Определения и формулы

№1

Дайте определение функции, однолистной на некотором множестве

Функция комплексного переменного $\omega(z)$ на множестве Z является однолистной, если $\forall z_1, z_2 \in Z : \omega(z_1) \neq \omega(z_2)$.

Дайте определение показательной функции e^z

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

Можно поступить иначе: определим показательную функцию чисто мнимого числа $ai, a \in R : e^{ai} = \cos(a) + i\sin(a)$. Тогда для произвольного комплексного аргумента $z = a + bi : e^z = e^a * e^{ib}$.

Дайте определение тригонометрических функций

Опять та же самая двойственность. Либо используем соотношение Эйлера: $\sin z = Im(e^z), \cos(z) = Re(e^z), \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \cot(z) = \tan^{-1}(z)$. Если расписывать мнимую и вещественную части, как $2Re(z) = z + \overline{z}, 2iIm(z) = z - \overline{z}$:

$$\sin(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}, \cos(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Либо же с помощью рядов:

$$\sin(z) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{z^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i} \frac{z^{2i}}{(2i)!}$$

Тангенс и котангенс определяются очевидным образом.

Определение гиперболических функций

С помощью рядов - точно также, как и в предыдущем, но все (-1) заменить на $(+1)$. Либо перенося определение из действительной переменной: $sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Остальные определяются очевидно.

Дайте определение общей степенной функции $z^a, a \neq 0$

Определим через комплексный логарифм, который определяется как обратная функция к экспоненте:

$$z^a = e^{aLn(z)}$$

Писать Ln или ln - уже вопрос определения, можно делать и так, и так.

Дайте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке, дайте пример.

Пусть функция комплексной переменной $\omega(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Тогда, рассмотрим внутри этой окрестности следующий предел:

$$\lim_{dz \to 0} \frac{\omega(z_0 + dz) - \omega(z_0)}{dz}$$

Примером будет, например, экспонента.

Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке

Имеются в виду условия Коши-Римана. Функция в точке является дифференцируемой в точке тогда и только тогда, когда она является аналитической в некоторой окрестности этой точки. То есть тогда, когда в некоторой окрестности для этой функции выполняются условия Коши-Римана. Например:

$$\frac{\partial Re(\omega)}{\partial Re(z)} = \frac{\partial Im(\omega)}{\partial Im(z)}, \frac{\partial Re(\omega)}{\partial Im(z)} = -\frac{\partial Im(\omega)}{\partial Re(z)}$$

Дайте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z = \infty$. Приведите пример.

Функция, дифференцируемая в комплексном смысле в любой точке области, является аналитической в ней. Или же: аналитическая функция - та, что совпадает со своим рядом лорана в каждой точке этой области.

Условия Коши-Римана для: $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$

Уже записывали их:

$$\frac{\partial u}{\partial x)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

То же самое для $z = \rho e^{i\varphi}$

$Re(z) = \rho\cos(\varphi), Im(z) = \rho\sin(\varphi)$

$$u_\rho = \frac{v_\varphi}{\rho}, v_\rho = -\frac{u_\varphi}{\rho}$$

Условия Коши-Римана для $z = x + iy, \omega = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$

Выводятся тупо подстановкой специального вида функции в обычные соотношения:

$$\rho_x = \rho\psi_y, \rho\psi_x = -\rho_y <=> \psi_y = ln(\rho)_x, \psi_x = -ln(\rho)_u$$

Аналогично, когда и z в параболических

Собственно, подставляем в выведенные выше пораболические специального вида функцию $Re^{i\Phi}$:

$$R_\varphi = -\rho R\Phi_\rho, \Phi_\varphi = \frac{\rho}{R}R_\rho$$

Дайте определение конформного в точке $z \neq \infty$ *отображения*

Этоотображение, аналитическое в этой точке, и у которого существует в образе этой точки также аналитическое обратное отображение.

Дайте определение гармонической функции в области

Функция в области называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению лапласа: $\Delta\omega = 0$. Легко показать, что любая компонента(мнимая или действительная) аналитической функции является гармонической, если у нее(функции) равны смешанные производные второго порядка(по x, y).

Дайте определение сопряженных гармонических в некоторой области функций

Сопряженными гармоническими функциями, называются два таких решения уравнения лапласа $u(x, y)$ и $v(x, y)$, что эти решения связаны соотношениями Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Сформулируйте теорему Коши для односвязной области

По любому замкнутому контуру, целиком лежащему внутри односвязной области, для функции, аналитичной в этой области, интеграл по этому контуру будет равен 0.

Для ограниченной: если функция аналитично в области, и непрерывна на ее границе, то интеграл от функции по границе области равен 0.

Для многосвязной: если функция аналитична в области, ограниченной снаружи неким контуром C_0, а изнутри - контурами C_i, то интеграл от этой функции по полной границе это области(то есть по всем $C_i \cup C_0$) равен 0

Интегральная формула Коши для односвязной области

Пусть функция аналитична внутри области U. Тогда для произвольной точки z_0 внутри этой области:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Дайте определение интеграла типа Коши

Я в ахуе пошел за кофеем.

Сформулируйте теорему о среднем

Описав окружность вокруг точки z_0, испльзуя формулу коши получим формулу:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_{R_0}} f(\zeta) ds, s = R_0\varphi - \text{длина дуги окружности}$$

Сформулируйте теорему Луивилля

Ограниченная и аналитическая на всей комплексной плоскости функция есть константа.

Сформулируйте принцип максимума(минимума) модуля аналитической функции ω

Пусть целая функция ограничена в области сверху($1/\omega$ ограничена сверху и не имеет нулей). Тогда или она константа, или она достигает максимума($1/\omega$ Достигает максимума)(относительно точек области) на границе этой области.

Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда

Если все функции под суммой ряда интегрируемы на неком сегмента, и если ряд сходится равномерно на этом сегменте, тогда интеграл ряда на этом сегменте существует и есть ряд интегралов.

Вторая теорема Вейерштрасса о функциональных рядах

Если имеется ряд из функций, аналитических в некоторой области, и непрерывных на ее границе, и вдобавок к этому, ряд из этих функций равномерно сходится на границе области, то он сходится равномерно во всей замкнутой области.

Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах

Если имеется степенной ряд по степеням $(z - z_0)$, который сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и внутри круга. с центром в z_0, проходящего через эту точку, причем внутри круга он сходится равномерно.

Запишите формулу Коши-Адамара для радиуса круга сходимости степенного ряда

По признаку коши, ряд будет сходиться, если: $\sqrt[n]{a_n|z|^n} \to 1 - \epsilon, \epsilon > 0 => R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$. Если предел берется неоднозначно, то нужно брать больший из этих пределов(то есть готовиться к худшему, сужая свой радиус сходимости под все гадости)

Сформулируйте теорему Тейлора

Любую аналитическую в точке области функцию можно представить в некой окрестности этой точки сходящимся степенным рядом, причем однозначно:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Сформулируйте теорему Мореры

Если функция в односвязной области комплексной плоскости непрерывна, и интеграл от нее по любому замкнутому контуру внутри этой области равен 0, то это - аналитическая функция.

Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах:

Пусть имеется ряд из аналитических в области функций, причем эти функции по любой замкнутой подобласти сходятся к некоторой функции ω равномерно. Тогда ω - аналитическая функция в этой области, причем теорема о почленном дифференцировании выполняется сколько угодно раз, и, соответственно, k-я производная ω есть ряд из k-ых производных исходных функций, причем этот ряд тоже сходится равномерно.

Теорема единственности аналитической функции

Если существует такая фундаментальная последовательность комплексных чисел, значения в которой у двух аналитических функций f и g равны, то это равные функции.

Дайте определение аналитического продолжения функции, заданной зиначально на мнлжестве T

Аналитическое продолжение - это функция, совпадающая с данной на множестве E и являющаяся аналитической на неком множестве X, содержащем E.

Сформулируйте теорему Лорана

Любая аналитическая в круговом кольце функция однозначно представляется в нем сходящимся рядом Лорана.

Дайте определение изолированной особой точки аналитической функции

Изолированная особая точка - такая точка, что существует ее проколотая окрестность, внутри которой функция аналитична и однозначна, а сама точка - некая особая точка

Дайте определение устранимой особой точки

Устранимая точка - такая, что существует конечный предел функции при стремлении к этой точке. Аналогично, что минимальный отличный от нуля коэффициент ряда лорана этой функции в этой окрестности не меньше нуля. ПРимер: $2i(z - i)$, у которой в точке i Значение слегка приподняли.

Определение оплюса с примером

Такая точка, что ее ряд лорана в этой точке содержит конечное число отрицательных членов. При этом старший член определяет порядок полюса. $f = 1/z$ в нуле

Существенно особая точка

Ее ряд лорана содержит бесконечно много отрицательных членов: lnz в нуле.

