МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Ответы к экзамену по курсу дифференциальные уравнения

Июль 2015

1) Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка.

Вспомогательные сведения:
Определение Говорят, что функция n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная в n-мерной области $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, принадлежит к классу непрерывных в области $\mathbb{E}^n \subseteq \mathbb{D}^n$ функций: $f(x_1, \dots, x_n) \in C(\mathbb{E}^n)$, если

$$\forall(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \in \mathbb{E}^n \longrightarrow \lim_{\substack{x_1 \to \overline{x}_1 \\ \dots \\ x_n \to \overline{x}_n}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$$

.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ определена в замкнутой области $\mathbb{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \times [y_0 - b, y_0 + b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Пусть:

1. $f(x, y) \in C(\mathbb{D})$
2. $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$

Тогда $\exists!$ решение рассматриваемой задачи

$$y(x) : \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \cap D(y(x)) \longrightarrow (x, y(x)) \in \mathbb{D}$$

.

2) Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'(x) = f(x, y)$. Проверьте выполнение условий этой теоремы для задачи $y'(x) = 4x - 4y$, $x > 0$, $y(0) = 0$.

См. Вопрос 1).

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4x - 4y \\ x > 0, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Очевидно, что $4x - 4y \in C(\mathbb{D})$
2. $\dfrac{\partial}{\partial y}(4x - 4y) = -4 \in C(\mathbb{D})$

.

3) Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'(x) = f(x, y)$. Проверьте выполнение условий этой теоремы для задачи $y'(x) = \sqrt[6]{y}$, $x > 0$, $y(0) = 0$.

См. Вопрос 1).

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt[6]{y} \\ x > 0,\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Очевидно, что $\sqrt[6]{y} \in C(\mathbb{D})$
2. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\sqrt[6]{y}) = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{y^{\frac{5}{6}}} \notin C(\mathbb{D})$, так как в точке $(x, 0) \in \mathbb{D}$, $\forall x > 0$ функция $f(x, y) = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{y^{\frac{5}{6}}}$ не определена.

4) Сформулируйте теорему Чаплыгина существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ 0 < x \le a,\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Вспомогательные сведения:

Определение Функция $\alpha(x) \in C^1(0, a] \bigcap C[0, a]$ называется нижним решением задачи Коши, если

$$\forall x \in (0, a] \longrightarrow \frac{d\alpha}{dx} < f\left(x, \alpha(x)\right),\ \alpha(0) < y_0.$$

Определение Функция $\beta(x) \in C^1(0, a] \bigcap C[0, a]$ называется верхним решением задачи Коши, если

$$\forall x \in (0, a] \longrightarrow \frac{d\beta}{dx} > f\left(x, \beta(x)\right),\ \beta(0) > y_0.$$

Пусть:

1. $\exists$ нижнее $\alpha(x)$ и верхнее $\beta(x)$ решения задачи Коши: $\forall x \in [0, a] \longrightarrow \alpha(x) < \beta(x)$.

2. Функция $f(x,y) \in C(\mathbb{D})$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в области $\mathbb{D}$, где $\mathbb{D} = [0,a] \times [\alpha(x), \beta(x)]$,

$$\exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in [0,a]\,,\ \forall y_1, y_2 \in [\alpha(x), \beta(x)] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|$$

.

Тогда $\exists!$ решение рассматриваемой задачи $y(x)\ :\ \forall x \in [0,a] \longrightarrow \alpha(x) < y(x) < \beta(x)$.

5) Дайте определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения. Какой вид имеет общее решение такого уравнения? Приведите пример.

Вспомогательные сведения:

Определение Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит от одной переменной, то уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением(ОДУ).

Общий вид ОДУ n-го порядка с одной неизвестной функцией: $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$

Определение Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n} \longrightarrow a_i(x) \in C(X)$, $f(x) \in C(X)$. Тогда ОДУ вида

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

называется линейным. При $f(x) \equiv 0\ \forall x \in X$ данное уравнение называется линейным однородным.

Определение Функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называются линейно зависимыми(ЛЗ) на отрезке $[a,b]$ функциями, если

$$\exists C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n} : \forall x \in [a,b] \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} C_i^2 \neq 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x) = 0$$

Определение Функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называются линейно независимыми(ЛНЗ) на отрезке $[a,b]$ функциями, если

$$\forall x \in [a,b]\,,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} C_i^2 = 0$$

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

Определение Совокупность из n, где n - порядок уравнения, любых ЛНЗ на отрезке $[a, b]$ решений рассматриваемого уравнения называется фундаментальной системой решений(ФСР) данного уравнения.

Теорема Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - ФСР рассматриваемого уравнения. Тогда любое решение $z(x)$ данного уравнения представимо в виде $z(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, $C_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1, n}$

Пример Рассмотрим линейное однородное ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

Сделаем замену $z = \dfrac{dy}{dx}$ и решим данное уравнение методом разделения переменных

$$\frac{dz}{dx} + z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -dx \text{ или } \boxed{z \equiv 0} \Rightarrow \ln(z) = -x + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = e^{(-x+C)} = e^{-x} \underbrace{e^{C}}_{C_1 \neq 0} = C_1 e^{-x}, C_1 \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Объединяя оба решения, можно записать

$$z = C_2 e^{-x},\ C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_2 e^{-x} \Rightarrow dy = C_2 e^{-x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{-C_2}_{C_4} e^{-x} + C_3 = C_4 e^{-x} + C_3,\ C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

Итак, в данном примере ФСР составляют решения $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = 1$, а любое решение данного уравнения представляет собой их линейную комбинацию $y(x) = C_4 y_1(x) + C_3 y_2(x),\ C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

6) Метод вариации постоянной для решения неоднородного линейного ОДУ первого порядка. Приведите пример.

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x)$$

Теорема Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - ФСР соответствующего рассмотренному линейного однородного уравнения.

