

1. Магнитная энергия тока. Магнитная энергия системы контуров тока. Энергия магнитного поля и её объемная плотность.

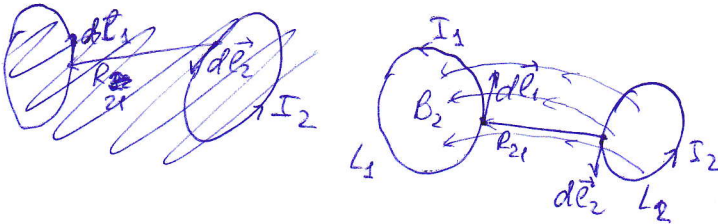
Магнитная энергия тока

$$dA = -e_{\text{внг}} I dt = \frac{d\Phi}{dt} I dt = I d\Phi$$

$$\Phi = LI \Rightarrow dA = dW = I \cdot L dI = d\left(\frac{LI^2}{2}\right);$$

$$W = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}$$

Магнитная энергия системы контуров с током.



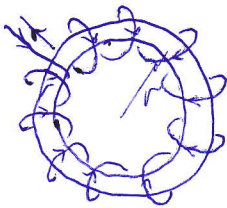
$$dW_1 = I_1 d\Phi_1 = I_1 d(L_{11}I_1 + L_{12}I_2)$$

$$dW_2 = I_2 d\Phi_2 = I_2 d(L_{22}I_2 + L_{21}I_1)$$

$$dW = dW_1 + dW_2 = L_{11} d\left(\frac{I_1^2}{2}\right) + L_{12} I_2 dI_1 + L_{21} I_2 dI_1 + L_{22} d\left(\frac{I_2^2}{2}\right) = d\left(\frac{L_{11}I_1^2}{2}\right) + \frac{d(L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_1I_2)}{2} + d\left(\frac{L_{22}I_2^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij} I_i I_j\right)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij} I_i I_j$$

Энергия магнитного поля и её объемная плотность

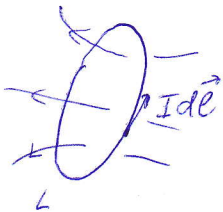


$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} = \mu_0 n I$$

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} SN = LI;$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} BSN I = \frac{1}{2} BSN \frac{B 2\pi R}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underbrace{S 2\pi R}_V; \quad w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Сторонний вывод:



$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I \int_{S_L} \vec{B} d\vec{S} = \frac{1}{2} I \int_V \text{rot} \vec{A} d\vec{V} = \frac{1}{2} \int_V \text{Idl} \cdot \vec{A} d\vec{V} = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\text{B rot} \vec{A} - \text{div} \{ \vec{A}, \vec{B} \}) dV$$

$$(\text{rot} \vec{A}, \vec{B}) = (\text{B}, [\text{rot} \vec{A}]) - (\vec{A}, [\text{rot} \vec{B}])$$

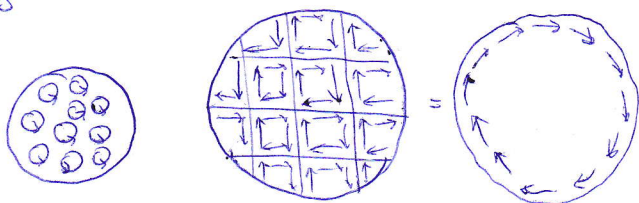
$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \vec{B} dV = \int_V w dV, \quad \text{где } w = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\int_{S_L} \{ \vec{A}, \vec{B} \} dS \rightarrow 0$$

[2] Магнетики. Понятие о молекулярных токах. Вектор напряженности магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества. Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами. Материальное уравнение для векторов магнитного поля.

Магнетики - вещества, которые при внесении их во внешнее магнитное поле сами становятся источниками магнитного поля. В этом смысле говорят, что вещество намагничивается. Полная индукция магнитного поля равна векторной сумме внешнего магнитного поля и поля, порождаемого магнетиком:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

Согласно гипотезе Ампера, внешнее магнитное поле индуцирует в магнетике молекулярные токи, которые и порождают дополнительное магнитное поле  $\vec{B}'$



$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}') \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$
 где  $\vec{j}'$  - плотность молекулярного тока.  
- уравнения магнитоэлектродинамики с учетом молекулярных токов.

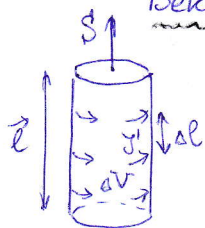
Для характеристики намагниченности магнетика вводит понятие вектора намагниченности  $\vec{M}$ .

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{V} \vec{S}_1, \vec{p}_2 = \frac{1}{V} \vec{S}_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{V} \vec{S}_3$$



$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i$$

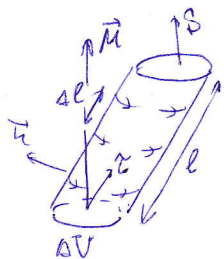
Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами:



$I' = j' l$ , где  $j'$  - поверхностная плотность молекулярного тока

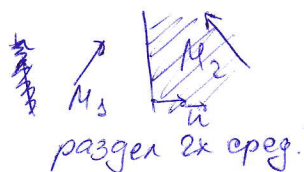
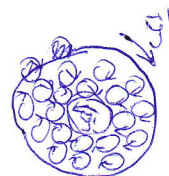
Магнитный момент этого цилиндра равен:

$$\sum_{\Delta l} j' \Delta l S = j' l S = |\vec{M}| \cdot \Delta V \Rightarrow |\vec{M}| = j'$$



$$\sum_{\Delta l} j' \Delta l S = j' \cdot l \cdot S = |\vec{M}| \cdot \Delta V \cos \alpha \Rightarrow j' = |\vec{M}| \cos \alpha = \vec{M} \cdot \vec{n} = M_n$$

$$\Rightarrow \vec{j}' = [\vec{M}, \vec{n}]$$

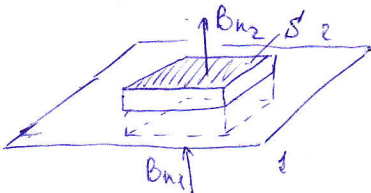


$\vec{j}' = [(\vec{M}_1 - \vec{M}_2), \vec{n}]$  - плотность поверхностного тока на границе двух магнетиков.



[5] Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля. Магнитная защита. Намагниченный шар в однородном поле. Влияние формы магнетика на его намагниченность.

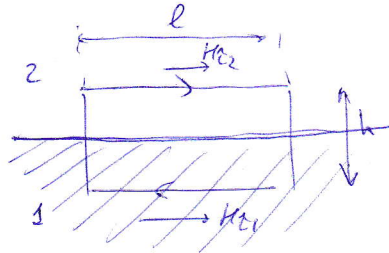
Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.



$$B_{n2} S - B_{n1} S = 0.$$

$$B_{n2} = B_{n1}$$

$$\frac{B_{t2}}{\mu_2} = \frac{B_{t1}}{\mu_1}$$

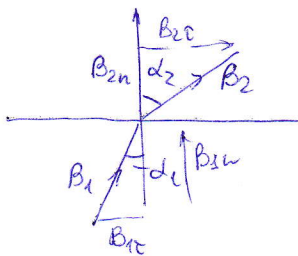


$$\mu_2 H_{t2} - \mu_1 H_{t1} = J_k l, \text{ где } \vec{k} \perp \vec{h}$$

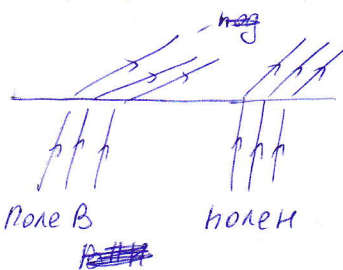
$$H_{t2} - H_{t1} = J_k, \text{ если } J_k = 0$$

$$\text{то } H_{t2} = H_{t1}$$

Преломление линий магнитной индукции магнитного поля на границе двух магнетиков.



$$\mu_2 > \mu_1$$



$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Аналогия с электростатикой диэлектриков (где лучше запоминать)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho = 0. \end{cases}$$

$$\epsilon_{t1} = \epsilon_{t2}; D_{n1} = D_{n2}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0. \\ \text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \vec{P} \end{cases}$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}; \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0. \end{cases}$$

$$\mu_{t1} = \mu_{t2}; B_{n1} = B_{n2}$$

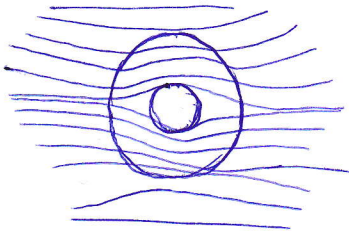
$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M} \end{cases}$$

### Магнитная защита.

При внесении в маг. поле замкнутого железного сосуда, например полого шара поле во внутренней области шара почти исчезает в результате сложения внешн. магнитного поля с полем намагнищенного железа. Этим пользуются для создания магнитной защиты или магнитной экранировки, т.е. для защиты тех или иных приборов от действия внешнего магнитного поля.

