студенты-
физики

Ответы к экзамену по ТФКП

Барон Яков

3 семестр
Кравцов А.В.

2013

I часть экзамена:

1) Ф-ция $f(z)$ наз. однолистной ф-цией в области G, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

2) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$;

3) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$; $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

4) $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$; $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$; $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$; $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

5) $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ $(a \in \mathbb{C}, a \neq 0)$.

6) Если для точки $z_0 \in G$ существует при $\Delta z \to 0$ предел (предельное значение) разностного отношения $\dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел наз. производной ф-ции $f(z)$ по комплексной переменной z в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т.е. $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$. Ф-ция $f(z)$ в этом случае наз. дифференцируемой в точке z_0.

Примеры: $f(z) = z$; $f(z) = e^z$; $f(z) = az + b$.

7) Для того, чтобы ф-ция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифф-ма в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необх. и дост., чтобы в точке (x_0, y_0) существовали частные производные ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x, y, связанные соотношениями: $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$ (усл. Коши-Римана).

8) Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – область, и $f(z)$ – однозначная ф-ция, заданная в G. Если $f'(z)$ существует в G всюду, причём $f'(z)$ непр. в G, то б. г., что ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в обл. G, либо что $f(z)$ аналитична в G.

9) Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – область, и $f(z)$ – однозначная ф-ция, заданная в G. Пусть z_0 – внутренняя точка G. Если в некоторой окр-ти z_0 вида $\omega_\delta(z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\}$ $(\delta > 0)$, целиком принадлежащей G, ф-ция $f(z)$ аналитична, то б. г., что $f(z)$ явл. аналитической в точке z_0 (аналитична в точке z_0). Примеры к 8) и 9): а) б)

10) $z = x + iy$, $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда условия Коши-Римана:
$u_x(x,y) = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$.

11) $z = re^{i\varphi}$, $\omega = f(z) = U(r,\varphi) + iV(r,\varphi)$. Тогда условия Коши-Римана:
$U_r = \frac{1}{r} V_\varphi$, $\frac{1}{r} U_\varphi = -V_r$.

12) $z=x+iy$, $\omega=f(z)=\rho(x,y)e^{i\psi(x,y)}$. Тогда условия Коши-Римана:

$\rho_x=\rho\psi_y$, $\rho_y=-\rho\psi_x$.

13) $z=re^{i\varphi}$, $\omega=f(z)=R(r,\varphi)e^{i\Phi(r,\varphi)}$. Тогда условия Коши-Римана:

$R_r=\frac{R}{r}\Phi_\varphi$, $\frac{1}{r}R_\varphi=-R\Phi_r$.

14) Непрерывное отображение $\omega=f(z)$ наз. конформным в точке z_0, если оно обладает в этой точке св-вами сохранения углов (угол м/у кривыми γ_1 и γ_2 в точке z_0 равен по абс. величине и направлению углу м/у их образами в точке $\omega_0=f(z_0)$) и постоянства растяжений (существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=k$).

15) Ф-ция $f(x,y)$, имеющая непр. частные производные второго порядка и удовлетворяющая ур-нию Лапласа $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ в некоторой области G, наз. гармонической в этой области.

16) Пусть ф-ция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ явл. аналитической в области G и, кроме того, ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непр. частные производные до второго порядка включительно. Каждая из этих ф-ций, очевидно, явл. гармонической в G. Пара гармонических ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанная условиями Коши-Римана, наз. сопряжёнными гармоническими ф-циями.

17) теорема Коши для односвязной области:

„Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая ф-ция $f(z)$. Тогда интеграл от этой ф-ции $f(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в обл. G, равен нулю."

18) т. Коши для ограниченной области:

„Если ф-ция $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в односвязной области G, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, то интеграл от ф-ции $f(z)$ по границе C области G равен нулю: $\int\limits_C f(\xi)d\xi=0$."

19) т. Коши для многосвязной области:

„Пусть $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в многосвязной области G, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$ и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда $\int\limits_C f(\xi)d\xi=0$, где C – полная граница области G, состоящая из контуров C_0, $C_1,\dots,C_n$, причём обход границы C происходит в положительном направлении."

20) Интегральная ф-ла Коши для односвязной области:

Пусть $f(z)$ явл. аналитической в односвязной области G, ограниченной контуром C. Возьмём произв. внутр. точку z_0 и построим замкнутый контур Г, целиком лежащий в G и содержащий точку z_0 внутри себя. Тогда: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$.

21) Пусть Г — любая кусочно-гладкая ориентированная кривая, не обязательно замкнутая, и $\varphi(z)$ — непр. ф-ция, определённая вдоль Г. $I(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz$ наз. интегралом типа Коши.

22) теорема о среднем:

„Пусть $f(z)$ — аналитическая ф-ция в односвязной области G и z_0 — некоторая внутренняя точка этой области. Опишем из этой точки как из центра окр-ть C_{R_0} радиуса R_0, целиком лежащую в области G. Тогда $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_0}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}} f(\xi)\, ds$."

23) теорема Лиувилля:

„Пусть на всей комплексной плоскости ф-ция $f(z)$ явл. аналитической, а её модуль равномерно ограничен. Тогда эта ф-ция $f(z)$ тождественно равна постоянной."

24) принцип максимума модуля аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в области G и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или максимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области."

25) принцип минимума модуля аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в области G, не равна нулю ни в одной точке этой области и непрерывна в замкн. области $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или минимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области."

26) теорема о почленном интегрировании функционального ряда:

„Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывных ф-ций $u_n(z)$ сх-ся равномерно в области G к ф-ции $f(z)$, то интеграл от этой ф-ции по любой кусочно гладкой кривой C, целиком лежащей в области G, можно вычислить путём почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, т.е. $\int_C f(\xi)\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C u_n(\xi)\, d\xi$."

27) 2ª т. Вейерштрасса о функциональных рядах:

„Пусть ф-ции $u_n(z)$ явл. аналитическими в области G, непрерывными в $\overline{G'}$ (любая замкнутая подобласть) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно и в $\overline{G}$."

28) т. Абеля о степенных рядах:

„Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сх-ся в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сх-ся и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$; причём в круге $|z-z_0| \leq \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1-z_0|$, ряд сх-ся равномерно."

29) ф-ла Коши-Адамара радиуса круга сх-ти степенного ряда:

$R = \frac{1}{l}$, где $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ (∀ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$).

30) т. Тейлора:

„Ф-ция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, причём этот ряд определён однозначно."

31) т. Мореры:

„Пусть ф-ция $f(z)$ является непр. в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, целиком принадлежащему G, равен нулю. Тогда $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G."

32) 1ª т. Вейерштрасса о функц. рядах:

„Пусть ф-ции $u_n(z)$ явл. аналитическими в обл. G, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G к ф-ции $f(z)$. Тогда: а) $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в обл. G;

б) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$;

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сх-ся равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G."

33) т. о единственности аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ции $f(z)$ и $\varphi(z)$ явл. аналитическими в обл. G. Если в G существует сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ посл-ть различных точек $\{z_n\}$, в которых значения ф-ций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в G."

34) Аналитическим продолжением ф-ции $f(z)$, определённой на мн-ве G, наз. аналитическая ф-ция, которая определена на более широком мн-ве D, содержащем G, и в области G совпадает с исходной ф-цией $f(z)$.

35) т. Лорана:

„Ф-ция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$."

36) Точка z_0 наз. изолированной особой точкой ф-ции $f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, а точка z_0 является особой точкой ф-ции $f(z)$.

P.S. Пусть ф-ция $f(z)$ задана в области G, ограниченной контуром Γ. Точка $z_0 \in \overline{G}$ наз. правильной точкой ф-ции $f(z)$, если $\exists$ сх-ся степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, который в общей части области G и своего круга сх-ти $|z-z_0| < \rho(z_0)$ сх-ся к ф-ции $f(z)$ $(\rho(z_0)>0)$. Точки $z \in \overline{G}$, не являющиеся правильными точками ф-ции $f(z)$, наз. её особыми точками.

37) Изолированная особая точка z_0 ф-ции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окр-ти z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, наз-ся устранимой особой точкой ф-ции $f(z)$.

Пример: $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$.

$z=0$ – устранимая особая точка.

38) Изолированная особая точка z_0 ф-ции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окр-ти z_0 содержит конечное число m членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, наз-ся полюсом порядка m ф-ции $f(z)$.

Пример: $f(z) = \frac{z-1}{z+i}$; $z=-i$ – полюс $1^{\text{го}}$ порядка.

39) Изолированная особая точка z_0 ф-ции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окр-ти z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, наз-ся существенно особой точкой ф-ции $f(z)$.

Пример: $f(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$; $z=0$ – существенно особая точка.

40) т. о конечной устранимой особой точке аналитической ф-ции:

„Если ф-ция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, ограничена ($|f(z)|<M$ при $0<|z-z_0|<R_1$), то точка z_0 есть устранимая особая точка ф-ции $f(z)$."

41) т. о конечном полюсе аналитической ф-ции:

„Если ф-ция $f(z)$, аналитическая в окр-ти своей изолированной особой точки z_0, неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления точки z к точке z_0, то точка z_0 является полюсом ф-ции $f(z)$."

42) т. Сохоцкого(-Вейерштрасса):

„Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в любой окр-ти существенно особой точки z_0 ф-ции $f(z)$ найдётся хотя бы одна точка z_1, в которой значение ф-ции $f(z)$ отличается от произвольного заданного комплексного числа B меньше чем на ε."

43) и 44) Пусть в некоторой области G комплексной плоскости задана однозначная ф-ция, для которой точка z_0 явл. изолированной особой. Вычет $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ определяется следующим образом:

43) если $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)dz$, где C — любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности $f(z)$, и такой, что область, ограниченная этим контуром, не содержит особых точек $f(z)$, отличных от z_0;

44) если $z_0 = \infty$, то $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)dz$, где C — любой замкнутый контур, также целиком лежащий в области аналитичности $f(z)$, и такой, что во всех (конечных) точках внешней по отношению к C области ф-ция $f(z)$ явл. аналитической.

45) ф-ла для вычисления вычета в конечном полюсе порядка $m \geq 1$ аналитической ф-ции:

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

46) осн. теорема теории вычетов:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической всюду в замкнутой области $\overline{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=\overline{1,N}$), лежащих внутри области G. Тогда:

$\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname{Res}[f(z), z_k]$, где Γ^+ представляет собой полную границу области G, проходимую в положительном направлении."

47) т. о вычетах ф-ции, аналитичной на всей комплексной пл-ти, за исключением конечного числа особых точек:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической на полной комплексной пл-ти, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=\overline{1,N}$), включая и $z=\infty$ ($z_N=\infty$). Тогда: $\sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_k]=0$."

48) лемма Жордана для верхней полуплоскости:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в верхней полупл-ти $\operatorname{Im} z>0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ ($0\le\arg z\le\pi$) стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a>0$: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi=0$, где C_R' - дуга полуокр-ти $|z|=R$ в верхней полупл-ти z."

49) лемма Жордана для нижней полуплоскости:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в нижней полупл-ти $\operatorname{Im} z\le 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ ($\pi\le\arg z\le 2\pi$) стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a<0$: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi=0$, где C_R' - дуга полуокр-ти $|z|=R$ в нижней полупл-ти z."

50) лемма Жордана для правой полуплоскости:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в правой полупл-ти $\operatorname{Re} z\ge 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ ($-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$) стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a=i\alpha$ ($\alpha>0$): $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi=0$, где C_R' - дуга полуокр-ти $|z|=R$ в правой полупл-ти z."