Тогда функция $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$ является решением рассматриваемого неоднородного уравнения при условии, что функции $c_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k(x) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Пример Рассмотрим линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1$$

Соответствующее ему однородное уравнение было решено в Вопросе 5), его общее решение $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^{-x} + C_2'(x) = 0 \\ C_1'(x)\, (e^{-x})' + C_2'(x)\, (1)' = 1. \end{cases}$$

Вычисляя производную $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(1)' = 0$ и складывая два уравнения системы, получаем

$$C_2'(x) = 1 \Rightarrow dC_2 = dx \Rightarrow C_2(x) = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Подставляя выражение $C_2' = 1$ в первое уравнение системы

$$C_1'(x) e^{-x} = -1 \Rightarrow dC_1 = -e^{x} dx \Rightarrow C_1(x) = -e^{x} + \overline{C},\ \overline{C} \in \mathbb{R}$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения

$$y(x) = (-e^{x} + \overline{C}) e^{-x} + x + C = \overline{C} e^{-x} + x + \underbrace{C - 1}_{\overline{\overline{C}}}$$

Итак, общее решение данного ОДУ $y(x) = x + \overline{C} e^{-x} + \overline{\overline{C}},\ \overline{C}, \overline{\overline{C}} \in \mathbb{R}$

7) Метод вариации постоянных для решения неоднородной линейной нормальной системы ОДУ первого порядка. Приведите пример.

Вспомогательные сведения:
Определение Линейной нормальной системой ОДУ называют систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\overrightarrow{y}'(x) = A(x)\overrightarrow{y}(x) + \overrightarrow{F}(x)$$

Здесь $A(x)$ - матрица размера $(n \times n)$, $\overrightarrow{F}(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ - вектор-функция, компоненты которой заданы при $x \in [a, b]$, $\overrightarrow{y}(x) = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ - неизвестная вектор-функция. При $f_i(x) \equiv 0\ \forall i = \overline{1, n}$ данная система называется однородной.
Определение Совокупность из n ЛНЗ на отрезке $[a, b]$ решений линейной однородной системы называют ФСР однородной системы.
Определение Фундаментальной матрицей линейной однородной системы называют матрицу, составленную из столбцов ФСР данной системы.

Рассмотрим неоднородную и соответствующую ей однородную линейные системы ОДУ

$$\overrightarrow{y}'(x) = A(x)\overrightarrow{y}(x) + \overrightarrow{F}(x) \tag{1}$$

$$\overrightarrow{y}'(x) = A(x)\overrightarrow{y}(x) \tag{2}$$

Пусть $Y(x) = \{\overrightarrow{y_1}(x), \dots, \overrightarrow{y_n}(x)\}$ - фундаментальная матрица (2).

Так как $\forall \overrightarrow{y_i}(x) : i = \overline{1, n} \longrightarrow (2)$, для фундаментальной матрицы можно записать

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{3}$$

Поскольку вектор-функции $\overrightarrow{y_1}(x), \dots, \overrightarrow{y_n}(x)$ образуют ФСР $\forall x \in [a, b]$, $\det Y(x) \neq 0 \Rightarrow \exists Y^{-1}(x)$.

Будем искать решение неоднородной системы уравнений в виде решения соответствующей однородной с учетом вариации постоянных. Общее решение однородной системы представимо в виде

$$\overrightarrow{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\overrightarrow{y_k}(x) = Y(x)\overrightarrow{C}(x) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и вычисляя производную сложной функции, приходим к уравнению

$$Y'(x)\overrightarrow{C}(x) + Y(x)\overrightarrow{C}'(x) = A(x)Y(x)\overrightarrow{C}(x) + \overrightarrow{F}(x) \tag{5}$$

Из (3) умножением на $Y^{-1}(x)$ справа получаем $A(x) = Y'(x)Y^{-1}(x)$. Подставляя данное выражение в (5), имеем

$$Y'(x)\overrightarrow{C}(x)+Y(x)\overrightarrow{C}'(x)=Y'(x)\underbrace{Y^{-1}(x)Y(x)}_{E}\overrightarrow{C}(x)+\overrightarrow{F}(x)$$

$$Y(x)\overrightarrow{C}'(x)=\overrightarrow{F}(x) \tag{6}$$

Домножая (6) на $Y^{-1}(x)$ слева и интегрируя в пределах от x_0 до $x(x, x_0 \in [a,b])$, получаем выражение для $\overrightarrow{C}(x)$

$$\overrightarrow{C}(x)=\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi+\overrightarrow{C_0} \tag{7}$$

В данном выражении $\overrightarrow{C_0}=\{C_1,\ldots,C_n\}:C_i\in\mathbb{R}\ \forall i=\overline{1,n}$ - произвольный вектор. Подставляя (7) в (4), окончательно имеем

$$\overrightarrow{y}(x)=Y(x)\overrightarrow{C_0}+Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi \tag{8}$$

Выражение (8) и является общим решением задачи (1).

Пример

$$\begin{cases} y_1'=y_1-2y_2+e^{-x} \\ y_2'=-y_2+e^{-x} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{y}'=A\overrightarrow{y}+\overrightarrow{F}$$

Здесь $\overrightarrow{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$

Найдем ФСР однородной системы

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 1$$

$$\lambda_1=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем общее рещение неоднородной системы, используя метод вариации постоянных

$$Y(x)=\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$ - фундаментальная матрица системы,

$$\overrightarrow{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} \text{ - неизвестная вектор-функция}$$

$$Y(x)\overrightarrow{C}'(x) = \overrightarrow{F}(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^x C_1'(x) + e^{-x} C_2'(x) \\ 0 + e^{-x} C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_2'(x) = 1 \\ C_1'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2(x) = x + C_2 \\ C_1(x) = -e^{-x} + C_1 \end{cases} \text{, где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Следовательно, общее решение системы

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-x} + C_1 \\ x + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + C_1 e^x + x e^{-x} + C_2 e^{-x} \\ x e^{-x} + C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{y} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x - 1 \\ xe^{-x} \end{pmatrix}$$

8) Покажите равносильность задачи Коши для ОДУ n-го порядка задаче Коши для нормальной системы 1-го порядка. Приведите пример.

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ n-го порядка

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ y'(x_0) = y_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0. \end{cases}$$

Сделаем замену: $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y_1'(x)$, $\ldots$, $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$. Начальные условия перейдут соответственно в $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, $\ldots$, $y_n(x_0) = y_n^0$.