Но, в отличие от электростатической защиты, нужно достаточно толстые магнитные железные стенки, т.к. маг. поле проходит сквозь железо.

Только при толстых стенках поле внутри ослабляется достаточно для применения. Но линии магнитного поля не обрываются, а остаются замкнутыми, проходя сквозь железо.



Поле однородно намагниченного шара.

$$\begin{aligned} & \delta^1 = \rho_n \Rightarrow \delta^1 = \epsilon_0 M_n \\ & \vec{E}' = -\frac{1}{3} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}; \quad \vec{H}' = -\frac{1}{3} \vec{M} \end{aligned}$$

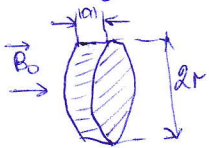
Если есть внешнее магнитное поле  $\vec{H}_0$ , то.  
 $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}' = \vec{H}_0 - \frac{1}{3} \vec{M} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0$ ;  $\vec{H}_0 = \beta \vec{M}$  - размагничивающее поле;  
 где  $\beta$  - размагничивающий фактор формы.  
 (решается аналогично задаче с диэлектриком)

Влияние формы магнетика на его намагниченность

$\vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0$ ;  $\vec{H}_0 = \beta \frac{\vec{M}}{\epsilon_0}$  - строго справедливо только для тел эллипсоидальной формы.  
 $0 < \beta < 1$ .

1) для бесконечного цилиндра  $\vec{H} = \vec{H}_0$ ,  $\beta = 0$ .

2) для тонкого магнитного слоя (бесконечного)



Из граничных условий  $\vec{B}_{n0} = \vec{B}_n \Rightarrow \vec{H}_{n0} = \mu \vec{H}_n$

При  $r \rightarrow \infty$ ,  $B_n = B$ ,  $H_n = H$ . Тогда  $H = H_0/\mu = H_0 - (H_0/\mu)r + H_0/\mu =$   
 $= H_0 - \underbrace{(r)}_x \underbrace{H_0}_{\beta} = H_0 - M \cdot \frac{1}{\beta}$ . В этом случае  $\beta = 1$ .

**[4]** Классификация магнетиков: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики  
 классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. Парамагнетизм.  
 Теория Ландауэна.

классификация магнетиков:

$(10^{-9} - 10^{-4})$   $\mu < 1$  или  $\chi < 0$  - диамагнетики } в отсутствие внешнего поля намагниченность  $I = 0$ .  
 $(10^{-6} - 10^{-3})$   $\mu > 1$  или  $\chi > 0$  - парамагнетики }  
 $(10^3 - 10^6)$   $\mu \gg 1$  или  $\chi \gg 1$  - ферромагнетики } в отсутствие внешнего поля  $I \neq 0$

В отдельные классы относятся антиферромагнетики, ферриты, супермагнетики

Диамагнетичные вещества, намагничиваются против направления внешнего магнитного поля.

Ларморова процессия:

• Движение  $e^-$  по круговой орбите ядра:

$m\omega_0^2 r = F_y$  - центробежная сила, возникающая в результате криволинейного движения электронов ядром.  $F_y \gg F_{эл. маг. поля}$   $\Rightarrow$  радиус орбиты  $e^-$  в атоме не изменится при помещении его в  $\vec{B}$  маг. поле.

Теперь атом находится во внешнем поле  $B$ , вектор индукции которого  $\perp$  плоскости орбиты.

Но модуль силы равен  $F = |e|\omega r B$ , где  $e$  - заряд электрона,  $\omega$  - частота вращ. электрона по орбите в маг. поле, отличная от  $\omega_0$

Уравнение движения электрона:

$$m\omega^2 r = F_y \pm |e|\omega r B (\pm \text{из-за ориентации силы Лоренца})$$

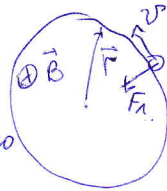
$F_y = \text{const}$ , т.к. движение ядра не изменилось.

$$m\omega^2 r - m\omega_0^2 r = \pm |e|\omega r B$$

Т.к.  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega\omega_0$ , где  $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$

$$\Rightarrow m \cdot 2\omega\omega_0 r = \pm |e|\omega r B$$

$$\Delta\omega = \pm \frac{|e|\hbar B}{2m}$$

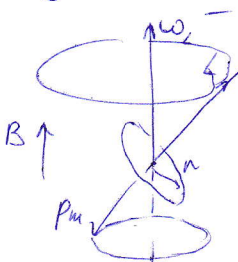


Т.о. в магнитном поле  $e^-$  приобретает дополнительную угловую скорость движения, характеризующую частотой:

$$\omega_L = \frac{|e|\hbar B}{2m}, \text{ которая называется ларморовой.}$$

$$\omega_L = \frac{e\hbar}{2m} \vec{B} \quad (e < 0), \text{ если } \vec{\omega}_L \text{ совпадает с } \vec{B}.$$

Образование этой дополнительной угловой скорости вращения без изменения радиуса орбиты можно себе представить в виде дополнительного вращения атома как целого с частотой  $\omega_L$  в магнитном поле



Для произвольной ориентации орбиты вращ.  $e^-$  относительно индукции внеш. магн. поля  $B$ :

$$\text{момент инерции } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \text{ где } \vec{L} = m r^2 \vec{\omega}, \vec{M} = [\vec{r}_m, \vec{B}]$$

$$\vec{r}_m = \vec{I} \vec{B} = \frac{e\hbar}{2m} \pi r^2 \vec{B} = \frac{e\hbar}{2m} \vec{L}$$

$$\text{Получим: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e\hbar}{2m} [\vec{L}, \vec{B}] = -\frac{e\hbar}{2m} [\vec{B}, \vec{L}]$$

А т.к.  $\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{A}]$  где произв. вектора с  $|\vec{A}| = \text{const}$ .

$-\frac{e\hbar}{2m} \vec{B} = \vec{\Omega} = \vec{\omega}_L \Rightarrow$  атом совершает в магнитном поле, подобно гироскопу, прецессионное движение. (ларморова процессия)

Диамагнетизм.

В результате ларморовой прецессии от каждого  $e^-$  в атоме возникает круговой ток, который с  $\vec{B}$  составл. левовинтовую сист.

$\Rightarrow$  создаваемая <sup>круговые</sup> элементарным дополнительная индукция маг. поля направл. навстречу вектору индукции внеш. магн. поля.

Магнитный момент атома, возникающий в результате прецессии, и намагниченность также направлены противоположно вектору индукции внешнего магнитного поля.

Эта картина возникновения ларморовой прецессии и связанных с ней магнитного момента и доп. магн. поля составляет сущность явления диамагнетизма

Парамагнетизм

Парамагнетизм - в-ва, молекулы которых обладают ненулевым магнитным моментом. Эл. магн. мом. во внешн. магн. поле  $\vec{M} = -\vec{\mu} \vec{B}$

Используя результат для функции Ланжевена, получим:

с заменой:  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$ ,  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$   $\Rightarrow \langle \mu_z \rangle = \mu L(\beta)$ , где

$$\beta = \frac{\mu B}{k_B T}, \quad L(\beta) = \coth \beta - \frac{1}{\beta}. \quad \text{Если } \beta \ll 1, \quad L(\beta) \approx \beta/3$$

$$\langle \mu_z \rangle = \mu \frac{\mu B}{3k_B T} = \frac{\mu^2 \mu_0 M N}{3k_B T}. \quad \text{Если } \mu \approx 1, \text{ то}$$

$$M_z = \mu \langle \mu_z \rangle = \frac{\mu \mu_0 \mu^2}{3k_B T} N, \quad \vec{M} = \chi \vec{H}$$

$$\chi = \mu - 1 = \frac{\mu \mu_0 \mu^2}{3k_B T} = \frac{C}{T} \text{ - закон Кюри}$$

Теория Ланжевена хорошо описывает лишь газы.

