①

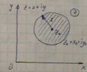
Понятие ф-ции комплексного переменного

▲ Пусть $\varepsilon > 0$ – произв. полож. число, а z_0 – произв. комплек. число. Мн-во т-к z компл. пл-ти, удовл-х нер-ву $|z - z_0| < \varepsilon$, явл-ся <u>открытым кругом</u> радиуса ε с центром в т-ке z_0

Полагая $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$ =>

=> $|z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$, или

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$

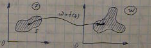


▲ Совок-ть точек z компл. пл-ти, уд-х нер-ву $|z - z_0| < \varepsilon$, наз-ся ε-окр-тью т-ки z_0

▲ Точка z наз-ся <u>внутренней</u> точкой мн-ва на компл. пл-ти, если сущ-ет ε-окр-ть этой т-ки, целиком принадлежащая дан. мн-ву.

▲ Будем говорить, что на мн-ве S компл-ной ~~переменной~~ пл-ти z определена ф-ция $\omega = f(z)$, если указано правило, по которому каждому компл. числу z из S ставится в соответствие компл. число ω.

Т.о. $\omega = f(z)$ осуществляет отображение точек компл. пл-ти z на соотв-щие т-ки компл. пл-ти ω.



Положим $z = x + iy$, $\omega = u + iv$. Тогда задание ф-ции компл. перем-го $\omega = f(z)$ будет равносильно заданию двух действительных функций двух действ. переменных:

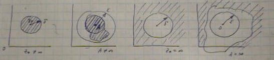
$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad \text{где } \omega = f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{\operatorname{Re}\omega} + i\,v(x,y).$$

Ф-ция $u(x,y)$ наз-ся действ. частью ф-ции $\omega = f(z)$, а $v(x,y)$ – ее мнимой частью ($\operatorname{Im}\omega$).

▲ Ф-ция $\omega = f(z)$ – <u>однолистная</u> на S, если в разных точках этого мн-ва она принимает разные значения.

▲ Пусть ф-ция $\omega = f(z)$ опр-на в нек. окр-ти точки $z_0 = x_0 + iy_0$ кроме, может быть, самой точки z_0.

▲ Компл. число A наз-ся <u>пределом</u> ф-ции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для люб. полож. ε можно указать δ-окр-ть т-ки z_0 такую, что для всех т-к z из этой δ-окр-ти, исключая, возможно, z_0, соотв. т-ки $\omega = f(z)$ лежат в ε-окр-ти т-ки A. $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$



<u>Непрерывность</u>

▲ Ф-ция $\omega = f(z)$, зад-ная на мн-ве S, наз-ся <u>непрерывной</u> в т-ке $z_0 \in S$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, $z \in S$.

Т.е. ф-ция $f(z)$ непр-на в т-ке z_0, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указ-ть такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall z \in S$, удовл-х условию $|z - z_0| < \delta$, вып-ся нер-во $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Для непрер-ти ф-ции комп. перем-го $f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ в т-ке $z_0 = x_0 + iy_0$ необх. и дост-но, чтобы ее действ. и мнимая части - ф-ции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ - были непр-ны в т-ке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y

Если ф-ция $f(z)$ непр-на в кажд. т-ке мн-ва S, то говорят, что ф-ция $f(z)$ непр-на на мн-ве S.

<u>Дифференцируемость</u>

▲ Пусть ф-ция $f(z)$ опр-на в некот. окр-ти точки z.

Говорят, что ф-ция $f(z)$ диф-ма в т-ке z, если сущ-ет предел $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.

Этот предел наз-ся производной ф-ции $f(z)$ в т-ке z_0 и обоз-ют символом $f'(z)$, или $\frac{df(z)}{dz}$.

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Св-ва: $\frac{d}{dz}[f(z)+g(z)] = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}$,

$$\frac{d}{dz}[f(z)\cdot g(z)] = \frac{df(z)}{dz}\cdot g(z) + f(z)\cdot\frac{dg(z)}{dz}.$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{\frac{df(z)}{dz}\cdot g(z) - f(z)\cdot\frac{dg(z)}{dz}}{g^2(z)} \quad (g(z)\neq 0).$$

$$\frac{d}{dz}[f(g(z))] = \frac{df(g(z))}{d\omega}\cdot\frac{dg(z)}{dz} \ (\omega = g(z)), \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}},$$

$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \neq 0$, $z = \varphi(\omega)$ – ф-ция, обр-ная к $\omega = f(z)$).

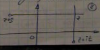
Условия Коши – Римана

Т: Пусть ф-ция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диф-ма в точке $z = x+iy$. Тогда в т-ке (x,y) сущ-ют частные произв-ные ф-ций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x и y, причем

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ – это условия Коши – Римана

Док-во: По усл. теоремы сущ-ет $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$, не зависящий от способа приближения к т-ке z.

Предположим сначала, что h стремится к нулю, оставаясь действительным ($h-s$)



В этом случае:

$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{u(x+s,y) + i v(x+s,y) - u(x,y) - i v(x,y)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{u(x+s,y) - u(x,y)}{s} + i \lim_{s\to 0} \frac{v(x+s,y) - v(x,y)}{s}.$$

Таким образом: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

Полагая $h = it$, где t – действительно, получим:

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{it} =$$

$$= -i \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{t} =$$

$$= -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow$$ вытекают условия Коши...

Понятие аналитической функции. Примеры.

Т: Пусть ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диффер-мы в т-ке (x,y) как функции действительных переменных и в этой т-ке вып-ны условия Коши-Римана. Тогда ф-ция компл. переменного $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ диф-ма в т-ке $z = x + iy$.

Док-во: По опред-нию дифф-ти действ. ф-й $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x и y их приращения в т-ке (x,y) можно записать в след. виде:

$$u(x+s, y+t) - u(x,y) = u_x(x,y)\,s + u_y(x,y)\,t + \alpha|h|,$$

$$v(x+s, y+t) - v(x,y) = v_x(x,y)\,s + v_y(x,y)\,t + \beta|h|,$$ где

α и $\beta \to 0$ вместе с $|h| = \sqrt{s^2+t^2}$.

Умножая второе из равенств на i и складывая с первым, получим $f(z+h) - f(z) = (u_x + i v_x)\,s + (u_y + i v_y)\,t + \gamma|h|$.

Поделив обе части последнего рав-ва на $h = s + it$, убеждаемся в том, что предел $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ сущ-ет и равен $u_x + iv_x$, ч.т.д.

▲ Ф-ция $\omega = f(z)$ наз-ся аналитической в т-ке z, если она диф-ма как в самой точке z, так и в некот. ее окр-ти.
Ф-ция $\omega = f(z)$, диф-мая в каждой т-ке некот. обл-ти D, наз-ся аналитической функцией в этой области.

Для люб. анал. функции $f(z)$ вып-ся равенства:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

Пример: $\omega = f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ – аналитическая.

$\omega = z\bar{z}$ – диф-ма в $z = 0$ и нигде не аналитична

②

Интеграл по кривой на комплексной плоскости

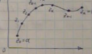
Рассм. на компл. пл-ти z кусочно-гладкую ориентир. кривую γ и предположим, что на этой кривой определена ф-ция $f(z)$ компл. переменного z. Разобьем кривую γ на n частичных дуг последовательными точками деления:

$$z_0 = a,\ z_1, \dots, z_{n-1},\ z_n = b,$$ где a и b - концы γ.

Положив $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \quad \text{(здесь } \xi_k \text{ - произв-но} \qquad (1)$$

взятая т-ка k-й частичной дуги $[z_{k-1}, z_k]$, называемую комплексной интегр. суммой вдоль кривой γ.



Если при $\max|\Delta z_k| \to 0$ сущ-ет предел сумм (1), не зависящий от способа разбиения кривой на частичные дуги и от выбора т-к ξ_k на них, то этот предел называется интегралом от ф-ции $f(z)$ по кривой γ:

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Положим $f(z) = u(x,y) + i\vartheta(x,y)$, $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\xi_k = \xi_k + i\eta_k$, $u_k = u(\xi_k, \eta_k)$, $\vartheta_k = \vartheta(\xi_k, \eta_k)$.

Тогда интегр. сумму можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - \vartheta_k \Delta y_k)}_{\int_\gamma u dx - \vartheta dy} + i\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\vartheta_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)}_{\int_\gamma \vartheta dx + u dy}.$$

Т.о., если γ - кусочно-гладкая, а $f(z)$ - кус. непр-ная и ограничен-ная на γ ф-ция, то интеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ всегда сущ-ет и справ-ва ф-ла:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u dx - \vartheta dy + i\int_\gamma \vartheta dx + u dy$$

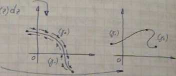
Или $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} (u+iv)(dx+i\,dy)$

Св-ва: 1) $\int\limits_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int\limits_{\gamma} f_2(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} [f_1(z)+f_2(z)]\,dz$

2) $\int\limits_{\gamma} c f(z)\,dz = c\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, c - компл. постоянная

3) $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz$

4) $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz$



5) Пусть $M = \max\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$ и ℓ - длина кривой γ. Тогда

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \le M\int\limits_{\gamma} |dz| = M\ell$$

Д-во: $\left|\sum f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum |f(\xi_k)|\,|\Delta z_k| \le M\sum |\Delta z_k|$, переходим к пределу при $\max|\Delta z_k| \to 0$ и учитывая, что

$\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ - длина ломаной, вписанной в кривую γ,

получим требуемое.