Следовательно, приходим к задаче Коши для нормальной системы ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 \\ y_2'(x) = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right) \\ y_i(x_0) = y_i^0,\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Пример Рассмотрим задачу Коши для ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} y'' = y \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = p_0 \end{cases}$$

С помощью замены переменных $p = y'$ приходим к задаче Коши для нормальной системы ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = y \\ y(x_0) = y_0,\ p(x_0) = p_0 \end{cases}$$

9) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}) \\ \overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y_0}. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения $\overrightarrow{y}(x) = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$, $\overrightarrow{y_0} = \{y_1^0, \dots, y_n^0\}$, $\overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}(x)) = \{f_1(x, \overrightarrow{y}(x)), \dots, f_n(x, \overrightarrow{y}(x))\}$.

$\forall i = \overline{1, n} \longrightarrow$ функция $f_i(x, \overrightarrow{y}(x))$ определена в замкнутой области $\mathbb{D}^{n+1} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_1^0 - y_1(a), y_1^0 + y_1(a)] \times \ldots \times [y_n^0 - y_n(a), y_n^0 + y_n(a)]$, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть:

1. $\overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}(x)) \in C(\mathbb{D}^{n+1})$, то есть $\forall i = \overline{1, n} \longrightarrow f_i(x, \overrightarrow{y}(x)) \in C(\mathbb{D}^{n+1})$
2. $\forall i, j : i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}\ \exists\ \frac{\partial f_i(x, \overrightarrow{y})}{\partial y_j} : \frac{\partial f_i(x, \overrightarrow{y})}{\partial y_j} \in C(\mathbb{D}^{n+1})$

Тогда $\exists!$ решение рассматриваемой задачи $\overrightarrow{y}(x)$:

$\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \cap D(y_1(x)) \cap \ldots \cap D(y_n(x)) \longrightarrow (x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \mathbb{D}^{n+1}$

.

10)Что такое фундаментальная матрица? Как с ее помощью построить общее решение однородной системы? Приведите пример.

Определение Фундаментальной матрицей линейной однородной системы называют матрицу, составленную из столбцов ФСР данной системы.

Рассмотрим выражение (8), полученное в Вопросе 7

$$\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\overrightarrow{C_0} + Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi$$

Оно было получено при рассмотрении метода вариации постоянных для решения неоднородной линейной нормальной системы. Так как в вопросе требуется построить общее решение однородной системы, для компонент неоднородности системы $\overrightarrow{F}(\chi) = \{f_1(\chi), \ldots, f_n(\chi)\}$ выполняются тождества $\forall i = \overline{1, n}\ \forall \chi \in [x_0, x] \longrightarrow f_i(\chi) \equiv 0$. Следовательно, общее решение однородной системы

$$\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\overrightarrow{C_0}$$

Замечание Проделанные в данном пункте рассуждения были лишними. Из теоремы о представимости любого решения однородной нормальной системы в виде линейной комбинации столбцов ФСР и определения фундаментальной матрицы сразу же следует полученное выражение. С другой стороны, выкладки (1)-(8) Вопроса 7 при условии однородности системы и являются доказательством теоремы об общем решении однородной системы.

Пример

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

$$\text{Здесь } \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Найдем ФСР данной системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ - фундаментальная матрица системы,}$$

Общее решение данной системы $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

11) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Вспомогательные сведения:
Определение Уравнением, разрешенным относительно старшей производной, называется ОДУ вида

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Определение Функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется аналитической в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в окрестности данной точки f представима в виде степенного ряда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 \geq 0} \ldots \sum_{k_n \geq 0} f_{k_1 \ldots k_n} \left(x_1 - x_1^0\right)^{k_1} \ldots \left(x_n - x_n^0\right)^{k_n}$$

$$f_{k_1 \ldots k_n} \in \mathbb{R} \ \forall k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть функция $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ является аналитической в окрестности точки $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$.

Тогда в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ $\exists!$ решение рассматриваемой задачи $y(x)$.

12) Сформулируйте теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения. Приведите пример.

Вспомогательные сведения:
Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, общий вид которого

$$Ly = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0,\ \forall i = \overline{1,n} \longrightarrow a_i \in \mathbb{R}$$

Метод Эйлера для решения данного уравнения заключается в построении решения в виде $y(x) = Ce^{\lambda x}$, где будем считать $C \neq 0$(ищем нетривиальное решение)

$$L[Ce^{\lambda x}] = C\lambda^n e^{\lambda x} + Ca_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + Ca_n e^{\lambda x} = Ce^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)$$

$$L[Ce^{\lambda x}] = 0,\ C \neq 0,\ e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \forall\lambda \longrightarrow \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Определение Многочлен $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ называется характеристическим многочленом для рассматриваемого уравнения, а уравнение $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ характеристическим уравнением соответственно.

Теорема Пусть корни λ_k характеристического многочлена $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ простые. Тогда функции $y_k = e^{\lambda_k x},\ k = \overline{1,n}$ образуют ФСР однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример Рассмотрим однородное линейное уравнение 2-го порядка

$$y'' - y = 0$$

Найдем корни характеристического многочлена данного уравнения

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Следовательно, ФСР данного уравнения образуют функции

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x}$$

13) Сформулируйте определение матрицы Коши однородной системы линейных ОДУ. Приведите пример.

Определение Матрица $K(x,\chi) = Y(x)Y^{-1}(\chi)$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица, называется матрицей Коши, "импульсной"матрицей или матрицантом. Как следует из выражения (3) Вопроса 7, данная матрица однозначно определяется как решение задачи Коши

$$\frac{d}{dx}K(x,x_0) = A(x)K(x,x_0),\ K(x_0,x_0) = E$$

Пример

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

$$\text{Здесь } \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Найдем ФСР данной системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ - фундаментальная матрица системы,}$$

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{\underbrace{\det Y(x)}_{1}} \begin{pmatrix} e^{-x} & -e^{-x} \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

Матрица Коши данной системы

$$K(x,\chi) = Y(x)Y^{-1}(\chi) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\chi} & -e^{-\chi} \\ 0 & e^{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-\chi} & e^{-(x-\chi)} - e^{x-\chi} \\ 0 & e^{-(x-\chi)} \end{pmatrix}$$

14) Алгоритм решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с помощью функции Коши. Приведите пример.