51) лемма Жордана для левой полуплоскости:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в левой полупл-ти $\operatorname{Re} z\le 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ ($\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{3\pi}{2}$) стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a=-i\alpha$ ($\alpha>0$): $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi=0$, где C_R' - дуга полуокр-ти $|z|=R$ в левой полупл-ти z."

52) т. о разности числа нулей и полюсов аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической всюду в замкнутой области $\overline{G}$, за исключением конечного числа лежащих внутри G изолированных особых точек z_k, которые все являются полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области G. Тогда разность м/у полным числом нулей и полным числом полюсов ф-ции $f(z)$ в области G определяется выражением: $N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi$." $N = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k$, $P = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k$ (под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (полюсов P) с учётом их кратности).

53) т. Руше:

„Пусть ф-ции $f(z)$ и $\varphi(z)$ явл. аналитическими в замкнутой области $\overline{G}$, причём на границе Γ области G имеет место нер-во: $|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$. Тогда полное число нулей в области G ф-ции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей ф-ции $f(z)$."

54) т. о существовании и аналитичности обратной ф-ции: (стр. 36, п. 4)

„Если $\omega = f(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G, причём $|f'(z)| \neq 0$ в окр-ти некоторой точки $z_0 \in G$, то в окр-ти точки $\omega_0 = f(z_0)$ области G значений ф-ции $f(z)$ определена обратная ф-ция $z = \varphi(\omega)$, являющаяся аналитической ф-цией комплексной переменной ω. При этом имеет место соотношение: $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}$."

55) Ф-ция $f(z)$ наз. однолистной ф-цией в области G, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

Пример: $f(z) = \omega = az + b$ $(a \neq 0, b \in \mathbb{C})$; $\omega = f(z) = \frac{1}{z}$.

56) т. о необх. и дост. условии однолистности в точке $z_0 \neq \infty$ аналитической ф-ции:

„Для того, чтобы ф-ция $f(z)$ была однозначной и однолистной аналитической ф-цией в области G, причём $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$, необходимо и достаточно, чтобы эта ф-ция производила конформное отображение области G на область E комплексной плоскости ω, представляющую собой область значений ф-ции $\omega = f(z)$ при $z \in G$."

57) т. Римана о существовании конформного отображения:

„Всякую односвязную область G комплексной пл-ти z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|\omega|<1$ плоскости ω."

58) т. единственности конформного отображения:

„Ф-ция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области G (граница которой состоит более чем из одной точки) на единичный круг $|\omega|<1$ так, что $f(z_0)=0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha_0$ (где $z_0 \in G$ и α_0 – заданное действительное число), определена единственным образом."

59) принцип соответствия границ при конформном отображении:

„Пусть в конечной области G, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая ф-ция $f(z)$, непр. в $\bar{G}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ комплексной пл-ти ω. Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то ф-ция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на внутреннюю область E, ограниченную контуром Γ."

60) Дробно-линейной ф-цией наз. функция комплексной переменной, имеющая вид: $\omega = f(z) = \dfrac{a+bz}{c+dz}$, где a, b, c, d – заданные комплексные постоянные, которые, очевидно, должны удовлетворять условию $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$.

61) Общий вид дробно-линейной ф-ции, переводящей конечные точки z_1, z_2 соответственно в точки $\omega_1=0$, $\omega_2=\infty$:

$$\omega(z) = \lambda \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

62) круговое св-во дробно-линейной ф-ции:

„Дробно-линейная ф-ция переводит окр-ти на плоскости z в окр-ти на плоскости ω."

63) групповое св-во дробно-линейной ф-ции:

„Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т.е.:
а) суперпозиция д/л отображений есть д/л отображение;
б) отображение, обратное к д/л, также явл. д/л."

64) св-во сохранения симметрии д/л ф-ции:

„При отображении, осуществляемом д/л ф-цией, точки, симметричные отн-но любой окр-ти, переходят в точки, симметричные отн-но образа этой окр-ти."

65) Ф-цией Жуковского наз. ф-ция комплексной переменной

$$\omega = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

66) принцип максимума и минимума гармонической ф-ции:

„Если ф-ция $u = u(x,y)$ гармоническая в области G и непрерывная в соответствующей замкнутой области $\overline{G}$, то она не может внутри этой области принимать значения, большие чем максимум её значений на границе Γ области G, и меньшие, чем минимум её значений на Γ, т.е.:

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y) \le u(x,y) \le \max_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y), \quad (x,y) \in G."$$

Д-во (экстр. точки / граница)

67) постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае односвязной области:

„Пусть требуется найти ф-цию $u(x,y)$, удовлетворяющую ур-нию Лапласа $\Delta u = 0$ в области G, непрерывную в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$ и принимающую заданные значения на границе Γ: $u(P)|_{\Gamma} = \alpha(P)$, где $\alpha(P)$ – заданная непр. ф-ция точки P контура Γ."

68) ф-ла Пуассона решения задачи Дирихле для ур-ния Лапласа в круге $|z| < R$:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)}\,\alpha(\varphi)\,d\varphi,$$ где $\alpha(\varphi)$ – ф-ция граничных значений.

69) $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ – изображение по Лапласу ф-ции действительной переменной $f(t)$, $p \in \mathbb{C}$.

70) $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$, $x > a$ – ф-ла Меллина.

71) т. о достаточных условиях $\exists$-ния оригинала ф-ции $\mathbb{C}$-переменной:

„Пусть ф-ция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(p)$ — аналитическая ф-ция в области $\operatorname{Re} p > a$;

б) в области $\operatorname{Re} p > a$ ф-ция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно отн-но $\arg p$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = x > a$ сходится интеграл $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M$, $x > a$.

Тогда ф-ция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ явл. изображением ф-ции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad x > a.\text{"}$$

II часть экзамена:

1) **Теорема о связи существования предела пос-ти комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ с существованием пределов пос-тей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:**

„Необходимым и достаточным условием сходимости пос-ти $\{z_n\}$ является сходимость пос-тей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ($\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$)."

Д-во:

а) необх.: пусть $\{z_n\} \to z$, где $z = x + iy$.

тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |z_n - z| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$.

очевидно, $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ и $|y_n - y| \leq |z_n - z|$. А значит, $|x_n - x| < \varepsilon$ и $|y_n - y| < \varepsilon$. Но это и означает, что $\{x_n\} \to x$ и $\{y_n\} \to y$.

б) дост.: пусть $\{x_n\} \to x$ и $\{y_n\} \to y$.

$$|z_n - z| = \sqrt{\underbrace{(x_n - x)^2}_{\to 0} + \underbrace{(y_n - y)^2}_{\to 0}} \to 0 \Rightarrow \{z_n\} \to z, \text{ где } z = x + iy.$$

■

2) **Необходимое и достаточное условие диф-ти ф-ции в точке:**

„Для того, чтобы ф-ция $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ была диф-ма в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необх. и дост., чтобы в точке (x_0, y_0) существовали частные производные ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x, y, связанные соотношениями: $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$

(усл. Коши-Римана)."

Д-во: а) необх.: пусть ф-ция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диф-ма в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Значит, $\exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, не зависящий от способа стремления Δz к нулю.

Положим $\Delta z = \Delta x$ и $\not{x}$ выражение:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Из $\exists$-ния предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Поэтому в точке (x_0, y_0) существуют частные производные по x ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и имеет место ф-ла: $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$ (1)

Полагая $\Delta z = i\Delta y$, находим: $f'(z_0) = -i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta y} +$

$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} = -iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0) \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем: $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$.

б) дост.: пусть ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диф-мы в точке (x_0,y_0) и их частные производные связаны условиями Коши-Римана.

По опр. диф-ти, приращения ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в окр-ти т. (x_0,y_0) могут быть записаны в виде:

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) = u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \xi(x,y), \quad (3)$$

$$v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0) = v_x(x_0,y_0)\Delta x + v_y(x_0,y_0)\Delta y + \eta(x,y), \quad (4)$$ где

$\xi(x,y) = o(|\Delta z|)$ и $\eta(x,y) = o(|\Delta z|)$ при $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Составим теперь разностное отношение $\dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, и, используя усл. Коши-Римана, (3) и (4), преобразуем его к виду:

$$\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0,y_0)\frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + v_x(x_0,y_0)\frac{i\Delta x - \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\xi(x,y) + i\eta(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{\omega(z)}{\Delta z}, \text{ где } \omega(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y).$$

При $\Delta z \to 0$ последнее слагаемое этой ф-лы стремится к нулю, а первые остаются неизменными. Поэтому $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$, т.е. $f(z)$ диф-ма в точке $z_0 = (x_0, y_0)$. ∎

3) Теорема Коши для односвязной области:

„Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая ф-ция $f(z)$. Тогда интеграл от этой ф-ции по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области G, равен нулю."

Д-во: составим сумму для интеграла $\int\limits_C f(\xi)d\xi$ по кусочно гладкой кривой C конечной длины: $S(\xi_i,\xi_i^*)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta\xi_i$.

$f(\xi_i^*)=u(P_i^*)+iv(P_i^*)$, $\Delta\xi_i=\Delta\omega_i+i\Delta\eta_i$, где $P_i^*(\omega_i^*,\eta_i^*)$ – точка кривой C на пл-ти xy. Тогда:

$$S(\xi_i,\xi_i^*)=\sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\omega_i-v(P_i^*)\Delta\eta_i\}+i\sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\eta_i+v(P_i^*)\Delta\omega_i\}.$$

Переходя в этом рав-ве к пределу при $\Delta\xi_i\to 0$, получим:

$\int\limits_C f(\xi)d\xi=\int\limits_C ud\omega-vd\eta+i\int\limits_C ud\eta+vd\omega$ или в нашем случае:

$$\int\limits_\Gamma f(\xi)d\xi=\int\limits_\Gamma udx-vdy+i\int\limits_\Gamma vdx+udy.$$

т.к. $f(z)$ – аналитическая всюду внутри контура Γ, то ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области, ограниченной этим контуром, обладают непрерывными частными производными первого порядка. Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части последнего рав-ва, можно применить ф-лу Грина. Кроме того, частные производные ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ связаны условиями Коши-Римана. Поэтому: $\int\limits_\Gamma udx-vdy=\iint\limits_G\left\{-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dxdy=0$,

$$\int\limits_\Gamma vdx+udy=\iint\limits_G\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dxdy=0.$$

Отсюда ясно, что $\int\limits_\Gamma f(\xi)d\xi=0$.

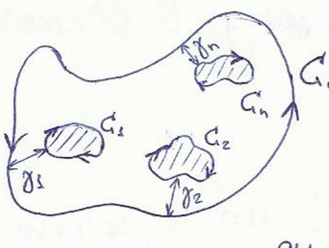
■

4) Теорема Коши для многосвязной области:

„Пусть $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в многосвязной области G, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда $\int\limits_C f(\xi)d\xi=0$, где C – полная граница области

G, состоящая из контуров $C_0, C_1, \dots, C_n$, причём обход границы C происходит в положительном направлении."

Д-во:



проведём гладкие кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$. Тогда область, ограниченная кривыми $C_0, C_1, \dots, C_n$ и кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается односвязной (кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ всегда можно выбрать так, чтобы они не пересекались). В силу т. Коши для ограниченной области интеграл по границе этой области равен нулю. Но интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях и при суммировании интегралов обнуляются. Таким образом, имеет место равенство:

$$\int_C f(\xi)d\xi = \int_{C_0^+} f(\xi)d\xi + \int_{C_1^-} f(\xi)d\xi + \dots + \int_{C_n^-} f(\xi)d\xi = 0.$$

■

5) Теорема об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом:

„Пусть ф-ция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области G, а интеграл от этой ф-ции по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда ф-ция $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ $(z, z_0 \in G)$ явл. аналитической ф-цией в области G и $\Phi'(z) = f(z)$."

