-го порядка. Приведите пример.**

- Задача Коши:
$$\begin{cases} y^{(n)} = f_i(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$
Заменяем $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n$. Тогда получаем задачу Коши для неоднородной нормальной системы 1-го порядка:
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_i^0, \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

- Пример: задача Коши
$$\begin{cases} y'' + y = sin(x) \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$
сводится путем замены $v = y'$ к
$$\begin{cases} v = x' \\ v' + y = sin(x) \\ y(0) = A \\ v(0) = B \end{cases}$$

9. **Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений первого порядка.**
Пусть есть система
$$\begin{cases} \dot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(\vec{x_0}) = \vec{y_0} \end{cases}$$
где $\vec{f}(x, \vec{y})$ задана в области G (n+1)-мерного пространства.
Пусть $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C(G)$ ($\exists M : \forall (x, \vec{y}) \in G : |f(x, \vec{y})| \leq M$) и удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ (внимание: для всех компонент y_i константа N одна и та же) в любой замкнутой ограниченной области $g \subset G$. Тогда $\exists! \vec{y}$, являющаяся решением задачи Коши на всем G.

10. **Что такое фундаментальная матрица? Как с ее помощью построить общее решение однородной системы? Приведите пример.**

- Совокупность из n решений однородной линейной системы $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$, линейно независимых на $[a, b]$ (см. 6, что такое $[a, b]$, только $\vec{F}(t)$ нету), называется фундаментальной совокупностью решений (ФСР) этой системы.
- Фундаментальная матрица $X(t)$ - матрица из столбцов, образующих ФСР:
$$X(t) = (\vec{X_1}(t), \dots, \vec{X_n}(t)),$$
где $\vec{X_1}(t), \dots, \vec{X_n}(t)$ - ФСР.

- Общее решение $\vec{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ при помощи фундаментальной матрицы можно записать в виде:
$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C},$$
где $\vec{C}$ - произвольный вектор.
- Пример - берем какую-нибудь простенькую систему, решаем ее и показываем ее ФСР и X(t).

11. **Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной**
Пусть $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в
$$D = \{0 \leq x \leq a, |y_1 - y_i^0| \leq b_i\}, i = 1, 2, \ldots, n.$$
Тогда задача
$$\begin{cases} y^{(n)} = f_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$
имеет единственное решение на отрезке $[x_0, x_0 + H]$, где
$$H = \min(a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_i}{M}), M = \max_D |f(x, y_1, \ldots, y_n)|.$$

12. **Сформулируйте теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения. Приведите пример.**
   - $Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), a_i = const.$
   - Характеристический многочлен: $M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$
   - Пусть корни характеристического многочлена ($M(\lambda) = 0$) простые (то есть, каждый встречается только один раз). Тогда функции
   $$y_k = e^{\lambda_k x}, k = 1, \ldots, n \text{ образуют ФСР.}$$
   - Пример: общее решение уравнения $y'' - y = 0$
   $$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \text{ а его ФСР, соответственно}$$
   $$\{e^x, e^{-x}\}$$

13. **Сформулируйте определение матрицы Коши однородной системы линейных ОДУ. Приведите пример.**
Матрица $K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица, а $X^{-1}(t)$ - обратная ей, называется матрицей Коши.
Определить ее полегче можно через то, что она является решением матричного уравнения $K'(t, \tau) = A(t)K(t, \tau)$, удовлетворяющим условию $K(\tau, \tau) = E$.

14. **Алгоритм решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с помощью функции Коши. Приведите пример.**

- Функция $K(x,\xi)$, являющаяся решением специальной задачи Коши

$$\begin{cases} L_x K(x,\xi) = 0 \\ K(\xi,\xi) = 0, K_x'(\xi,\xi) = 0, \ldots, K_x^{n-2}(\xi,\xi) = 0, K_x^{n-2}(\xi,\xi) = 1 \end{cases}$$

называется функцией Коши.