Теорема Коши

Т: Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, γ - произвольная замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в области D. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Д-во: Предположим, что 1) γ - кусочно-гладкий контур

2) производная $f'(z)$ - непрерывна.

В силу соотношения $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy$ дост-но показать, что интегралы $\int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy$ и $\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy$ равны нулю.

Обозначим внутренность контура γ через G. Так как ф-ция $f'(z)$ непрерывна всюду в обл-ти G, то ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этой области имеют непрерывные частн. произв-ные 1-го порядка. Ввиду кусочной гладкости контура γ выполнены все условия, позволяющие применить к интегралам ф-лу Грина. Имеем

$$\int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy = \iint\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (1)$$

В силу условий Коши–Римана подынтегральные выражения в каждом из двойных интегралов (1) тождественно равны нулю.

Неопределенный интеграл

Т: Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в односвязной области D; точки z_0 и z принадлежат D. Тогда ф-ция

$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ аналитична в области D, и $\frac{dF}{dz} = f(z)$

Док-во:
$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{z_0}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi$$

Будем считать, что интеграл в рав-ве вычисляется вдоль прямолин. отрезка, соединяющего т-ки z и $z+h$.

Замечая, что $f(z) = f(z)\,\frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} d\xi = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(z)\,d\xi$,

оценим разность $\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} (f(\xi) - f(z))\,d\xi$.

В силу непрерывности ф-ции $f(\xi)$ в т-ке z, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\xi - z| < \delta$ вып-ся нер-во $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$.

Пусть $|h| < \delta$. Тогда $\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \le$

$\le \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)| |d\xi| < \varepsilon \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |d\xi| = \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon$

Полученная оценка означает, что существует:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

▲ Ф-ция $\Phi(z)$ наз-ся первообразной ф-ции $f(z)$ в обл-ти D, если в каждой т-ке этой области вып-ся нер-во:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z).$$

▲ Совокупность всех первообразных ф-й $f(z)$ наз-ся неопределенным интегралом от ф-ции $f(z)$ и об-ся символом $\int f(z)$, т.е.

$$\int f(z) dz = F(z) + C, \text{ где } F'(z) = f(z)$$

③

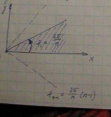
Понятие многолистной и многозначной функции.

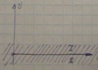
▲ Ф-ция $\omega = f(z)$ наз-ся однолистной ф-цией на мн-ве S, если в разных точках этого мн-ва она принимает разн. знач-ния.
▲ Ф-ция, не явл-ся однолистной, наз-ся многолистной.
Пример: $\omega = z^2$ – однолистна в верх. полуплоскости $Im > 0$ и многолистна на всей плоскости. Например, $i^2 = (-i)^2 = -1$.

▲ Часто рассматривают многозначные ф-ции компл. переменного, когда каждому значению z из S ставится в соответствие несколько комплексных чисел.
Пример: $\omega = \sqrt{z}$ – двузначна на всей пл-ти z, исключая нулевую точку (и бесконечно удаленную).

Риманова поверхность

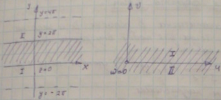
Пример 1: Рассм. отображение, осущ-мое ф-цией $\omega = z^n$, где n – произв. целое число. Эта ф-ция – целая.
$z = \rho e^{i\varphi}$, $\omega = re^{i\psi} = \rho^n e^{in\varphi}$ – показат. форма записи компл. чисел. => => любой сектор с центральным углом $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ пл-ти z отобр-ся на полную пл-ть ω. Различ. внутр. т-ки этого сектора отобр-ся на различ. т-ки пл-ти ω. При этом гр-цы сектора переходят в один и тот же луч $\psi = \psi_0$ на пл-ти ω.





Ф-ция $\omega = z^n$ – n-листная ф-ция

Пример 2: $\omega = e^z$



Ф-ция $\omega = e^z$ – бесконечно риманова поверхность.

4

Интегральная формула Коши

Т: Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в области D и непр-на в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда для любой внутренней точки z области D имеет место ф-ла:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$ где Γ - граница области D, проходимая в положительном направлении.

Т.о., значение ф-ции $f(z)$ в произв. точке области D опред-ся ее значениями только на границе.

Док-во: Исключим из области D круг малого радиуса r с центром в точке z. В полученной при этом области D^* и числитель и знаменатель подынтегральной ф-ции $f(\zeta)/(\zeta - z)$ аналитичны отн-но переменного ζ, причем знаменатель отличен от нуля. Поэтому эта ф-ция аналитична в области D^* и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^*$. По теореме Коши для многосвязной обл-ти интеграл вдоль границы области D^* равен нулю,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$ где γ_r - окружность $|\zeta - z| = r$. Меняя направление интегрирования во втором слагаемом, получаем, что

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Т.к. $\int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$, запишем $f(z)$ так:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Имеем: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi$. (1)

Заметим, что лев. часть не зависит от радиуса r вспомогательного круга. Оценим правую часть последнего соотношения. Имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_r}\left|\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\right||d\xi| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\max\limits_{\gamma_r}|f(\xi)-f(z)|}{r}\cdot 2\pi r = \max\limits_{\gamma_r}|f(\xi)-f(z)|.$$

Ф-ция $f(z)$ аналитична, => непрерывна в области D. Поэтому для $\forall\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что $|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$ для $\forall\xi$, удовл-х условию $|\xi - z|<\delta$. =>

=> за счет выбора радиуса r интеграл в правой части (1) может быть сделан сколь угодно малым. С другой стороны, лев. часть рав-ва (1) от r не зависит => рассматриваемая разность = 0.

Формула среднего значения

▲ Если, в частности, Г - окружность $|\xi - z| = R$, то, полагая в формуле Коши $\xi - z = Re^{i\theta}$, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z+Re^{i\theta})\,d\theta \quad \text{— ф-ла ср. значения}$$

Принцип максимального значения модуля анал. ф-ции

Пусть ф-ция $f(z)$ явл-ся аналитической в области $\mathcal{G}$ и непрерывной в замкн. области $\bar{\mathcal{G}}$. Тогда или $|f(z)| = const$, или максим. значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области.

Интеграл типа Коши и возможность его дифференцирования под знаком интеграла.

Пусть задана ф-ция 2-х компл. переменных $f(z,\xi)$, однозначно определенная для значений компл. переменной $z = x+iy$ из области $\mathcal{G}$ и для значений компл. перем-й $\zeta = \xi + i\eta$, принадл-х некот. кусочно-гладкой кривой C. Взаимное расположение области $\mathcal{G}$ и кривой C может быть совершенно произвольно. Пусть ф-ция 2-х компл. переменных $f(z, \zeta)$ удовл-ет след. условиям:

1) Ф-ция $f(z,\zeta)$ при любом значении $\zeta \in C$ явл-ся аналит. ф-цией z в обл-ти $\mathcal{G}$.

2) Ф-ция $f(z,\zeta)$ и ее произв-ная $\frac{\partial f}{\partial z}(z,\zeta)$ явл-ся непрерывными функциями по совокупности переменных z, ζ при произвольном изменении z в области $\mathcal{G}$ и ζ на кривой C.

$$F(z) = \int_C f(z,\zeta)\,d\zeta = U(x,y) + iV(x,y)$$

Т: Ф-ция $F(z)$ явл-ся аналит. функцией компл. переменной z в области $\mathcal{G}$, причем производную ф-ции $F(z)$ можно вычислять при помощи дифф-ния под знаком интеграла.

$$U(x,y) = \int_C u(x,y,\xi,\eta)\,d\xi - v(x,y,\xi,\eta)\,d\eta.$$

$$U_x(x,y) = \int_C u_x\,d\xi - v_x\,d\eta \quad ; \quad U_y(x,y) = \int_C u_y\,d\xi - v_y\,d\eta.$$

$$V_y(x,y) = \int_C v_y\,d\xi + u_y\,d\eta = \int_C u_x\,d\xi - v_x\,d\eta = U_x$$

$$V_x(x,y) = \int_C v_x\,d\xi + u_x\,d\eta = -\int_C u_y\,d\xi - v_y\,d\eta = -U_y.$$

Т.о. для $F(z)$ выполнены усл-я Коши-Римана <=> $F(z)$ - анал.

Бескон. дифференцируемость аналитич. ф-ции.

Т: Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в области D и непр-на в замкн. области $\bar{D}$. Тогда в каждой внутр. точке z области D у ф-ции $f(z)$ сущ-ют производные всех порядков и имеют место формулы:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta,$$ где Γ - граница области D.