Д-во: Составим разностное отношение:

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi.$$

Выберем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле прямую, соединяющую точки z и $z+\Delta z$. В таком случае имеет место очевидное соотношение $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z$. Оценим выражение:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\xi) - f(z)\}d\xi\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi \in [z, z+\Delta z]}|f(\xi) - f(z)| \cdot$$

$$\cdot |\Delta z| = \max_{\xi \in [z, z+\Delta z]}|f(\xi) - f(z)|.$$

В силу непр-ти ф-ции $f(z)$ в точке z $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что при $|\Delta z| < \delta$: $\max\limits_{\xi \in [z, z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$, т.е. $\left|\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$ при $0 < |\Delta z| < \delta$.

Это и означает, что $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$.

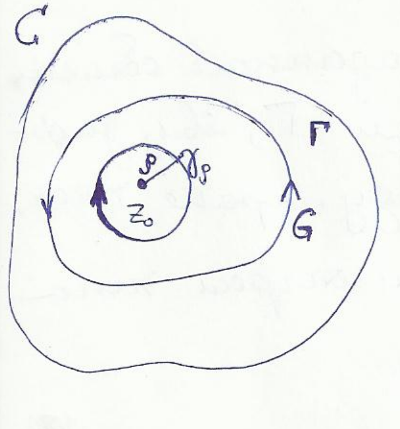
Итак, ф-ция $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ во всех точках области G имеет непрерывную производную (ф-ция $f(z)$ по усл. теоремы непр. в G). Тем самым $\Phi(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G. ■

6) Вывод интегральной ф-лы Коши для односвязной области:

Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в односвязной области G, ограниченной контуром C. Возьмём произв. внутр. точку z_0 и построим замкнутый контур Γ, целиком лежащий в G и содержащий точку z_0 внутри себя. Х вспомогательную ф-цию: $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$

Ф-ция $\varphi(z)$, очевидно, явл. аналитической ф-цией всюду в области G, за исключением точки z_0. Поэтому, если мы в области G возьмём такой замкнутый контур γ, лежащий внутри Γ, чтобы точка z_0 попала внутрь области, ограниченной контуром γ, то ф-ция $\varphi(z)$ будет аналитической в двухсвязной области G^*, заключённой м/у контурами Γ и γ. Согласно теореме Коши интеграл от ф-ции $\varphi(z)$ по кривой $\Gamma + \gamma$ равен нулю:

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi + \int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi = 0 \iff \int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi \quad (1)$$



Поскольку интеграл, стоящий слева, не зависит от выбора контура γ, то этим св-вом обладает и интеграл, стоящий справа. Для дальнейших рассмотрений удобно в кач-ве контура интегрирования γ выбрать окр-ть γ_ρ некоторого радиуса ρ с центром в точке z_0. Положив $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, имеем:

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi = i \int\limits_{0}^{2\pi} f(\xi)\,d\varphi.$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} f(\xi)d\varphi = \int_0^{2\pi}[f(\xi)-f(z_0)]d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi = \int_0^{2\pi}[f(\xi)-f(z_0)]d\varphi + 2\pi f(z_0) \quad (2)$$ 16

Устремим теперь ρ к нулю. Т.к. $f(z)$ – аналитическая, а след-но, непр. ф-ция в области G, то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \rho$, что $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$ для $|\xi - z_0| < \rho$. Отсюда следует, что при $\rho \to 0$ $\exists \lim\limits_{\rho\to 0} \int_0^{2\pi}[f(\xi)-f(z_0)]d\varphi = 0$.

Т.к. в (2) последнее слагаемое не зависит от ρ, то $\int_0^{2\pi} f(\xi)d\varphi = 2\pi f(z_0)$, а след-но $\int_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = 2\pi i f(z_0)$, и согласно (1):

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi.}$$

7) Теорема об аналитичности интеграла типа Коши:

„В любой точке комплексной плоскости, кроме точек, лежащих на линии Γ, интеграл типа Коши явл. аналитической ф-цией и при этом: $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$."

Д-во:

$\not\exists$ разностное отношение:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left\{\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z - \Delta z} - \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)}$$

Очевидно, $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} = f'(z)$.

Итак, интеграл типа Коши во всех точках заданной области комплексной плоскости, ограниченной контуром Γ, явл. диф-мой ф-цией и имеет непр. производную всюду, кроме точек, лежащих на линии Γ. Таким образом, интеграл типа Коши является аналитической ф-цией.

8) Теорема Лиувилля:

„Пусть на всей комплексной плоскости ф-ция $f(z)$ явл. аналитической, а её модуль равномерно ограничен. Тогда эта ф-ция $f(z)$ тождественно равна постоянной."

Д-во:

Запишем значение производной $f'(z)$ в произв. точке z: $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$, причём интегрирование будем вести по окр-ти некоторого радиуса R с центром в точке z, т.е. $|\xi - z| = R$. По усл. теоремы $\exists M : |f(\xi)| \leq M$ независимо от R. Поэтому: $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R} \frac{|f(\xi)|}{R^2} ds \leq \frac{M}{R}$.

Т.к. радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ от R не зависит, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ на всей комплексной пл-ти. Отсюда следует, что $f(z) \equiv const$.

■

9) Теорема о среднем:

„Пусть $f(z)$ - аналитическая ф-ция в односвязной области G и z_0 - некоторая внутренняя точка этой области. Если описать из этой точки как из центра окр-ть радиуса R_0, целиком лежащую в области G, то: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0}\int\limits_{C_{R_0}} f(\xi) ds$."

Д-во:

по ф-ле Коши: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$.

Но на окр-ти C_{R_0}: $\xi = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$, поэтому:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi$, или $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0}\int\limits_{C_{R_0}} f(\xi) ds$.

■

теорема Морера:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. непр. в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, целиком принадлежащему G, равен нулю. Тогда $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G."

Д-во: исходя из условий теоремы и используя теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом, имеем: $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$, где z_0 и z – произв. точки области G, а интеграл берётся по любому пути, соединяющему эти точки в области G, явл. аналитической в этой области ф-цией, причём $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической ф-ции также явл. аналитической ф-цией, т.е. $\exists$ непр. производная ф-ции $F'(z)$, а именно ф-ция $F''(z) = f'(z)$.

■

10) Принцип максимума модуля аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в области G и непр. в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или максимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области."

Д-во: действительная ф-ция 2^х действительных переменных $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ по усл. явл. непр. в замкнутой области. Поэтому она достигает своего максимального значения M в какой-либо точке (x_0, y_0) данной области. То есть:

$$M = |f(z_0)| \geqslant |f(z)|, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \ z \in \overline{G} \qquad (1)$$

Предположим, что точка z_0 – внутр. точка области G. Построим в области G круг K_0 некоторого радиуса R с центром в точке z_0 и запишем ф-лу среднего значения для z_0 и R. Учтя (1), получим:

$$2\pi M = \left| \int_0^{2\pi} f(\xi)d\varphi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\xi)|d\varphi \leq 2\pi M.$$

След-но, $\int_0^{2\pi} |f(\xi)d\varphi| = 2\pi M. \quad (2)$

Из этого соотношения в силу непр-ти ф-ции $f(\xi)$ на контуре интегрирования и нер-ва (1) следует, что:

$$|f(\xi)| = M \text{ при } \xi = z_0 + Re^{i\varphi}. \quad (3)$$

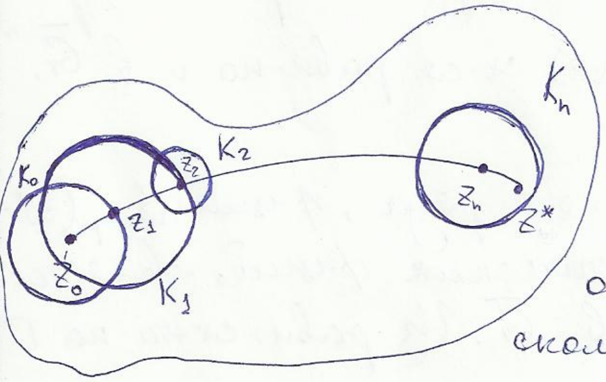
Действительно, по (1) ф-ция $|f(\xi)|$ не может быть больше M ни в одной точке контура интегрирования. Если мы предположим, что в какой-либо точке ξ_0 контура интегрирования ф-ция $|f(\xi_0)|$ строго меньше M, то из непр-ти $|f(\xi)|$ следует, что $|f(\xi)|$ строго меньше M и в нек. окр-ти точки ξ_0, т.е. можно указать отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$ интегрирования, на котором:

$|f(\xi)| \leq M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Тогда: $$\int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(\xi)| d\varphi + \int_0^{\varphi_1} |f(\xi)| d\varphi + \int_{\varphi_2}^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi \leq$$

$$\leq (M-\varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + M[2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] < 2\pi M,$$ что противоречит (2).

Итак, соотношение (3) действительно имеет место. Это означает, что на окр-ти радиуса R с центром в точке z_0 ф-ция $|f(z)|$ имеет постоянное значение, равное своему максимальному значению в области G. То же будет иметь место и на любой другой окр-ти меньшего радиуса с центром в т. z_0, а след-но, и во всём круге K_0. Теперь легко показать, что это же значение ф-ция $|f(z)|$ имеет и в любой другой внутренней точке z^* области G. Для этого соединим z_0 и z^* кривой C, целиком лежащей в области G и отстоящей от её границы не меньше чем на некоторое $d > 0$. Возьмём точку z_1, являющуюся последней общей точкой кривой C и круга K_0. Поскольку $|f(z_1)| = M$, то, повторяя проведённые выше рассуждения, покажем, что внутри круга $K_1 \subset G$ с центром в т. z_1 радиуса $R_1 \geq d$ модуль ф-ции $f(z)$ принимает постоянное значение, равное максимальному значению M. Взяв на кривой C точку z_2, являющуюся последней общей точкой кривой C и круга K_1, и продолжая данный процесс, мы в рез-те конечного числа шагов получим, что



внутри круга K_n, которому принадлежит точка z^*, имеет место рав-во $|f(z)| = M$.

■

11) Теорема о почленном интегрировании функционального ряда:

„Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непр. ф-ций $u_n(z)$ сх-ся равномерно в области G к ф-ции $f(z)$, то интеграл от этой ф-ции по любой кусочно гладкой кривой C, целиком лежащей в области G, можно вычислить путём почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, т.е. $\int\limits_C f(\xi)d\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_C u_n(\xi)d\xi$."

Обозн.: $r_n(\xi) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$.

Д-во: т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что для всех точек $\xi \in G$: $|r_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{L}$ при $n \geq N(\varepsilon)$, где L – длина дуги кривой C. Тогда:

$$\left|\int\limits_C f(\xi)d\xi - \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_C u_k(\xi)d\xi\right| = \left|\int\limits_C r_n(\xi)d\xi\right| \leq \int\limits_C |r_n(\xi)d\xi| < \varepsilon.$$

■

12) II^я т. Вейерштрасса о функциональных рядах:

„Пусть ф-ции $u_n(z)$ явл. аналитическими в области G, непрерывными в $\overline{G}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равн-но и в $\overline{G}$."