- Порядок действий

Надо дописать, я хз

15. **Определение и свойства фундаментальной матрицы однородной системы ОДУ n-го порядка. Приведите пример.**

- Определение и пример - см. 10 (Тут обозначу ее как $X(t)$)
- линейная ОС ОДУ имеет фундаментальную матрицу.
- Зная фундаментальную матрицу $X(t)$ системы, можно однозначно восстановить эту систему уравнений. Как это сделать - через тот факт, что $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, отсюда находится $A(t)$.
- Определитель $X(t)$ отличен от нуля на $[a,b]$ (во всех точкахэтого отрезка). см. 6, что такое $[a,b]$, только $\vec{F}(t)$ нету. Этот факт очевиден, если вспомнить, что определитель этой матрицы - по сути, вронскиан ФСР.
- Фундаментальная матрица удовлетворяет матричному уравнению $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.
- Любой решение системы представимо в виде $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}$, где C - любой постоянный вектор.

16. **Определение и свойства определителя Вронского, построенного из решений однородного ОДУ n-го порядка. Приведите пример.**

- Определителем Вронского (вронскианом) системы n функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель:

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

- Пусть функции $y_i(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$. Тогда $W[\ldots] = 0$.
- Пусть функции $y_i(x)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Тогда $W[\ldots] \neq 0$.
- Вронскиан системы решений однородного уравнения $Ly = 0$ либо тождественно равен нулю на $[a,b]$, и тогда эти решения ЛЗ на $[a,b]$, либо не обращается в ноль нигде на $[a,b]$; в этом случае рассматриваемые решения ЛНЗ на $[a,b]$.
- Вронскиан системы, составленной из функций, $\in$ ФСР, отличен от нуля.
- Пример: общее решение уравнения $y'' - y = 0$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \text{ а его ФСР, соответственно}$$

$$\{e^x, e^{-x}\}$$

Возьмем вронскиан от этой системы функций:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -2e^x e^{-x} = -2, -2 \neq 0, \text{ЧТД - вронскиан ФСР} \neq 0$$

17. **Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.** Пусть есть система $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t)$, где $A(t)$ - матрица $n \times n$, $\vec{F}(t)$ - заданная вектор-функция, определенная при $t \in [a, b]$, $\vec{x} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$. Тогда решение задачи Коши для этой системы с начальным условием

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$$

существует и единственно на любом отрезке $[t_0, T] \subset [a, b]$.

18. **Алгоритм решения задачи Коши для ЛНДУ n-го порядка с нулевыми начальными условиями с помощью функции Коши. Приведите пример.**

- Функция $K(x, \xi)$, являющаяся решением специальной задачи Коши

$$\begin{cases} L_x K(x,\xi) = 0 \\ K(\xi,\xi) = 0, K'_x(\xi,\xi) = 0, \dots, K_x^{n-2}(\xi,\xi) = 0, K_x^{n-1}(\xi,\xi) = 1 \end{cases}$$

  называется функцией Коши. L_x - *индекс просто означает, что производные берутся по x.*

- Функция $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$ является решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} Ly = f(x), & x \in [a,b] \\ y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, & x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

- Очевидно, алгоритм, тем самым - сначала найти функцию Коши, а потом посчитать интеграл.
- Пример. Пусть есть задача:

$$\begin{cases} y' - ay = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  Итак, $L_x K(x,\xi) = 0; \quad K'(x,\xi) - aK(x,\xi) = 0; \quad K(x,\xi) = Ce^{ax}$; из условий на ф-ю:

$$K^{(n-1)}(\xi,\xi) = 1 \Rightarrow \text{ при } n = 1 : Ce^{a\xi} = 1, C = e^{-a\xi}$$

  Заметим, что остается последнее условие, а не первое. То есть, счет их как бы идет от конца, последнее = 1, остальные - 0. Подставляем C:

$$K(x,\xi) = C^{a(x-\xi)} \text{ - ф-я Коши, а решение задачи Коши будет}$$

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} C^{a(x-\xi)} f(\xi) d\xi$$