Сформулируйте теорему о конечной утсранимой особой точке функции

Если функция, аналитичная в кольце, вокруг этой точки(так, что нижний радиус $= 0$) ограничена в этом окльце, то эта точка - устранимая особая точка.

Теорема о конечном полюсе

Если вне зависимости от стремления к точки, мы получаем в пределе функции бесконечность, то эта точка - полюс конечного порядка.

Теорема сохоцкого для случая обычной существенно особой точки комплексной плоскости.

Для любого эпсилон и для любой окрестности найдется хотя бы одна точка z_1, значение функции в которой будет отличаться от произвольно заданного числа B меньше, чем на ϵ.

определение вычета в конечной изолированной особой точке аналитической функции

Вычет - -1 коэффициент в разложении в ряд лорана этой функции в этой точке. Если расписать уже это, то получим интеграл взятый в положительном направлении вокруг этой точки по любому контуру в области аналитичности.

Дайте определение вычета в изолированной бесконенчо удаленной точке.

Вообще говоря, либо домноженный на -1 -1-же коэффициент в разложении в бесконечно удаленной точке, то есть как вычет от обратной функции в 0, либо как интеграл по бесконечно удаленному контуру в отрицательном направлении.

запишите формулу для вычисления вычета в полюсе конечного порядка

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1}}{dz^{(m-1)}}(z-z_0)^m f(z)$$

Сформулируйте основную теорему теории вычетов

Для аналитической внутри замкнутой области функции, содержащей внутри области лишь конечное число изолированных особых точек, интеграл по границе контура, проходимой в положительном направлении будет равен домноженной на $2\pi i$ сумме вычетов во всех особых точках.

Сформулируйте теорему о вычетах функции, аналитичной на всей плоскости, за исключением окнечного числа особых точек

Сумма вычетов во всех точках, включая бесконечно удаленную, равна 0.

Сформулируйте леммы жордана по всем дурацким полуплоскостям

Если функция аналитична в нужной нам полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно по углу стремиться к нулю, то в зависимости от коэффициента при показателе экспоненты интеграл от нее по бесконечной полуокружности в этой полуплоскости будет равен нул. При этом показатели: $ia, a > 0$ - верхняя, $-ia$ - нижняя, $-a$ - правая, a - левая полуплоскости.

Сформулируйте теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.

Для аналитеческой всюду в замкнутой области функции, за исключением конечного числа полюсов внутри области, которая не обращается в ноль ни в одной точке границы, разность между числом нулей и полюсов будет:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

Теорема Руше

Если на границе одна аналитическая функция по модулю всюду больше другой, то полное число нулей их суммы внутри области будет равно числу нулей бо'льшей функции.

Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции

Если аналитическая функция $\omega(z)$ в области не имеет нулей, и являтся однозначной и однолистной, то существует такая функция $z(\omega)$, которая будет аналитичной всюду в образе этой области и также однозначной и однолистной.

Определение функции, однолистной в точке, вместе с примером.

Вероятно, имеется в виду существование окрестности точки, внутри которой функция однолистна. Подойдет, например, обыкновенная экспонента и достаточно малая ее окрестность нуля.

Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии однолистности функции в бесконечно удаленной точке

ω - однолистна на бесконечности тоогда и только тогда, когда $\frac{1}{\omega}$ однолистна в 0. Хз, что тут могло иметься в виду на самом деле.

Теорема Римана

Всякую односвязную областью с границей более одной точки можно конформно отобразить на внутренность единичного круга.

Теорема единственности конформного отображения

Функция, задающая конформной отображения заданной односвязной области так, что для фиксированной точки области z_0 и фиксированного числа α_0 таких, что $f(z_0) = 0, arg f'(z_0) = \alpha_0$ определена единственным образом.

СФормулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении

Если однозначная аналитическая функция, непрерывная в замкнутой области, ограниченной контуром γ, отображает взаимо однозначно границу области на границу другой области Γ, тогда, если отображение сохраняет направление обхода, то функция осуществляет конформное отображение между областями.

Дайте определение дробно-линейной функции

$$f(z) = \frac{a + bz}{c + dz}, \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, a, b, c, d \in C$$

Запишите общий вид дробно-линейной функции, переводящий две заданные конечные точки в 0 и бесконечно удаленную:

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}, \lambda \in C$$

Сформулируйте круговое свойство дробно-линейной функции

Окружности на плоскости переходят в окружности на плоскости при действии ДЛФ.

Сформулируйте групповое свойство ДЛФ

Дробно-линейные отображения образуют группу относительно операции композиции.

Сформулируйте свойство сохранения симметрии ДЛФ

Симметричные относительно любой окружности точки перейдут в симметричные относительно образа этой окружности точки.

Определение функции Жуковского

$$f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

Сформулируйте принцип максимума(минимума) гармонической функции

Любая гармоническая функция достигает своего максимума(минимума) на границе области.

Сформулируйте постановку задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае односвязной области

Нужно найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в области G, непрерывную в замкнутой области и принимающую заданные значения на границе области.

Запишите формулу Пуассона решения задачи дирихле внутри круга конечного радиуса

Вероятно, имеется в виду интеграл Пуассона:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \alpha(\varphi) d\varphi$$

α - функция граничных условий.

Дайте определение изображения по Лапласу функции действительной переменной

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

Запишите формулу Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt}F(z)dz, x > a$$

а - показатель роста $f(t)$

сформулируйте условию о достаточных условиях существования оригинала функции комплексной переменной.

Пусть функция $F(z)$ - аналитичеа в области $Re(z) > a$, в этой же области она равномерно стремиться к нулю на бесконечности по всем направлениям. И для всех $Re(z) = x > a$ сходиться интеграл

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(z)|dy < M, x > a$$

Тогда данная функцая - изображение некой функции действительной переменной и ее источник дается формулой Меллина.

Задачи

Записать числа в алгебраической форме:

$$\sin(3+2i) = \frac{e^{3+2i} - e^{-3-2i}}{2i} = \frac{e^3(\cos(2) + i\sin(2)) - e^{-3}(\cos(2) - i\sin(2))}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^3\sin(2) + e^{-3}\sin(2)) - i\frac{1}{2}(e^3\cos(2) - e^{-3}\cos(2)) =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(2)(e^3 + e^{-3}) - i\cos(2)(e^3 - e^{-3})] = \sin(2)\cosh(3) - i\cos(2)\sinh(3)$$

Остальные делаются по аналогии.

Найдите все значения

$$Ln(-2-i) = Ln(\sqrt{4+1}e^{i(\pi+\arctan(\frac{1}{2})+2\pi k)}) = ln(\sqrt{5}) + i(\pi + \arctan(\frac{1}{2}) + 2\pi k)$$

$$(1+3i)^{-1-i} = (\sqrt{1+9}e^{i\arctan(\frac{3}{1})+2\pi ik})^{-1-i} = (\sqrt{10}e^{i\arctan(30)+2\pi ik})^{-1-i} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}ln(10)(-1-i)}e^{(i\arctan(3)+2\pi ik)(-1-i)} = e^{-ln(\sqrt{10})+\arctan(3)+2\pi k}e^{-i(\arctan(3)-ln\sqrt{10})} =$$

$$= \frac{e^{\arctan(3)+2\pi k}}{\sqrt{10}}e^{-i(\arctan(3)-ln\sqrt{10})} =$$

$$= \frac{e^{\arctan(3)+2\pi k}}{\sqrt{10}}[\cos(\arctan(3) - ln\sqrt{10}) - i\sin(\arctan(3) - ln\sqrt{10})]$$

Остальные по аналогии.

Найдите все решения уравнения

$$e^{iz} = -2+i <=> e^{iz} = \sqrt{5}e^{i(\pi - \arctan(\frac{1}{2}))} <=> iz = ln\sqrt{5}+i(\pi-\arctan(\frac{1}{2})+2\pi k)$$

$$z = \pi - \arctan(\frac{1}{2}) + 2\pi k - iln\sqrt{5}$$

Остальные по аналогии.

Исследуйте на дифференцируемость функцию

$$f(z) = Re(z) + Im(z). \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = \frac{dx + dy}{dx + i * dy} = \frac{1+t}{1+it}, t = \frac{dx}{dy}$$

Это выражение содержит тангенс угла наклона t, который может принимать любые значения, приближаясь к точке с различных сторон. Таким образом, предел будет зависть от выбора последовательности и функция будет недифференцируемой везде.

$$Im\overline{z}. \frac{-(y+dy)+y}{dx+idy} = \frac{-dy}{dx+idy} = \frac{-1}{i+t^{-1}}$$

Опять выражение зависит от угла t и не может быть дифференцируемым. Остальные по аналогии.