Д-во: Разность частичных сумм данного ряда, ф-ция $S_{n+p}(z) - S_n(z)$, как конечная сумма аналитических ф-ций, является аналитической в G и непрерывной в $\overline{G}$. Из равн. сх-ти на Γ следует, что: $|S_{n+p}(\xi) - S_n(\xi)| = |u_{n+p}(\xi) + \ldots + u_{n+1}(\xi)| < \varepsilon$ при $n \geq N$ для любого $p \in \mathbb{N}$ и всех точек $\xi \in \Gamma$ одновременно. След-но, по принципу максимума модуля аналитической ф-ции $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ при $n \geq N$ для любого $p \in \mathbb{N}$ и для всех $z \in \overline{G}$. Тем самым для данного ряда выполнен критерий Коши, что и доказывает теорему.

■

13) **Теорема Абеля о степенных рядах:**

„Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сх-ся в нек. точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сх-ся и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$; причём в круге $|z-z_0| \leq \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1-z_0|$, ряд сх-ся равномерно."

Д-во: выберем произв. точку z, уд. усл-ю $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, и $\forall$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Обозначим $|z-z_0| = q|z_1-z_0|$, $q<1$. В силу необх. усл-я сх-ти ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ его члены стремятся к нулю при $n \to \infty$. След-но, $\exists M: |c_n| \cdot |z_1-z_0|^n \leq M$. Отсюда для коэф-тов c_n данного степенного ряда получим оценку $|c_n| \leq \frac{M}{|z_1-z_0|^n}$. Тогда:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z-z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n. \quad (1)$$

По усл. теоремы число $q = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, представляющий собой сумму бесконечной геом. прогрессии со знаменателем, меньшим единицы, сх-ся. Тогда из (1) следует сх-ть и рассматриваемого ряда. Чтобы д-ть равн. сх-ть ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ в круге $|z-z_0| \leq \rho < |z_1-z_0|$, достаточно, в силу пр. Вейерштрасса, построить сходящийся числовой ряд, мажорирующий данный функц. ряд в рассматриваемой области. Очевидно, таковым является ряд $M\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1-z_0|^n}$, также представляющий собой сумму бесконечной геом. прогрессии со знаменателем, меньшим единицы ■

14) **Теорема Коши-Адамара о степенных рядах:**

„Радиус сх-ти R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определяется формулой $R = \frac{1}{l}$, где $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ есть верхний предел посл-ти $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$."

Д-во: предположим вначале, что $0<l<\infty$. Нам надо показать, что в любой точке z_1, уд. усл-ю $|z_1-z_0|<\frac{1}{l}$, ряд сх-ся, а в любой точке z_2, уд. усл-ю $|z_2-z_0|>\frac{1}{l}$, — расх-ся.

Т.к. l — верх. предел пос-ти $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то $\forall \varepsilon>0 \exists N \forall n\geqslant N$:

$$\sqrt[n]{|c_n|}<l+\varepsilon.$$

С др. стороны, для того же ε найдётся бесконечно много членов пос-ти $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, больших $l-\varepsilon$. Возьмём произв. точку z_1, удовлетворяющую нер-ву $l|z_1-z_0|<1$, и выберем в кач-ве ε число $\frac{1-l|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|}>0$. Тогда:

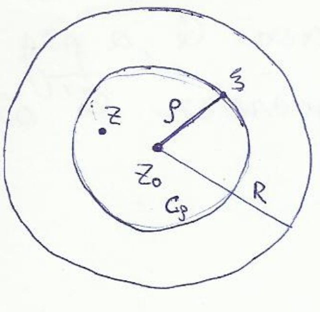
$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_1-z_0|<(l+\varepsilon)|z_1-z_0|=\frac{1+l|z_1-z_0|}{2}=q<1.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z_1-z_0)^n$ мажорируется геом. прогрессией $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ со знаменателем, меньшим единицы, что и доказывает его сх-ть. Взяв теперь некоторую точку z_2, удовлетворяющую нер-ву $l|z_2-z_0|>1$, и выбрав в кач-ве ε число $\frac{l|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|}>0$, получим: $\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z_2-z_0|>(l-\varepsilon)|z_2-z_0|=1$ для бесконечного мн-ва значений n. Отсюда $|c_n(z_2-z_0)^n|>1$, что на основании необх. признака сх-ти свидетельствует о расходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z_2-z_0)^n$. ■

15) Теорема Тейлора:

„Ф-ция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, причём этот ряд определён однозначно."

Д-во:



Выберем произв. точку z внутри круга $|z-z_0|<R$ и построим окр-ть C_ρ с центром в точке z_0 радиуса $\rho<R$, содержащую точку z внутри. Очевидно, для любой точки z данной области такое построение возможно. Т.к. точка z - внутренняя точка области $|z-z_0|<\rho$, в которой ф-ция $f(z)$ явл. аналитической, то по ф-ле Коши имеем: $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (1).$$

Осуществим в подынтегральном выражении преобразование:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}_{<1}}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n} \quad (2).$$

При $\xi\in C_\rho$ ряд (2) сх-ся равн-но по ξ, т.к. он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ $(|z-z_0|<\rho)$. Подставляя (2) в (1) и интегрируя почленно, получаем: $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \quad (3)$$

Введя обозначение $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ (4), перепишем (3) в виде сходящегося в выбранной точке z степенного ряда: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ (5)

В ф-ле (4) окр-ть C_ρ можно заменить, в силу т. Коши, любым замкнутым контуром C, лежащим в области $|z-z_0|<R$ и содержащим точку z_0 внутри. Т.к. z - произв. точка данной области, то отсюда следует, что ряд (5) сх-ся к $f(z)$ всюду внутри круга $|z-z_0|<R$, причём в круге $|z-z_0|\leq\rho<R$ этот ряд сх-ся равномерно. Итак, ф-ция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд. Коэф-ты разложения (4) на основании ф-лы для производных аналитической ф-ции имеют вид: $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (6).$$

Остаётся д-ть единственность разложения (5). Предположим, что имеет место другое разложение: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ (5'), где хотя бы один коэф-т $c_n'\neq c_n$. Степенной ряд (5') сх-ся в круге $|z-z_0|<R$, поэтому $c_n'=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, что совпадает с выражением (6) для c_n, т.е. $c_n=c_n'$. ∎

16) I-я т. Вейерштрасса о функциональных рядах:

„Пусть ф-ции $u_n(z)$ явл. аналитическими в области G, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G к ф-ции $f(z)$. Тогда:

а) $f(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G;

б) $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сх-ся равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G."

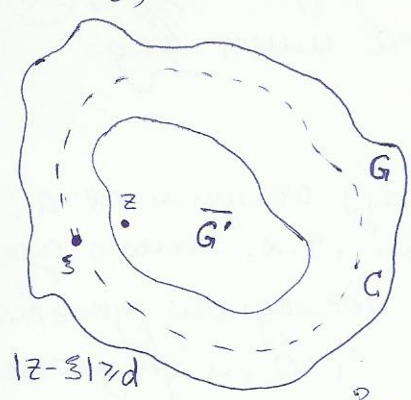
Д-во: а) ∡ произв. внутреннюю точку $z_0 \in G$ и построим односвязную подобласть G' области G, содержащую точку z_0 внутри. Т.к. ф-ции $u_n(z)$ непр. в области G, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся в этой области равномерно к ф-ции $f(z)$, то $f(z)$ непр. в области G. ∡ интеграл от $f(z)$ по произвольному замкнутому контуру C, целиком лежащему в области G'. Этот интеграл можно вычислить путём почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. Тогда в силу аналитичности ф-ций $u_n(z)$ получим: $\int\limits_C f(\xi)d\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_C u_n(\xi)d\xi = 0$.

Тем самым выполнены все условия т. Морера. След-но, $f(z)$ — ф-ция аналитическая в окр-ти G' точки z_0. В силу произвольности выбора точки z_0 отсюда следует аналитичность $f(z)$ в области G.

б) фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$ и выберем произв. замкнутый контур C, целиком лежащий в построенной выше подобласти G' и содержащий точку z_0 внутри. Минимальное расстояние от точки z_0 до контура C обозначим ч/з d.
∡ ряд $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$.

Т.к. $\min\limits_{z\in C}|z-z_0| = d > 0$, то этот ряд в силу усл-й теоремы сх-ся равномерно на C. Поэтому, проинтегрировав его почленно по контуру C и воспользовавшись выражением производной аналитической ф-ции ч/з интеграл Коши, получим: $f^{(k)}(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$. Т.к. z_0 - произв. точка области G, то утв. б) доказано.

в)



$\forall$ произв. подобласть $\overline{G'}$ области G и построим в области G замкнутый контур C, содержащий $\overline{G'}$ внутри, причём так, чтобы расстояние от произвольной точки $z\in\overline{G'}$ до любой точки $\xi\in C$ было не меньше некоторого $d>0$, т.е. $|z-\xi|\geq d>0$.

Заметим, что $\forall n\in\mathbb{N}$ ф-ция $r_n(z)=\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}u_j(z)=f(z)-\sum\limits_{j=1}^{n}u_j(z)$, представляющая собой сумму конечного числа аналитических ф-ций, также является аналитической ф-цией в области G. Значит $\forall z\in\overline{G'}$ имеет место соотношение:

$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{r_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi=r_n^{(k)}(z)$. Причём, согласно доказанному в б),

$r_n^{(k)}(z)$ представляет собой остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$. В силу равн. сх-ти исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z)$, $\forall\varepsilon>0\ \exists N$, что на контуре C при $n\geq N$ имеет место равномерная оценка: $|r_n(\xi)|<\varepsilon\cdot\frac{2\pi d^{k+1}}{k!\,L}$, где L – длина контура C. Тогда: $|r_n^{(k)}(z)|\leq\frac{k!}{2\pi}\int\limits_C\frac{|r_n(\xi)|}{|\xi-z|^{k+1}}ds<\varepsilon$ для всех $z\in\overline{G'}$ одновременно, что и доказывает утв. в). ■

17) Теорема единственности аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ции $f(z)$ и $\varphi(z)$ явл. аналитическими в области G. Если в G существует сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ посл-ть различных точек $\{z_n\}$, в которых значения ф-ций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают, то $f(z)\equiv\varphi(z)$ в G."

Д-во: д-ем сначала следующее утверждение:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в области G и обращается в нуль в различных точках $z_n\in G$ $(n=1,2,\dots)$. Если посл-ть $\{z_n\}$ сх-ся к пределу a, принадлежащему той же области, то ф-ция $f(z)$ тождественно равна нулю в области G."

т.к. $a\in G$, то ф-цию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд в окр-ти данной точки: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, причём радиус R_0 сх-ти данного ряда не меньше расстояния от точки a до границы области.

Из опр. непр-ти ф-ции $f(z)$ следует, что $f(a)=0$. Отсюда следует, что $c_0=0$, и разложение ф-ции $f(z)$ в окр-ти $z=a$ имеет вид:

$$f(z)=(z-a)f_1(z), \text{ где } f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(z-a)^n.$$

Будем предполагать, что все точки посл-ти $\{z_n\}$ отличны от a. Это не уменьшает общности наших рассмотрений, т.к. только одна из этих точек могла быть равна a. В силу последнего условия $f_1(z_n)=0$, и по опр. непр. ф-ции $f_1(a)=0$. Отсюда $c_1=0$, и разложение $f_1(z)$ в окр-ти a принимает вид: $f_1(z)=(z-a)f_2(z)$, где $f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(z-a)^n$. Аналогично предыдущему получим, что и $f_2(a)=0$, т.е. $c_2=0$. Продолжая неограниченно данный процесс, получим, что все коэф-ты c_n в разложении $f(z)$ в степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ в окр-ти точки a равны нулю. Отсюда следует, что $f(z)\equiv 0$ внутри круга $|z-a|<R_0$.