Док-во: Убедимся сначала в справ-ти ф-лы (1) при $n=1$. Рассм разностное отношение:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Применяя ф-лу Коши для значений $f(z)$ в т-х z и $z+h$ обл-ти D, запишем его в след виде:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-(z+h)}\,d\xi - \int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\,d\xi$$

При $h \to 0$ ф-ция $\frac{1}{\xi-z-h} \to \frac{1}{\xi-z}$ равн-но для всех точек ξ на кривой Γ =>

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\,d\xi = \int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi \Rightarrow$$

=> сущ-ние произв-ной $f(z)$ и ф-ла:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi.$$

Предполагая ф-лу $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$ верной для некоторого $k=n$, точно такими же рассуждениями доказать можно ее справедливость для $n=k+1$.

Теорема Морера

(Т): Пусть ф-ция $f(z)$ явл-ся непрер-й в односвяз. области D и интеграл от $f(z)$ по люб. замкн контуру, целиком принадл-щу D, равен нулю. Тогда $f(z)$ явл-ся аналит-кой ф-цией в обл-ти D.

Док-во: см. Неопр интеграл (было доказано, что при условиях теоремы ф-ция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$, где z_0 и z - произвольные т-ки обл-ти D, а инт-л берется по любому пути, соединяющему точки эти в обл-ти D, явл-ся аналитической в этой обл-ти функцией, причем $F'(z) = F(z)$. Но, как только это было установлено, производная аналит ф-ции также явл-ся аналит. функцией, т.е сущ-ет непрерыв производная ф-ции $f'(z)$, а именно ф-ция $F''(z) = f'(z)$, ч.т.д. (обр. к т. Коши).

Теорема Лиувилля

Т: Пусть на всей компл пл-ти ф-ция $f(z)$ явл-ся анал-кой, а ее модуль равномерно ограничен. Тогда эта ф-ция $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Док-во: Запишем знач произв-ной $f'(z)$ в произв. т. z:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \text{ причем интегр-ние}$$

будем вести по окр-ти некот. радиуса R с ц. в т-ке z, т.е. $|\xi - z| = R$. По усл. теоремы $\exists M = const$, что $|f(\xi)| \le M$ независимо от R. =>

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\xi)|}{R^2} ds \le \frac{M}{R}.$$

Т.к. радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произв-ти выбора т-ки z заключаем, что $|f'(z)| = 0$ на всей компл. пл-ти => => $f(z) \equiv const$, ч.т.д.

5

Функциональный ряд

▲ Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз-ся **сходящимся**, если сх-ся послед-ть $\{S_n\}$ его частич. сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. При этом предел S посл-ти $\{S_n\}$ наз-ся **суммой** ряда.

Необх. усл-е сх-ти ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, что $|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Если сх-ся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ с действ. полож. членами $\Rightarrow$ ряд сх-ся.

1) Пр-к Даламбера: ряд сх-ся ($\sum |a_k|$), если начиная с некот-го N, отношение $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq l < 1$ для $\forall n \geq N$.

2) Пр-к Коши: Если $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow$ сх-ся.

Члены функ. рядов – компл. переменные.

▲ Пусть в обл-ти D опр-на бесконеч. послед-ть однознач. ф-й компл. перем-ной $\{u_n(z)\}$. Выражение типа $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ наз-ся **ф. рядом**.

▲ Ф. ряд наз-ся сх-ся в обл-ти D, если при любом $z \in D$ соотв-щий ему числ. ряд сх-ся. Если ряд $\sum u_n(z)$ сх-ся в обл-ти D, то в D можно опр-ть однозн. ф-цию $f(z)$, значение кот-й в кажд. т-ке обл-ти D равно сумме соотв-го числового ряда. Это **сумма ряда** в обл-ти D.

▲ Для любой фиксир. т-ки $z \in D$ и любого заданного полож. числа ε можно указать такой номер N, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k(z) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N(\varepsilon, z)$$

Равномерная сходимость

▲ Если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ справ-во:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

выполняется сразу для всех точек z обл-ти D, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n(z)$ наз-ся <u>равномерно</u> <u>сх-ся</u> в обл-ти D

<u>Пр-к</u> <u>Вейерштрасса</u>: Если всюду в обл-ти D члены ф. ряда могут быть мажорированы членами абс-но сх-ся ч. ряда, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равном-но в обл-ти D.

<u>Кр-й</u> <u>Коши</u>: Для того чтобы ряд сх-ся равном-но в обл-ти D, необх. и дост., чтобы для любого $\varepsilon > 0$ сущ-ло такое $N(\varepsilon)$, что одновременно во всех точках обл-ти D вып-ся соотношение:

$$|S_{n+m}(z) - S_n(n)| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N \text{ и для } \forall p\text{-нату}$$

<u>Почленное</u> <u>интегрирование</u> <u>равномерно</u> <u>сх-ся</u> <u>ряда</u>

Т: Если ф-ции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ непр-ны в пром-ке $X = [a; b]$ и составленный из них ряд сх-ся в этом промежутке <u>равномерно</u>, то интеграл от суммы $f(x)$ ряда можно представить:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots \quad (1)$$

<u>Док</u>-<u>во</u>: Ввиду непрер-ти функций $u_n(x)$ и $f(x)$ существ-ние всех этих интегралов очевидно. Проинтегрируем тождество:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \varphi_n(x) \quad \text{в пр-ке } [a; b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Т.о. сумма n членов ряда(1) разнится от интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ дополнит. членом $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$. Для док-ва разложения (1) нужно лишь установить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0$

В силу равном. сх-ти ряда, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что при $n > N$: $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x в рассм. промежутке.

Тогда для тех же значений n будет:

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon, \quad \text{ч.т.д}$$

Теорема Вейерштрасса о рядах аналит. ф-ций

(Т): Пусть ф-ции $u_n(z)$ явл-ся аналит. в обл-ти D, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх-ся равномерно в люб. замкн подобласти $\overline{D'}$ обл-ти D к ф-ции $f(z)$. Тогда:

1) $f(z)$ явл-ся анал-ной функцией в обл-ти D
2) $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$
3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сх-ся равном-но в люб. замкн. подобл-ти $\overline{D'}$ области D.

Док-во: 1) Рассм. $z_0 \in D$, z_0 - произв. внут. т-ка и построим односвяз. подобласть D' области D, $z_0 \in D'$.
Т.к. $f(z)$ - непрер. ф-ция в обл-ти D, рассм. интеграл от $f(z)$ по произв. контуру замкнутому C, целиком лежащему в обл-ти D', имеем:
$\int\limits_C f(\xi)\,d\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_C u_n(\xi)\,d\xi = 0$ - вып-ны все усл-ия т. Морера. =>
=> $f(z)$ - ф-ция анал-кая в окр-ти D' т-ки z_0. В силу произв-ти выбора т-ки z_0 отсюда следует аналит-ть $f(z)$ в обл-ти D.
2) Фиксируем произв. т-ку $z_0 \in D$ и выб. замк. контур C, целиком лежащий в построенной выше подобласти D' и содер-щий т-ку z_0 внутри. Миним. расстояние от т-ки z_0 до контура C об-м через d.
Рассм. ряд: $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ Т.к. $\min|z-z_0| = d > 0$ =>
=> сх-ся равномерно на C. Получаем $f^{(k)}(z_0) = \sum\limits^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$. Т.к. z_0 - произв. т-ка обл-ти D => утверждение 2) доказано.
3) Рассм. произв. $\overline{D'}$ обл-ти D и построим в D замк. контур C, $\overline{D'} \in C$ внутри, причем $|z-\xi| \geq d > 0$

Т.к. $r_n(z)$ - аналит. ф-ция в D, то для $\forall z \in \overline{D'}$ имеет место: $\dfrac{k!}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{r_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\,d\xi = r_n^{(k)}(z)$
$r_n^{(k)}(z)$ - остаток ряда $\sum\limits^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ => в силу равном. сх-ти исх. ряда $\sum\limits_1^{\infty} u_n(z)$ для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что на контуре C $|z-\xi| > d$ при $n \geq N$ имеет место равном. оценка $|r_n(\xi)| < \varepsilon \cdot \dfrac{2\pi d^{k+1}}{k!\,L}$, L - длина контура C. => $|r_n^{(k)}(z)| \leq \dfrac{k!}{2\pi} \int\limits_C \dfrac{|r_n(\xi)|}{|\xi-z|^{k+1}}\,ds < \varepsilon$ для $\forall z \in \overline{D'}$, ч.т.д.