Исследуйте на аналитичность функцию

Задания равносильно исследованию на дифференцируемость, так как это равносильные понятия. Функции похожи на предыдущий номер, так что разбираются по аналогии.

Найдите радиус круга сходимости степенного ряда

Собственно, используя стандартные признаки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+3i)^n z^n => |a_n z^n| = |z|^n(\frac{1}{n^2}+9)^{\frac{n}{2}}$$

Используя признак Коши:

$$|z|\sqrt{(\frac{1}{n^2}+9)} \to 3|z| < 1 <=> |z| < \frac{1}{3}$$

Таким образом, $R = 1/3$ Остальные по аналогии.

Найдите все особые точки функции

$$\frac{z}{\sin(z)} = \frac{z(2i)}{e^z - e^{-z}} = \frac{z(2i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}(1-(-1)^k)} = \frac{2i}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}$$

То есть 0 не является особой точкой. Все рассуждения проведены для 0 так как использовано разложение экспоненты в нуле. Для других нулей синуса: Разложение экспоненты точно такое же, таким образом:

$$\frac{z}{\sin(z)} = \frac{z(2i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-2\pi m)^k}{k!}(1-(-1)^k)}$$

Очевидно, это будут полюча первого порядка, так как в знаменателе все начинается с первой степени $z - 2\pi m$. При этом очевидно, что нулей у синуса - счетное число и они уходят на бесконечность. Таким образом, за границей круга любого радиуса будут особые точки, а значит бесконечность - существенно особая точка, так как она не является изолированной. Можно также просто сказать, что она не изолированная. Остальные по аналогии.

найдите вычет функции в точке

Сравним разложение экспоненты в нуле и бесконечности: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k}$. Значит, видно, что в бесконечности разложение будет содержать все отрицательные члены, то есть будет существенно особой точкой. Тогда разложение нашей функции будет:

$$ze^{1/z} = [z = \frac{1}{z'}] = \frac{e^{z'}}{z'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z'^{-k-1}}{k!}$$

Таким образом при -1 коэффициенте будет коэффициент 1 и ему же равен наш вычет.

$$z_0 = 0, ze^{1/z^2} = \frac{e^{z'^2}}{z'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k-1}}{k!}$$

Вычет опять 1.

$$z_0 = \infty, \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{\frac{1}{z'}+1}{\frac{1}{z'^2}+1} = \frac{z'^2+z'}{z'^2+1}$$

$$\frac{1}{z'^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! \frac{z'^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z'^2)^k$$

То есть видно, что разложение исходной функции будет содержать только положительные члены. Таким образом, вычет будет равен нулю, из-за отсутствия отрицательных коэффициентов. Остальный по аналогии.

Вычислить интегралы

$$\int_L z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k-3}}{k!}$$

Этот интеграл - обыкновенный вычет. т.е. -1 коэффициент. В нашем случае это 0. Этому и будет равен наш интеграл. Остальные по аналогии.

Является ли функция однолистной в точке?

Однолистность полагает, что разные точки переходят в разные значения. Предположим, что какие-то две точки перешли во что-то одно, какими тогда они должны быть:

$$f(z_1) = z_1 + \frac{4}{z_1} = z_2 + \frac{4}{z_2} <=> z_1^2 z_2 + 4z_2 = z_2^2 z_1 + 4z_1 <=>$$

$$z_1 z_2 (z_1 - z_2) = 4(z_1 - z_2) <=> (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 4) = 0$$

Все это сделано в предположении о том, что мы находимся в области определения указанной функции. Первая скобень, очевидно, равна нулю только для скучного случая равенства аргументов. А вторая же:

$$z_1 z_2 = 4 <=> \rho_1 \rho_2 = 4, \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi k$$

Условие на радиусы - это условие инверсионной симметричности относительно окружности радиуса два, что уже наталкивает на подозрения. Второе условие - о симметричности точек относительно действительной оси, что для нас еще хуже. На действительной оси второе условие выполнится автоматически, а в любой ε-окрестности точки два на действительной оси будет такое $\rho = 2 - \delta$, что $\rho_2 = \frac{4}{2-\delta} < 2 + \varepsilon$, т.е. тоже попадет в нужную окрестность В самом деле:

$$4 - (2 + \varepsilon)(2 - \delta) = 2(\delta - \varepsilon) + \varepsilon\delta \vee 0$$

$$\delta \vee \frac{2}{1 + \frac{2}{\varepsilon}}$$

То есть достаточно взять дельта равное вышеописанному и у этой точки найдется "партнер"из другого листа. Так-то. То есть функция не однолистна в 2.

$$z \sin(z), z_0 = 0$$

В ддругом номере так "в лоб"уже не выйдет.

$$z_1 \sin(z_1) = z_2 \sin(z_2)$$

И $\omega(z) = z$, и $\omega(z) = \sin(z)$ - нечетные функции. Поэтому если $z_1 = -z_2$, то выражение останется в силе. Таким образом, очевидно, что в любой окрестности точки 0 для любой z найдется точка(в той же окрестности) $-z$, в которой функция примет то же значение. То есть однолистности нет.

Является ли функция $\omega(z) = z^3$ однолистной в каждой точки левой полуплоскости? А во всей левой полуплоскости?

$$z_1^3 = z_2^3 <=> \rho_1^3 e^{3i\varphi_1} = \rho_2^3 e^{3i\varphi_2}$$

Чтобы комплексные числа равнялись друг другу требуется равенство как модулей, таки аргументов, т.е.: $\rho_1 = \rho_2, 3\varphi_1 = 3\varphi_2 + 2\pi k => \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2}{3}\pi k$. И мы имеем в левой полуплоскости для достаточно близких к мнимой оси направлений(не далее от нее, чем $\frac{\pi}{3}$) будет существовать направление, отстоящее на $\frac{2\pi}{3}$, в котором функция примет то же значение. Направления эти сливаются в нуле, который из-за строгости неравенства мы не рассматриваем. Для любой точки, очевидно существует такая окрестность, которая не будет содержать отстоящего на $\frac{2\pi}{3}$ направления. То есть поточечно эта функция будет однолистной. Однако на всей плоскости - нет, хотя бы потому, что на направлениях $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ значения совпадут.

Является ли изображение конформным

$$\omega = z^4, Imz > 0$$

Обратное к нему отображение, очевидно: $z = \omega^{\frac{1}{4}}$. В верхней полуплоскости это отображение однолистно поточечно. но не везде сразу(как было показано в предыдущем номере), таким образом, обратное к нему будет многозначным и не выйдет никакого взаимо однозначного, то есть конформного отображения. Ч.т.д.

$$e^z, Re(z) > 0$$

Очевидно, экспонента функция многозначная, с горизонтальными полосами однолистности, шириной в 2π. Как минимум две такие полосы одновременно попадут в правую полуплоскость, так что во все й плоскости функция не будет однолистной, а значит опять не получится конформного отображения.

Является ли функция Жуковского однолистной в области $Rez > 0$

$$\frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2}) <=> \frac{(z_1 z_2 + 1)(z_1 - z_2)}{z_1 z_2} = 0$$

Отбрасывая скучные случаи в сторону:

$$z_1 z_2 = 1 <=> \rho_1 \rho_2 = 1, \varphi_1 = -\varphi_2$$

То есть это инверсионная симметрия относительно единичной окружности по модулю и зеркальная относительно действительной оси по аргументу. То есть вблизи точки 1 действительной прямой, как было показано в номере выше, функция не будет даже однолистной в точке 1. Таким образом, во всей правой полуплоскости функция жуковского не является однолистной.

Пусть $F(p)$ - изображение $f(t)$. Какая функция имеет своим отображением (n)-ую производную $F(p)$?