19. **Алгоритм решения задачи Коши для линейной ОС ОДУ с нулевыми начальными условиями с помощью матрицы Коши. Приведите пример.**

20. **Алгоритм решения задачи Коши для линейной НС ОДУ с нулевыми начальными условиями с помощью матрицы Коши. Приведите пример.**

- Найти матрицу Коши. Как искать и определение - см. Вопрос 13
- Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases}$$

имеет вид

$$\vec{x}(t) = K(t, t_0)\vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, \tau)\vec{F}(\tau)d\tau$$

Для однородной просто нету $\vec{F}(t)$ (то есть, слагаемого с интегралом)

- Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t; \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases}$$

ФСР данной системы - вектора $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, а ФМ будет $\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Тогда матрица Коши $K(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & -2sh(t-\tau) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

$\vec{y} = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & -2sh(t-\tau) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$

21. **Какому интегральному уравнению равносильна задача Коши для ОДУ первого порядка? Приведите пример.** Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в некотором прямоугольнике $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b], D \subset G$. Тогда экв. уравнение:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

22. **Что такое характеристическое уравнение ЛОДУ n-го порядка? Приведите пример.**

- Пускай есть ЛОДУ

$$y^n(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y = 0$$

Тогда характеристическим многочленом этого уравнения называется

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

а характеристическим уравнением - $M(\lambda) = 0$.

- Пример: характеристический многочлен уравнения $y'' - y = 0$:

$$M(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

23. **Запишите математические постановки задач Коши для нормальной системы линейных ОДУ 1-го порядка и линейного ОДУ n-го порядка.**

- Система:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases}$$

где $A(t)$ - матрица $n \times n$, $\vec{F}(t)$ - заданная вектор-функция, определенная при $t \in [a, b]$, $\vec{x} = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$.

- ЛОДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} y^n(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y = 0 = f(x) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ y'(x_0) = y_2^0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$

24. **Что такое фундаментальная матрица однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.**
    См. 15, там даже со свойствами :)

25. **Что такое матрица Коши однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.**
    См. 13, если кратко: $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$

26. **Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.**

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{F}(t,\vec{x}), \quad (\vec{F}(t,\vec{0}) = \vec{0}),$$

    где A - постоянная матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части. Пусть также при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом $|\vec{x}|$: $|\vec{F}(t,\vec{x})| \leq M|\vec{x}|^{1+\alpha}$; $\qquad \alpha, M > 0$
    Тогда положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ асимптотически устойчиво.
    Если все так же, но имеется хотя бы одно собственное значение с $Re > 0$, то неустойчиво.
    В остальных случаях все определяется членами более высокого порядка малости, и эта теорема ни о чем не говорит (например, если оба корня = 0 или один меньше 0, а другой - 0)

27. **Дайте определение устойчивого решения (по Ляпунову, видимо). Приведите пример решения устойчивого, но не асимтотически.**

28. **Дайте определение асимптотически устойчивого решения (по Ляпунову, видимо). Приведите пример.**

- Решение $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x})$ называется устойчивым по Ляпунову, если

  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \vec{x_0} : |\vec{\phi}(t_0) - \vec{x_0}| < \delta,$ решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t) : \vec{\psi}(t_0) = \vec{x_0},$ определено при $t \geq t_0$ и

$$|\vec{\psi}(t) - \vec{\phi}(t)| < \epsilon \text{ при } t \geq t_0.$$

  Если "по-русски": есть у нас решение $\vec{\phi}(t)$, сколь угодно близко проходящее к $\vec{x_0}$ при $t = t_0$, тогда оно не отходит от решения $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$, проходящего через $\vec{x_0}$ при $t = t_0$ дальше, чем на ϵ. И так для $\forall \vec{x_0}$.

- Если $\lim\limits_{t\to\infty} |\vec{\psi}(t) - \vec{\phi}(t)| = 0$, то решение $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ - асимптотически устойчиво. Заметим, что при просто устойчивости никакого стремления нет, $\vec{\phi}(t)$ спокойно может тупо колебаться около $\vec{\psi}(t)$.