6

Степенной ряд

▲ Степенным рядом наз-ся ряд вида $c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где z - независ. компл. перемен., коэф-ты c_n - заданные компл. числа

Всякий степ. ряд сх-ся в т-ке $z = z_0$

Т. Абеля: Пусть степ. ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сх-ся в некот. т-ке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд:

1) абсол-но сх-ся в круге $|z-z_0| < |z_1 - z_0| = R$;
2) равномерно сх-ся в круге $|z-z_0| \le r < R$

Док-во: По усл-ю числ. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ - сх-ся. В силу необх. пр-ка сх-ти общ. член этого ряда стр-ся к нулю при $n \to \infty$. Из того, что всякая сх-ся посл-ть ограничена, вытекает сущ-ние $K = const$ такой, что $|c_n(z_1-z_0)^n| = |c_n| R^n \le K$ для $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$

Возьмем т-ку z, такую что $|z-z_0| \le r < R = |z_1 - z_0|$.
Из условия этого следует, что $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} \le \frac{r}{R} = q < 1$.
Тем самым справ-ва след. оценка:

$$|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(z_1-z_0)^n| \cdot \left|\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\right| \le Kq^n$$

- это означает, что для $\forall$ точки из круга степ. ряд мажорируется сх-ся геом. прогрессией $K\sum\limits_{0}^{\infty} q^n$. => ряд степенной сх-ся абс-но и равномерно в круге $|z-z_0| \le r$.

Круг сходимости и радиус сходимости

1) Пусть степ. ряд расх-ся в нек. т-ке z_1. Тогда этот ряд расх-ся в каждой т-ке z, удовл-й нер-ву: $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

Док-во: Предположим противное: в нек. т-ке z_2, уд-щей нер-ву $|z_1-z_0| < |z_2-z_0|$, ряд сх-ся. Тогда по т. Абеля он должен сх-ся и в т-ке z_1. Это против. условию.

2) Для любого степ. ряда найдется число R такое, что в круге $|z-z_0|<R$ ряд сх-ся, а вне круга, при $|z-z_0|>R$, расх-ся.

Док-во: Обозначим через S мн-во точек, в кот-х ряд сх-ся. Мн-во S непусто: при $z=z_0$ ряд с люб. коэф-ми сх-ся ($R=0$).
Если мн-во S неогр-но, то ряд сх-ся в кажд. т-ке комп. пл-ти (∞).
Пусть мн-во S точек сх-ти ряда ограничено. Положим $R=\sup\limits_{z\in S}|z-z_0|$
Ясно, что во всех точках z', удовл-х неравенству $|z'-z_0|>R$, ряд расходится.
Если $R>0$, то наиб. областью сх-ти данного ряда явл-ся круг $|z-z_0|<R$
В точках границы $|z-z_0|=R$ ряд может и сх-ся и расх-ся.

▲ Обл-ть $|z-z_0|<R$, $R>0$, наз-ся <u>кругом</u> <u>сходимости</u> степ. ряда

▲ Число R ($R=\sup\limits_{z\in S}|z-z_0|$) наз-ся <u>радиусом</u> <u>сх-ти</u> ряда

Формулы R: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, $c_n\neq 0$, $\forall n$, или

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$, если указан. пределы сущ-ют.

<u>Ф-ла Коши-Адамара</u>: $R=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$, $\dfrac{1}{R}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$,

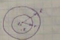
<u>Теорема Тейлора</u>

Т: Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<R$. Тогда в этом круге ф-ция $f(z)$ может быть представлена в виде сумм. сх-ся степ. ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

<u>Док</u>-<u>во</u>: Пусть z - произв. т-ка круга $|z-z_0|<R$.
Построим круг радиуса $r<R$ с центром в т-ке z_0, содерж-й т-ку z. Обозначим через γ_r огранич. его окр-ть $|\xi-z_0|=r$. По интегр. формуле Коши имеем: $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

Для люб. т-ки ξ на окр-ти γ_r вып-ся соотношение $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} = q < 1$



Геом. прогрессия: $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)} = \Delta$

$= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$ на окр-ти γ_r мажорируется сх-ся г. рядом:

$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{r(1-q)}$ => сх-ся абс-но и равн-но по ξ.

Умножим обе части на $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$. Получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Это не нарушит равном. сх-ти ряда, т.к. ф-ция $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ непр-на => ограничена на γ_r. Поэтому возможно почленное интегрирование полученного ряда вдоль γ_r:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \, (z-z_0)^n$ Полагая, что:

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \; n = 0, 1, \ldots$ (2) и учитывая ф-лу Коши, имеем:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$. Т.к. z - произв. т-ка круга $|z-z_0| < R$ => построенный степ. ряд сх-ся к $f(z)$ всюду внутри эт. круга. Коэф-ты c_n не зависят от радиуса r окр-ти γ_r $(0 < r < R)$

$\blacktriangle$ Степ. ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэф-ты кот-го опр-ся равенствами (2), наз-ся рядом Тейлора ф-ции $f(z)$ с центром в т-ке z_0.

Коэф-ты тейлор. разложения: $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots$ – опр-ны однозначно.

7

Единственность аналитической функции

▲ Пусть $f(z)$ – аналит. ф-ция в области D. Точка $z_0 \in D$ наз-ся **нулем** ф-ции $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Разложение ф-ции $f(z)$ в окр-ти ее нуля z_0 в степ. ряд имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \text{ т.е. } c_0=0.$$

▲ Если наряду с c_0 равны нулю и коэф-ты $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$, а $c_k \neq 0$, то т-ка z_0 наз-ся **нулем** **k-го** **порядка**. =>
=> $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0, \dots, f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

В окрестности нуля k-го порядка разложение ф-ции $f(z)$ в степ. ряд имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k g(z), \text{ где}$$

$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-z_0)^n$ – анал-на в окр-ти т-ки z_0, $g(z_0)\neq 0$ и круги сх-ти рядом $f(z)$ и $g(z)$ совпадают.

Т: (т. единственности) Пусть ф-ция $f(z)$ явл-ся анал-кой в обл-ти D и обр-ся в нуль в различных точках $z_n \in D$, $n=1,2,\dots$ Если послед-ть $\{z_n\}$ сх-ся к пределу a, принадлежащему той же области, то ф-ция $f(z)$ тождественно равна нулю в области D.

Док-во: Т.к. $a \in D$, то ф-цию $f(z)$ можно разложить в степ. ряд в окр-ти данной т-ки: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, причем радиус R_0 сх-ти данного ряда не меньше расстояния от т-ки a до границы обл-ти. Т.к. $f(z)$ – непр. ф-ция => $f(a)=0$ => => $c_0=0$, и разложение ф-ции $f(z)$ в окр-ти $z=a$ имеет вид:

$$f(z)=(z-a) f_1(z), \quad \text{где } f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n$$

Т.к. $f_1(z_n)=0 \Rightarrow f_1(a)=0 \Rightarrow c_1=0$ и разложение $f_1(z)$ в окр-ти a: $f_1(z)=(z-a) f_2(z)$, где $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$.

Анал-но получим $f_2(a)=0$, т.е. $c_2=0$. Неогран. продолжая:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ – все коэф-ты } c_n \text{ в разложении } f(z)$$

в окр-ти т-ки a равен нулю. => $f(z) \equiv 0$ внутри круга $|z-a| < R_0$

Понятие аналитического продолжения

▲ Пусть на отрезке $[a, b]$ действительной оси x задана непрер. ф-ция $f(x)$ действ. переменной; тогда в некоторой обл-ти D компл. пл-ти, содержащей отрезок $[a, b]$ действ. оси, может сущ-ть только одна аналит. ф-ция $f(z)$ компл. переменной z, принимающая данные значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Назовем ф-цию $f(z)$ аналитическим продолжением ф-ции $f(x)$ действит. переменной x в компл. область D.

Примеры: 1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

2) $\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3) $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Т: Если ф-ции $f_i(z)$ явл-ся аналит-ми ф-ми z в обл-ти D, содержащей отрезок $[a, b]$ действ. оси x, то из соотн-ния $F[f_1(x), \dots, f_n(x)] = 0$ при $a \le x \le b$ => $F[f_1(z), \dots, f_n(z)] = 0$ при $z \in D$.

Пр-р: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Рассм. ф-цию $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ компл. перем-ной z. Согласно общ. св-м аналит. ф-ций $F(z)$ явл-ся целой ф-цией z, причем для действ. значений $z = x$ $F(x) \equiv 0$. => по т. ед-ти мы получим, что на всей компл. пл-ти z вып-ся соотношение: $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$.

8

Понятие особой точки

▲ Пусть ф-ция $f(z)$ задана в обл-ти D, ограниченной контуром Γ. Тогда т-ка $z_0 \in \overline{D}$ наз-ся правильной точкой ф-ции $f(z)$, если сущ. сх-ся степ. ряд $\sum_0^\infty c_n (z-z_0)^n$, кот-й в общ части обл-ти D и своего круга сходимости $|z-z_0| < \rho(z_0)$ сх-ся к ф-ции $f(z)$. ($\rho(z_0)>0$)

▲ Точки $z \in \overline{D}$, не явл-ся прав. т-ми ф-ции $f(z)$, наз-ся ее особ. т-ми.

Ясно, что если $f(z)$ – аналит. в обл-ти D, то все внутр. т-ки этой области – прав. т-ки ф-ции $f(z)$. Т-ки границы Γ могут быть как правильными, так и особыми т-ми анал. ф-ции $f(z)$. Очевидно, что все т-ки границы Γ, лежащие внутри круга $|z-z_0| < \rho(z_0)$ с центром в некот. прав. т-ке $z_0 \in \overline{D}$, также явл-ся прав. т-ми ф-ции $f(z)$.