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

Из свойств преобразования лапласа можно узнать, что если показатель роста подынтегральной функции - a, то при $Re(p) > a$ интеграл в преобразовании будет сходиться равномерно и будет выполнена теорема о дифференцировани интеграла по параметру, то есть:

$$\frac{d}{dp} F(p) = \int_0^\infty (-t) e^{-pt} f(t) dt, \frac{d^(n)}{dp^(n)} F(p) = \int_0^\infty (-1)^n t^n f(t) e^{-pt}$$

То есть если мы зашли достаточно далеко вправо, чтобы применить н раз подряд теорему о дифференцировании, то первообразной указанной функции будет: $(-1)^n f(t) t^n$

Пусть $F(p)$ - изображение $f(t)$. Считая, что изображение $f^{(n)}(t)$ существует, выразите его через $F(p)$

Если все хорошие условия выполнены, то можно загнать экспоненту под дифференциал и проинтегрировать по частям. Тогда для превой производной, например, будет:

$$f^{'}(t) \to pF(p) - f(0)$$

Аналогично для н-ой производной:

$$f^{(n)}(t) \to p^n [F(p) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^(k)(0)}{p^k}]$$

Найдите изображение указанных функций

Иными словами, возьмите интегралы.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\frac{-1}{p}[e^{-pt}\sin t|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt]=$$

$$=\frac{-1}{p}[0-0-\frac{-1}{p}[e^{-pt}\cos t|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-pt}(-\sin t)dt]]=\frac{-1}{p^2}[-1+F(p)]$$

$$F(p)(1+\frac{1}{p^2})=\frac{1}{p^2} <=> F(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

Ч.т.п.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}t^n dt=\frac{-1}{p}[e^{-pt}t^n|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-pt}nt^{n-1}dt]=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}nt^{n-1}dt=$$

$$=...=\frac{n!}{p^n}\int_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{-n!}{p^{n+1}}(0-1)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

Ч.т.п.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}te^{2t}dt=\frac{1}{2-p}[t*e^{(2-p)t}|_0^\infty-\int_0^\infty e^{(2-p)t}dt]=$$

$$=\frac{-1}{(2-p)^2}(0-1)=\frac{1}{(p-2)^2}$$

Ч.т.п.

Найдите оригинал функции комплексной переменной:

Имеет место обратная задача. С помощью формулы Коши:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)dp$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}dp$$

Для подынтегральной функции выполнено условие леммы жордана, таким образом интеграл будет равен вычету(умноженному на $2\pi i$) подынтугрельной функции в единственной особой точке - 1. Он будет:

$$\lim_{p\to 1}te^{pt}=te^t$$

Ответ: $f(t) = te^t$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p-2)}dp$$

Тут будет сумма двух вычетов первого порядка:

$$f(t) = \frac{1}{1-2} + \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2t}-1}{2}$$

Оставшийся номер - вычет третьего порядка и он равен, очевидно:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}e^{pt} = \frac{1}{2}t^2e^{pt} \rightarrow \frac{t^2}{2}e^{-t}$$

$$f(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$$

Доказательства

Докажите теорему о связи между последоваетльностями $z_n = x_n + iy_n$ и x_n,y_n

Пусть последовательность z_n ограничена по модулю. Тогда $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < M <=> x_n < M, y_n < M$. То есть тогда ограничены и отдельные последовательности. Аналогично, пусть ограничены $x_n < m, y_n < n => |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} < \sqrt{m^2 + n^2}$. То есть тогда ограничена по модулю исходная последовательность.
Пусть последовательность z_n стремиться к некому z_0, т.е.:

$$\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N : \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon <=>$$

Но, очевидно, $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} > x_n - x_0 =>$

$$\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N : |x_n - x_0| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N : |y_n - y_0| < \varepsilon$$

Т.е. тогда существует предел и у малых последовательностей, совпадающий с соответствующими частями общей последовательности. В другую сторону теорема доказывается очевидно: указываем номер N для каждой из x и y для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, при таких N исходная последовательность: $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\frac{1}{2}2\varepsilon^2} = \varepsilon$. Ч.т.д.

Докажите необходимое и достаточное условие дифференцирования.

Пусть функция дифференцируема. Тогда:

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$$

Рассмотрим отдельно предел при стремлении по действительно и по мнимой оси:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial dx}$$

$$\lim_{dy \to 0} \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{idy} = -i\frac{\partial f(x,y)}{\partial dy}$$

Чтобы функция была дифференцируема в комплексном смысле эти две производные должны быть равны, т.е.: $-i\frac{\partial f(x,y)}{\partial dy} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial dx} <=> -i(Re\partial_y f + iIm\partial_y f) = Re\partial_x f + iIm\partial_x f$, и пользуясь критерием равенства комплексных чисел, окончательно:

$$Re\partial_y f = -Im\partial_x f \wedge Im\partial_y f = Re\partial_x f$$

Или, если $f = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$u_y = -v_x \wedge v_y = u_x$$

В обратную сторону - пусть выполнены условия Коши-Римана, тогда по определению дифференцируемости функции(а если мы говорим про ее соотношения Коши-Римана, то она дифференцируема):

$$\frac{df}{dz} = \frac{du+idv}{dx+idy} = \frac{u_x dx + u_y dy + \alpha(x,y)}{dx+idy} + i\frac{v_x dx + v_y dy + \beta(x,y)}{dx+idy} =$$

Используя соотношения К-Р:

$$= \frac{u_x dx + u_x idy}{dx+idy} + \frac{iv_x dx - v_x dy}{dx+idy} + \frac{\alpha + i\beta}{dx+idy} =$$

$$= u_x + iv_x + \frac{o(dz)}{dz} \to u_x + iv_x$$

Последнее выражение, очевидно, некая конечная функция и, таким образом, существует предел разностного отношения $\frac{df}{dz}$, то есть функция дифференцируема. Ч.т.д.

Докажите теорему Коши для односвязной области

Рассмотрим произвольную односвязную область G, такую, что функция $f(z)$ аналитична целиком в этой области, а также ее граница Γ - простая кривая(кусочно-гладкая без самопересечений). Тогда:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma udy + vdx$$

то есть Мы имеем тва обыкновенных интеграла от действительных чисел. Для каждого из них применима формула грина, посоклькy аналитичность подразумевает существование непрерывных производных внутри области. Тогда:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \iint_G (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint_G (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy =$$

Используя соотношения Коши-Римана, очевидно, получаем:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 + i * 0 = 0$$

Ч.т.д.

Докажите теорему Коши для многосвязной области.

Пусть имеется область, ограниченная снаружи большим контуром Γ_0, а внутри - конечным числом непересекающихся контуров Γ_i. Тогда, соединим каждый из контуров с границей Γ_0 кривыми γ_i так, чтобы никакие две получившиеся кривые не пересекались. Так всегда можно сделать для адекватного расположения контуров, но для верности можно вообще включить это в условие теоремы. Теперь мы будем проходить по большой границе, каждый раз заворачивая на кривые γ_i и обходя внтуренние контура. Эта область уже будет односвязной и для нее, при условии аналитичности функции $f(z)$ в области будет применима доказанная выше теорема Коши для односвязной области. Тогда, запишем, с учетом направления обхода и опуская суммирование:

$$\int_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_i^-} f(z)dz + \int_{\gamma_i^+} + \int_{\gamma_i^-} = 0$$

Последние два интеграла проходятся по одной и той же кривой но с разными знаками и при условии непрерывности функции на границе один из них равен $-$другой. Тогда:

$$\int_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_i^-} f(z)dz + \int_{\gamma_i^+} = \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Ч.т.д.

Докажите теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом

Пусть имеется область G и кусочно-гладкая кривая C, и пусть имеется функция двух переменных $\varphi(z, \omega)$, такая, что $\forall \omega \in C$ φ - аналитическая функция по z в G. Тогда:

$$F(z) = \int_C \varphi(\omega, z) d\omega, \frac{d}{dz} F = \int_C \frac{d}{dz} \varphi(z, \omega) d\omega$$

Запишем отдельно действительный и мнимый интегралы, если $z = x + iy, \omega = \chi + i\zeta$:

$$\int_C u(x, y, \chi, \zeta) d\chi - v(x, y, \chi, \zeta) d\zeta = U(x, y)$$

$$\int_C u(x, y, \chi, \zeta) d\zeta + v(x, y, \chi, \zeta) d\chi = V(x, y)$$

Продифференцируем каждый из них как действительный интеграл, зависящий от параметра, по параметрам и y, что возможно в предположении дифференцируемости по x, y функции φ, а также ее непрерывности(!) по всем 4 переменным, и воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$V_y = \int_C v_y d\chi + u_y d\zeta = \int_C u_x d\chi - v_x d\zeta = U_x$$

$$V_x = \int_C v_x d\chi + u_x d\zeta = \int_C -u_y d\chi + v_y d\zeta = -U_y$$

Очевидно, эти два равенства суть соотношения Коши-Римана для интеграла, и значит, он является аналитической функцией. Из этих же равенств следует:

$$F_z = U_x + iV_x = \int_C u_x d\chi - v_x d\zeta + i \int_C u_x d\zeta + v_x d\chi =$$

$$= \int_C u_x d\omega + v_x i d\omega = \int_C \varphi_z(w, z) d\omega$$

Ч.т.п.

Докажите интегральную формулу Коши для односвязной области

Рассмотрим аналитическую в односвязной области G функцию $f(z)$ и целиком лежащий внутри области контур Γ(при условии непрерывности функции на границе, можно взять и границу области), а также некую точку z_0 внутри нее. Функция $\varphi = \frac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической всюду в области, за исключением одной точки z_0. Тогда окружим последнюю малым контуром γ, целиком лежащим в G, и воспользуемся многосвязной теоремой Коши:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$$

Или:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Интеграл слева не зависит от γ, значит, от него не зависит и интеграл справа. Тогда выберем γ - окружностью бесконечно малого радиуса и воспользуемся непрерывностьюю $f(z)$ в окрестности z_0:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{\rho e^{i\varphi}} \rho i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} f(z_0) i d\varphi = 2\pi i f(z_0)$$

То есть:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Ч.т.п.