Обратимся теперь к док-ву тождественного рав-ва ф-ции $f(z)$ нулю во всей области G. Достаточно показать, что $f(z_1)=0$, где z_1 – произв. точка обл. G, лежащая вне круга $|z-a|<R_0$. Для этого соединим точки a и z_1 спрямляемой кривой L, целиком лежащей в G и отстоящей от её границы на расстояние $d>0$. Поскольку любую точку круга $|z-a|<R_0$, лежащую внутри области G, можно $\measuredangle$ как предел посл-ти нулей ф-ции $f(z)$, то, выбрав в кач-ве нового центра разложения последнюю точку $z=a_1$ пересечения кривой L с окр-тью $|z-a|=R_0$, получим, что $f(z)\equiv 0$ внутри круга $|z-a_1|<R_1$, где $R_1\geq d$. Продолжая аналогичным образом, покроем всю кривую L конечным числом кругов радиусов, не меньших d, внутри которых $f(z)\equiv 0$. При этом точка $z=z_1$ попадает внутрь последнего круга, тем самым $f(z_1)=0$. Поскольку z_1 – произв. точка области G, то $f(z)\equiv 0$ в G.

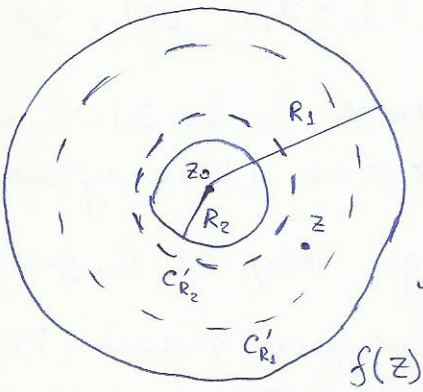
Вспомогат. утв. доказано.

Вернёмся к условиям основной теоремы и $\measuredangle$ ф-цию $\psi(z)=f(z)-\varphi(z)$. Очевидно, эта ф-ция удовлетворяет всем условиям вспомогательного утверждения. А это значит, что $\psi(z)\equiv 0$ в G. Отсюда следует, что $f(z)\equiv\varphi(z)$ в G. ■

18) Теорема Лорана:

„Ф-ция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана."

Д-во:



фиксируем произв. точку z внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ и построим окр-ти $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$ с центрами в z_0, радиусы которых удовлетворяют условиям $R_2<R_2'<R_1'<R_1$, $R_2'<|z-z_0|<R_1'$. Согласно ф-ле Коши для многосвязной области имеет место соотношение:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (1)$$

На $C_{R_1'}$ выполняется нер-во $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|\le q<1$. Поэтому представив $\frac{1}{\xi-z}$ в виде

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

и проведя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сх-ти ряда по переменной ξ, получим:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (2),$$

где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, $n\geqslant 0$ (3).

Т.к. на $C_{R_2'}$ выполняется нер-во $\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$, то аналогично предыдущему имеем:

$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n$. В рез-те почленного интегрирования этого ряда получим:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad (4),$$ где

$$c_{-n}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}^-}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi \quad (5).$$

Изменив направление интегрирования в (5), перепишем это выражение в виде: $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi$, $n>0$ (6).

Заметим, что подынтегральные ф-ции в (3) и (6) явл. аналитическими в круговом кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$. Поэтому в силу теоремы Коши значения соответствующих интегралов не изменятся при произвольной деформации контуров интегрирования в области аналитичности подынтегральных ф-ций. Это позволяет объединить ф-лы (3) и (6): $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (7), где

C - произв. замкнутый контур, лежащий в кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$ и содержащий точку z_0 внутри. Возвратившись к ф-ле (1), получим:

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (8), где коэф-ты c_n для всех значений индекса n определяются единообразной ф-лой (7). Т.к. z - произв. точка внутри кольца $R_2 < |z-z_0| < R_1$, то отсюда следует, что ряд (8) сх-ся к ф-ции $f(z)$ всюду внутри данного кольца, причём в замкнутом кольце $R_2 < \overline{R_2} \leq |z-z_0| \leq \overline{R_1} < R_1$ ряд сх-ся к ф-ции $f(z)$ равномерно. Остаётся док-ть единственность разложения (8). Предположим, что имеет место другое разложение: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(z-z_0)^n$, где хотя бы один коэф-т $c_n' \neq c_n$. Тогда всюду внутри кольца имеет место рав-во: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-z_0)^n$ (9).

Проведём окр-ть C_R радиуса R, $R_2 < R < R_1$, с центром в т. z_0. Ряды (9) сх-ся на C_R равномерно. Умножим их на $(z-z_0)^{-m-1}$, где m - фикс. целое число, и проинтегрируем почленно. $\measuredangle$ $\int\limits_{C_R}(z-z_0)^{n-m-1}dz$. Положив $z - z_0 = Re^{i\varphi}$, получим:

$$\int\limits_{C_R}(z-z_0)^{n-m-1}dz = R^{n-m}\, i\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi i, & n = m. \end{cases} \quad (10)$$

Учтя (10), найдём, что после указанного интегрирования выражения (9) отличными от нуля окажутся лишь по одному слагаемому из бесконечных сумм в левой и правой частях этого выражения. Отсюда получим: $c_m = c_m'$. Т.к. m - произв. число, то это и доказывает единственность разложения (8). $\blacksquare$

19) Теорема о конечной устранимой особой точке аналитической ф-ции:

„Если ф-ция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|< R_1$, ограничена ($|f(z)|< M$ при $0<|z-z_0|<R_1$), то точка z_0 есть устранимая особая точка ф-ции $f(z)$."

Д-во: разложим ф-цию $f(z)$ в ряд Лорана и ∡ выражение для коэф-тов этого ряда: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

В кач-ве контура интегрирования выберем круг с центром в точке z_0 радиуса ρ. Тогда в силу условия теоремы имеет место мажорантная оценка: $|c_n| < M\rho^{-n}$ (1)

Будем ∡ коэф-ты с отрицательным индексом $n<0$. Т.к. значение коэф-тов c_n не зависит от ρ, то из (1) получим $c_n=0$ при $n<0$, что и доказывает теорему.

■

20) Теорема о конечном полюсе аналитической ф-ции.

„Если ф-ция $f(z)$, аналитическая в окр-ти своей изолированной особой точки z_0, неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления точки z к точке z_0, то точка z_0 явл. полюсом ф-ции $f(z)$."

Д-во: По усл. теоремы $\forall A>0$ можно указать такую ε-окр-ть точки z_0, в которой $|f(z)|>A$. ∡ ф-цию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. В указанной ε-окр-ти точки z_0 эта ф-ция явл. аналитической и $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. Поэтому на основании теоремы о конечной устранимой особой точке точка z_0 явл. устранимой особой точкой ф-ции $g(z)$, и ф-ция $g(z)$ в окр-ти точки z_0 может быть представлена в виде $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая ф-ция, причём $\varphi(z_0)\neq 0$, а $m>0$. Тогда в окр-ти точки z_0 для исходной ф-ции $f(z)$ имеет место представление $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}$. Оно в силу условия $\varphi(z_0) \neq 0$ может быть переписано в виде $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$,

где $\psi(z)$ - аналитическая ф-ция. Отсюда и следует, что точка z_0 явл. полюсом порядка m ф-ции $f(z)$. ■

21) Теорема Сохоцкого (-Вейерштрасса) для случая, когда существенно особая точка конечна:

„Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в любой окр-ти существенно особой точки z_0 ф-ции $f(z)$ найдётся хотя бы одна точка z_1, в которой значение ф-ции $f(z)$ отличается от произвольного заданного комплексного числа B меньше чем на ε."

Д-во: предположим, что теорема неверна, т.е. при заданном $B \in \mathbb{C}$ и заданном $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\eta_0 > 0$, что во всех точках z из η_0-окр-ти точки z_0 значение ф-ции $f(z)$ отличается от заданного B больше чем на ε: $|f(z) - B| > \varepsilon$, $|z - z_0| < \eta_0$ (1).

$\measuredangle$ вспомогательную ф-цию $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z) - B}$. В силу (1) ф-ция $\psi(z)$ определена и ограничена в η_0-окр-ти точки z_0. След-но, по теореме о конечной устранимой особой точке, точка z_0 явл. устранимой особой точкой ф-ции $\psi(z)$. Это означает, что разложение ф-ции $\psi(z)$ в окр-ти точки z_0 имеет вид: $\psi(z) = (z-z_0)^m \tilde{\varphi}(z)$, $\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0$.

Тогда, в силу опр. ф-ции $\psi(z)$, в данной окр-ти точки z_0 имеет место следующее разложение ф-ции $f(z)$:

$f(z) = (z-z_0)^{-m} \varphi(z) + B$ (2), где аналитическая ф-ция $\varphi(z) = \dfrac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$

ограничена в η_0-окр-ти точки z_0. Но разложение (2) означает, что точка z_0 явл. или полюсом порядка m, или при $m=0$ правильной точкой ф-ции $f(z)$, и разложение в ряд Лорана последней должно содержать лишь конечное число членов, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

■

22) Осн. теорема теории вычетов:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической всюду в замкнутой области $\overline{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=\overline{1,N})$, лежащих внутри области G. Тогда:

$\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[f(z), z_k]$, где Γ^+ представляет собой полную границу области G, проходимую в положительном направлении."

D-во: Если ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в замкн. области $\overline{G}$, то все точки границы Γ этой области есть правильные точки ф-ции $f(z)$. Выделим каждую из особых точек z_k ф-ции $f(z)$ замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри других особых точек, кроме точки z_k.

В замкн. многосвязной области, ограниченной контуром Γ и всеми контурами γ_k ф-ция $f(z)$ явл. всюду аналитической. Поэтому по т. Коши для многосвязной области получим:

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\gamma_k^-} f(\xi)d\xi = 0 \quad (1).$$

Перенося в (1) второе слагаемое направо, мы, в силу формулы $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(\xi)d\xi$ для вычета ф-ции $f(z)$ в её изолированной особой точке, получим: $\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[f(z), z_k]$. ■

Теорема о вычетах ф-ции, аналитичной на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической на полной комплексной пл-ти, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=\overline{1,N})$, включая и $z=\infty$ $(z_N=\infty)$. Тогда:

$\sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[f(z), z_k] = 0$."

D-во: $\exists$ замкн. контур C, содержащий внутри все $(N-1)$ особые точки z_k, расположенные на конечном расстоянии от точки $z=0$. По осн. теореме теории вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}[f(z), z_k] \ (1)$$

Очевидно, в силу определения коэф-тов ряда Лорана имеет место ф-ла: $\operatorname{Res}[f(z),\infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\xi)d\xi \ (2)$.

Складывая (1) и (2), получим: $\sum\limits_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z),\infty] = 0$.

23) О вычислении интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ при помощи вычетов:

формулировка ниже

Д-во:

Д-жем сначала лемму:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа R_0, M и δ, что для всех точек верхней полупл-ти, уд. усл-ю $|z| > R_0$, имеет место оценка: $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $|z| > R_0$. Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} f(\xi)d\xi = 0$, где контур интегрирования C_R' представляет собой полуокр-ть $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ в верх. полупл-ти z.

Действительно, в силу того, что $\left|\int\limits_C f(\xi)d\xi\right| \leq \int\limits_C |f(\xi)|ds$ (ds - дифф-л длины дуги кривой C), и условий леммы при $R > R_0$: $\left|\int\limits_{C_R'} f(\xi)d\xi\right| \leq \int\limits_{C_R'} |f(\xi)|ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^\delta} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Перейдём к основной теореме: „Пусть ф-ция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верх. полупл-ть $\operatorname{Im} z \geq 0$, причём её аналитическое продолжение, ф-ция $f(z)$, удовлетворяет условиям леммы и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда н/с интеграл 1$^{\text{го}}$ рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и равен $2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$, где z_k - особые точки ф-ции $f(z)$ в верх. полупл-ти."