- Пример устойчивого, но не асимптотически:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases} \quad , \text{ решением будет}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 cos(t) + C_2 sin(t) \\ y(t) = C_2 cos(t) - C_1 sin(t) \end{cases} \quad \text{(Это круг: } x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 = const.)$$

Эти круги далеко не отходят от точки $(0,0)$, однако, и не стремятся к ней. Вот и пример, $(0,0)$ - точка покоя, причем устойчивая (центр).

- Пример асимтотически устойчивого:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}, \text{ решением будет}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1(1+t)e^{-t} + C_2 te^{-t} \\ y(t) = C_2(1-t)e^{-t} - C_1 te^{-t} \end{cases}, \text{если вынести } e^{-t}:$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1(1+t) + C_2 t) \\ y(t) = e^{-t}(C_2(1-t) - C_1 t) \end{cases}, \text{Очевидно, что}$$

$\lim\limits_{t\to\infty} x = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} y = 0$, то есть эти решения будут асимптотически устойчивыми.

29. **Дайте определение неустойчивого решения. Приведите пример.**
По сути, инверсия 27го.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \vec{x_0} : |\vec{\phi}(t_0) - \vec{x_0}| < \delta, \text{ решение } \vec{x} = \vec{\psi}(t) : \vec{\psi}(t_0) = \vec{x_0}$$

$$\text{либо не определено при } t \geq t_0, \text{ либо } |\vec{\psi}(t) - \vec{\phi}(t)| > \epsilon \text{ при } t \geq t_0.$$

30. **Сформулируйте критерий устойчивости решений линейных ДУ с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.**
Исходя из (см. 8) того, что любое ОДУ n-го порядка заменяется системой из n линейных уравнений первого порядка: получим систему.
Для того, чтобы положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где A - постоянная действительная матрица, было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A имели отрицательные действительные части: $Re < 0$.

31. **Сформулируйте теорему о достаточных условиях устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**
Я хз

32. **Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым узлом? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.**

33. **Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым узлом? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.**

34. **Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым узлом? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.**

35. **Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым узлом? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.**
Рассмотрим систему: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$, ее точка покоя - $(0,0)$. ХУ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ его корни - СЗ.}$$

- Вещественные различные ненулевые СЗ:
  (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, тогда это устойчивый узел (асимптотически устойчив)
  (b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, тогда это неустойчивый узел (неустойчив)
  (c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, тогда это седловая точка (неустойчива)
- Комплексно-сопряженные СЗ $\lambda = \alpha \pm i\beta \quad (\beta \neq 0)$:
  (a) $\alpha < 0$, тогда это устойчивый фокус (асимптотически устойчив)
  (b) $\alpha > 0$, тогда это неустойчивый фокус (неустойчив)
  (c) $\alpha = 0$, тогда это центр (устойчив, но не асимптотически)

36. **Сформулируйте теорему единственности решения краевой задачи и теорему о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной краевой задачи с краевыми условиями первого рода.**

- Определение оператора Штурма-Лиувилля $L[u]$:

$$L[u] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u$$

- Пусть однородная краевая задача:

$$\begin{cases} L[y] = 0, & 0 < x < l \\ N_0[y](0) = 0 \\ N_l[y](l) = 0 \end{cases}$$

  имеет только тривиальное решение. Тогда соответствующая неоднородная краевая задача имеет не более одного решения.
- Пусть в операторе $L[y] q(x) \geq 0$. Тогда однородная краевая задача имеет:
  (a) в случае граничных условий 1го рода - только тривиальное решение (наш случай)
  (b) в случае граничных условий 2го рода - только тривиальное решение, если $q(x) > 0$, или нетривиальное $u(x) = const.$, если $q(x) = 0$.