Согласно теореме о структуре общего решения неоднородного уравнения общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму частного решения данного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \overline{y}(x)$$

в котором частное решение может быть найдено с помощью функции Коши

$$\overline{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,s) f(s) ds$$

Здесь $K(x,s)$ - функция Коши - решение специальной задачи Коши, зависящее от точки, в которой ставится начальное условие, как от параметра

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(s) = 0,\, y'(s) = 0, \, , \, \ldots, \, y^{(n-1)}(s) = 1 \end{cases}$$

Пример

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3(x)}$$

15) Определение и свойства фундаментальной матрицы однородной линейной системы ОДУ. Приведите пример.

Определение Фундаментальной матрицей линейной однородной системы называют матрицу, составленную из столбцов ФСР данной системы.

Пусть $Y(x)$ - фундаментальная матрица однородной системы ОДУ $\overrightarrow{y}' = A(x)\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} : \; \forall i = \overline{1,n} \longrightarrow C_i \in \mathbb{R}$ - произвольный вектор.

Свойства:

1. Зная $Y(x)$, можно однозначно восстановить систему уравнений, поскольку $A(x) = Y^{-1}(x)Y'(x)$
2. $\det Y(x) \neq 0$
3. $\forall$ решение $\overrightarrow{y}(x)$ однородной системы - линейная комбинация столбцов $Y(x)$: $\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\overrightarrow{C}$

Пример

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

$$\text{Здесь } \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Найдем ФСР данной системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ - фундаментальная матрица системы}$$

16) Определение и свойства определителя Вронского, построенного из решений однородного ОДУ n-го порядка. Приведите пример.

Определение Определителем Вронского ситемы $n-1$ раз дифференцируемых функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Свойства:

1. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ЛЗ на отрезке $[a, b]$, $W(x) \equiv 0 \ \forall x \in [a, b]$
2. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ЛНЗ на отрезке $[a, b]$, $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

Пример Рассмотрим однородное линейное уравнение 2-го порядка

$$y'' - y = 0$$

Найдем корни характеристического многочлена данного уравнения

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Следовательно, ФСР данного уравнения образуют функции

$$y_1(x) = e^x, \ y_2(x) = e^{-x}$$

Построим из них определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^{-x} e^x = -2$$

$W(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, поскольку функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ЛНЗ.

17) Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.

См. Вопрос 9).

18) Алгоритм решения задачи Коши для линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с нулевыми начальными условиями с помощью функции Коши. Приведите пример.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{n-1} + \ldots + a_n(x) y = f(x)$$

Вспомогательные сведения:
Определение Функция $K(x, \xi)$, являющаяся решением специальной задачи Коши

$$\begin{cases} L_x K(x,\xi) \equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} K(x,\xi) + a_1(x) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x,\xi) + \ldots + a_n(x) K(x,\xi) = 0 \\ K(\xi,\xi) = 0, \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)|_{x=\xi} = 0, \ldots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x,\xi)|_{x=\xi} = 1 \end{cases}$$

при $a < \xi < x < b,\; a, b \in \mathbb{R}$, называется функцией Коши для рассматриваемого уравнения.

Теорема Функция $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$, где $K(x,\xi)$ - функция Коши рассматриваемого уравнения, является решением следующей задачи Коши при $x, x_0 \in [a, b]$

$$\begin{cases} Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x) \\ y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Пример

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3(x)}$$

19) Алгоритм построениея решения задачи Коши для линейной однородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши. Приведите пример.

Рассмотрим задачу Коши для линейной однородной системы ОДУ

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = A(x)\overrightarrow{y}(x) \\ \overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y}_0. \end{cases}$$

Общее решение однородной системы ОДУ записывается с помощью фундаментальной матрицы $Y(x)$ как

$$\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\overrightarrow{C},\ \overrightarrow{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}:\ \forall i = \overline{1,n} \longrightarrow C_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C} = Y^{-1}(x)\overrightarrow{y}(x) = Y^{-1}(x_0)\overrightarrow{y}(x_0) = Y^{-1}(x_0)\overrightarrow{y}_0$$

$$\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\underbrace{\overrightarrow{C}}_{Y^{-1}(x_0)\overrightarrow{y}_0} = \underbrace{Y(x)Y^{-1}(x_0)}_{K(x,x_0)}\overrightarrow{y}_0 = K(x,x_0)\overrightarrow{y}_0$$

Здесь $K(x,x_0) = Y(x)Y^{-1}(x_0)$ - матрица Коши.

Пример

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_2 \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ФСР данной системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ - фундаментальная матрица системы,}$$

$$Y^{-1}(x) = \underbrace{\frac{1}{\det Y(x)}}_{1} \begin{pmatrix} e^{-x} & -e^{-x} \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}$$

Матрица Коши данной системы

$$K(x,0) = Y(x)Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} - e^{x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

Решение данной задачи Коши

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K(x,0)\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} - e^{x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

20) Алгоритм построения решения задачи Коши для линейной неоднородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши. Приведите пример.

Рассмотрим задачу Коши для линейной неоднородной системы ОДУ

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = A(x)\overrightarrow{y}(x) + \overrightarrow{F}(x) \\ \overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y}_0. \end{cases}$$

Рассмотрим выражение (8), полученное в Вопросе 7, - общее решение неоднородной линейной системы ОДУ

$$\overrightarrow{y}(x) = Y(x)\overrightarrow{C_0} + Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi$$

Так как $\overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y_0}$, при $x = x_0$ получаем

$$\overrightarrow{y_0} = Y(x_0)\overrightarrow{C_0} + Y(x_0)\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x_0} Y^{-1}(\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi}_{=0} \Rightarrow \overrightarrow{C_0} = Y^{-1}(x_0)\overrightarrow{y_0}$$

Подставляя в общее решение, имеем

$$\overrightarrow{y}(x) = \underbrace{Y(x)Y^{-1}(x_0)}_{K(x,x_0)}\overrightarrow{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{Y(x)Y^{-1}(\chi)}_{K(x,\chi)}\overrightarrow{F}(\chi)d\chi$$

$$\overrightarrow{y}(x) = K(x,x_0)\overrightarrow{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi$$

Пример

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + 1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_1(0) = 1,\, y_2(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{F}(x) \\ \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

Здесь $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найдем ФСР однородной системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & -2 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР однородной системы составляют столбцы

$$e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ - фундаментальная матрица системы,}$$

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{\underbrace{\det Y(x)}_{1}}\begin{pmatrix} e^{-x} & -e^{-x} \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