По усл. теоремы ф-ция $f(z)$ в верх. полупл-ти имеет конечное число особых точек z_k, причём все они уд. усл-ю $|z_k| < R_0$. $\measuredangle$ замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R \le x \le R$ $(R > R_0)$ и полуокр-ти C'_R, $|z| = R$, в верх. полупл-ти. В силу осн. теоремы теории вычетов:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\,[f(z), z_k] \quad (1).$$

Т.к. выполнены условия леммы, то предел второго слагаемого в левой части (1) при $R \to \infty$ равен нулю; правая часть (1) при $R > R_0$ от R не зависит. Отсюда следует, что предел первого слагаемого существует и его значение определяется ф-лой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\,[f(z), z_k].$$

■

24) Лемма Жордана для верхней полупл-ти.

„Пусть ф-ция $f(z)$ является аналитической в верхней полупл-ти $\text{Im}\, z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равн-но отн-но $\arg z$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$: $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi = 0$, где C'_R — дуга полуокр-ти $|z| = R$ в верх. полупл-ти z."

Д-во: условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z| = R$ имеет место оценка: $|f(z)| < \mu_R$, $|z| = R$ (1), где $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$. С помощью соотношения (1) оценим исследуемый интеграл. Сделаем замену переменной, положив $\xi = Re^{i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением: $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Тогда получим:

$$\left|\int_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi\right| \le \mu_R R \int_0^{\pi} |e^{ia\xi}|\, d\varphi = \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi <$$

$$< 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2aR}{\pi}\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

25) **Лемма Жордана для нижней полуп-ти:**

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в нижней полуп-ти $\operatorname{Im} z \leq 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ $(\pi \leq \arg z \leq 2\pi)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a < 0$: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)\, d\xi = 0$, где C'_R – дуга полуокр-ти $|z| = R$ в нижней полуп-ти z."

Д-во: условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z| = R$ имеет место оценка: $|f(z)| < \mu_R$, $|z| = R$, где $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$. Оценим исследуемый интеграл. Сделаем замену переменной, положив $\xi = Re^{-i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением: $\sin\varphi \leq \frac{2}{\pi}\varphi$ при $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Тогда получим:

$$\left|\int\limits_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \mu_R R \int\limits_{\pi}^{2\pi} |e^{ia\xi}|\, d\varphi = \mu_R R \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{aR\sin\varphi}\, d\varphi = 2\mu_R R \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} e^{aR\sin\varphi}\, d\varphi <$$

$$< 2\mu_R R \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \exp\left(\frac{2aR}{\pi}\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R \left(e^{3aR} - e^{2aR}\right) = \frac{\pi}{a}\mu_R e^{2aR}\left(e^{aR} - 1\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

26) **Лемма Жордана для правой полуп-ти:**

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в правой полуп-ти $\operatorname{Re} z \geq 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равн-но отн-но $\arg z$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a = i\alpha$ $(\alpha > 0)$: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)\, d\xi = 0$, где C'_R – дуга полуокр-ти $|z| = R$ в правой полуп-ти z."

Д-во: — // —. Исследуем интеграл $\int\limits_{C'_R} e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi$ $(\alpha > 0)$. Сделаем замену переменной, положив $\xi = Re^{i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением: $\cos\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда получим:

$$\left|\int\limits_{C'_R} e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \mu_R R \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\alpha R\cos\varphi}\, d\varphi = 2\mu_R R \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R\cos\varphi}\, d\varphi < 2\mu_R R \int\limits_{0}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2\alpha R}{\pi}\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha}\mu_R \left(1 - e^{-\alpha R}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

27) Лемма Жордана для левой полупл-ти:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической в левой полупл-ти $\mathrm{Re}\, z \le 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равн-но отн-но $\arg z$ $\left(\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}\right)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a = -i\alpha$ $(\alpha > 0)$: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)\, d\xi = 0$, где C_R' – дуга полуокр-ти $|z| = R$ в левой полупл-ти z."

Д-во: —//—. Исследуем интеграл $\int\limits_{C_R'} e^{\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi$ $(\alpha > 0)$. Сделаем замену переменной, положив $\xi = -Re^{-i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением: $\cos\varphi \le \frac{2}{\pi}\varphi$ при $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$. Тогда получим:

$$\left|\int\limits_{C_R'} e^{\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \le \mu_R R \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\alpha R\cos\varphi}\, d\varphi = 2\mu_R R \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-\alpha R\cos\varphi}\, d\varphi \le$$

$$\le 2\mu_R R \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \exp\left(-\frac{2\alpha R}{\pi}\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\mu_R \left[e^{-2\alpha R} - e^{-\alpha R}\right] = \frac{\pi}{\alpha}\mu_R e^{-\alpha R}\left[e^{-\alpha R} - 1\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

28) О вычислении интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)\, dx$ при помощи вычетов:

„Пусть ф-ция $F(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полупл-ть $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, а её аналитическое продолжение $F(z)$ в верхней полупл-ти уд. усл-ям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)\, dx$, $a > 0$, существует и равен:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} F(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left[e^{iaz} F(z), z_k\right],$$ где

z_k – особые точки ф-ции $F(z)$ в верх. полупл-ти z."

Д-во: по усл. теоремы особые точки z_k ф-ции $F(z)$ в верх. полупл-ти уд. усл-ю $|z_k| < R_0$. ∡ в верх. полупл-ти z замкн. контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R \le x \le R$, $R > R_0$ и дуги C_R' полуокр-ти $|z| = R$ в верх. полупл-ти z. По осн. теореме теории вычетов:

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}F(x)\,dx + \int_{C_R'} e^{ia\xi}F(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[e^{iaz}F(z), z_k]\,. \quad (1)$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого в левой части (1) при $R \to \infty$ равен нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}F(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[e^{iaz}F(z), z_k]\,.$$

■

29) **Теорема о разности числа нулей и полюсов аналитической ф-ции:**

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. аналитической всюду в замкн. обл. $\overline{G}$, за исключением конечного числа лежащих внутри G изолированных особых точек z_k, которые все явл. полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области G. Тогда разность м/у полным числом нулей и полным числом полюсов ф-ции $f(z)$ в области G определяется выражением: $N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi$."

Под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (полюсов P) с учётом их кратности: $N = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k$; $P = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k$.

Д-во: Заметим, что интеграл по Γ от ф-ции $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ может быть вычислен с помощью осн. теоремы теории вычетов, причём т.к. все особые точки ф-ции $\varphi(z)$ — это нули и полюсы ф-ции $f(z)$, а вычеты в этих точках определяются ф-лами: $\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = n_k$; $\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$, где $\tilde{z}_k$ — полюсы ф-ции $\varphi(z)$, z_k — полюсы ф-ции $f(z)$, то:

$$\int\limits_{\Gamma^+} \varphi(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{m=1}^{M} \mathrm{Res}\,[\varphi(z), z_m] = 2\pi i \left\{\sum_{k=1}^{n} n_k - \sum_{k=1}^{p} p_k\right\} = 2\pi i\,(N-P),$$

что и доказывает теорему.

■

30) Теорема Руше:

„Пусть ф-ции $f(z)$ и $\varphi(z)$ явл. аналитическими в замкн. области $\overline{G}$, причём на границе Γ области G имеет место неравенство: $|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$ (1). Тогда полное число нулей в области G ф-ции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей ф-ции $f(z)$.

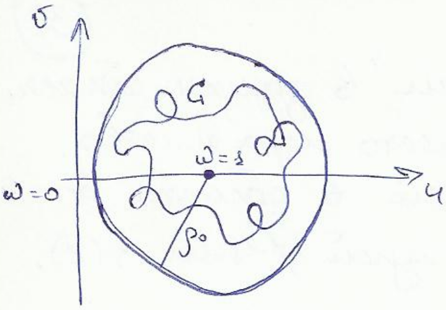
Д-во:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\ln f(\xi)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\{\ln|f(\xi)| + i\arg f(\xi)\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln|f(\xi)| + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg f(\xi) \quad (2)$$

Действительная ф-ция $\ln|f(\xi)|$ явл. однозначной ф-цией, поэтому её вариация (изменение) при обходе точкой ξ замкнутого контура Γ равна нулю. След-но, первое слагаемое в (2) равно нулю. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента ф-ции $f(\xi)$ при обходе точкой ξ замкнутого контура Γ, делённую на 2π. Тогда, с учётом всего вышеизложенного отн-но (2), по т. о разности числа нулей (N) и полюсов (P) аналитической ф-ции имеем:
$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg f(z)]_\Gamma \quad (3)$$

Для ф-ций $f(z)$ и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ выполнены все условия т. о разности числа нулей и полюсов аналитической ф-ции. Действительно, ф-ция $f(z)$ не имеет особых точек на Γ (она аналитическая в $\overline{G}$) и не обращается в нуль на Γ в силу (1). Эти условия также выполнены для ф-ции $F(z)$, т.к. $|F(z)|_\Gamma = |f(z) + \varphi(z)|_\Gamma \geq |f(z)|_\Gamma - |\varphi(z)|_\Gamma > 0$. Поэтому на основании ф-лы (3) получим:
$$N[f(z)+\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(f+\varphi)]_\Gamma \quad \text{и} \quad N[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg f(z)]_\Gamma.$$

$\measuredangle$ разность: $N[f(z)+\varphi(z)] - N[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(f+\varphi) - \arg f]_\Gamma =$
$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}\left[\arg\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)\right]_\Gamma \quad (4).$$

Введём ф-цию $\omega = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$. Как легко видеть, при обходе точкой z контура Γ соответствующая ей точка ω опишет замкн. кривую C, которая в силу условия (1) будет целиком лежать внутри некоторого круга $|\omega - 1| \leq \rho_0 < 1$.



Тем самым точка $\omega=0$ лежит вне кривой C. След-но, $Var[\arg\omega]_\Gamma=0$. Но это, исходя из (4), и означает, что: $N[f(z)+\varphi(z)]=N[f(z)]$.

■

31) Основная теорема алгебры:

„Полином n-й степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учётом их кратности)."

Д-во: представим полином $F(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$ в виде $F(z)=f(z)+\varphi(z)$, положив $f(z)=a_0z^n$, $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+\dots+a_n$. Составим отношение $\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{z}+\dots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{z^n}$. Как легко видеть, при любых заданных значениях коэф-тов $a_0, a_1, \dots, a_n$ всегда найдётся такое значение R_0, что для всех значений $|z|=R>R_0$ имеет место нер-во:

$$0<\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R}<1 \quad (1).$$

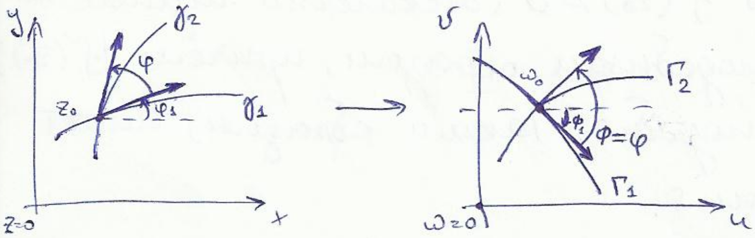
В силу т. Руше из (1) следует, что полное число нулей ф-ции $F(z)$ в круге $|z|=R$ равно числу нулей в этом круге ф-ции $f(z)=a_0z^n$. Но ф-ция $f(z)=a_0z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n-кратный нуль — точку $z=0$. Отсюда в силу произвольности $R\geq R_0$ и следует утверждение теоремы.