к парамагнетизму: индукция доп. магн. поля за счет намагничивания совпадает по направлению с индукцией внешнего поля и усиливает её

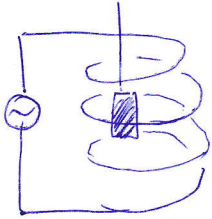
Однако угол между направлением магнитного момента атома и индукцией магнитного поля под действием поля не изменяется: магнитный момент испытывает лишь прецессионное движение вокруг направления вектора индукции без изменения угла между ними.

57 Микроскопическое понятие магнетизма. Магнитомеханический опыт Эйнштейна-де Гааза. Механомеханический опыт Барнетта. Туромагнитное отношение.

Магнитомеханическое явление - это возникновение вращения тел при их намагничивании.

Опыт Эйнштейна-де Гааза.

стр. 310 читать туромагнитные эффекты:



нить тела закруг. на угол  $\theta$ .

Соотношение между моментами (механ.  $L$  и магнит.  $p_m$ ) можно представить в виде

$$p_m = \frac{geL}{2m}$$

$g$ -туромагнитное отношение - отношение дипольного момента элементарной гаспыцы к её механическому моменту.

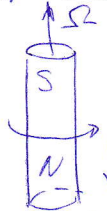
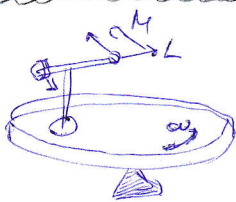
$$\sum \vec{p}_{m,i} = \vec{M}V, \text{ но } \vec{p}_{m,i} = \frac{ge}{2m} \vec{L}_i \Rightarrow L = \sum \vec{L}_i = \frac{M}{ge} \cdot 2m$$

$$L_z = \sum L_{z,i} = \frac{2m}{ge} M_z \cdot V$$

Так для железного цилиндра с диаметром 1 мм в магн. поле  $H=10^4$  А/м  $\omega_z = 10^{-3}$  рад/с.

Закручивание невелико, поэтому образец намагничивали с частотой  $\omega_0$  и вызвали вынужденные колебания с расстройкой амплитудой. Из опыта вычисляется  $g$ -туромагнитное соотношение

Механомеханический опыт Барнетта.



Механомеханическое явление - намагничивание магнетика при его вращении.

читать учебник стр 313 (эффект Барнетта)

У магнетика обладает диамагнетизмом.

Приведем во вращение магнетик как целое.

Отдельные атомы - маленькие гироскопы, которые стремятся сохранить направление своей оси вращения в пространстве.  $\Rightarrow$  Поэтому направл. магнитных моментов отдельных атомов в пространстве сохраняется неизменным.  $\Rightarrow$  относ. кристаллич. решетки магнетика эти магн. моменты будут совершать прецессионное движение с частотой вращения магнетика

Но такая упорядоченная прецессия атомов относительно магнетика как целого приводит к намагничиванию.  $\Rightarrow$  в рез. вращ. магнетик намагнител. (~~у~~)

$B = 2me\omega / (1e1g)$  как у диамагнетика, т.к. при вращении ~~г~~ магнетика с частотой  $\omega$  его намагничивает такое же, как при внесении диамагнетика в магнитное поле с индукцией  $B$ .



При вращении парамагнетика у него возникнет лишь диамагнитная намагниченность.

Вопрос: железный стержень  $\omega = 6000$  об/мин  $\Rightarrow$  намагничивание  $\lambda$  (эквив.) ~~на~~ наличие внешнего поля  $10^{-2}$  А/м.

$$\Gamma = \frac{ge}{2me}$$

Микроскопические носители магнетизма. Туромагнитное отношение

$\Gamma < 0$  из опыта  $\Rightarrow$  магнетизм обусловлен движением  $e^-$ .

Для магнетиков  ~~$\vec{P} = \frac{e}{m} \vec{r} \times \vec{p}$~~   $-\frac{e}{m} < \Gamma < -\frac{e}{2m}$ .

Для ферромагнетиков (Fe, Ni, Co и др.)  $\Gamma = -\frac{e}{m} \Rightarrow$  указывает на то, что магнетизм магнетиков нельзя объяснить только орбитальным движением.

$\vec{P}_{m,s} = -\frac{e}{m} \vec{S}$   ~~$-\vec{S}$~~   $\rightarrow$  спин  $e^-$ ,  $\vec{P}_{m,s}$  - момент  $e^-$ .

а т.к.  $S_z = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ , то  $\vec{P}_{m,s} = \pm \mu_B = \pm \frac{eh}{4\pi m}$  - магнетон Бора.

$\Rightarrow e^-$ -микроскопические носители магнетизма.

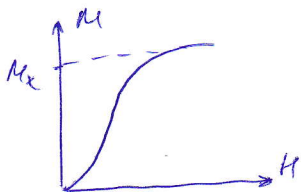
Ферромагнетики. Гистерезис намагничивания. Столетова. Остаточная индукция и ~~к~~ отрицательная сила. Спонтанная намагниченность и температура Кюри. Доменная структура. Температурная зависимость намагниченности.

Ферромагнетики - это сильные магнетики, относительная магнитная проницаемость  $\mu$  которых может достигать  $10 \cdot 10^3 - 30 \cdot 10^3$ .



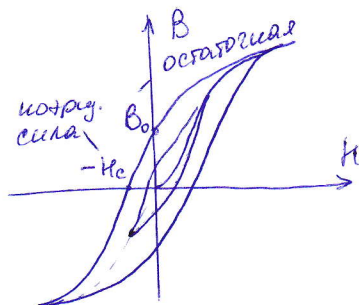
Зависимость  $\mu(H)$ . Завис. для чистого железа (кривая Столетова)

Гитато прак. 305-306.

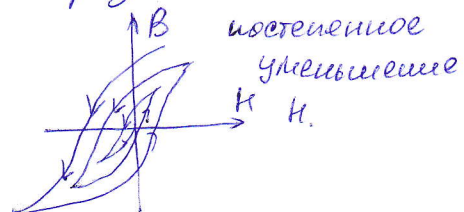


кривая намагничивания

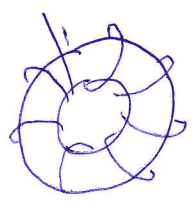
Гистерезис намагничивания.



Способ размагничивания:



Работа при намагничивании ферромагнетика



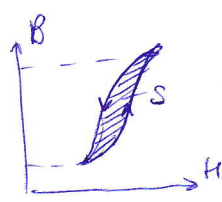
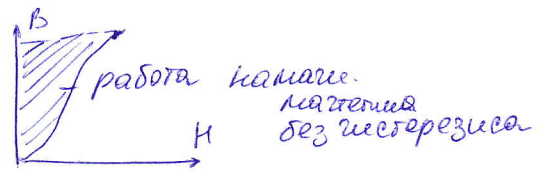
Торонд замкнени ферромагнетиком. При увеличении тока в обмотке на  $dI$  возникает ЭДС самоиндукции, против которой ток совершает работу  $dA = -Idt \mathcal{E}_{self} = Id\Phi$ , где  $\Phi = BNS$ ,  $N$  - число витков.

По теореме о циркуляции:  $H \cdot 2\pi r = NI$

$$\Rightarrow dW = dA = \frac{H \cdot 2\pi r}{N} N S dB = HdV \frac{2\pi r S}{V}$$

$$\Rightarrow dW = \frac{dW}{V} = \vec{H} d\vec{B} = \mu_0 \vec{H} d(\vec{H} + \vec{M}) = \underbrace{\mu_0 \vec{H} d\vec{H}}_{\text{плотность энергии намагнич.}} + \mu_0 \vec{H} d\vec{M}$$

(прочитать)



Работа при циклическом перемагничивании  $\sim S_H$  петля гистерезиса

Исследования показали, что даже в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагн. разбит на микроскопич. области (домены), в которых ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения.

Спонтанная намагниченность ферромагнетика обусловлена ориентацией собств. магн. моментов  $e^-$  ( $\Gamma = -e\hbar$ )

Ферромагнитное упорядочение  $\exists$  только при  $T < T_k$ . При  $T > T_k$  ферромагнитное упорядочение пропадает и ферромагнетик превращается в парамагнетик. Зависимость магнитной прониц. от  $T$  для таких парамагнетиков подчиняется закону Кюри-Вейсса.