Теорема о наличии особой точки на границе круга сходимости

Т: На границе круга сходимости степ. ряда лежит хотя бы одна особая точка аналит. ф-ции $F(z)$, к которой сх-ся данный ряд.

Док-во: Предположим, что все т-ки окр-ти C_0 круга K_0 сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n (z-z_0)^n$ явл-ся правильными, т.е. для любой т-ки $\hat{z} \in C_0$ сущ-ет такое $\rho(\hat{z}) > 0$, что в общ. части круга K_0 и своего круга сх-ти $|z-\hat{z}| < \rho(\hat{z})$ соотв-щий ряд $\sum c_n(\hat{z})(z-\hat{z})^n$ сх-ся к $f(z)$. Пусть радиус круга K_0 есть R_0.

Рассм. ф-цию $\rho(\hat{z})$, опред-ную на окр-ти C_0. Покажем, что для любых 2-х т-к $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ на окр-ти C_0 выполнено условие:

$$|\rho(\hat{z}_1) - \rho(\hat{z}_2)| \le |\hat{z}_1 - \hat{z}_2|$$

Положим, что это условие не выполнено, например, $\rho(\hat{z}_2) - \rho(\hat{z}_1) = |\hat{z}_1 - \hat{z}_2| + \delta$, где $\delta > 0$. Тогда круг $|z-\hat{z}| < \rho(\hat{z}_1)$ сх-ти ряда $\sum_0^\infty c_n(\hat{z}_1)(z-\hat{z}_1)^n$ лежит внутри круга $|z-\hat{z}_2| < \rho(\hat{z}_2)$ сх-ти ряда $\sum c_n(\hat{z}_2)(z-\hat{z}_2)^n = f_2(z)$

В общ. части этих кругов и круга K_0 оба ряда сх-ся к $f(z)$.

$\Rightarrow f_2(z)$ – анал. продолжение ф-ции $f_1(z)$.

Это значит, что в круге $|z-\hat{z}_1| < \rho(z_1)+\delta$ опр-на анал. ф-ция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в круге $|z-\hat{z}_1| < \rho(\hat{z}_1)$. В силу теоремы Тейлора отсюда следует, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_0^\infty c_n(\hat{z}_1)(z-\hat{z}_1)^n$ не меньше, чем $\rho(\hat{z}_1)+\delta$, что противоречит исх. данным. Т.е. условие:

$$|\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)| \le |\hat{z}_1-\hat{z}_2| \text{ – установлено.}$$

Из этого условия $\Rightarrow$ равном. непрер-ть ф-ции $\rho(\hat{z})$ на кривой C_0. Действ-но, соотн-ние $|\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)| < \varepsilon$ выполняется для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, если только выполнено условие $|\hat{z}_1-\hat{z}_2| < \varepsilon$. Т.к. ф-ция $\rho(\hat{z}) > 0$, то она ограничена снизу и в силу непрер-ти достигает на C_0 своей точной грани нижней:

$\rho(\hat{z}) \ge \rho(\hat{z}_0) = \rho_0 > 0$, т.к. для $\forall \hat{z} \in C_0$ вып-ся нер-во $\rho(\hat{z}) > 0$. В силу единств-ти анал. продолжения можно утверждать, что в круге $|z-z_0| < R_0+\rho_0$ опр-на однознач. анал. ф-ция $F(z)$, совпадающая с $f(z)$ в круге $|z-z_0| < R_0 \Rightarrow$ радиус сх-ти исх. степ. ряда $\sum c_n(z-z_0)^n$ равен $R_0+\rho_0$, а не R_0. Но это противоречит условию теоремы. Т.е. предположение, что все т-ки границы круга сх-ти правильные, привело к противоречию, ч.т.д.

Ряд Лорана

Ряды Тейлора служат эффективным средством для изучения ф-ций, аналитических в круге $|z-z_0|<R$. Для исследования ф-ций, анал-х в кольцевой области, $0 \le r < |z-z_0| < R \le +\infty$ оказывается возможным построение разложений по полож. и отриц. степеням $(z-z_0)$ вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$ обобщающим тейлор. разложения.

Этот ряд, понимаемый как сумма 2-х рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m},$$ наз-ся <u>рядом Лорана</u>.

Областью сх-ти ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ явл-ся общ. часть областей сх-ти каждого из рядов. Найдем ее.

Областью сх-ти первого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ явл-ся круг $|z-z_0|<R$, радиус кот-го опр-ся по ф-ле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Внутри круга сх-ти ряд $\sum_{0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ сх-ся к анал. ф-ции, причем в любом круге меньшего радиуса $|z-z_0|<R'$, $R'<R$, он сх-ся абс-но и равном-но.

Второй ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$ представляет собой степ. ряд отн-но переменного $\xi = \frac{1}{z-z_0}$: $\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \xi^m$. Этот ряд сх-ся внутри своего круга сх-ти к аналит. ф-ции компл. перем-го ξ,

$$|\xi| < \frac{1}{r}, \text{ где } r = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_{-m}|},$$ причем в люб. круге меньшего радиуса он сх-ся абсолютно и равномерно. Это означает, что областью сх-ти ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$ явл-ся внешность круга – $|z-z_0|>r$.

Если $r<R$ => сущ-ет общ. область сх-ти рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$ – круговое кольцо $r<|z-z_0|<R$, в котором

ряд $\sum_{n=-\infty} c_n(z-z_0)^n$ сх-ся к анал. ф-ции. При этом в люб. кольце $r' < |z-z_0| < R'$, где $r < r' \le R' < R$, он сх-ся абс-но и равн-но.

Изолированные особые точки, их классификация

Точка z_0 наз-ся изолированной особой точкой ф-ции $f(z)$, если сущ-ет кольцевая окр-ть т-ки z_0 – $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ (это мн-во иногда называют проколотой окрестностью т-ки z_0), в кот-й ф-ция $f(z)$ однозначна и аналитична. В самой т-ке z_0 ф-ция либо не определена, либо не является однозначной и аналитичной. В зависимости от поведения ф-ции $f(z)$ при приближении к т-ке z_0 различ-ся три типа особых точек.

Изолированная особая точка называется:

1) устранимой, если сущ-ет конечный $\lim_{z\to z_0} f(z)$;
2) полюсом, если $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
3) существенно особой точкой, если ф-ция $f(z)$ не имеет предела при $z \to z_0$.

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса

Т: Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в любой окр-ти существенно особой точки z_0 ф-ции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка z_1, в кот-й значение ф-ции $f(z)$ отличается от произвольно заданного компл. числа B меньше чем на ε.

Док-во: Предположим, что теорема не верна, т.е. при заданном компл. числе B и заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_0 > 0$, что во всех точках z из η_0-окр-ти точки z_0 значение ф-ции $f(z)$ отличается от заданного B больше чем на ε:

$$|f(z) - B| > \varepsilon, \quad |z - z_0| < \eta_0.$$

Рассм. вспомог. ф-цию $\Psi(z) = \frac{1}{f(z)-B}$. В силу того, что $|f(z)-B| < \varepsilon$, $|z-z_0| < \eta_0$ => $\Psi(z)$ – определена и ограничена в η_0-окрестности т-ки z_0 => т-ка z_0 явл-ся устранимой особой точкой ф-ции $\Psi(z)$. Это значает, что разложение ф-ции $\Psi(z)$

в окр-ти т-ки z_0 имеет вид:

$$\varphi(z) = (z-z_0)^m \tilde{\varphi}(z), \quad \tilde{\varphi}(z_0) \neq 0$$

Тогда, в силу определения ф-ции $\varphi(z)$, в данной окр-ти т-ки z_0 им. место след. разложение ф-ции $f(z)$:

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} \tilde{f}(z) + B, \text{ где анал. ф-ция } \tilde{f}(z) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$$

ограничена в ρ- окрестности точки z_0. Но разложение это означает, что точка z_0 явл-ся или полюсом порядка m, или при $m=0$ правильной точкой ф-ции $f(z)$, и разложение в ряд Лорана последней должно содержать лишь конечное число членов, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Понятие вычета

Пусть т-ка z_0 явл-ся изолир. особ. точкой однозн. анал. ф-ции $f(z)$. В окр-ти эт. т-ки ф-ция $f(z)$ может быть разложена ед. образом в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

и в частности, $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) d\xi$.

▲ **Вычетом** анал. ф-ции $f(z)$ в изолир. особ. т-ке z_0 наз-ся компл. число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int f(\xi) d\xi$, взятому в полож. направлении по любому лежащему в области анал. ф-ции $f(z)$ замкн. контуру γ, содержащему ед. особ. т-ку z_0 ф-ции $f(z)$.