Докажите аналитичность интеграла типа Коши.

Очевидно, что интеграл Коши - типичный зависящий от параметра интеграл, как из разобранной выше теоремы. Рассмотрим интеграл типа Коши по границе области от нерперывной на границе и аналитичной внутри функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\chi)}{\chi - z} d\chi$$

Если мы возьмем такую замкнутую подобласть $\overline{G}$ области G, что Растояние от всех точек этой области до нашего контура Γ будет больше нуля(то есть область целиком внутри контура или $|\chi - z| > 0$), то подынтегральная функция будет всюду аналитичной в этой области, причем ее производная будет: $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{f(\chi)}{(\chi-z)^2}$, также всюду непрерывна по всем переменным внутри новой области. Тогда будут выполнены теоремы об интеграле, зависящем от параметра, и функция $f(z)$ будет аналитичной внутри области, причем можно будет ее продифференцировать и получить:

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\chi)}{(\chi - z)^2}d\chi$$

Поскольку интеграл справа, очевидно, опять аналитичен в нашей урезанной области, то он является аналитической функцией. Значит, и $f^{(1)}(z)$ - аналитическая и ддифференцируемая функция. Тогда:

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}2\frac{f(\chi)}{(\chi - z)^3}d\chi$$

И так далее. Тогда $f^{(n)}(z)$ существует и равна:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\chi)}{(\chi - z)^{n+1}}d\chi$$

То есть у аналитической функции существуют производные всех порядков, и вычислить их можно по указанным формулам.

Докажите теорему Луивилля

Пусть имеется некая аналитическая везде функция $f(z)$, такая, что: $|f| < M$ на всей комплексной плоскости. Запишем значение ее рпоизводной:

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\chi)}{(\chi - z)^2}d\chi$$

Выберем также контур - окружностью постоянного радиуса вокруг точки z:

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z + Re^{i\varphi})}{R^2 e^{2i\varphi}}Re^{i\varphi}id\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}}id\varphi$$

Поскольку модуль функции ограничен на всей плоскости, то модуль выражения под интегралом не превосходит: $\frac{M}{R}$. Если взять R достаточно большим, мы можем сделать модуль выражения под интегралом сколь угодно малым. То есть:

$$|f'| = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{|f(z)|}{R^2}ds < \frac{M}{R}$$

Значит, производная сколь угодно близко приближается к нулю, то есть равна нулю. Поскольку это рассуждение не зависит от z, то производная везде равна нулю, и функция - константа.

Докажите теорему о среднем и теорему Мореры

Теорума о среднем: из формулы Коши видно, что для контура, являющегося окружностью вокруг точки внутри области аналитичности:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}Re^{i\varphi}} id\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} f(\chi)dR\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} f(\chi)ds$$

Где $\chi = z_0 + e^{i\varphi}$. Это и есть формула о среднем.
Теорема Мореры. Пусть функция является непрерывной в односвязной области G и интеграл от нее по любому замкнотому контуру целиком внутри G равен 0, тогда по условиям теоремы о дифференцировании интеграла по парамтру, так как $f(\chi)$ не зависит от z:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\chi)d\chi - \text{аналитическая в } G \text{ функция}$$

Тогда у нее существуют произвзодные всех порядков, в том числе первого и второго:

$$F'(z) = \int_{z_0}^{z} f_z(\chi)d\chi = f(z) => F''(z) = f'(z)$$

То есть производная функции f существует, а значит она дифференцируема и значит, аналитична. Ч.т.п.

докажите принцип максимума модуля аналитической функции

Пусть максимальной значение аналитической функции достигается внутри области аналитичности. Тогда возьмем контур в виде окружности постоянного радиуса вокруг этой точки(z_0) и запишем:

$$|2\pi i f(z_0)| = |\int_0^{2\pi} f(\chi)d\varphi| \le \int_0^{2\pi} |f(\chi)|d\varphi \le 2\pi M$$

Последнее неравенство сделано в силу: $|f(z)| \le M = |f(z_0)|$. Но тогда:

$$2\pi M \le \int_0^{2\pi} |f(\chi)|d\varphi \le 2\pi M <=> \int_0^{2\pi} |f(\chi)|d\varphi = 2\pi M$$

В то же время, если модуль $|f(z)| < M$ в некоторой точке на контуре $\chi = z_0 + Re^{i\varphi}$, например, при $\varphi \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$:

$$\int_0^{2\pi} |f(\chi)|d\varphi = \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} |f(\chi)|d\varphi + \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} |f(\chi)|d\varphi + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} |f(\chi)|d\varphi <$$

$$2(\pi - \varepsilon)M + 2\varepsilon M = 2\pi M$$

То есть достигнуть этого значения уже не получится, значит, везде на контуре: $|f(z)| = M$, то есть на границе круга модуль функции также постоянен и равен M. Аналогичными рассуждениями для других Радиусов показываем, что внутри этого круга Везде у всех точек будет одинаковый модуль $= M$. Теперь соединим произвольные две точки области кривой, не имеющей с границей общих точек. У границы нашего круга есть пересечение с этой кривой. В этой точке модуль постоянен и равен M. Построив в ней как в центре круг нового радиуса, повторим рассуждения и убедимся, что и внутри него тоже везде модуль функции постоянен. Теперь, так как кривая отстоит от границы на фиксированное конечное опложительной число, то радиус кругов из любой точки кривой ограничен снизу этим расстоянием. Тогда, так как радиусы кругов ограничены снизу, можно за конечное число итераций добраться до конца кривой, то есть в любую другую точку области и получить, что $|f(z)| = M$ для всех точек области. Таким образом, если $|f(z)| \neq const =>$ она достигает максимума в граничных точках.Ч.т.д.

Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть нам дан равномерно сходящийся в G функциональный ряд из непрерывных функций: $\sum_k u_k(z) = f(z)$. Тогда для любой кусочно-гладкой кривой C, лежащей целиком в G справедливо:

$$\int f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C u_n(z)dz$$

Так как ряд сходится равномерно, то для любого эпсилон, даже для $\frac{\varepsilon}{L}$, L-длина дуги кривой, можно указать такой номер N. начиная с которого для любого n справедливо $|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$, тогда:

$$|\int_C [f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)]dz| \leq \int_C |[f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)]|dz < \varepsilon \frac{L}{L} = \varepsilon$$

Ч.т.д.

Докажите вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах

Пусть ряд аналитических в G функций $u_k(z)$ равномрено сходится на границе области Г. Тогда в силу равномреной сходимости на границе:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n, m > N \forall z \in \Gamma |\sum_{k=n}^{n+m} u_k(z)| < \varepsilon$$

Тогда по принципу максимума модуля аналитической функции, значение аналитической функции $|\sum u_k(z)|$ будет внутри области G не больше, чем ε, то есть для $\forall z \in G$:

$$\exists N, \forall n, m > N |\sum_{k=n}^{n+m} u_k(z)| < \varepsilon$$

А значит, по критерию Коши, ряд сходится равномерно внутри всей замкнутой области.

Докажите теорему Абеля о степенных рядах

Пусть степенной ряд $\sum a_k(z - z_0)^k$ сходится в некой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда по необходимому условию:

$$|a_k(z_1 - z_0)^k| \to 0 <=> \forall k |a_k(z_1 - z_0)^k| \leq M <=> |a_k| \leq \frac{M}{|(z_1 - z_0)^k|}$$

Тогда, если $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$:

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(z - z_0)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M \frac{|(z - z_0)^k|}{|(z_1 - z_0)^k|} = M \sum_k q^k$$

так как по условию $q < 1$, то это ни что иное, как сумма убывающей геометриечской прогрессии и она сходится. Т.е. ряд сходится и для любого $z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Теперь, очевидно, внутри круга радиуса $\rho < |z_1 - z_0|$:

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq M \frac{\rho^k}{|(z_1 - z_0)^k|} =>$$

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

ПОследний ряд - числовой и, очевидно, сходящийся, для любого z внутри круга. Тогда по признаку Вейерштрасса, исходный ряд будет сходиться внутри круга равномерно. Поскольку это выполнено для любого круга, меньшего, чем $|z_1 - z_0|$ радиуса, то это верно для любой точки внутри круга и с радиусом $|z_1 - z_0|$. Ч.т.д.