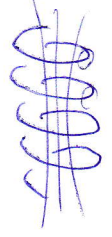
$$\chi = \frac{C}{T - T_k}$$

(доп.)

Ферриты - обладают большим удельным сопротивлением, т.е. являются магнитными полупроводниками

⊠ Энергия магнитного поля в магнитной среде. Сила, действующая на магнетик в магнитном поле.

Энергия магнитного поля (тока) в бесконечной изотропной магнитной среде.



В магнитной среде  $\vec{B} = \mu \vec{B}_0 \Rightarrow \Phi = \mu \Phi_0 = \mu L_0 I = LI \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = \frac{LI^2}{2} = \mu \frac{L_0 I^2}{2} = \mu \frac{1}{2} \int \frac{B_0^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{2} \int \frac{\mu B_0^2 \cdot \mu_0}{\mu \mu_0} dV = \int \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} dV$$

$$w = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{\vec{H} \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})}{2} = \frac{\mu_0 \mu_0 H^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H} \vec{M}}{2}, \text{ где } \frac{\mu_0 \vec{H} \vec{M}}{2} -$$

- плотность энергии намагничивания магнетика.

Силы, действующие на магнетики в магнитном поле.

$$\vec{F}_{\Delta V} = \nabla (\underbrace{\vec{p}_{\Delta V}}_{\vec{M}_{\Delta V}} \vec{B}) \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \nabla (\vec{M} \vec{B})$$

$$\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H} = (\mu - 1) \frac{\vec{B}}{\mu_0}; \quad \vec{f} = \nabla (\vec{M} \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0} \nabla (\vec{B} \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{2 \mu_0} \nabla B^2$$

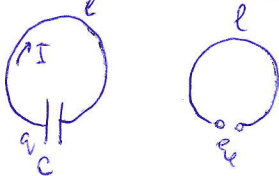
$$\vec{f} = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0} \frac{1}{2} \nabla B^2 = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0} \frac{1}{2} \text{grad } B^2. \quad \text{Если } \mu > 1, \text{ то магнетик втягивается в область сильного магнитного поля.}$$

§1 квазистационарные токи. Критерий квазистационарности. Переходные процессы в RL и RC-цепях.

квазистационарное поле. критерий квазистационарности.

В квазистационарном приближении полагаются, что в рассматриваемой цепи электродинамической системе все распределенные в пространстве заряды, токи и поле изменяются синхронно и мгновенно. Т.е. в каждый момент времени нестационарные заряды и токи порождают электрическое и магнитное поле, соответствующее эквивалентным стационарным зарядам и токам.

Критерий квазистационарности.



$$\tau \sim \frac{l}{c} \Rightarrow \tau \ll T, \quad \text{а } Tc = \lambda \Rightarrow l \ll \lambda \text{ - длина излучаемой волны}$$

критерий.

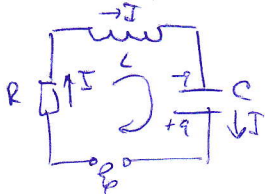
Для сравн:

• Если  $l = 1 \text{ км}, \tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ с}, D = \frac{1}{T} \ll 10^7 \text{ Гц}$

Если  $l = 100 \text{ м}, \tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ с}, D = \frac{1}{T} \ll 10^6 \text{ Гц}$ .

Микропроцессор  $l = 1 \text{ см} \Rightarrow D_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{l} \sim 10^{10} \text{ Гц}$ . близок к пределу квазистационарности.

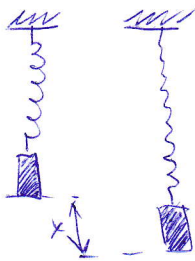
Ур-ние колеб. контура в квазистационарном приближении.



Согласно правилу Кирхгофа:

$$IR + Uc = \underbrace{e_{\text{самоинд}}}_{-L \frac{dI}{dt}} + e_{\text{внеш}} \Rightarrow L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = e_{\text{внеш}}$$

Мех. аналогия:



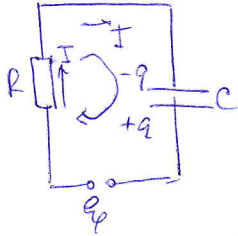
сила трения со стороны

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu \dot{x} + F$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Переходные процессы в RC- и RL-цепях!

RC:

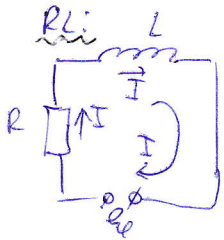


$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \Rightarrow R \frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{E - \frac{q}{C}} = \frac{dt}{R}$$

$$\ln |E - \frac{q}{C}| = -\frac{t}{RC} + const. \text{ При } t=0 \text{ const} = \ln |E|$$

$$\Rightarrow E - \frac{q}{C} = E e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

RL:



$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = E \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E - RI}{L} \quad \left( \frac{dI}{E - RI} \right) = \frac{dt}{L}$$

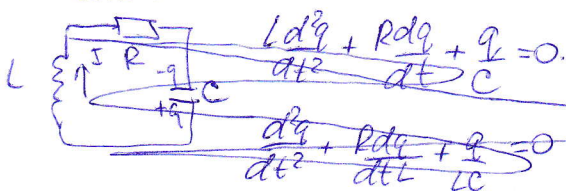
$$\ln |E - RI| = -\frac{tR}{L} + const \quad \text{при } t=0 \text{ const} = \ln |E|$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

[Э] Электромагнитные колебания. колебательный контур. Уравнение гармонических колебаний. Собственные колебания в контуре. Энергия, запасенная в контуре.

Электромагнитные колебания. - периодические изменения напряженности E и индукции B. (такими колебаниями являются радиоволны, микроволны, инфракрасное излучение, видимый свет и т.д.)

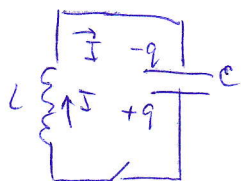
Собственные колебания - колебания в контуре, где отсутствуют вынужденные силы.



$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \text{система колеблется с частотой } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

колебательный контур:



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

решением этого ур-ния будет  $q = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ,  $I = \dot{q} = -a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\text{tg } \varphi_0 = -\frac{A}{B}$ .

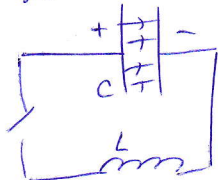
начальные условия: при  $t=0$ ,  $q_0, I_0$ .

В частности, если при  $t=0$ ,  $q = q_0, I = I_0 = 0$ , то  $A = 0$  и  $B = q_0$  (определяется из начальных условий (как в задачах)).  $q = q_0 \cos \omega_0 t$ ,  $I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t$

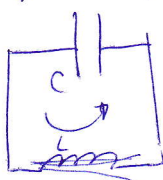
$$W_C = \frac{q^2}{2C}; \quad W_L = W_I = \frac{LI^2}{2}$$

Колебания: изменение  $q$  на обкладках  $\Rightarrow$  и  $\vec{E}$  в конденсаторе и  $\vec{B}$  в катушке составл. эл. магн. колебания.