Ф-ла для выч. вычета ф-ции $f(z)$ в ее из. т-ке:

$$\text{Выч}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) d\xi = c_{-1}.$$

1) Пусть т-ка z_0 – полюс 1-го пор-ка $f(z)$. => в окр-ти z_0 им. разлож-е:

$$f(z) = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \quad (\text{умн-м все на } (z-z_0)) =>$$

$$=> \quad c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а т-ка z_0 – нуль 1-го пор-ка $\psi(z)$,

т.е. $\psi(z) = (z-z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \ldots$, $\psi'(z_0) \neq 0$. =>

=> Ф-ла выч-ния вычета в полюсе 1-го порядка:

$$\text{Выч}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

2) Пусть т-ка z_0 – полюс пор-ка m ф-ции $f(z)$ =>

$$=> f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \quad (* (z-z_0)^m) =>$$

$$=> (z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

Взяв произв-ную пор-ка $(m-1)$ от обеих частей рав-ва, перейдя к пределу при $z \to z_0$, получим:

Ф-ла выч. вычета в полюсе m-го пор-ка: $= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$.

Основная теорема вычетов

(Т): Пусть ф-ция $f(z)$ явл-ся анал-кой всюду в замкн. области $\bar{D}$, за исключением конеч. числа изолир. особых т-к z_k $(k=1,\dots,N)$, лежащих внутри области D.
Тогда $\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z), z_k]$, где Γ^+ – полная граница обл-ти D, проходимая в полож. направлении.

Док-во: Если $f(z)$ – анал-кая в замкн. области $\bar{D}$, то все точки границы Γ эт. обл-ти – прав. т-ки ф-ции $f(z)$. Выделим каждую из особых точек z_k ф-ции $f(z)$ замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри других особых точек, кроме точки z_k.
В замкн. многосвязной области, ограниченной контуром Γ и всеми контурами γ_k ф-ция $f(z)$ явл-ся всюду аналитической. =>

=> по второй теореме Коши имеем:

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\gamma_k} f(\xi)\,d\xi = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z), z_k].$$

Пусть т-ка $z=\infty$ – изол. особ. т-ка $f(z)$.

▲ Вычетом ан. ф-ции $f(z)$ в т-ке $z=\infty$ наз-ся компл. число, равное значению интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\xi)\,d\xi,$$ где контур C – произв. замкн. контур, вне которого ф-ция $f(z)$ явл-ся анал-кой и не имеет особ. т-к, отличных от ∞. =>

$$\text{Выч}\,[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\xi)\,d\xi = -C_{-1}. \Rightarrow$$

=> если т-ка $z=\infty$ явл-ся устранимой особ. т-й ф-ции $f(z)$, то Выч $[f(z), \infty]$ может быть отличным от нуля, в то время как вычет в конечной устранимой особой точке всегда равен нулю.

Применение теор. вычетов к вычислению опред. интегралов.

1) $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

Рассм. $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$, где R – рац. ф-я своих аргументов.

Замена: $z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$,

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$.

При изменении θ от 0 до 2π компл. перем-я z пробегает замкн. контур – окружность $|z| = 1$ в полож. напр-нии. Т.о. интеграл I переходит в инт-л по замкн. контуру от ф-ции компл. переменной:

$$I = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} R\left[z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right]\frac{dz}{z}, \text{ где } \tilde{R}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подынтегр. ф-ция – ф-ция, анал-кая внутри круга $|z| = 1$ всюду, за иск-ем конечного $N \leq m$ числа особ. т-к z_k, явл-ся нулями знаменателя $(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}[\tilde{R}(z), z_k] \quad \text{Точки } z_k \text{ – полюсы ф-ции } \tilde{R}(z)$$

Пусть α_k – порядок полюса z_k $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \leq m\right) \Rightarrow$

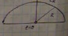
$$\Rightarrow \quad I = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{\alpha_k - 1}}{dz^{\alpha_k - 1}}\left[(z - z_k)^{\alpha_k}\tilde{R}(z)\right]$$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

<u>Лемма 1</u>: Пусть ф-ция $f(z)$ явл-ся анал-кой в верх. полупл-ти $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, за исключением конеч. числа изолир. особ. точек, и сущ-ют такие полож. числа R_0, M и δ, что для всех точек верх. полуплоскости, уд-х условию $|z| > R_0$ имеет место оценка:

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0.$$

Тогда $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C'_R} f(\xi)\, d\xi = 0$, где контур интегр-ния C'_R – полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ в верх. полуплоскости z



Т.к. $\left|\int\limits_C f(\xi)\, d\xi\right| \leq \int\limits_C |f(\xi)|\, ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{C'_R} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \int\limits_{C'_R} |f(\xi)|\, ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0, \text{ ч.т.д.}$$

Т: Пусть ф-ция $f(x)$, заданная на всей действ. оси $-\infty < x < \infty$, может быть аналитически продолжена на верх. полуплоскость

$\mathrm{Im}\, z \geq 0$, причем ее анал. продолжение, ф-ция $f(z)$, удовл-т условиям Леммы 1 и не им. особых точек на действ. оси. Тогда несобств. интеграл 1-го рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сущ-ет и равен:

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z), z_k],$$ где z_k - особые т-ки ф-ции $f(z)$ в верх. полуплоскости.

Док-во: По усл. т-мы ф-ция $f(z)$ в верх. полупл-ти им. конеч. число особых точек z_k, причем все они удовл-ют условию $|z_k| < R_0$. Рассм. замкн. контур, состоящий из отрезка действ. оси $-R \leq x \leq R$ ($R > R_0$) и полуокр-ти C'_R, $|z| = R$, в верх. полуплоскости. В силу осн. т-мы вычетов:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z), z_k].$$

Т.к. выполнены условия леммы 1, то предел второго слагаемого в лев. части при $R \to \infty$ равен нулю; прав. часть при $R > R_0$ от R не зависит. $\Rightarrow$ предел первого слагаемого существует и его значение опр-ся формулой (1), ч.т.д, что требовалось док.

Лемма Жордана

Лемма Жордана: Пусть ф-ция $f(z)$ – анал-кая в верх. полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$, за исключением конеч. числа изолир. особых точек, и равномерно отн-но $\arg z$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$ где C'_R – дуга полуокружности $|z| = R$ в верх. полуплоскости z.

Док-во: Условие равномер. стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z| = R$ имеет место оценка $|f(z)| < \mu_R$, $|z| = R$, где $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$. С помощью эт. соотн-ния оценим след. интеграл. Сделаем замену переменной, положив $\zeta = Re^{i\varphi}$, и воспользуемся очевидным соотношением:

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi)\,d\xi\right| \le M_R\cdot R\int_0^{\pi} |e^{ia\xi}|\,d\varphi = M_R\cdot R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2M_R\cdot R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi < 2M_R\cdot R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{a}M_R(1-e^{-aR}) \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

ч.т.д

Логарифмический вычет

Пусть в обл-ти D задана однозн. ф-ция $f(z)$, анал-кая всюду в D, за искл-ем кон. числа изолир. ос. точек z_k $(k=1,\dots,p)$, причем все z_k, явл-ся полюсами. Предположим, что на границе Γ обл-ти D не ни нулей, ни особых точек ф-ции $f(z)$, и рассм вспомогат. ф-цию $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Δ Ф-цию $\varphi(z)$ называют <u>логарифмической производной</u> ф-ции $f(z)$, а вычеты ф-ции $\varphi(z)$ в ее особ. т-х z_m $(m=1,\dots,M)$ – <u>логарифм. вычетами</u> ф-ции $f(z)$.

Определим особ. т-ки ф-ции $\varphi(z)$ в обл-ти D. Особыми т-ми ф-ции $\varphi(z)$ будут нули $\tilde{z}_k$ $(k=1,\dots,n)$ и полюсы z_k $(k=1,\dots,p)$ ф-ции $f(z)$. Найдем вычет $\varphi(z)$ в каж. из особ. т-к.

Пусть т-ка $z=\tilde{z}_k$ явл-ся нулем пор-ка n_k ф-ции $f(z)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в окр-ти эт. т-ки $f(z)$ им. вид: $f(z)=(z-\tilde{z}_k)^{n_k} f_1(z)$, $f_1(\tilde{z}_k)\neq 0$, причем $\tilde{z}_k$ – правильная т-ка ф-ции $f_1(z)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(z) = (\ln f(z))' = n_k(\ln(z-\tilde{z}_k))' + (\ln f_1)' = \frac{n_k}{z-\tilde{z}_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\tilde{z}_k$ – полюс 1-го пор-ка ф-ции $\varphi(z)$, вычет $\varphi(z)$ в эт. т-ке равен n_k. Итак, в нуле пор-ка n_k ф-ции $f(z)$ ее логарифм. вычет равен n_k, т.е. порядку нуля: $\text{Выч}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = n_k$.