Матрица Коши данной системы

$$K(x,\chi) = Y(x)Y^{-1}(\chi) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\chi} & -e^{-\chi} \\ 0 & e^{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-\chi} & e^{-(x-\chi)} - e^{x-\chi} \\ 0 & e^{-(x-\chi)} \end{pmatrix}$$

Решение данной задачи Коши

$$\overrightarrow{y} = K(x,0)\overrightarrow{y_0} + \int\limits_0^x K(x,\chi)\overrightarrow{F}(\chi)d\chi$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} - e^x \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^x \begin{pmatrix} e^{x-\chi} & e^{-(x-\chi)} - e^{x-\chi} \\ 0 & e^{-(x-\chi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}d\chi =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^x \begin{pmatrix} e^{-\chi}e^x \\ 0 \end{pmatrix}d\chi = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{x-\chi} \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_0^x = \begin{pmatrix} 2e^x - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

21) Какому интегральному уравнению равносильна задача Коши для ОДУ первого порядка? Приведите пример.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ определена в замкнутой области $\mathbb{D} = [x_0 - a, x_0 + a]\times$ $\times [y_0 - b, y_0 + b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в области $\mathbb{D}$, рассматриваемая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

Пример Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение $y(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} xdx = 1 + \dfrac{x^2}{2}$

22) Что такое характеристическое уравнение линейного однородного ОДУ n-го порядка? Приведите пример.

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, общий вид которого

$$Ly = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0,\ \forall i = \overline{1, n} \longrightarrow a_i \in \mathbb{R}$$

Определение Уравнение $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ называется характеристическим уравнением для рассматриваемого ОДУ.

Пример Рассмотрим однородное линейное уравнение 2-го порядка

$$y'' - y = 0$$

Характеристическое уравнение для данного ОДУ

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

23) Запишите математические постановки задач Коши для нормальной системы ОДУ 1-го порядка и линейного ОДУ n-го порядка.

1. Рассмотрим нормальную систему ОДУ

$$\overrightarrow{y}'(x) = \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}(x)),\ \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}(x)) = \{f_1(x, \overrightarrow{y}(x)), \ldots, f_n(x, \overrightarrow{y}(x))\}$$

   $\forall i = \overline{1, n} \longrightarrow f_i(x, \overrightarrow{y}(x))$ определена в замкнутой области $\mathbb{D}^{n+1} =$ $= [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_1^0 - y_1(a), y_1^0 + y_1(a)] \times \ldots \times [y_n^0 - y_n(a), y_n^0 + y_n(a)]$, $a \in \mathbb{R}$.

   Задача Коши состоит в отыскании решения $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}(x)$ данной системы, удовлетворяющего начальным условиям $\overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y_0}$.

2. Пусть

$$X \subseteq \mathbb{R},\ \forall i = \overline{1, n} \longrightarrow a_i(x) \in C(X),\ f(x) \in C(X)$$

   Рассмотрим линейное ОДУ n-го порядка

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

   Задача Коши состоит в отыскании решения $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},\ x_0 \in X$$

24) Что такое фундаментальная матрица однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.

См. Вопрос 15).

25) Что такое матрица Коши однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.

См. Вопрос 13).

26) Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

Вспомогательные сведения:

Теорема Если функция $f(M) = f(y_1, \ldots, y_m)$ $n+1$ раз дифференцируема $\forall M(y_1, \ldots, y_m) : \rho(M, M_0) < \varepsilon$, то $\forall M(y_1, \ldots, y_m) : \rho(M, M_0) < \varepsilon \longrightarrow$

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1^0, \ldots, y_n^0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{M_0} (y_1 - y_1^0) + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_m}\right|_{M_0} (y_m - y_m^0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\right|_{M_0} (y_1 - y_1^0)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2}\right|_{M_0} (y_m - y_m^0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n f}{\partial y_1^n}\right|_{M_0} (y_1 - y_1^0)^n$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n f}{\partial y_m^n}\right|_{M_0} (y_m - y_m^0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \left. d^{n+1} f \right|_{M_0}}_{R_{n+1}}.$$

Данное выражение называется формулой Тейлора.

Здесь $\rho(M, M_0) \equiv \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + \ldots + (y_m - y_m^0)^2}$ - расстояние между точками $M(y_1, \ldots, y_m)$ и $M_0(y_1^0, \ldots, y_m^0)$, R_{n+1} - остаточный член.

Определение Всякое решение $\overrightarrow{y_i}(x)$ нормальной системы

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n}$$

можно интерпретировать геометрически как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, которую принято называть интегральной кривой.

В теории устойчивости исследуют расходимость интегральных кривых, отвечающих различным начальным условиям одной и той же задачи Коши. В функции, являющейся решением задачи Коши, указывают зависимость от начальных условий как от параметров: $\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})$. Можно показать, что с помощью замены переменных в рассматриваемой задаче исследование решения на устойчивость сводится к выяснению устойчивости тривиального решения $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

Исследование на устойчивость по первому приближению позволяет выяснить устойчивость тривиального решения автономной нормальной системы
$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n}$$
Само название метода связано с заменой правых частей уравнений нормальной системы линейным приближением формулы Тейлора в окрестности точки $M_0(0, \ldots, 0)$

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) \approx \underbrace{f_i(0, \ldots, 0)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{M_0} (y_1 - 0) + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_m}\right|_{M_0} (y_n - 0) =$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{M_0} y_1 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_m}\right|_{M_0} y_n.$$
Таким образом приходим к однородной системе линейных уравнений.
Рассмотрим однородную систему линейных ОДУ

$$\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x)$$
Здесь A - постоянная матрица размера $(n \times n)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - ее ХЧ.
Теорема Тривиальное решение однородной системы линейных уравнений устойчиво и притом асимптотически, если $\forall i = \overline{1, n} \longrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0$, и неустойчиво, если $\exists i = \overline{1, n} : \operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

Рассмотрим задачу Коши для автономной нормальной системы ОДУ с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}(x)) \\ \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{0}. \end{cases}$$

Теорема Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(0, \ldots, 0)$ функции $f_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда тривиальное решение рассматриваемой задачи Коши устойчиво и притом асимптотически при условии, что

$$\forall\lambda : \det(A - \lambda E) = 0 \longrightarrow \operatorname{Re}\lambda < 0, \text{ где } A = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right|_{M_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right|_{M_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial y_1}\right|_{M_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial y_n}\right|_{M_0} \end{pmatrix}$$

Тривиальное решение рассматриваемой задачи Коши неустойчиво, если

$$\exists\lambda : \det(A - \lambda E) = 0, \operatorname{Re}\lambda > 0$$

27) Дайте определение устойчивого решения. Приведите пример решения устойчивого, но не асимптотически.