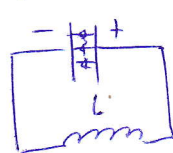
а)  $t=0$



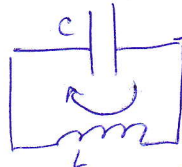
б)  $t=T/4$



в)  $t=T/2$



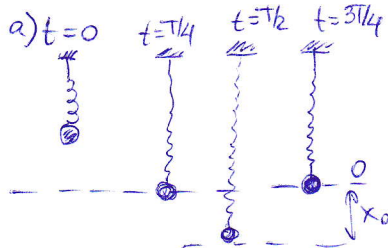
г)  $t=3T/4$



$$q = q_0 \cos \omega_0 t \text{ на конденсаторе}$$

$$I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t$$

аналогия с:



$$x = x_0 \cos \omega_0 t$$

$$v = \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

Энергия гармонических колебаний

$$I \cdot \left| L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} \frac{dI^2}{dt} + \frac{dq}{dt} \cdot \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C} \right) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C} = \text{const}$$

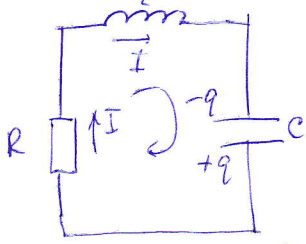
$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2C} \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)])$$

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{a^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2C} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)])$$

$$\langle W_{Lc} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_{Lc} dt = \frac{a^2}{4C} \Rightarrow \langle W_L \rangle = \langle W_C \rangle$$

101 Затухающие колебания в контуре и их уравнение. Показатель затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура

Затухающие колебания в контуре и их уравнение:



$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + 2 \cdot \frac{R}{2L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$\gamma$                        $\omega_0^2$

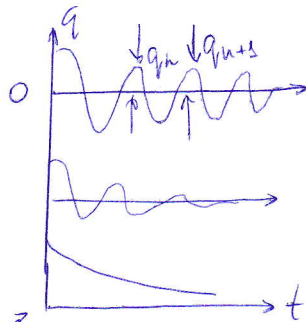
$\dot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ ;  $q = \xi e^{-\delta t}$  - имеет такую форму. (Р~~а~~)  
 $(q = u\cos, \dot{q} = -u\sin + \delta u, \ddot{q} = -\ddot{u}\cos + 2\delta\dot{u}\sin + u\delta^2)$

$$\underbrace{\ddot{\xi} e^{-\delta t} - 2\dot{\xi}\delta e^{-\delta t} + \delta^2 \xi e^{-\delta t}}_{\dot{q}} + \underbrace{2\delta \xi e^{-\delta t}}_{2\delta q} - \underbrace{2\delta^2 \xi e^{-\delta t} + \omega_0^2 \xi e^{-\delta t}}_{\omega_0^2 q} = 0$$

а)  $\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \delta^2)\xi = 0$ , если  $\delta < \omega_0$ , то  $\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = 0$ , где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$   
 $\xi = a_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \Rightarrow q = a_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$

Если при  $t=0, q=q_0, I=\dot{q}=0$ , то  $\varphi_0=0, a_0=q_0$

$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t)$



б) Если  $\delta > \omega_0$ , то  $\ddot{\xi} - (\delta^2 - \omega_0^2)\xi = 0$ .

~~$\xi = A e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}$~~   
 $\xi = A e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$

в) Если  $\delta = \omega_0$ , то  $\ddot{\xi} = 0, \xi = (a + bt), q = (a + bt)e^{-\delta t}$



см. 309 ур.ак.  
с показателем и обозначением

Параметры в контуре с затуханием:

$a = a(t) = a_0 e^{-\delta t}$  - амплитуда затухающих колебаний.

$\delta = \frac{R}{2L}$  - декремент (показатель) затухания.

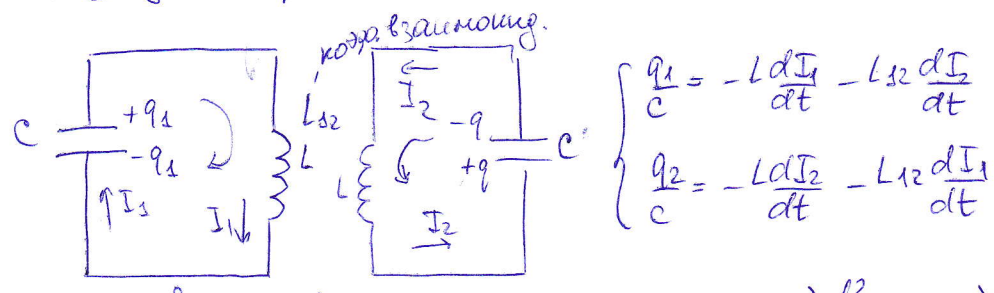
$\tau = \frac{1}{\delta}$  - время релаксации, время за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $e \approx 2,71$  раз.

$D = \ln \frac{a(t)}{a(t+\tau)} = \delta \tau$  - логарифмический декремент затухания

$Q = \frac{\pi}{\theta}$  - добротность колебат. контура при  $\delta \ll \omega_0$   $\rightarrow$  энергия запасенная в контуре  
 $Q = \frac{2\pi W}{\Delta W}$  - уменьшение этой энергии за  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

117 Колебания в связанных контурах. Нормальные колебания (моды) и их частоты.

Нормальные колебания (моды) - набор характеристик для колебательной системы типов гармонических колебаний. Каждое из нормальных колебаний физической системы (например, колебание атомов в молекуле) характеризуется своей частотой. Набор частот нормальных колебаний составляет колебательный спектр. Произвольное колебание в системе можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний.



$$\begin{cases} q_1 = -L \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ q_2 = -L \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{C} = 0 \\ L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \pm \Rightarrow \begin{cases} (L+L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1+I_2) + \frac{1}{C} (I_1+I_2) = 0 \\ (L-L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1-I_2) + \frac{1}{C} (I_1-I_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (I_1+I_2) + \frac{1}{(L+L_{12})C} (I_1+I_2) = 0 & I_1+I_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^\circ) \\ \frac{d^2}{dt^2} (I_1-I_2) + \frac{1}{(L-L_{12})C} (I_1-I_2) = 0 & I_1-I_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2^\circ) \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^\circ) + \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^\circ)$$

$$I_2 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^\circ) - \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^\circ)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+L_{12})C}} \text{ и } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-L_{12})C}} \text{ - нормальные частоты.}$$

Парциальные <sup>те</sup> частоты - это частоты колебаний системы с N степенями свободы при фиксированных N-1 степенях.

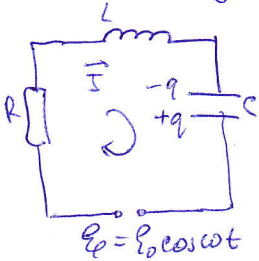
В рассмотрим случае  $\omega_{n1} = \omega_{n2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Для нормальных и парциальных частот:

$$\omega_1 < \omega_{n1} \leq \omega_{n2} < \omega_2$$

12 Вынужденные колебания в контуре. Процесс установления вынужденных колебаний. Электромагнитная аналогия. Колебания тока в контуре и напряжения на емкости, индуктивности и сопротивлении

Вынужденные колебания в контуре



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{R}{2L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$$

$\gamma$                        $\omega_0$                        $x_0$

~~$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos \omega t$$~~

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos \omega t$$

$q = q_{\text{общ.однородное}} + q_{\text{частное неоднородное}}$ .

Общ.однородное:

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow q_{\text{общ.однородное}} = a_0 e^{-\delta t} \cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega_1} t + \varphi_0)$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\dot{q}_k + 2\delta \dot{q}_k + \omega_0^2 q_k = x_0 e^{i\omega t}$$

$$q_k = z_0 e^{i\omega t} \Rightarrow (-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t}$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega} \Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega} e^{i\omega t}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \text{ а } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

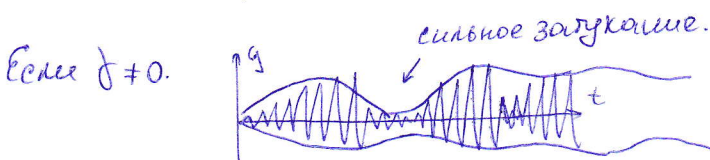
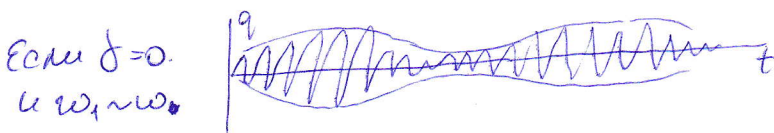
$$\Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)};$$

$$q = \operatorname{Re} q_k = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi)$$

Общее решение равно:

$$q = a_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi)$$

В частности, если при  $t=0$  величины  $q=0$  и  $\dot{q}=0$ , то





Процесс установления вынужденных колебаний. И при резонансе.

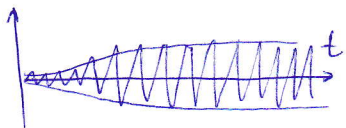
И при  $t=0$ ,  $q=0$ ,  $\dot{q}=\dot{I}=0$

при  $t=0$ :  $\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\delta} \cos \varphi = 0 \\ -a_0 \omega_1 \sin \varphi_0 - \delta a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\delta} \omega \sin \varphi = 0 \end{cases}$

Взвем производную  $\dot{q}(t=0)$

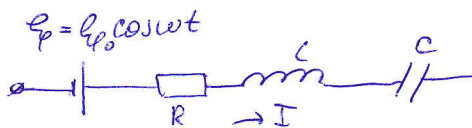
Если  $\delta \ll \omega_0$  и  $\omega = \omega_0$ , то  $\varphi_0 = -\varphi$ ,  $a_0 = -x_0/\delta$

$q \approx \frac{x_0}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t - \varphi)$ ;  $t \gg \tau = 1/\delta$



Нахождение амплитуды тока и напряжения методом комплексных амплитуд:

• RLC-послед. цепь.