Пусть т-ка z_k – полюс пор-ка p_k ф-ции $f(z)$ $\Rightarrow$

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-z_k)^{p_k}},\ f_1(z_k)\neq 0,$$ причем т-ка z_k – прав. т-ка ф-ции $f_1(z)$. $\Rightarrow$ $\varphi(z) = -\dfrac{p_k}{z-z_k} + \dfrac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ $\Rightarrow$ z_k – полюс 1-го порядка от $\varphi(z)$, вычет в эт. т-ке равен $-p_k$. Итак, в полюсе пор-ка p_k ф-ции $f(z)$ ее лог. вычет равен: $\text{Выч}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$

Теорема Руше

(Т): Пусть ф-ции $f(z)$ и $\varphi(z)$ явл-ся анал-ми в замкн. обл-ти $\bar{D}$, причем на границе Γ области D имеет место нер-во:

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma.$$

Тогда полное число нулей в обл-ти D ф-ции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей ф-ции $f(z)$

Док-во: Для ф-ций $f(z)$ и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ вып-ны все условия теоремы 5, которая гласит:

$\boxed{T.5}$: Пусть ф-ция $f(z)$ явл. анал. всюду в замк. обл-ти $\bar{D}$, за искл. конечн. числа лежащих внутри D изолир. особых т-к z_k, кот-е все явл-ся полюсами, и пусть $f(z) \neq 0$ ни в одной т-ке гр-цы Γ обл-ти D. Тогда разность между полным числом нулей полюсов ф-ции $f(z)$ в области D опр-ся выражением: $N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$

Действ-но, $f(z)$ не им. особых т-к на Γ (она анал. в $\bar{D}$) и не обр-ся в нуль на Γ в силу ($|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$). Эти условия также выполнены для $F(z)$, т.к. $|F(z)|_\Gamma = |f(z) + \varphi(z)| \geq |f(z)|_\Gamma - |\varphi(z)|_\Gamma > 0$.

Получим: $N|f(z) + \varphi(z)| = \frac{1}{2\pi} Var[arg(f+\varphi)]_\Gamma$ =>

=> $N[f(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[arg\, f(z)]_\Gamma$. Рассм. разность:

$$N[f(z) + \varphi(z)] - N[f(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[arg(f+\varphi) - arg\, f]_\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} Var\left[arg\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)\right]_\Gamma.$$

Введем ф-цию $\omega = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$. Легко видеть, что при обходе точкой z контура Γ соотв-щая ей точка ω опишет замкн. кривую C, кот-я в силу условия ($|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$) будет целиком лежать внутри нек. круга $|\omega - 1| \leq \rho_0 < 1$.

Тем самым т-ка $\omega = 0$ лежит вне кривой C =>

=> $Var[arg\, \omega]_\Gamma = 0$, ч.т.д.

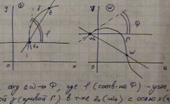
11

Геом. смысл произв-ной от ф-ции компл. переменного.

Пусть $\omega = f(z)$ – ф-ция, анал-кая в обл-ти D. Зафиксируем в обл-ти D т-ку z_0 и проведем через z_0 гладкую кривую γ.
Пусть ф-ция $\omega = f(z)$ отображает обл-ть D компл. пл-ти $z = x + iy$ на некоторую обл-ть G компл. пл-ти $\omega = u + iv$; при этом т-ка z_0 переходит в т-ку ω_0, а кривая γ в кривую Γ. По условию, в кажд. т-ке обл-ти D сущ-ет произв-ная $f'(z)$. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$, и представим компл. число $f'(z_0)$ в показ. форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \rho e^{i\alpha}.$$

Если т-ка $z = z_0 + \Delta z$ лежит на кривой γ, то соответствующая ей т-ка $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ лежит на кривой Γ (рисунок).



Угол, кот-й вектор Δz (в-р $\Delta\omega$) секущей кривой γ (кривой Γ) образует с полож. направл-ем действ. оси x (оси u), равен $\arg \Delta z$ ($\arg \Delta\omega$). Т.к. в пределе при $\Delta z \to 0$ и $\Delta\omega \to 0$ секущие переходят в касательные к соответствующим кривым, то:

$\arg \Delta z \to \varphi$, $\arg \Delta\omega \to \Phi$, где φ (соотв-но Φ) – угол, образ-мый касательной к кривой γ (кривой Γ) в т-ке z_0 (ω_0) с осью x (u).

При делении компл. чисел арг-ты вычитаются: $\arg \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \arg\Delta\omega - \arg\Delta z$.
Поэтому $\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta\omega \to 0} \arg\Delta\omega - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\Delta z = \underline{\underline{\Phi - \varphi}}$

Т.к. вел-на пр-ной не зав-т от того, по какому п-ну Δz стр-ся к нулю, получ. разность будет той же самой и для любой другой гладкой кривой, проходящей через т-ку z_0. => что при отображении посредством анал. ф-ции $\omega = f(z)$, у которой пр-ная $f'(z_0) \neq 0$, угол $\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$ между любыми гладкими кривыми γ и $\tilde{\gamma}$, исходящими из т-ки z_0, равен углу между их образами Γ и $\tilde{\Gamma}$, исходящими из т-ки ω_0: $\psi = \tilde{\Phi} - \Phi$.
При этом сохр-ся как абсол. величины углов, так и их направление.
Это св-во наз-ся <u>свойством</u> <u>сохранения</u> <u>углов</u>.

Т.к. $\rho = |f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta \omega|}{|\Delta z|}$, то с точностью до б. малых более высокого порядка имеет место рав-во: $|\Delta\omega| = \rho|\Delta z|$, не зависящее от выбора кривой γ.

Геом. смысл эт. рав-ва состоит в том, что б. малые окружности с центром в т-ке z_0 с точностью до б. малых высших порядков преобразуются в б. малые окр-ти с центром в т-ке ω_0. Это св-во наз-ся свойством постоянства растяжений.

▲ Взаимно однозначное отображение $\omega = f(z)$ области D пл-ти z на обл-ть G пл-ти ω наз-ся конформным, если это отображение в кажд. т-ке обл-ти D обладает свойством сохр-ния углов и св-вом постоянства растяжений.

Т.о., приведенные выше рассуждения показывают, что отображение посредством аналит. ф-ции с отличной от нуля производной конформно.

Кр-й конф-ти: Для того, чтобы отображение $\omega = f(z)$ было конформно в обл-ти D, необх. и достаточно, чтобы в этой области ф-ция $f(z)$ была однолистной и аналитической, причем $f'(z) \neq 0$ для $\forall z \in D$.

Дробно-линейная функция и ее свойства.

▲ Линейной ф-цией компл. перем-го z наз-ся ф-ция вида $\omega = az + b$, где a и b – зад. компл. числа, причем $a \neq 0$. Лин. ф-ция определена для всех значений независ. переменного z, однозначна и, т.к. обратная ф-ция $z = \frac{1}{a}\omega - \frac{b}{a}$ также однозначна, однолистна во всей пл-ти z.

Лин. ф-ция аналитична во всей компл. пл-ти, и ее производная $\frac{d\omega}{dz} = a \neq 0$, поэтому осуществляемое ей отображение конформно во всей плоскости.

▲ Дробно-линейной функцией наз-ся ф-ция вида $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c и d – заданные компл. числа, причем $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Дробно-линейная ф-ция определена для всех значений независимого переменного z, кроме $z = -\frac{d}{c}$, однозначна и, т.к. обратная ф-ция $z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$ однозначна, однолистна во всей компл. пл-ти, исключая т-ку $z = -\frac{d}{c}$. В эт. обл-ти ф-ция

$\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ аналитична и ее производная:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0,$$ поэтому осущ-мое ею отображение конформно.

Доопределим ф-цию $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ в т-ке $z = -\frac{d}{c}$, положив $\omega(-\frac{d}{c}) = \infty$, а бесконечно удаленной т-ке $\omega = \infty$ поставим в соответствие т-ку $z(\infty) = -\frac{d}{c}$. Тогда дробно-линейная ф-ция будет однолистна в расширенной компл. пл-ти z.

Св-ва: 1) Экв. форма: $\omega = \frac{1}{\xi}$, $\omega = f(z) = \lambda\frac{\alpha+z}{\beta+z}$, $\lambda = \frac{b}{d}$, $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$, $\alpha \neq \beta$. => $f(z) = \lambda\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta+z}+1\right)$, введем вспомог. ф-ции $z_1 = \beta+z$, $z_2 = \frac{1}{z_1}$, $z_3 = \lambda(\alpha-\beta)z_2+\lambda$. => отображение, осущ-е др.-лин. ф-цией, предст-ет собой совок-ть простейших отображений, осущ-х лин. ф-ми z_1 и z_3, и ф-цией $1/z$.

Т: (круговое св-во др.-лин. ф-ции): Др.-лин. ф-ция переводит окружности на пл-ти z в окр-ти на пл-ти ω.

Док-во: Дост-но показать, что преобразование инверсии, осущ-мое ф-цией $\omega = 1/z$, обладает круговым св-вом, т.к. сохранение окр-ти при лин. преобр-ии не вызывает сомнений.