■

32) Теорема о необх. условии однолистности в точке $z_0\neq\infty$ аналитической ф-ции:

„Пусть ф-ция $f(z)$ явл. однозначной и однолистной аналитической ф-цией в области G и $f'(z)\neq 0$ при $z\in G$. Тогда ф-ция $f(z)$ производит конформное отображение области G на область E комплексной плоскости ω, представляющую собой область значений ф-ции $\omega=f(z)$ при $z\in G$."

Д-во: Выберем какую-либо точку $z_0 \in G$ и проведём ч/з неё произвольную кривую γ_1, целиком лежащую в G. Ф-ция $f(z)$ производит отображение области G комплексной плоскости z на некоторую область G комплексной плоскости ω. Пусть точка z_0 переходит в точку ω_0, а кривая γ_1 – в проходящую ч/з ω_0 кривую Γ_1.



По условию существует производная $f'(z)$ ф-ции $\omega = f(z)$ в точке z_0, причём $f'(z_0) \neq 0$. Представим число $f'(z_0)$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = k e^{i\alpha}. \quad (1)$$

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z = z_0 + \Delta z$ лежат на кривой γ_1. Очевидно, соответствующие им точки $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ лежат на кривой Γ_1. Комплексные числа Δz и $\Delta \omega$ изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 соответственно. Заметим, что $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta\omega$ имеют геом. смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей x и u, а $|\Delta z|$ и $|\Delta\omega|$ представляют собой длины этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соотв. кривым. Из (1) следует, что: $\alpha = \arg f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \arg \Delta\omega - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1$ (2), т.е. аргумент α производной имеет геом. смысл разности угла Φ_1 вектора касательной к кривой Γ_1 в точке ω_0 с осью u и угла φ_1 вектора касательной к кривой γ_1 в точке z_0 с осью x. Т.к. производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей ч/з точку z_0 (хотя значения самих углов Φ_1 и φ_1 могут измениться). Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической ф-цией $f(z)$, уд-щей условию $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ м/у любыми кривыми γ_2, γ_1, пересекающимися в т. z_0, равен углу $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ м/у их образами (кривыми Γ_2 и Γ_1), пересекающимися в точке $\omega_0 = f(z_0)$. Заметим, что при этом сохраняется не только абсолютная величина углов м/у кривыми γ_2 и γ_1 и их образами, но и направление углов. Итак, имеет место св-во сохранения углов.

Аналогично из соотношения (1) получим:

$$k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} \quad (3)$$

т.е. с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место равенство $|\Delta\omega| = k|\Delta z|$. Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой γ_1. Геом. смысл этого соотношения состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической ф-цией, уд-щей условию $f'(z_0) \neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причём $|f'(z_0)|$ определяет коэф-т преобразования подобия. Таким образом, имеет место св-во постоянства растяжения.

Итак, т.к. имеют место св-ва сохранения углов и постоянства растяжения, то отображение, осуществляемое ф-цией $f(z)$, области G на область E комплексной пл-ти ω является конформным.

33) Теорема о существовании и аналитичности обратной ф-ции:

„Если $\omega = f(z)$ явл. аналитической ф-цией в области G, причём $|f'(z)| \neq 0$ в окр-ти некоторой точки $z_0 \in G$, то в окр-ти точки $\omega_0 = f(z_0)$ области G значений ф-ции $f(z)$ определена обратная ф-ция $z = \varphi(\omega)$, являющаяся аналитической ф-цией комплексной переменной ω. При этом имеет место соотношение $f'(z_0) = \dfrac{1}{\varphi'(\omega_0)}$."

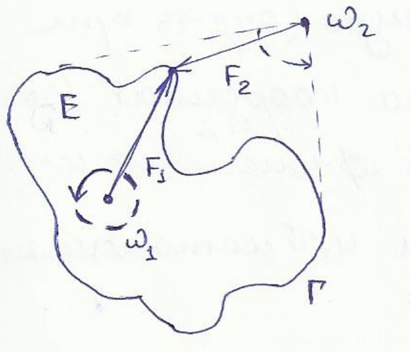
Д-во: для существования обратной ф-ции необходимо, чтобы ур-ния $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ можно было разрешить отн-но x,y в окр-ти точки ω_0. Для этого достаточно, чтобы в окр-ти точки z_0 выполнялось условие: $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$.

Т.к. $f(z)$ аналитична в обл. G, то для неё справедливы условия Коши-Римана: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Значит, условие разрешимости ур-ний $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ примет вид: $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$, что имеет место при данном условии $|f'(z)| \neq 0$. Тем самым существование обратной ф-ции $z = \varphi(\omega)$ доказано. Составив разностное отношение $\frac{\Delta z}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\omega/\Delta z}$, легко д-ть существование и непрерывность производной $\varphi'(\omega_0)$ при условии $|f'(z_0)| \neq 0$, причём $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}$.

34) Принцип соответствия границ при конформном отображении:

„Пусть в конечной области G, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая ф-ция $f(z)$, непрерывная в $\overline{G}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ комплексной пл-ти ω. Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то ф-ция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на внутреннюю область E, ограниченную контуром Γ."

Д-во:



Очевидно, для док-ва теоремы достаточно показать, что ф-ция $f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие м/у областями G и E, т.е. надо показать, что ф-ция $f(z)$ каждому значению $z \in G$ ставит в соответствие некоторую точку $\omega \in E$ и для каждой точки $\omega_1 \in E$ найдётся, и притом только одна, точка $z_1 \in G$ такая, что $f(z_1) = \omega_1$. Для этого ∡ две произв. точки $\omega_1 \in E$ и $\omega_2 \notin E$ и построим в области G вспомогательные ф-ции:

$$F_1(z) = f(z) - \omega_1, \ z \in G$$
$$F_2(z) = f(z) - \omega_2, \ z \in G \qquad (1).$$

Подсчитаем число нулей этих ф-ций в области G, для чего воспользуемся ф-лой: $N_i - P_i = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}[\arg F_i(z)]_\Gamma$. Т.к. в силу условий теоремы положительному обходу контура γ соотв. положительный обход контура Γ, получим:

$$N[F_1(z)] = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}[\arg(f - \omega_1)]_\gamma = 1, \quad (2)$$

$$N[F_2(z)] = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}[\arg(f - \omega_2)]_\gamma = 0. \quad (3)$$

Из (3) в силу произвольности выбора точки ω_2 вне области E следует, что все значения ф-ции $f(z)$ при $z \in G$ принадлежат области E. Из (2) следует, что для любой точки $\omega_1 \in E$ в области G найдётся одна и только одна точка z_1, для которой $f(z_1) = \omega_1$, что и доказывает взаимную однозначность данного отображения.

35) Круговое св-во дробно-линейной ф-ции:

„Дробно-линейная ф-ция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости ω."

Д-во:

Очевидно, что для док-ва теоремы достаточно показать, что преобразование инверсии, осуществляемое ф-цией $\omega = 1/z$, обладает круговым св-вом, т.к. сохранение окр-ти при линейном преобразовании не может вызывать сомнений. $\measuredangle$ произвольную окр-ть, ур-ние которой на пл-ти z имеет вид:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \quad (1)$$

где A, B, C, D — действительные числа, уд-щие условиям $A \neq 0$, $B^2+C^2 > 4AD$. При $A=0$ мы, очевидно, получим прямую (окр-ть при $R \to \infty$); при $D=0$ окр-ть (1) проходит ч/з начало координат (точку $z=0$). При преобразовании, осуществляемом ф-цией $\omega = u+iv = \frac{1}{z}$, координаты x, y связаны с координатами u, v соотношениями:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}; \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2} \quad (2).$$

Поэтому окр-ть (1) в новых координатах примет вид:

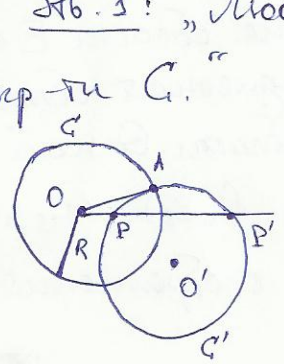
$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0,$$ что и доказывает утв. теоремы. ■

36) Св-во сохранения симметрии дробно-линейной ф-ции:

„При отображении, осуществляемом дробно-линейной ф-цией, точки, симметричные отн-но любой окр-ти, переходят в точки, симметричные отн-но образа этой окр-ти."

Д-во: Воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями элементарной геометрии.

Ут. 1: „Любая окр-ть C', проходящая ч/з P и P', ортогональна окр-ти C."

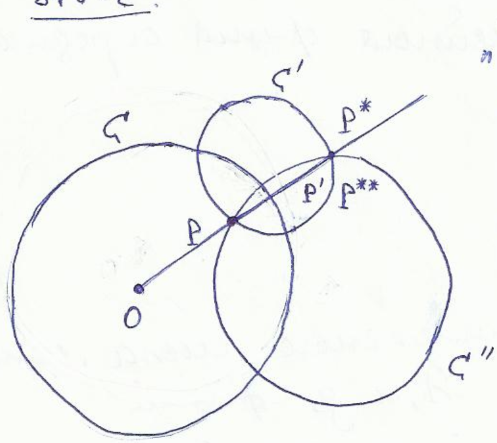


Действительно, проведя луч OP' и радиус OA в точку пересечения окр-тей C и C', мы в силу симметрии точек P и P' отн-но окр-ти C получим:

$$OP \cdot OP' = (OA)^2 = R^2$$

Но это, согласно известной теореме элементарной геометрии, означает, что OA явл. касательной к окр-ти C', проведённой из точки O, откуда и следует, что $C' \perp C$.

Утв. 2:



„Две взаимно пересекающиеся окр-ти C' и C'', ортогональные одной и той же окр-ти C, пересекаются в точках P и P', симметричных отн-но окр-ти C."

Проведём ч/з точку P пересечения окр-тей C' и C'', лежащую внутри окр-ти C, луч OP.

Предположим, что луч OP пересекает окр-ти C' и C'' в различных точках, соответственно P^* и P^{**}. Т.к. окр-ти C' и C'' ортогональны окр-ти C, то по указанной выше теореме эл. геометрии имеют место соотношения:

$OP \cdot OP^* = R^2$ (1)

$OP \cdot OP^{**} = R^2$ (2)

Но т.к. точки P^* и P^{**} лежат на одном луче, рав-ва (1) и (2) возможны только в том случае, когда точки P^* и P^{**} совпадают, $P^* = P^{**} = P'$, что и доказывает это утверждение.

Перейдём теперь к док-ву теоремы. Пусть точки P и P' симметричны отн-но окр-ти C. Проведём ч/з эти точки 2 вспомогательные окр-ти C' и C''. В силу утв. 1 окр-ти C' и C'' ортогональны C. При конформном отображении, осуществляемом какой-либо дробно-линейной ф-цией, окр-ти C, C' и C'' перейдут соответственно в окр-ти K, K' и K'', причём окр-ти K' и K'' будут ортогональны окр-ти K. Точки P и P' пересечения окр-тей C' и C'' перейдут в точки Q и Q' пересечения их образов — окр-тей K' и K''. Но в силу утв. 2 точки Q и Q' должны быть симметричны отн-но окр-ти K, что и доказывает теорему.

37) Теорема о существовании и единственности дробно-линейной ф-ции, переводящей три конечные точки z_1, z_2, z_3 в три конечные точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

„Заданием соответствия трём различным точкам пл-ти z трёх различных точек пл-ти ω дробно-линейная ф-ция определена однозначно."