Вспомогательные сведения: Норма вектора $\overrightarrow{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$: $\|\|\overrightarrow{y}\|\| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = f(x, \overrightarrow{y}(x)) \\ \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{y_0}. \end{cases}$$

Определение Решение $\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})$ рассматриваемой задачи называется устойчивым, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\Delta\overrightarrow{y_0} : ||\Delta\overrightarrow{y_0}|| < \delta,\ \forall x > 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow ||\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0} + \Delta\overrightarrow{y_0}) - \overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})|| < \varepsilon$$

Определение Решение $\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})$ рассматриваемой задачи называется асимптотически устойчивым, если оно является устойчивым и

$$\exists\delta_0 > 0 : \forall\Delta\overrightarrow{y_0} : ||\Delta\overrightarrow{y_0}|| < \delta_0 \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0} + \Delta\overrightarrow{y_0}) - \overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})) = \overrightarrow{0}$$

Пример Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ее решение $y(x) = y_0 + \dfrac{x^2}{2}$. Исследуем устойчивость данного решения. Здесь

$$y(x, y_0) = y_0 + \frac{x^2}{2};\ y(x, y_0 + \Delta y_0) = y_0 + \Delta y_0 + \frac{x^2}{2}$$

Пусть $|\Delta y_0| < \delta$, тогда $|y(x, y_0 + \Delta y_0) - y(x, y_0)| = |\Delta y_0| < \delta$, то есть можно положить $\varepsilon = \delta$(какое бы ε мы не выбрали всегда найдется $\delta = \varepsilon$). Следовательно, решение устойчиво.

При этом

$$\lim_{x\to+\infty} |y(x, y_0 + \Delta y_0) - y(x, y_0)| = |\Delta y_0| \neq 0$$

Следовательно, решение устойчиво, но не асимптотически.

28) Дайте определение асимптотически устойчивого решения. Приведите пример.

См. Вопрос 27).

Пример Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ее решение $y(x) = y_0 e^{-x}$. Исследуем устойчивость данного решения.

Здесь

$$y(x, y_0) = y_0 e^{-x};\ y(x, y_0 + \Delta y_0) = y_0 e^{-x} + \Delta y_0 e^{-x}$$

Пусть $|\Delta y_0| < \delta$, тогда очевидно, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x > 0 : |y(x, y_0 + \Delta y_0) - y(x, y_0)| = |\Delta y_0 e^{-x}| < \varepsilon$$

Следовательно, решение устойчиво.

При этом

$$\lim_{x\to+\infty} |y(x, y_0 + \Delta y_0) - y(x, y_0)| = \lim_{x\to+\infty} \left|\Delta y_0 e^{-x}\right| = 0$$

Следовательно, решение асимптотически устойчиво.

29) Дайте определение неустойчивого решения. Приведите пример.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}'(x) = f(x, \overrightarrow{y}(x)) \\ \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{y_0}. \end{cases}$$

Определение Решение $\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})$ рассматриваемой задачи называется неустойчивым, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 :\ \exists \Delta\overrightarrow{y_0} : ||\Delta\overrightarrow{y_0}|| < \delta,\ \exists x > 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow ||\overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0} + \Delta\overrightarrow{y_0}) - \overrightarrow{y}(x, \overrightarrow{y_0})|| > \varepsilon$$

Пример Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ее решение $y(x) = y_0 e^x$. Исследуем устойчивость данного решения. Здесь

$$y(x, y_0) = y_0 e^x;\ y(x, y_0 + \Delta y_0) = y_0 e^x + \Delta y_0 e^x$$

Пусть $|\Delta y_0| < \delta$, тогда очевидно, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x > 0 : |y(x, y_0 + \Delta y_0) - y(x, y_0)| = |\Delta y_0 e^x| > \varepsilon$$

Следовательно, решение неустойчиво.

30) Сформулируйте критерий устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ly = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0,\ \forall i = \overline{1, n} \longrightarrow a_i \in \mathbb{R}$$

Соответствующий ему характеристический многочлен

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

Теорма Пусть $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \longrightarrow \mathrm{Re}\lambda < 0$

Тогда тривиальное решение рассматриваемого уравнения $y(x) \equiv 0$ устойчиво и притом асимптотически.

Пример

1. неустойчивое решение

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

2. устойчивое решение

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

31) Сформулируйте теорему о достаточных условиях устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородную систему линейных ОДУ

$$\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x)$$

Здесь A - постоянная матрица размера $(n \times n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - ее ХЧ.

Теорема Тривиальное решение однородной системы линейных уравнений устойчиво и притом асимптотически, если $\forall i = \overline{1,n} \longrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0$.

32) Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым узлом? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.

Вспомогательные сведения:
Рассмотрим автономную нормальную систему ОДУ

$$\overrightarrow{y}'(x) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}(x))$$

Пусть $\exists \overrightarrow{y_0} \colon \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y_0}) = \overrightarrow{0}$, при этом $\overrightarrow{y_0}' = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{y_0}$ является решением рассматриваемой системы. Такое решение называется положением равновесия или точкой покоя данной системы.

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ - точка покоя данной системы. Пусть

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \det(A - \lambda_i E) = 0, \lambda_i \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{здесь } i = 1,2,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение рассматриваемой системы

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x},\, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda_2}\ln(\frac{y_2}{C_2}) \Rightarrow$$

$$y_1 = C_1(\frac{y_2}{C_2})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \underbrace{C_1 C_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}_{C} y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

1. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = 0;\ \lim_{x\to+\infty} y_2 = \lim_{x\to+\infty} C_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

Точка покоя $(0,0)$ называется устойчивым узлом - асимптотически устойчива.

2. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = \infty; \ \lim_{x\to+\infty} y_2 = \lim_{x\to+\infty} C_2 e^{\lambda_2 x} = \infty$$

Точка покоя $(0,0)$ называется неустойчивым узлом - неустойчива.