Рассм. произв. окр-ть, ур-ние кот-й на пл-ти z имеет вид:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$ где A, B, C и D - действ. числа, удовлетворяющие условиям $A \neq 0$, $B^2+C^2 > 4AD$. При $A=0$ мы получим прямую; при $D=0$ - окр-ть проходит через нач. коор-т ($z=0$). При преобразовании, осущ-мом ф-цией $\omega = u+iv = 1/z$, коор-ты x, y связаны с координатами u, v соотношениями:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$ => окр-ть в новых коор-т им. вид:

$$D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0,$$ ч. т. д.

2) При отображении, осущ-м др.-лин. ф-цией, т-ки, симметричные отн-но люб. окр-ти, переходят в т-ки, симметричные отн-но образа этой окр-ти.

Функция Жуковского

▲ Ф-ция Жуковского $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ аналитична во всей пл-ти z, исключая т-ку $z = 0$.
Выясним условия на область компл. пл-ти, при кот-х ф-ция Жуковского, рассматриваемая в эт. обл-ти, будет однолистна.
Пусть т-ки z_1 и z_2 ф-ция $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводит в одну точку. Тогда

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0;$$

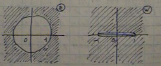
при $z_1 \neq z_2$, мы получаем, что $z_1 z_2 = 1$.

Значит, для однолистной ф-ции Жуковского необх. и дост-но выполнение условия $z_1 z_2 \neq 1$.
Примером области, удовлетворяющей условию однолистности $z_1 z_2 \neq 1$, явл-ся внешность круга $|z| > 1$. Т.к. производная функции Жуковского:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$$

всюду, кроме точек $z = \pm 1$, то отображение обл-ти $|z| > 1$ осущест-мое этой ф-цией, будет конформным.

Заметим, что внутренность ед. круга $|z| < 1$ также явл-ся областью однолистности ф-ии Жуковского.



Преобразование Лапласа и его свойства.

▲ **Преобразованием Лапласа** заданной ф-ции $f(t)$ действит. переменной t наз-ся преобразование, ставящее в соответствие ф-ции $f(t)$ ф-цию $F(p)$ компл. переменной p, определенную с пом-ю инт-ла:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad (1)$$

Т: Интеграл (1) сх-ся в обл-ти $\operatorname{Re} p > a$, где a - показатель степени роста $f(t)$, причем для $\forall x_0 > a$ инт-л (1) при $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ сх-ся равномерно.

Док-во: Для $\forall p = x + iy$ при $x > a$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $x > a_1 = a + \varepsilon$, причем $|f(t)| < Me^{a_1 t}$. Используем пр-к сравнения сходимости несобств. интегралов:

$$|F(p)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{a_1 t}\,dt = \frac{M}{x - a_1}, \quad x > a_1. -$$

- это дает основание сделать закл-ние о сх-ти инт-ла (1) при $x > a$. Если $x \geq x_0 > a_1$, то эта оценка дает:

$$|F(p)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x_0 - a_1)t}\,dt = \frac{M}{x_0 - a_1}, \text{ ч.т.д.}$$

Св-ва: 1) **Теорема единственности**: Если две непрерыв. ф-ции $f(t)$ и $\varphi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны.

2) **Теорема (линейность преобр-ния Лапласа)**: Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ - ф-ции-оригиналы, то для любых компл. постоянных α и β:

$$\alpha f(t) + \beta \varphi(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta \Phi(p).$$

Док-во: Справедливость утв-ния вытекает из св-ва линейности инт-ла, определяющего изображение:

$$\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta \varphi(t)) e^{-pt}\,dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\,dt + \beta \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt}\,dt = \alpha F(p) + \beta \Phi(p).$$

3) **Теорема подобия**: Если ф-ция $f(t)$ - оригинал и $F(p)$ - ее изображение по Лапласу, то для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Док-во: Полагая $\alpha t = \tau$, имеем:

$$f(\alpha t) \doteqdot \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4) $\boxed{\text{Теорема о диффер-нии оригинала}}$: Пусть $f(t)$ явл-ся ф-цией-оригиналом с изображением $F(p)$ и пусть $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ – также ф-ции-оригиналы, а $\tilde{s} = \max\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, где s_k – пок-ль роста ф-ции $f^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Тогда

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$ и вообще

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

5) $\boxed{\text{О диффер-нии изображения}}$: Диффер-ние изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала, $F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t)$.

Док-во: Т.к. ф-ция $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ явл-ся аналитической, то ее можно диффер-ть по p. Имеем:

$$F'(p) = -\int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt,$$

$$F''(p) = \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt,$$

. . . .

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-pt} dt.$$ Последнее и означает, что

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t).$$

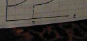
6) $\boxed{\text{Интегр-ние оригинала}}$: Инт-ние оригинала сводится к делению изображения на p: если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\xi) d\xi \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

7) $\boxed{\text{Инт-ние изображения}}$: Если $f(t) = F(p)$ и интеграл $\int_p^{\infty} F(q) dq$ сх-ся, то он служит изображением ф-ции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(q) dq.$$

8) $\boxed{\text{Запаздывание}}$: Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого полож-го τ („запаздывание") $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p)$.



Док-во: Т.к. $f(t-\tau) \equiv 0$ для $t < \tau$, то

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt.$$

Положим $\xi = t-\tau$. Тогда $dt = d\xi$. При $t=\tau$ имеем $\xi = 0$, при $t = +\infty$ имеем $\xi = +\infty$. Поэтому имеем:

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^{\infty} f(\xi)e^{-p(\xi+\tau)}\,d\xi = e^{-p\tau}\int_0^{\infty} f(\xi)e^{-p\xi}\,d\xi = e^{-p\tau}F(p).$$

9) **Смещение**: Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого положительного ~~τ (запаздывания): $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$~~ компл. числа p_0:

$$e^{p_0 t}f(t) \doteqdot F(p-p_0).$$

Свертка ф-ций: Пусть ф-ции $f(t)$ и $\varphi(t)$ огр-ны и непр-ны для всех t. Сверткой $(f*\varphi)(t)$ эт. ф-ций наз-ся нов. ф-ция от t, определяемая равенством:

$$(f*\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Умножение: Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$, то свертка $(f*\varphi)(t)$ имеет изображение $F(p)\cdot\Phi(p)$,

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot F(p)\Phi(p), \text{ или } (f*\varphi)(t) \doteqdot F(p)\Phi(p).$$

Формула обращения преобр-ния Лапласа

Т. обращения: Если ф-ция $f(t)$ есть ф-ция-оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ - ее изображение, то в люб. т-ке непр-ти ф-ции $f(t)$ вып-ся соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp,$$ где инт-л берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и понимается в смысле главного значения, т.е. как

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{s-iN}^{s+iN} F(p)e^{pt}\,dp.$$

Ф-ла $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$ - ф-ла Меллина.

Д-во: В самом деле, пусть, например, $f(t)$ - кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке $[0,a]$ ф-ция-оригинал с показателем роста s_0. Рассм. ф-цию $\varphi(t) = f(t)e^{-st}$, где $s > s_0$ - любое.

Ф-ция $\varphi(t)$ уд-ет условиям применимости интегр. ф-лы Фурье, => спр-ва ф-ла обращения преобразования Фурье,

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{i\xi t}d\xi, \text{ где}$$

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\xi t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\xi t}dt$$

Если $\varphi(t)=f(t)e^{-st}$ => $\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-i\xi t}e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-(s+i\xi)t}f(t)dt=$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(p)$, где $F(p)$ – преобр. Лапласа ф-ции $f(t)$ при $p=s+i\xi$.

Можно переписать в виде: $\varphi(t)=f(t)e^{-st}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi t}F(s+i\xi)d\xi$,

откуда получаем ф-лу обращения преобр-ние Лапласа

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(s+i\xi)t}F(s+i\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p)dp,\ s>s_0.$$

Применение пр-я Лапласа к реш-ю лин. диф-х уравнений.

Дано лин. диф. ур-ние II-го порядка с пост. коэф-ми:

(1) $a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t)$. Треб-ся найти реш-е $x(t)$ эт. ур-ния для $t>0$, удовл-щее нач. условиям: $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$.

Будем считать, что $f(t)$ – ф-ция-оригинал. Тогда $x(t)$ – тоже ф-ция-оригинал

Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$, $x(t)\risingdotseq X(p)$.

По теор. о дифф-нии оригинала имеем:

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px_0-x_1$.

Перейдем в ур-нии (1) от оригиналов к изображениям. Имеем:

$$a_0p^2X(p)-a_0px_0-a_0x_1+a_1pX(p)-a_1x_0+a_2X(p)=F(p),$$

или $(a_0p^2+a_1p+a_2)X(p)=F(p)+a_0x_0p+a_0x_1+a_1x_0$ – это алгебраич. ур-ние отн-но изобр-ния $X(p)$ искомой ф-ции. Его называют операторным уравнением. Решая его, найдем решение задачи:

$$X(p)=\frac{F(p)+a_0x_0p+a_0x_1+a_1x_0}{a_0p^2+a_1p+a_2}$$

Оригинал для $X(p)$ будет искомым решением $x(t)$ задачи.