Докажите теорему Коши-Адамара о степенных рядах

Как я понимаю, имеется в виду теорема о радиуса степенного ряда. Применим к ряду признак коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} \to q < 1 => \text{ряд сходится}$$

В то же время очевидно: $|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||(z-z_0)^n| = |a_n|R^n$. Тогда из признака Коши следует условие:

$$\sqrt[n]{|a_n|}R \to q < 1 => R < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Во избежании неприятностей, всегда берется верхнее значение этого предела, чтобы нельзя было указать такую последовательность n, что $\lim \sqrt[n]{|a_n|}R \to q > 1$. Ч.т.п.

В то же время, если мы возьмем какие-то точки вне круга сходимости, то есть: $|z-z_0| = \rho > R$, то $\sqrt[n]{|a_n|}\rho \to q > 1$, а по тому же признаку Коши это равносильно расходимости ряда. Непонятной остается только граница круга, на которой предел равен единице и признак Коши ничего нам не говорит. Тут для каждого ряда нужно поработать ручками.

Докажите теорему Тейлора

Пусть аналитическая функция разложена в степенной ряд. Тогда: $f(z) = \sum a_k(z-z_0)^k$. Тогда очевидно:

$$f(z_0) = a_0, f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n k!(z-z_0)^{n-k} = a_k k! <=> a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$$

Однако это доказывает только единственность разложения в теореме Тейлора. Сама теорема - внутри круга конечного радиуса аналитическая функция может быть разложена в сходящийся степенной ряд. Так как функция аналитична в круге, то по формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\chi)}{\chi - z} d\chi$$

При этом по известным формулам для геометрической рпогрессии:

$$\frac{1}{\chi - z} = \frac{1}{\chi - z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\chi-z_0}} = \frac{1}{\chi - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{\chi-z_0})^k$$

Подставляя это в интеграл Коши и вынося сумму и несвязанную переменную за знак интеграла:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \int_{C_R} \frac{f(\chi)}{(\chi-z_0)^{k+1}} d\chi$$

Очевидно, что это разложение в степенной ряд с коэффициентами $a_k = \int_{C_R} \frac{f(\chi)}{(\chi-z_0)^{k+1}} d\chi$. Как мы уже показывали ранее, каждый из этих интегралов есть ни что иное, как $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. В силу показанного в начале рассуждений, для любого разложения в степенной ряд коэффициенты этого ряда будут именно такими, то есть это разложение - единственно.

Докажите первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах

По условию теоремы ряд аналитических функций равномерно сходится в любой замкнутой подобласти к некой функции, значит, в любой замкнутой подобласти эта функция непрерывна. Тогда, рассмотрим интеграл от этой функции по любому замкнотому контуру, целиком лежащему внутри области и воспользуемся в силу равномерной сходимости теоремой о почленном интегрировании:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C u(z)dz$$

Поскольку каждая из $u(z)$ - аналитическая, то интеграл от любой частичной суммы будет равен 0. Значит, и от всей суммы интеграл также будет равен нулю. То есть:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

. По условиям теоремы Мореры, это значит, что функция f - аналитическая во всей области.
Выделим теперь контур внутри области так, чтобы от него до произвольной точки z_0 было больше 0, то есть для любых z между этим контуром играницей области $\frac{1}{z-z_0}$ конечен. Тогда $\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$ и $\frac{u_n(z)}{(z-z_0)^k}$ - также аналитические функции в указанной области, причем так как $\frac{1}{|(z-z_0)^k|}$ ограничена сверху $d^k, d = \min(|z - z_0|)$, то ряд из u_k будет сходится в этой области равномерно и можно будет его почленно проинтегрировать:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(z_0)$$

В последнем выражении два раза применена интегральная формула Коши, в прямую и обратную стороны. В силу произвольности z_0 можно замнеить ее на z. Осталось показать равномерную сходимость ряда из производных.
Для тех же условий, что и в прошлом пункте, оценим $|f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} u_n(z)| = |r_n(z)| < \frac{2\pi}{k!}\frac{\varepsilon}{L}d^{k+1}$, L-длина фиксированного в прошлом пункте контура. Так можно сделать, потому что исходный ряд сходится к функции f равномерно, и $\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N \forall z |r_n(z)| < \varepsilon$. Тогда:

$$|r_n^{(k)}(z)| = \frac{k!}{2\pi} \int_C \frac{|r_n(\chi)|}{|(\chi - z)^{k+1}} ds < \frac{k!}{2\pi} \int_C \frac{\varepsilon}{Ld^{k+1}} \frac{2\pi d^{k+1}}{k!} ds = \varepsilon \int_C \frac{ds}{L} = \varepsilon$$

То есть по критерию коши ряд из производных сходится равномерно. Ч.т.д.

Докажите теорему единственности аналитической функции

Сначала докажем вспомогательную лемму. Пусть функция имеет сходящуюся к некому числу z_0 последовательность нулей z_n. Тогда: разложим нашу функцию в ряд тейлора в окретсности точки z_0 в круге, лежащем внутри области аналитичности. В этом круге, согласно непрерывности исходной функции: $f(z_0) = \lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = 0$. С другой стороны: $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$, т.к. $f(z_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Тогда $f(z) = (z - z_0)\sum a_{k+1}(z - z_0)^k = (z - z_0)f_1(z)$. Полагая, что ни одна из точек $z_n \neq z_0$: $f_1(z_n) = \frac{f(z_n)}{z_n - z_0} = 0$. Поскольку она также является непрерывной (как сходящийся ранвомерно ряд $(z - z_0)\sum a_{k+1}(z - z_0)^k$), то $f_1(z_0) = 0 \Rightarrow a_{0+1} = a_1 = 0$. Продолжая рассуждения по индукции видим, что все коэффициенты $a_n = 0$. То есть исходная функция тождественно равна нулю внутри нашего круга. Для обобщения этого утверждения на всю область аналитичности, проведем из точки z_0 кривую в произвольную точку области z так, что кривая отстоит от границ дальше, чем на фиксированное $d > 0$. Тогда для любой точки этой кривой можно провести круг, радиусом не меньше d, и таким конечным числом кругов в силу конечности длинны кривой покрыть ее всю. Переходя от круга к кругу по их пересечениям, для каждого круга показываем, что в нем функция тождественно равна нулю(например, каждый раз берем пересечение предыдущего круга и кривой, обзовем его z_i. В той части кривой, что останется внутри предыдущего$(i - 1)$ круга, значение функции на точках кривой $f(z)$ будет тождественный ноль. Поскольку кривая непрерывна, то можно в качестве сходящейся последовательности нулей взять сходящуюся к z_i последовательность точек кривой и повторить рассуждения выше). За конечное число итераций мы дойдем до конечной точки z и покажем, что $f(z) = 0$. Значит, функция равна нулю целиком в своей области аналитичности, то есть она есть тождественный ноль. Ч.т.д.
Пусть теперь есть две аналитичные функции f и g. Взяв вместо них функцию $f(z) - g(z)$, получим условия предыдущей леммы и докажем, что $f(z) - g(z) \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) \equiv g(z)$. Ч.т.д.

Докажите теорему Лорана

Любую аналитичную в круговом кольце функцию можно представить сходящимся рядом лорана. Рассмотрим кольцо, внутри которого функция аналитична. Внутри кольца проведем два круговых также контура. Если внешний радиус кольца - R_2, а внутренний - R_1, то радиусы проведенных контуров назовем: R_1' и R_2' соответственно. Очевидно,

$R_1 < R_1' < R_2' < R_2$. Тогда по формуле Коши для произвольной фиксированной точки z:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}[\int_{C^-_{R_1'}} \frac{f(\chi)}{\chi - z}d\chi + \int_{C^+_{R_2'}} \frac{f(\chi)}{\chi - z}d\chi]$$

Если z_0-центр нашего кольца, тогда на R_1': $|\frac{\chi-z_0}{z-z_0}| < 1$, а для R_2 - $|\frac{z-z_0}{\chi-z_0}| < 1$. Поэтому для R_1 и R_2 соответственно можно записать:

$$\frac{1}{\chi - z} = \frac{1}{z - z_0}\frac{-1}{1 - \frac{\chi-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\chi - z_0}{z - z_0})^k$$

$$\frac{1}{\chi - z} = \frac{1}{\chi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\chi-z_0}} = \frac{1}{\chi - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z - z_0}{\chi - z_0})^k$$

Подставляя это обратно в формулу Коши:

$$2\pi i f(z) = \int_{C^-_{R_1'}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-f(\chi)}{(\chi - z_0)^{-k}}(z-z_0)^{-k-1}d\chi + \int_{C^+_{R_2'}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\chi)}{(\chi - z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k d\chi$$

Если почленно проинтегрировать и вынести константу за скобки, то:

$$2\pi i f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(z-z_0)^{-k}\int_{C^-_{R_1'}}\frac{-f(\chi)}{(\chi - z_0)^{-k+1}}d\chi + \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\int_{C^+_{R_2'}}\frac{f(\chi)}{(\chi - z_0)^{k+1}}d\chi$$