37. **Сформулируйте теорему Нагумо о существовании решения нелинейной краевой задачи.**

- Рассматриваемая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u, x), \quad x \in D = (0, 1) \\ u(0) = u^0 \\ u(1) = u^1 \end{cases}$$

- Функции $\alpha(x), \beta(x) \in C^2(D) \cap C(D)$ называются нижним и верхним решениями задачи, если выполняются следующие неравенства:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x), x) \geq 0 \geq [\frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\alpha(x), x)$$

$$\alpha(0) \leq u^0 \leq \beta(0), \alpha(1) \leq u^1 \leq \beta(1)$$

- Теорема Нагумо: пусть $\exists \alpha(x), \beta(x)$ - нижнее и верхнее решения задачи, причем $\alpha(x) \le \beta(x), x \in [0,1]$, а функция $f(u,x)$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по u при $u \in [\alpha, \beta], x \in [0,1]$.
  Тогда существует решение задачи $u(x)$, удовлетворяющее неравенствами
  $$\alpha(x) \le u(x) \le \beta(x), x \in [0,1].$$

38. **Сформулируйте теорему о представлении решения краевой задачи с помощью функции Грина.**
  Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение (см. выше ее вид). Тогда существует единственное решение неоднородной краевой задачи, которое может быть выражено через функцию Грина:
  $$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s) f(s) ds$$

39. **Сформулируйте определение функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.**
  Сама задача:
  $$\begin{cases} L[y] = f(x), \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$
  Функцией Грина краевой задачи называется функция 2х переменных $G(x,s)$ такая, что
  - $G(x,s)$ определена и непрерывна в $\bar{R} = \{(x,s) : 0 \le x \le l, 0 \le s \le l\}$;
  - $G(x,s)$ удовлетворяет однородному уравнению: $L_x[G] = 0, 0 < x, s < l$;
  - $G(x,s)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям: $G(0,s) = G(l,s) = 0$;
  - $G(x,s)$ имеет разрыв первого рода в $x = s$:
  $$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$$

40. **Алгоритм построения функции Грина и решения первой краевой задачи для неоднородного ДУ 2го порядка.**
  Рассмотрим сначала однородную задачу:
  $$\begin{cases} L[y] = 0, \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$
  Решаем $L[y] = 0$ (без учета краевых), получаем какое-то общее решение. Определим функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$: первая пускай будет решением, удовлетворяющим только левому граничному условию (то есть, подставляем в общее решение левое КУ и получаем $y_1(x)$), а вторая - только правому (аналогично считается). И да, они оба нетривиальны.
  Далее посчитаем их вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x)' & y_2(x)' \end{vmatrix}$ и ищем функцию Грина в виде:
  $$G(x,s) = \frac{1}{C} \begin{cases} y_1(x) y_2(s), & 0 \le s \le x \\ y_2(x) y_1(s), & s \le x \le l \end{cases}, \text{ где}$$

$$C = p(s)W(s) = p(s) \cdot \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}$$

Иногда так считать неудобно из-за того, что это хер запомнишь (даже в лекциях это написано, лол). Тогда можно искать функцию Грина так (непосредственно по определению):

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1(s)y_1(x), & 0 \le s \le x \\ C_2(s)y_2(x), & s \le x \le l \end{cases},$$ где $C_1(s), C_2(s)$ определяются из условий:

- $G(x,s)$ непрерывна при $x = s$. То есть, $K(s-0,s) = K(s+0,s) \Rightarrow C_1(s)y_1(s) = C_2(s)y_2(s)$.
- $G(x,s)$ имеет разрыв 1го рода при $x = s$, производная скачет на $\frac{1}{p(s)}$. Значит,

$$[C_2(s)y_2(x)]_x' - [C_1(s)y_1(x)]_x' = \frac{1}{p(s)}.$$

Отсюда находим $C_1(s), C_2(s)$, получаем готовую Функцию Грина. А решение у нас получится

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s)f(s)ds$$

41. **Определение и алгоритм построения функции Грина первой краевой задачи.**

42. **Сформулируйте определение и свойства функции Грина первой краевой задачи.**
Насколько я догадываюсь, все уже написано чуть выше - вопросы 38-40.

43. **Определение и алгоритм построения функции Грина первой краевой задачи.**