1)  $\varphi = U_L + U_R + U_C$

В комплексном виде  $\varphi_0 e^{i\omega t} = U_{L0} e^{i(\alpha + \omega t)} + U_{R0} e^{i(\varphi + \omega t)} + U_{C0} e^{i(\beta + \omega t)}$   
 $\varphi_0 = U_{L0} e^{i\alpha} + U_{R0} e^{i\varphi} + U_{C0} e^{i\beta}$ ,  $\alpha, \varphi, \beta$  - фазы, которые мы не знаем

$\hat{I} = I_0 e^{i\beta}$  - замена

$\varphi_0 = \hat{I} \cdot i\omega L + \hat{I} R + \hat{I} \frac{1}{i\omega C} = \hat{I} \underbrace{\left( R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)}_{Z\text{-импеданс}}$

$\hat{I} = \frac{\varphi_0}{Z}$

$\hat{I} = \frac{\varphi_0}{(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C})} = \frac{\varphi_0}{\dots}$  избавляемся от комплексного числа в знаменателе

в числителе получаем число вида  $(A + iB)$

$I_0 = |\hat{I}| = \frac{\varphi_0}{\sqrt{A^2 + B^2}}$   
 действующее

$\text{tg } \varphi = \frac{B}{A}$

~~$\varphi = I_0 e^{i(\beta + \omega t)}$~~   $I = I_0 e^{i(\beta + \omega t)} = |\hat{I}| \cdot e^{i(\arctg \frac{B}{A} + \omega t)}$

$U_R = \hat{I} R e^{i\omega t} = U_{R0} e^{i(\varphi + \omega t)}$

где  $U_{R0} = |U_R| = |\hat{I} R| = I_0 R$ , а  $\varphi$  считается также из числителя  $(A + iB)$

$\text{tg } \varphi = \frac{B}{A}$

=> аналогично с  $U_L$  и  $U_C$

• Если параллельное соединение: то напр. равны на ~~сторонах~~ ветках. Но это не простые цепи с колебаниями.

если  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , то в ур-ниях вместо  $\varphi_0$  будет  $\varphi_0 e^{i\varphi}$ .

131 Переменный синусоидальный ток. Метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд. Амплитудное, емкостное и индуктивное сопротивление. Закон Ома для цепей переменного тока.

К прошлomu вопросу вместо метода комплексных амплитуд:  
получим закон на  $q$ .

Т.к.  $U_C = \frac{q}{C}$ , то колебание на конденсаторе  ~~$U_C = \frac{q}{C}$~~   $U_C = \frac{q}{C}$ , совпадает по фазе с  $q$ .

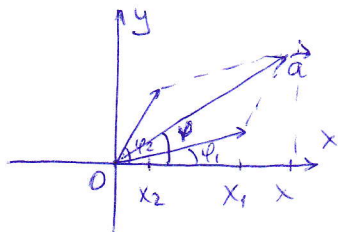
$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$  в RLC-цепи ток изменяется везде одинаково  $I_R = I_L = I_C$

$U_R = I \cdot R \Rightarrow$  нашли колебание на резисторе

а на катушке  $= -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$

Метод векторных диаграмм:

Траектории отображаются на диаграмме  $i \neq$  угол между векторами - это сдвиг фаз (мечта или м)

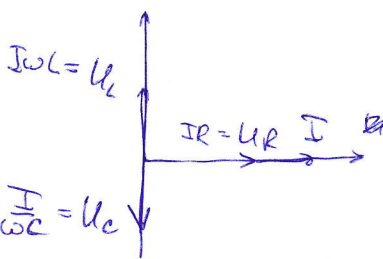


$$x_1 = a_1 \cos(\varphi_1) \quad \varphi_1 = \omega t + \varphi_{1,0}$$

$$x_2 = a_2 \cos(\varphi_2) \quad \varphi_2 = \omega t + \varphi_{2,0}$$

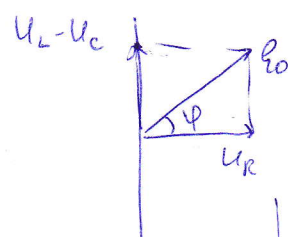
$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\varphi)$$

например: в RLC-цепи, ток и  $U_R$  совпадают по фазе на конденсаторе  $U_C$  отстает на  $\pi/2$  и  $U_L$  опережает на  $\pi/2$



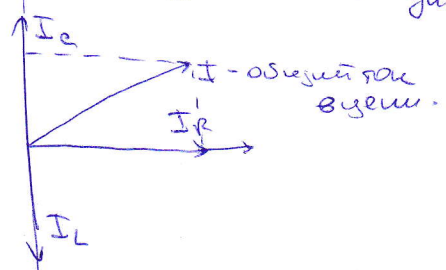
каждому из векторов можно сопоставить выражение:  
 $U_R = IR, U_L = I\omega L, U_C = \frac{I}{\omega C}$

В сумме они должны дать  $E_0$ :



$\varphi$  - фаза нап. на мезду  $E_0$  и нап. на резисторе.

аналогичная диаграмма с токами.



Метод комплексных амплитуд: см. раньше.

Ур-ние Кирхгоффа заменим за комплексное, подставив комплексные реактивные сопротивления:  $R_L = i\omega L$ ,  $R_C = \frac{1}{i\omega C}$ ,  $R_R = R$

$Z_0 = a e^{i\varphi_0}$  - комплексная амплитуда (я заменил её на  $\hat{a}$ )

комплексная частота:  $\omega = \omega' + i\omega''$ , тогда  $Z = Z_0 e^{i\omega t} = Z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = Z_0 e^{-\omega''t} e^{i\omega't}$ , где  $Z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$  - комплексная амплитуда.

Переменный синусоидальный ток:

$t \gg T = 1/\gamma \Rightarrow q = \frac{K_0}{S} \cos(\omega t - \varphi)$  (решение затухающих колебаний равно 0.)

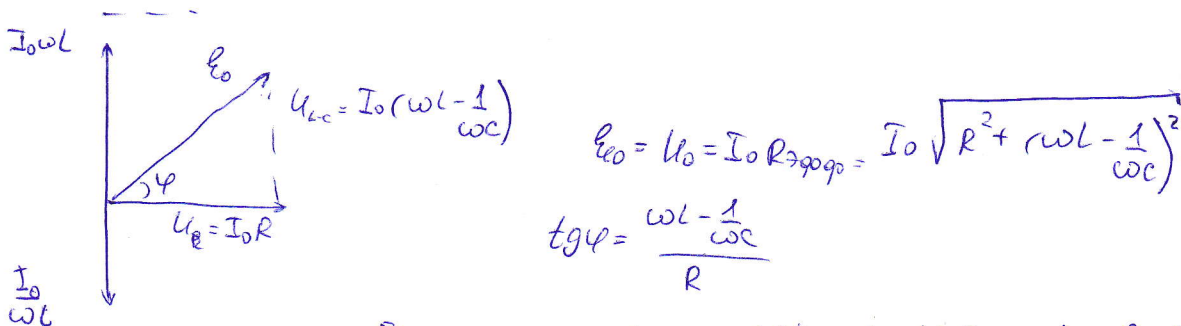
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega K_0}{S} \sin(\omega t - (\varphi - \pi/2) + \pi/2) = I_0 \cos(\omega t - \psi)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{K_0}{C S} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$U_L = -e_{\varphi}^{инд} = L \frac{dI}{dt} = -L I_0 \omega \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$U_R = IR = I_0 R \cos(\omega t - \varphi)$$

$R$  - активное сопротивление;  $R_C = \frac{1}{\omega C}$  - емкостное сопротивление;  $R_L = \omega L$  - индуктивное сопротивление.



В примере комплексных амплитуд закон Ома.  $Z$  - импеданс (как общее сопротивл. системы)

$(\omega L - \frac{1}{\omega C})$  - реактивное сопротивление.