Теперь на секунду вспомним теорему Коши - следствие из формулы Коши. Если мы рассмотрим произвольные два контура, образующие кольцо, а внутри этого кольца функция будет аналитична, то по формуле коши, если контура - C_1 и C_2:

$$\int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^+} f(z)dz = 0 <=> \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

То есть при произвольной деформации контура внутри области аналитичности ничего не меняется. Наши интегралы аналитичны в нашем кольце, так как "плохая"точка в их знаменателе z_0 лежит сильно внутри его границы. Тогда, можно вместо двух наших окружностей $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$ взять какой-нибудь один контур C, и написать тогда:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\chi)}{(\chi - z_0)^{n+1}}d\chi$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

Ч.т.д. по теореме Абеля, этот ряд будет сходиться к функции равномерно внутри исходного кольца, так как будет сходиться равномерно внутри любого замкнутого подкольца. Осталось показать единственость разложения. Аналогично случаю с Тейлором сделать уже не получится из-за наличия отрицательных степеней. Предположим, что есть два различных разложения: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{'}(z - z_0)^n$. Тогда, домножим на $(z - z_0)^k$ и проинтегрируем по z по окружности фиксированного радиуса R внутри кольца:

$$\int_{C_R} (z - z_0)^{n-k} dz = \int_{C_R} R^{n-k} e^{in-k\varphi} R e^{i\varphi} i d\varphi$$

Очевидно, если $n-k+1 \neq 0$, то это интеграл от экспоненты внутри ее области аналитичности,т.е. 0. Иначе, это $2\pi i R n - k + 1 = 2\pi i$. То есть при интегрировании ряда в 0 уйдут все коэффицинеты, кроме одного. Интегрируя оба ряда слева и справа получим: $2\pi i c_{k-1} = 2\pi i c_{k-1}^{'}$. Поскольку k было выбрано произвольно, то $c_k = c_k^{'}$. Ч.т.д.

Докажите теорему о конечной устранимой особой точке

Если наша функция в кольце ограничена, то для коэффициентов, если интегрировать по окружности радиуса ρ:

$$c_n = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz <=> |c_n| < \frac{M}{\rho^n}$$

Тогда для отрицательных степеней:

$$c_{-n} < M\rho^n \to 0, \rho \to 0$$

Так как эта оценка была справедлива для любого радиуса, то значит, $c_{-n} = 0$ для любого положительного n, то есть ряд лорана не будет содержать отрицательных степеней, а значит это - устранимая особая точка.

докажите теорему о конечном полюсе

Пусть у функции модуль неограничено возрастает. Тогда выберем такую эпсилон-окрестность точки, где он достаточно большое положительное число и скажм, что внутри этой окрестности функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ аналитична, причем $g(z) \to 0, z \to z_0$. То есть эта точка является нулем какого-то порядка функции $g(z) <=> g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \varphi(z_0) \neq 0, m > 0$.

Так как функция φ в этой окрестности всюду неравна нулю, то: $g(z) = \frac{(z-z_0)^m}{\psi(z)}$ <=> $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \exists\psi(z_0) \neq 0$, то есть $\psi(z)$ раскладывается в ряд лорана без отрицательных степеней по теореме об утсранимой особой точке, а значит $f(z)$ содержит их не более, чем m. Ч.т.д.

Докажите теорему сохоцкого для случая конечной особой точки

Пусть нет. Тогда возьмем такое число B, возьмем такое $\varepsilon > 0$ и такую окрестность c_r, что внутри этой окрестности для любого z: $|f(z)-B| > \varepsilon$. Тогда, очевидно, функция $\frac{1}{f(z)-B}$ будет в этой окрестности ограничена по модулю и всюду аналитична, то есть по уже доказанным теоремам она будет раскладываться только по положительным степеням и будет представима, как:

$$\frac{1}{f(z)-B} = (z-z_0)^m \phi(z), \phi(z) \neq 0, m \geq 0$$

Тогда, возваращаясь обратно к исходной функции:

$$f(z) = B + \frac{1}{(z-z_0)^{-m}\phi(z)} = B + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$$

Т.е. эта точка будет полюсом конечного порядка. Противоречие.

Докажите основную теорему теории вычетов и теорему о вычетах функции, аналитичной на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек

Рассмотрим интеграл по односвязной области, содержащей конечное число особых точек функции, являющихся не существенно особыми. Тогда окружим каждую из них конутром так, чтобы они(контура) не пересекались, очевидно, такое возможно сделать всегда. Тогда мы получим теорему Коши для многосвязной области, в которой функция будет аналитична и можно будет записать, если Γ - граница области, а γ_i - контура вокруг особых точек:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz + \sum_i \int_{\gamma_i^-} f(z)dz = 0 <=>$$

Вспомнив определение вычета, а ткже поменяв направление обхода:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_i Res[f(z), z_i]$$

Ч.т.д. Совершенно аналогично. в дополнительном предположении аналитичности функции всюду за пределами рассмотренной выше области, по определению вычета в бесконенечно удаленной точке:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -2\pi i Res[f(z), \infty] => \sum_i Res[f(z), z_i \cup \infty] = 0$$

Докажите формулу для вычисления интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов

Нам помимо хилого условия непрерывности функции потребуется, вообще говоря, условие аналитичности ее продолжения на C в верхней полуплоскости, и наличия там не более конечного числа особых точек. Нам нужно также, чтобы ее аналитическое продолжение наверху удовлетворяло: $|f(z)| < \frac{M}{R^{1+\delta}}$ За пределами некоторой окружности радиуса R_0, такой. что вне нее нет особых точек. Тогда за пределами этой окружности:

$$|\int_{C_R} f(z)dz| < \frac{2\pi MR}{R^{1+\delta}} = \frac{2\pi M}{R^{\delta}} \to 0, R \to \infty$$

Тогда рассмотрим интеграл:

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz$$

Это интеграл по области аналитичности функции, содержащей конечное число особых точек, и для него применима основная теорема теории вычетов:

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_i Res[f(z), z_i]$$

Правая честь не зависит от R, значит, при взятии предела, она отсанется собой. Второе слагаемое уйдет в 0, а первое - в нужный нам интеграл. То есть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_i Res[f(z), z_i]$$

Ч.т.д.

Докажите весь набор лемм Жордана

Пусть функция $f(z)$ равномерно по углу в нужной полуплоскости стремиться к нулю, то есть $|f(z)| \leq \alpha(R)$. Пусть наша полуплоскость такова, что $\mathrm{Im}(az)$ =ImaRez+ImzRe$a > 0$, то есть, например, для верхней полуплоскости: Re$z - \forall =>$ Im$a = 0,$ Im$z > 0 =>$ Re$a > 0$. Тогда интеграл по бесконечно удаленной окружности:

$$I = \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz \to 0$$

Докажем для верхней:

$$|I| \leq \int_{C_R} \alpha(R)e^{-Im(az)}ds = \alpha(R)R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\varphi)}d\varphi = 2\alpha(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\varphi)}d\varphi <$$

$$< 2\alpha(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = \frac{2\alpha(R)R}{-aR\frac{2}{\pi}}(e^{-aR} - 1) = \frac{\alpha\pi}{a}(1 - e^{-aR}) \to 0$$

Последний переход сделан на основании $\alpha \to 0$. Ч.т.д. Для остальных вариантов доказательства идентичны, меняется только $-\mathrm{Im}(az)$. Например, для правой: $\mathrm{Im}(z) - \forall => \mathrm{Re}(a) = 0, \mathrm{Re}(z) > 0 => \mathrm{Im}(a) > 0 =>$ $a = ib$ $\mathrm{Im}(az)$=$\mathrm{Re}(z)b = Rb\cos\varphi =>$

$$|I| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha e^{-Rb\cos\varphi}Rd\varphi = 2\alpha R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rb\cos\varphi}d\varphi < [\cos\varphi \geq 1 - \frac{2}{\pi}\varphi] <$$

$$< 2\alpha R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rb(1-\frac{2}{\pi}\varphi)}d\varphi = 2\alpha Re^{-Rb}\frac{1}{Rb\frac{2}{\pi}}(e^{Rb} - 1) = \frac{\alpha\pi}{b}(1 - e^{-Rb}) \to 0$$

Ч.т.д.

докажите формулу для вычисления $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}f(x)dx$ *с помощью вычетов*

Аналогично уже доказанной формуле, введем кучу дополнительных предположений на аналитическое продолжение нашей функции $f(z)$ на верхнюю плоскость и, воспользовавшись формулой Коши и основной теоермой теории вычетов:

$$\int_{-R}^{R} f(z)e^{iaz}dz + \int_{C_R} e^{iaz}f(z)dz = 2\pi i\sum_i Res[f(z), z_i]$$

Правое слагаемое опять не зависит от R, а второе стремиться к нулю по лемме Жордана. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\sum_i Res[f(z), z_i]$$

Ч.т.д.