Пример

1. Устойчивый узел. Пусть $A = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -9, \lambda_2 = -1$$

2. Неустойчивый узел. Пусть $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$$

33) Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым фокусом? Неустойчивым фокусом? Приведите примеры.

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ - точка покоя данной системы. Пусть

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda_i E) = 0, \lambda_1 = \overline{\lambda}_2$$
$$\text{здесь } i = 1, 2, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\{0\}$ и общее решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x), \, y_2 = C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \Rightarrow \frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = e^{2\alpha x}$$

1. Пусть $\alpha < 0$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) = 0; \ \lim_{x\to+\infty} y_2 = \lim_{x\to+\infty} C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) = 0$$

Точка покоя $(0,0)$ называется устойчивым фокусом - асимптотически устойчива.

2. Пусть $\alpha > 0$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \infty; \ \lim_{x\to+\infty} y_2 = \lim_{x\to+\infty} C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) = \infty$$

Точка покоя $(0,0)$ называется неустойчивым фокусом - неустойчива.

Пример

1. Устойчивый фокус. Пусть $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

2. Неустойчивый фокус. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

34) Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется седлом? Что можно сказать про устойчивость седла? Приведите пример.

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ - точка покоя данной системы. Пусть

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \det(A - \lambda_i E) = 0, \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$\text{здесь } i = 1,2, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение рассматриваемой системы

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda_2}\ln(\frac{y_2}{C_2}) \Rightarrow$$

$$y_1 = C_1(\frac{y_2}{C_2})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \underbrace{C_1 C_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}_{C} y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

При этом

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = 0; \ \lim_{x\to+\infty} y_2 = \lim_{x\to+\infty} C_2 e^{\lambda_2 x} = \infty$$

Точка покоя $(0,0)$ называется седлом - неустойчива.

Пример Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

35) Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется центром? Что можно сказать про устойчивость центра? Приведите пример.

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ - точка покоя данной системы. Пусть

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda_i E) = 0, \mathrm{Re}\lambda_i = 0, \lambda_1 = \overline{\lambda}_2$$
$$\text{здесь } i = 1,2,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$, где $\beta \in \mathbb{R}/\{0\}$ и общее решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$y_1 = C_1 \cos(\beta x),\ y_2 = C_2 \sin(\beta x) \Rightarrow \frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = 1$$

При этом

$$\lim_{x \to +\infty} y_1 = \lim_{x \to +\infty} C_1 \cos(\beta x) = \nexists;\ \lim_{x \to +\infty} y_2 = \lim_{x \to +\infty} C_2 \sin(\beta x) = \nexists$$

Точка покоя $(0,0)$ называется центром - устойчива, но не асимптотически.

Пример Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

36) Сформулируйте теорему единственности решения краевой задачи и

теорему о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной краевой задачи с краевыми условиями первого рода.

Вспомогательные сведения:
В качестве примера краевой задачи рассмотрим задачу Дирихле - линейное ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f_1(x) \quad 0 < x < l$$

С дополнительными условиями первого рода:

$$u(0) = u_0,\ u(l) = u_l$$

Здесь $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f_1(x) \in C[0, l]$. Преобразуем исходное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f_1(x)\Bigg| \times p(x) = e^{\int a_1(x)dx}$$

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \underbrace{p(x)a_1(x)}_{p'(x)}\frac{du}{dx} + \underbrace{p(x)a_2(x)}_{-q(x)}u = \underbrace{p(x)f_1(x)}_{f_2(x)}$$

Поскольку $\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right] = p(x)\dfrac{d^2u}{dx^2} + p'(x)\dfrac{du}{dx}$, введем обозначение

$$L[u] \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u = f_2(x)$$

Используя замену переменных

$$y(x) = u(x) - v(x), \text{ где } v(x) : v(x) \in C^2[0, l],\ v(0) = u_0,\ v(l) = u_l,$$

Можно свести рассматриваемую задачу к задаче с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} L[y] = L[u - v] = L[u] - L[v] = \underbrace{f_2(x) - L[v]}_{f(x) \in C[0,l]} \\ y(0) = 0,\ y(l) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} L[y] = f(x) \\ y(0) = 0,\ y(l) = 0. \end{cases}$$

При $f(x) \equiv 0\, \forall x \in [0, l]$ рассматриваемая краевая задача называется однородной.

1. **Теорема** Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая ей неоднородная задача имеет не более одного решения.

2. **Теорема** Пусть в операторе $L[y]$ однородной краевой задачи с граничными условиями первого рода $q(x) \geq 0$, тогда решение данной задачи тривиально.

37) Сформулируйте теорему Нагумо о существовании решения нелинейной краевой задачи.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(u,x),\ x \in \mathbb{D} \equiv (0,1) \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

При нелинейности функции $f(u,x)$ по переменной u данная задача называется нелинейной.

Вспомогательные сведения:
Определение Функции $\alpha(x)$, $\beta(x) \in C^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ называются соответственно нижним и верхним решениями рассматриваемой задачи, если

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x),x) \geq 0 \geq \frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta(x),x \in \mathbb{D}$$
$$\alpha(0) \leq \beta(0),\ \alpha(1) \leq \beta(1)$$

Теорема Пусть $\exists\ \alpha(x)$, $\beta(x)$ - нижнее и верхнее решения рассматриваемой задачи, причем $\alpha(x) \leq \beta(x)\ \forall x \in \overline{\mathbb{D}}$, функция $f(u,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной u при $u \in [\alpha,\beta]$, $x \in \overline{\mathbb{D}}$. Тогда $\exists\, u(x) : u(x)$ - решение рассматриваемой задачи, $\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x), \forall x \in \overline{\mathbb{D}}$.

38) Сформулируйте теорему о представлении решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$\begin{cases} L[y] = f(x) \\ y(0) = 0,\ y(l) = 0. \end{cases}$$

Теорема Пусть соответствующая рассмотренной краевой задаче однородная задача имеет только тривиальное решение. Тогда $\exists!$ решение рассматриваемой задачи, которое может быть выражено через функцию Грина

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s)f(s)ds$$

39) Сформулируйте определение функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим краевую задачу для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{du}{dx} + a_2(x)u = f_1(x) \quad 0 < x < l \\ u(0) = u_0,\, u(l) = u_l. \end{cases}$$

Здесь $a_1(x),\ a_2(x),\ f_1(x) \in C[0,l]$.