приведет комплексный закон Ома для переменного тока.  
 $I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$   $\text{tg} \psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

141 Резонанс напряжений. Напряжения на элементах цепи и ток при резонансе. Ширина резонансной кривой.

Исследуем зависимость амплитуды  $U_{C,0}$  и фазы  $\varphi$  от частоты  $\omega$  вынуждающей ЭДС (напр. в последовательном RLC-контуре).

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{Cg} \cos(\omega t - \varphi), \text{ где } g = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$U_{C,0} = \frac{I_0}{Cg} = \frac{I_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \frac{I_0^2 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

при  $\omega \rightarrow 0$   $U_{C,0} \rightarrow I_0^2 \omega_0^2$  - макс. напр.  
при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $U_{C,0} \rightarrow 0$

$$\frac{dU_{C,0}}{d\omega} = \frac{I_0^2 \omega_0^2}{g^3} \left(-\frac{1}{2}\right) [-2(\omega_0^2 - \omega^2) 2\omega + 4\gamma^2 2\omega] = 0$$

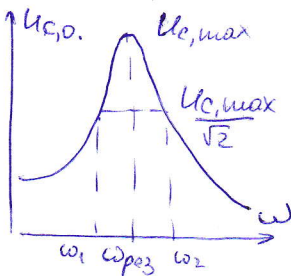
$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2; \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

$$U_{C,\text{max}} = \frac{I_0 \omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2 \omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{I_0 \omega_0^2}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

В частности, если  $\gamma \ll \omega_0$

$$U_{C,\text{max}} = I_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} = I_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{U_{C,\text{max}}}{I_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi \cdot 1}{T} \cdot \frac{1}{2\gamma} = \frac{\pi}{T\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q\text{-коэффициент контура.}$$



$$U_{C,0} = \frac{I_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$U_{L,0} = \omega L I_0 = \omega^2 LC \frac{1}{\omega C} I_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot U_{C,0}$$

При резонансе  $\omega = \omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ ,

если  $\gamma \ll \omega_0$ , тогда  $U_{L,0} = U_{C,0} = I_0 Q$ .

Фаза отстает ается на  $\pi$ .

Ширина резонансной кривой.

$$\frac{U_{C,\text{max}}}{\sqrt{2}} = U_{C,0}(\omega); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I_0 \omega_0^2}{2\gamma \omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{I_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

умножая, получим квадратное уравнение относительно  $\omega$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = \pm 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\omega_1^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} - 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \quad \omega_2^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} + 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Если  $\gamma \ll \omega_0$ , то  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\gamma\omega_0$ ;  $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \gamma$ ;  $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \quad \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{2\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q\text{-коэффициент контура.}$$

Тогда оценим  $\omega_{\text{рез}} - \omega_1 > \omega_2 - \omega_{\text{рез}}$

Токи при резонансе

$$q = E_0 \cos \omega t$$

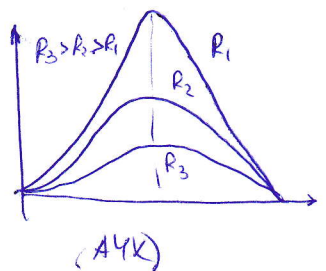
$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\omega x_0}{3} \sin(\omega t - \psi) = \frac{\omega x_0}{I_0} \cos(\omega t - (\psi - \pi/2))$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\psi - \pi/2) = -\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\frac{1}{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}} = -\frac{1}{\frac{1}{LC} - \omega^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega x_0}{I_0} \cos(\omega t - \psi) ; I_0 = \frac{\omega x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{\omega E_0}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + 4(\frac{R}{2L})^2 \omega^2}}$$

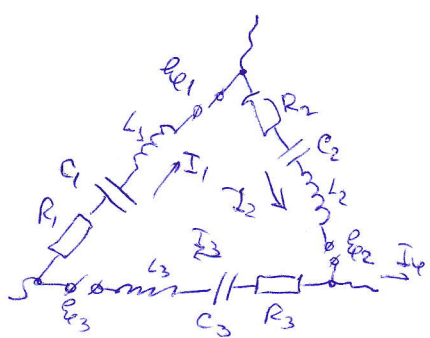
$$= \frac{E_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - L\omega)^2 + R^2}}$$

$\omega_{рез} \approx \omega_0$ , поскольку  $\frac{1}{\omega C} - L\omega$  - малая величина



151 Правила Кирхгоффа для переменного тока. Резонанс тока.

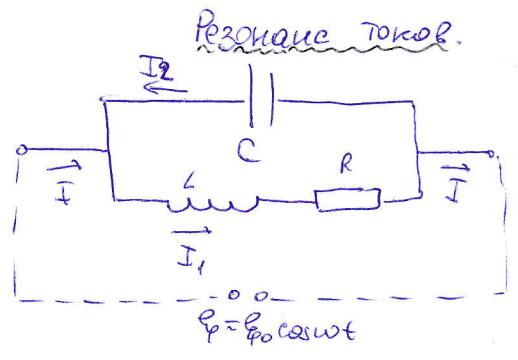
Пример правил Кирхгоффа: см. метод комплексных амплитуд (первое уравнение)



$$\begin{cases} I_2 - I_3 - I_4 = 0 \\ \sum_n I_n = 0 \end{cases}$$

к-комплексный вид.

$$\begin{cases} I_{1k} z_1 = E_{1k} \text{ где } z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L_1 \\ I_{2k} z_2 = E_{2k} \text{ где } z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega L_2 \\ I_{3k} z_3 = E_{3k} \text{ где } z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_3} + i\omega L_3 \end{cases} \quad \sum_n I_{nk} z_n = E_{nk}$$

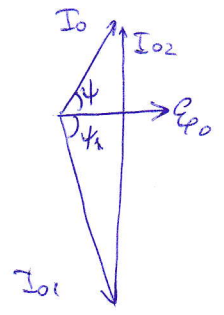


$$\begin{cases} I_1(i\omega L + R) = E_0 \\ -I_2 \cdot \frac{1}{i\omega C} = E_0 \\ I_1 = I + I_2 \end{cases}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{E_0}{R + i\omega L} + E_0 \cdot i\omega C = \frac{E_0(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} + E_0 i\omega C = \left[ \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \right] E_0$$

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} E_0, \quad \text{tg } \psi = \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Векторная диаграмма токов.

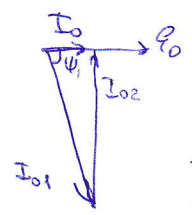


$$I_{01} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \text{tg } \psi_1 = -\frac{\omega L}{R}$$

Если  $\omega L \gg R$  то  $\psi_1 \approx \pi/2$

$$I_0 \approx \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} E_0 = \frac{R}{\omega^2 L^2} E_0$$

$\Rightarrow I_0 = \text{min}$ , если  $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$



$$\text{tg } \psi = \frac{\omega^2 L^2}{R} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0, \quad \text{если } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{I_{01}}{I_0} = \frac{E_0 / \omega L}{\frac{R}{\omega_0^2 L^2} E_0} = \frac{\omega_0 L \cdot 2}{R \cdot 2} = \frac{\omega_0}{2f} = Q, \quad I_{02} = E_0 \omega_0 C = \frac{E_0}{\omega_0 L} = I_{01}$$

$$\left. \begin{aligned} I_e &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \\ U_e &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \text{эффект. значение тока напряжения.}$$

Система уравнений Максвелла, как обобщение опытных данных.

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \int_{S_V} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_V} \vec{j} d\vec{S} \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} \\ \oint \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_V} \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} \end{cases}$$

→ из опыта закона Фарадея электромагнитной индукции.

$\vec{j}_{\text{смещ.}}$

$\vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  - плотность тока смещения  
 $I_{\text{смещ.}} = \int_S \vec{j}_{\text{смещ.}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$  - ток смещения.

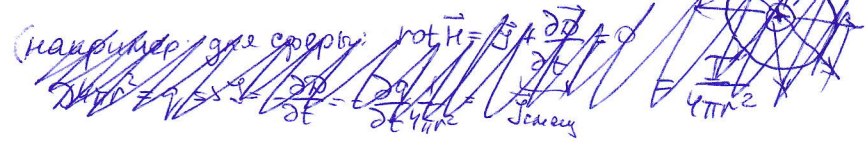
ток смещения стр. 392.