Д-во: Мы должны д-ть, что условия

$$f(z_1)=\omega_1, \quad f(z_2)=\omega_2, \quad f(z_3)=\omega_3, \quad (1)$$

где z_1, z_2, z_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – заданные комплексные числа, однозначно определяют значения параметров λ, α, β ф-ции $\omega = f(z) = \dfrac{a+bz}{c+dz} = \lambda \dfrac{\alpha+z}{\beta+z}$ $\left(\lambda = \dfrac{b}{d}, \alpha = \dfrac{a}{b}, \beta = \dfrac{c}{d}, \alpha \neq \beta\right)$. Составим выражения:

$$\omega_1-\omega_3 = \lambda \frac{(z_1-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_1)(\beta+z_3)} \ (2) \quad \text{и} \quad \omega_2-\omega_3 = \lambda \frac{(z_2-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_2)(\beta+z_3)} \ (3).$$

Разделив (2) на (3), получим: $\dfrac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = \dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \cdot \dfrac{\beta+z_2}{\beta+z_1}$ (4).

Для произв. точки z можем записать аналогичное соотношение:

$$\frac{\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega} = \frac{z_1-z}{z_2-z} \cdot \frac{\beta+z_2}{\beta+z_1} \quad (5).$$

Исключив из соотношений (4) и (5) параметр β, окончательно получим:

$$\frac{\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega} \Big/ \frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = \frac{z_1-z}{z_2-z} \Big/ \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \quad (6).$$

Соотношение (6) и представляет собой неявное выражение искомой дробно-линейной ф-ции. Очевидно, разрешив (6) отн-но ω, мы получим явное выражение коэф-тов λ, α, β дробно-линейной ф-ции ч/з заданные числа $z_1, z_2, z_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, что и доказывает теорему. ■

38) **Принцип максимума и минимума гармонической ф-ции двух переменных:**

„Если ф-ция $u = u(x,y)$ гармоническая в ограниченной области D и непр. в соотв. замкн. области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то она не может внутри этой области принимать значения, большие, чем максимум её значений на границе Γ, и меньшие, чем минимум её значений на Γ, т.е. $\min\limits_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y) \leq u(x,y) \leq \max\limits_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y)$, $(x,y) \in D$."

Д-во: Обозначим ч/з m максимум значений $u(x,y)$ на Γ и предположим, что максимальное значение ф-ции равно $u(x_0,y_0) = M > m$ и принимается во внутренней точке $(x_0,y_0) \in D$. Составим вспомогательную ф-цию:

$$v = u(x,y) + \frac{M-m}{2d^2}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right],$$

где d - диаметр области D (максимальное расстояние м/у любыми $2^{мя}$ точками, принадлежащими области). Из нер-ва $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq d^2$ вытекает, что на Γ:

$$v(x,y) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M.$$

В то же время ф-ция $v(x,y)$ принимает своё максимальное значение в некоторой (внутренней) точке области D, причём $\max\limits_{D} v(x,y) \geq M$.

Как известно, в этой точке $v_x = v_y = 0$, $v_{xx} \leq 0$, $v_{yy} \leq 0$, а, след-но, $v_{xx} + v_{yy} \leq 0$. Однако:

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + \frac{M-m}{2d^2}(2+2) = 2\,\frac{M-m}{d^2} > 0.$$

Полученное противоречие означает, что предположение $M > m$ неверно, и мы доказали, что внутри D: $u(x,y) \leq \max\limits_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y)$.

Для док-ва нер-ва, ограничивающего $u(x,y)$ снизу достаточно применить уже полученный результат к ф-ции $(-u(x,y))$, которая, очевидно, тоже явл. гармонической. ■

Далее будет док-во методами ТФКП

39) Теорема об аналитичности изображения по Лапласу ф-ции $f(t)$ действительной переменной t:

„Изображение по Лапласу $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ ф-ции $f(t)$ явл. аналитической ф-цией комплексной переменной p в области $\operatorname{Re} p > a$, где a — показатель степени роста ф-ции $f(t)$."

Д-во: Н/с интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ сх-ся в области $\operatorname{Re} p > a$ по пр. Вейерштрасса. Разобьём интервал интегрирования на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ произвольной конечной длины, причём $t_0 = 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда ф-ция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ представляет собой сумму сходящегося ряда: $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$ (1).

Заметим, что поскольку $n^й$ остаток сходящегося интеграла (1) равен $\int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$, то ряд (1) сх-ся равномерно в области $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$. Каждая из ф-ций $u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt$ определена как интеграл, зависящий от параметра p, по отрезку конечной длины на комплексной пл-ти t. На основании общих св-в интегралов от ф-ций двух комплексных переменных, зависящих от параметра, ф-ции $u_n(p)$ явл. целыми ф-циями p. Из проведённых рассуждений следует, что ряд (1) в области $\operatorname{Re} p > a$ удовлетворяет всем условиям $I^й$ т. Вейерштрасса для функц. рядов, а значит, ф-ция $F(p)$ явл. аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$ и её производные можно вычислять, дифференцируя подынтегральную ф-цию в (1) по параметру p.

∎

40) **Теорема о достаточных условиях существования оригинала ф-ции $F(p)$ комплексной переменной p:**

„Пусть ф-ция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ уд-т следующим условиям:

а) $F(p)$ — аналитическая ф-ция в области $\operatorname{Re} p > a$;

б) в области $\operatorname{Re} p > a$ ф-ция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно отн-но $\arg p$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = x > a$ сх-ся интеграл $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dy < M,\ x > a.$ (1)

Тогда ф-ция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является изображением ф-ции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp,\quad x > a.\ (2)$$ "

стр 442

Д-во: Итак, надо д-ть, что интеграл (2) явл. оригиналом ф-ции $F(p)$. Первым делом возникает вопрос о существовании этого н/с интеграла. Очевидно, что: $\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |e^{pt} F(p)| \cdot |dp| =$

$= \frac{e^{xt}}{2\pi} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dy \leq \frac{M}{2\pi} e^{xt}$ (3), откуда и следует сх-ть интеграла (2) при любом $x > a$. Отметим для дальнейшего, что из оценки (3) следует равн. сх-ть интеграла (2) по параметру t на любом конечном промежутке $0 \leq t \leq T$.

Для того, чтобы д-ть, что интеграл (2) явл. оригиналом заданной ф-ции $F(p)$, следует установить, что:

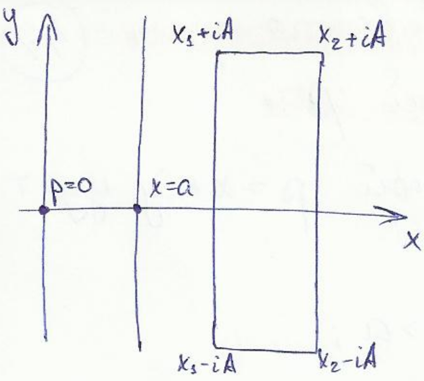
1°. Интеграл (2) не зависит от x и определяет ф-цию $f(t)$ лишь одной переменной t, причём эта ф-ция обладает ограниченной степенью роста.

2°. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

3°. Изображением Лапласа ф-ции $f(t)$ явл. заданная ф-ция $F(p)$.

Д-ем каждое из высказанных утверждений.

1°. $\exists$ в области $\operatorname{Re} p > a$ замкн. контур Γ, состоящий из отрезков прямых $[x_1 - iA, x_2 - iA]$, $[x_1 + iA, x_2 + iA]$, параллельных действительной оси. Здесь $A > 0$; x_1, x_2 — произв. числа, большие a. Т.к. ф-ция $F(p)$

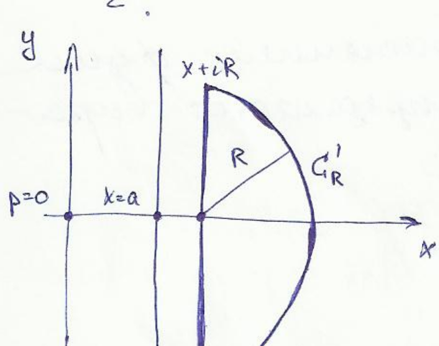


явл. аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$, то в силу т. Коши интеграл от ф-ции $e^{pt}F(p)$ по контуру Γ равен нулю. Устремим A к бесконечности, оставляя фиксированными x_1, x_2. Тогда по условию б) теоремы интегралы по горизонтальным отрезкам пути интегрирования дадут в пределе нуль. В то же время интегралы по вертикальным прямым переходят в интеграл (2). Отсюда:

$$\int\limits_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \int\limits_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,$$

что в силу произвольности x_1 и x_2 доказывает утверждение 1°.

2°.



∡ значение интеграла (2) при $t<0$. Для этого в области $\operatorname{Re} p > a$ ∡ замкнутый контур C, состоящий из отрезка прямой $[x-iR,\, x+iR]$, $x>a$, и замыкающей его дуги C'_R полуокр-ти $|p-x|=R$. По т. Коши интеграл от ф-ции $e^{pt}F(p)$ по данному контуру равен нулю. В силу леммы Жордана для правой полуп-ти при $R\to\infty$ интеграл по дуге C'_R стремится к нулю при $t<0$. Поэтому:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \equiv 0,\quad t<0,\ \operatorname{Re} p>a \quad (4),$$

и утв. 2° доказано.

3°. Построим изображение по Лапласу ф-ции (2) и ∡ его значение при некотором произв. p_0, где $\operatorname{Re} p_0 > a$:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty} e^{-p_0 t}\,dt \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp. \quad (5)$$

Внутренний интеграл в (5) не зависит от x. Выберем значение x, удовлетворяющее условию $a<x<\operatorname{Re} p_0$, и изменим порядок интегрирования, что возможно в силу равномерной сх-ти соответствующих интегралов. Получим:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\,dp \int\limits_0^{\infty} e^{-(p_0-p)t}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\frac{dp}{p_0-p} \quad (6).$$

Интеграл (6) может быть вычислен с помощью вычетов, т.к. в силу условия б) теоремы подынтегральная ф-ция стремится к нулю при $|p|\to\infty$ быстрее, чем ф-ция $\frac{1}{p}$. Поэтому, учтя, что единственной особой точкой подынтегральной ф-ции — полюсом первого порядка — явл. точка $p=p_0$ и что при замыкании (6) в правой полупл-ти интегрирование производится в отрицательном направлении, получим:

$$f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,dt = F(p_0).$$

Поскольку p_0 — произв. точка в области $\operatorname{Re} p > a$, теорема доказана. ■

38) Принцип максимума и минимума для гармонических ф-ций:

„Пусть ф-ция $u(x,y)$, гармоническая в ограниченной области D, непр. вплоть до границы этой области и $u(x,y) \neq const$. Тогда максимум и минимум этой ф-ции достигаются только на границе области D."

Д-во (методом ТФКП):

Заметим, что достаточно д-ть теорему для случая максимума, т.к. точка минимума гармонической ф-ции $u(x,y)$ явл. точкой максимума ф-ции $-u(x,y)$, которая

ную область D_1, лежащую в D и содержащую внутри себя точку z_0. В обл. D_1 $\exists\, \overset{\text{-ан-ная}}{f(z)}$: $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$. Тогда ф-ция $|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{u(x,y)}$ достигает своего максимума в точке z_0. След-но, $g(z) \equiv const$ (в силу принципа максимума модуля ан-кой ф-ции), откуда $f(z) \equiv const$ и $u(x,y) \equiv const$ при $z \in D_1$. В силу произвольности области D_1 имеем $u(x,y) \equiv const$ при $z \in D$, что противоречит условию теоремы. ■