Определение Функцией Грина рассматриваемой краевой задачи называется такая функция 2-х переменных $G(x,s)$, что

1. $G(x,s)$ определена и непрерывна при $(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$
2. $G(x,s)$ удовлетворяет однородному уравнению $L_x[G(x,s)] = 0$ при $0 < x, s < l$
3. $G(x,s)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям
4. При $x = s$ первая производная имеет разрыв I рода:

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=s-0}^{x=s+0} = \left.\frac{dG}{dx}\right|_{(s+0,s)} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{(s-0,s)} = \frac{1}{p(s)}$$

40) Алгоритм построения функции Грина и решения первой краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$\begin{cases} L[y] = f(x) \\ y(0) = 0,\, y(l) = 0. \end{cases}$$

Пусть

1. Соответствующая рассмотренной краевой задаче однородная задача имеет только тривиальное решение.

2. Известны 2 нетривиальных решения двух задач Коши

$$\begin{cases} L[y_1] = 0 \\ y_1(0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y_2] = 0 \\ y_2(l) = 0. \end{cases}$$

Тогда функцию Грина можно построить следующим образом

$$G(x,s) = \frac{1}{p(s)W(s)} \begin{cases} y_1(x)y_2(s) \text{ при } 0 \le x \le s \\ y_1(s)y_2(x) \text{ при } s \le x \le l. \end{cases}$$

Здесь $W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}$, $\dfrac{1}{p(s)} = \left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(s+0,s)} - \left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(s-0,s)}$

А решение рассматриваемой краевой задачи

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s)f(s)ds$$

41) Определение и алгоритм построения функции Грина первой краевой задачи.

См. Вопрос 39), 40).

42) Сформулируйте определение и перечислите свойства функции Грина первой краевой задачи.

См. Вопрос 39).

Свойства:

1. $\left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x+0,x)} - \left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x-0,x)} = \dfrac{1}{p(x)}$

2. $\left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x,x+0)} = \left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x-0,x)}$

3. $\left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x,x-0)} = \left.\dfrac{dG}{dx}\right|_{(x+0,x)}$

43) Запишите математические постановки известных Вам краевых задач.

1. Задача Дирихле

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'),\ a < x < b \\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \end{cases}$$

2. Задача Неймана

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'),\ a < x < b \\ y'(a) = y_a,\ y'(b) = y_b \end{cases}$$

3. Задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} L[y] + \lambda\rho(x)y(x) = 0,\ a < x < b \\ \alpha_1\, y'(a) + \beta_1\, y(a) = 0,\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \\ \alpha_2\, y'(b) + \beta_2\, y(b) = 0,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

44) Запишите линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка в общем виде, опишите алгоритм нахождения решения этого уравнения.

Вспомогательные сведения:
Общий вид уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0 \text{ или } F(\overrightarrow{x}, z, \operatorname{grad} z) = 0$$

Определение Линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка будем называть уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\overrightarrow{x})\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \text{ или } \left(\overrightarrow{X}(\overrightarrow{x}), 2\, z(\overrightarrow{x})\right) = 0$$

Определение Характеристической системой описанного уравнения называется система $n - 1$ уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1(\overrightarrow{x})} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(\overrightarrow{x})}$$

Определение Первым интегралом характеристической системы называется функция $\psi(x_1, \dots, x_n))$, принимающая постоянное значение, когда точка $(x_1, \dots, x_n)$ пробегает интегральную кривую характеристической системы.

Общий вид линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\overrightarrow{x})\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \text{ или } \left(\overrightarrow{X}(\overrightarrow{x}), \operatorname{grad} z(\overrightarrow{x})\right) = 0$$

Алгоритм нахождения решения этого уравнения

1. Записать характеристическую систему для данного уравнения
2. Найти $n-1$, где n - число переменных, от которых зависит искомая функция, независимых первых интегралов
3. Записать общее решение. Оно будет иметь вид $z = F(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1})$, где F - произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ - независимые первые интегралы характеристической системы рассматриваемого уравнения.

45) Что такое характеристическая система и характеристики линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?

Рассмотрим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\overrightarrow{x})\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \text{ или } \left(\overrightarrow{X}(\overrightarrow{x}), \operatorname{grad} z(\overrightarrow{x})\right) = 0$$

Определение Характеристической системой рассматриваемого уравнения называется система $n-1$ уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1(\overrightarrow{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(\overrightarrow{x})}$$

Определение Характеристиками линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка называются решения характеристической системы.

46) Что такое первый интеграл характеристической системы линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?

Определение Первым интегралом характеристической системы называется функция $\psi(x_1, \ldots, x_n))$, принимающая постоянное значение, когда точка $(x_1, \ldots, x_n)$ пробегает интегральную кривую характеристической системы.

47) Сформулируйте теорему о решении квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Вспомогательные сведения:
Определение Уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\overrightarrow{x}, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = X(\overrightarrow{x}, z) \text{ или } \left(\overrightarrow{X}(\overrightarrow{x}, z), \operatorname{grad} z(\overrightarrow{x})\right) = X(\overrightarrow{x}, z)$$

называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Постановка задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных.

В $(n+1)$-мерной области G переменных $x_1, \dots, x_n, z$ требуется найти функцию $z(x_1, \dots, x_n)$, обращающую следующее уравнение в тождество

$$X_1(x_1, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = X(x_1, \dots, x_n, z)$$

При дополнительном условии

$$z\big|_s = \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

Здесь s - гладкая поверхность в области изменения переменных, заданная уравнением $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, X_i, X, Φ - непрерывно дифференцируемые в области G функции.

Теорема

Пусть

1. Решение уравнения $z = z(x_1, \dots, x_n)$ в неявном виде определяется уравнением $U(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$.

2. Поверъность s такая, что проекция любой, принадлежащей области G, характеристики уравнения

$$X_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + X_n\frac{\partial U}{\partial x_n} + X\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

   на плоскость переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет с S одну и только одну точку пересечения. Кроме того, в точке пересечения проекция характеристики не является касательной к G.

Тогда $\exists!$ решение рассматриваемой задачи Коши.