$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon}$  (между пластинами конденсатора)  
 - электрическое смещение

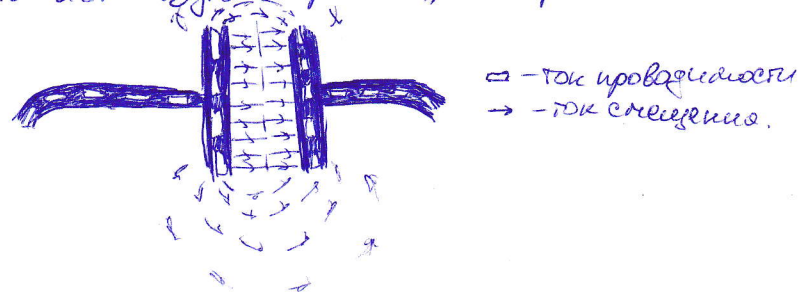
$D = \vec{D} = Q/S$ ,  $S$  - площадь обкладки,  
 сила тока в цепи  $I = \partial Q / \partial t$

→  $I_{\text{смещ.}} = S \frac{\partial D}{\partial t}$  - т.е. процессом, замыкающим ток проводимости в цепи, является изменение электрического смещения между обкладками конденсатора.

$$j_{\text{смещ.}} = \frac{I_{\text{смещ.}}}{S} = \frac{\partial D}{\partial t}$$



Ток проводимости - это направленное движение на большие расстояния свободных зарядов (например, если покоим свободных  $e^-$ ). Когда ток идет не в веществе, а в свободном пространстве, вместо термина "ток проводимости" часто используют термин "ток переноса".



Преобразование электрического и магнитного полей

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = 0, \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \end{array} \right. \quad \text{в проводящем} \quad \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot rot } \vec{E} = [\nabla [\nabla \vec{E}]] = (\nabla(\nabla \cdot \vec{E})) - \nabla^2 \vec{E} = \\ = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \text{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial \text{rot}(\mu \mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{D} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

⇒ из ① и ② получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{E} - \underbrace{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}_{1/v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{где } v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Рассмотрим плоскую волну:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(z, t) \\ \vec{H} = \vec{H}(z, t) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{E}(t - \frac{z}{v}) \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{H}(t - \frac{z}{v}) \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 \vec{E}(t - \frac{z}{v})}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(t - \frac{z}{v})}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = \vec{E}_0 \cos \left[ \omega t - \frac{\omega}{v} z \right] = \vec{E}_0 \cos \left[ \omega t - \vec{k} \vec{r} \right] = \left( \frac{\omega}{k} = v \text{ по оси } \vec{k} \right) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = \vec{H}_0 \cos \left[ \omega t - \frac{\omega}{v} z \right] = \vec{H}_0 \cos \left[ \omega t - k z \right] = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

$$\cdot \text{rot } \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -i [\vec{k}, \vec{E}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} = i \omega \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} = i \omega \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -i [\vec{k}, \vec{E}] = -i \omega \mu \mu_0 \vec{H}$$

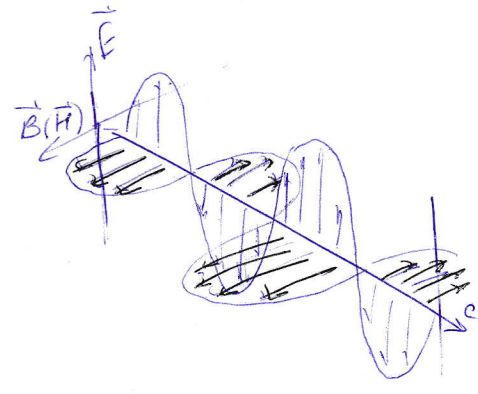
$$[\vec{k}, \vec{E}] = \omega \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$k \cdot E_x = \omega \mu \mu_0 H_y = \omega B_y$$

$$\frac{k}{\omega} = v = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_y = \frac{B_y}{\mu \mu_0} \Rightarrow E_x = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} B_y$$

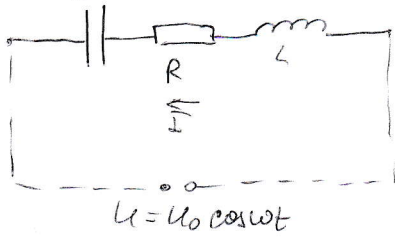
$$\Rightarrow E_0 = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} B_0, \text{ в вакууме } \mu = \epsilon = 1 \Rightarrow E_0 = c B_0.$$



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$   
волновой вектор.



217 Работа и мощность переменного тока. Формулы тока и напря. Мощность при резонансе напряем. и токов.



$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{|Z|} e^{i\omega t - i\varphi} \Rightarrow rpe$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I = \frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow P = UI = \underbrace{U_0 \cos \omega t}_U I_0 \cos(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow$$

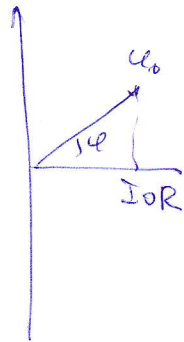
По формуле  $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$\Leftrightarrow \frac{U_0 I_0}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)] \quad , \text{ а т.к. } I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{, то } \varphi \text{ при } \omega^2 = \frac{1}{LC} \text{ можно наблюдать резонанс тока.}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0 I_0}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] dt =$$

$$= \frac{I_0 U_0}{2} \left[ \frac{\cos \varphi}{T} \int_0^T dt + \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2T} \Big|_0^T \right]$$

$$= \frac{I_0^2 R}{2}$$



257 Скин-эффект.

У переменного тока благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника, в результате ток сосредотачивается преимущественно в поверхностном слое проводника. Это скин-эффект.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \left( \int_C \vec{B} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{s} = \int_S \vec{J} d\vec{s} \right)$$

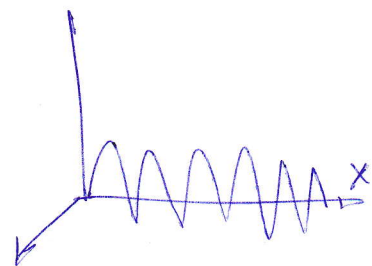
$$\text{и } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\vec{J} = \lambda \vec{E})$$

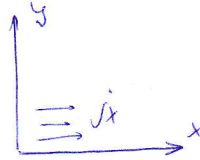
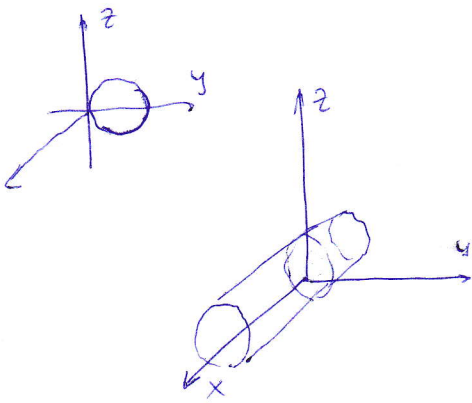
$$\frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \text{rot } \vec{E}$$

$$\text{а } \nabla \text{div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

т.е.  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$





$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = j_z = 0$$

$$E_x = E_x(y, t), \quad E_y, E_z = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial y^2} = \lambda \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t}$$

$$E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} = i\omega E_0(y) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 (E_0 e^{i\omega t})}{\partial y^2} = \lambda \mu \mu_0 i\omega E_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = \lambda \mu \mu_0 i\omega E_0$$

Общее решение ур-ния.

$$E_0 = A_1 e^{-ky} + A_2 e^{ky}$$

$$k = \sqrt{i\omega \mu \mu_0 \lambda} = \alpha(1+i), \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\lambda \mu \mu_0 \omega / 2}$$

$$\Rightarrow E_0 = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}$$

при  $y \rightarrow \infty$  второе слагаемое  $A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y} \rightarrow \infty$ ,  $\Rightarrow$  надо положить  $A_2 = 0$ .

$$\Rightarrow E_0 = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y}$$

$$E_x = E_0 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}$$

$$j_x = j_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y)$$

при приближении расст.  $\Delta = 1/\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$

Внекогерентности:

Второе условие квазистационарности:  $|\vec{j}| \gg |\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}|$

$$j \vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t. \quad \text{Тогда } \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{j} = \lambda \vec{E}$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{E}_0 \gg \omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad \omega \ll \frac{\lambda}{\epsilon \epsilon_0}$$

для меди  $\lambda / \epsilon_0 = 6,6 \cdot 10^{18} \text{ рад/с.}$