Докажите теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.

Докажем два вспомогательных утверждения. Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_i - ноль или полюс конечного порядка. Тогда $f(z) = (z - z_0)^m f_1(z), f_1(z_i)\exists, f_1(z_i) \neq 0, m \neq 0, m \in Z$. Тогда логарифмическая производная функции f:

$$\varphi(z) = (\ln(f(z))' = (m\ln(z - z_0) + \ln f_1(z))' = \frac{m}{z - z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} =>$$

$$Res[\varphi(z), z_i] = m$$

Т.е. вычет логарифмической производной в точке будет равен либо порядку нуля этой точки, либо порядку ее полюса. Ч.т.д. Рассмотрим интеграл от логарифмической рпоизводной по контуру, охватывающему область с P полюсами и N нулями. Тогда по основной теореме теори вычетов:

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_i Res[\frac{f'}{f}, z_i] = 2\pi i \sum_i [m_i] =>$$

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Под $N - P$ понимается сумма нулей и полюсов с учетом их кратности.

Докажите теорему Руше

Для этого нам понадобится сначала преобразовать результаты предыдущей теремы. $d\ln f(z) = d\ln|f(z)| + di\arg f(z)$. Первая функция -функция действительного переменного, не равная нулю всюду на нашем контуре. При интегрировании ее по замкнутому контуру этот интеграл даст 0. Останется вторая функция:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f}dz = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}]\arg f(z)], \mathrm{Var} f = \int_\Gamma df$$

Тогда, пусть выполнены условия теоремы Руше, т.е. для аналитичных в замкнутой области функций, на границе для которых: $|f(z)| > |\varphi(z)|$:

$$N[F(z)] = N[f(z) + \varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg F(z)]$$

$$N[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg f(z)] => N[F(z)] - N[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg F(z) - \arg f(z)]$$

Как известно: $\arg F - \arg f = \arg\frac{F}{f}$. Это наиболее очевидно, если записать F и f в показательной форме. ТОгда:

$$N(F) - N(f) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}[\arg(1 + \frac{\varphi}{f})]$$

Так как в последнем выражении мы интегрируем по границе области, то $\mathrm{Re}(1 + \frac{\varphi}{f}) > 0$ => при обходе ее по замкнотому контуру мы обойдем на плоскости ее результатов мы обойдем кривую, не содержащую точку 0, а значит - получим ноль. Значит: $N(F) - N(f) = 0$ и Ч.т.д.

Докажите методами ТФКП основную теорему алгебры

Рассмотрим произвольный многочлен $\sum z^i a_i$. конечной степени Он, очевидно, представляет собой аналитическую на всей комплексной плоскости функцию. Если мы возьмем в качестве контура круг настолько большой, что на его границе $|z^i a_i| > |sum^{n-1} a_i z^i|$, что, очевидно, всегда можно сделать, ввиду быстрейшего роста старшей степени, то будут выполнены условия теоремы руше и полной число нулей многочлена будет равно числу нулей $a_n z^n$, то есть n. Ч.т.д.

Докажите теорему о необходимом условии однолистности в конечной точке

Пусть есть аналитическая однолистная в некоторой замкнутой окрестности точки функция. Тогда. если предположить, что она однозначна, то у этой функции существует обратная, которая также однознаяна и однолистна, причем теорема о производной обратной функции остается в силе, и так как обратная функция - также аналитическая в замкнутой области(!), а ее производная: $f^{-1}(z)' = \frac{1}{f'(z)}$, то необходимо $f'(z) \neq 0$ в этой окрестности. Ч.т.д.

Докажите теорему о существовании и аналитичности обратной функции

Если в области G проивзодная функции $f'(z) \neq 0$, то детерминант:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_x - u_y v_y = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)| \neq 0$$

В последнем выражени мы восопльзовались условиями Коши-Римана. Тогда по теореме о неявной функции существует разрешение системы: $u = u(x, y), v = v(x, y)$ относительно x и y, т.е. обратная функция. Производная этой функции вычисляется как $\lim \frac{\Delta z}{\Delta \omega} = \lim \frac{1}{\frac{\Delta \omega}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}$ - существует всюду, в силу неравенства нулю производной. Тогда в силу непрерывности f', $\frac{1}{f'}$ также непрерывна, а значит обратная фунция аналитична в области. Ч.т.д.

Докажите принцип соответствия границ при конформном отображении

Пусть есть однозначная, аналитическая в области Ω и непрерывная на границе этой области ω функция $f(z)$, которая при условии сохранения направления обхода отображает ω на границу Γ области G. Тогда рассмотрим произвольную точку $f(z_0)$ внутри G и $f(z_1)$ вне G. По теореме о числе нулей:

$$N[f(z)-f(z_0)] = \frac{1}{2\pi}Var[f(z)-f(z_0)] = 1, \text{так как } z_0 \text{ лежит внутри области}$$

$$N[f(z)-f(z_1)] = \frac{1}{2\pi}Var[f(z)-f(z_1)] = 0, \text{так как } z_1 \text{ лежит вне области}$$

Значит, в силу произвольност z_0 и z_1 всего одна точка есть праобраз любой точки G и ни одна точка не переходит во вне G, с учетом однозначности это дает нам, что $f(z)$ - конформно отображает Ω на G. Ч.т.д.

Докажите круговое свойство дробно-линейной функции

Окружности переходят в окружности. Рассмотрим окружность: $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$.

$$f(z) = \frac{a+bz}{c+dz} = \frac{b}{d} + \frac{a-\frac{bc}{d}}{c+dz} = \frac{b}{d} + (\frac{a}{d} - \frac{bc}{d^2})\frac{1}{\frac{c}{d}+z}$$

То есть для функции $f_1(z) = f(z-\frac{c}{d}) = A+B\frac{1}{z}$. Таким образом мы выделили линейное преобразование, которое, очевидно, растягивает и сдвигает окружности и не деформирует их. Осталось показать, что исходное преобразование: $\frac{1}{z}$ сохраняет окружности:

$$\frac{1}{z} = u+iv; x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{-v}{u^2+v^2} => A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D =$$

$$= \frac{A+Bu-Cv}{u^2+v^2} + D = 0 <=> A+Bu-Cv+D(u^2+v^2) = 0$$

Т.е. снова уравнение окружности. Ч.т.д.

Докажите свойство сохранения симметрии дробно-линейной функции.

Докаазательство этой теоремы чисто геомтерическое и тут неприводимо.

Докажите теорему о том, что дробно-линейная функция определяется тремя точками

$$f(z) = \lambda\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\beta+z}\right) = \lambda\left(1+\frac{A}{B+z}\right)$$

Нам дано три точки: $f(z_i) = \omega_i$:

$$\omega_1 - \omega_3 = \lambda\frac{z_1 - z_3}{\beta + z_1}\frac{\beta - \alpha}{\beta + z_3}$$

$$\omega_2 - \omega_3 = \lambda\frac{z_2 - z_3}{\beta + z_2}\frac{\beta - \alpha}{\beta + z_3}$$

Тогда:

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\frac{\beta + z_2}{\beta + z_1}$$

Очевидно, что если ω_3 заменить на произвольную $\omega = f(z)$, то:

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\frac{\beta + z_2}{\beta + z_1}$$

Разделив эт осоотношение на предыдущее:

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega}\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$$

Очевидно, что Это уравнение можно разрешить относительно ω(например, сведя к уже указанному выше линейному преобразованию дробь с ω). Это и будет доказательством.

Докажите методами ТФКП принцип максимума и минимума гармонической функции двух переменных

"Гармонические функции — это всецело работа дьявола, и стыд тому, кто пытается найти какие-либо доказательства относительно них." *Н.Абель*

Докажите теорему об аналитичности отображения по лапласу функции действительной переменной

Сначала нужно доказать вспомогательное утверждение: $\forall p : \mathrm{Re}(p) = a + \epsilon > a$:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \text{ - сходится равномерно}$$

В самом деле, по нашему предполжоению, a - такое число, что $f(t) < Me^{(a+\varepsilon)t}$, то есть по признаку сравнения:

$$|\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt| \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(p)t} M e^{(a+\varepsilon)t} dt = \frac{M}{\mathrm{Re}(p) - a - \varepsilon}$$

То есть при $\mathrm{Re}(p) > a + \varepsilon$ ряд сходится равномерно по рпизнаку вейерштрасса. Здесь полагалось, что функция имеет ограниченную степень роста и имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода на действительной оси. Тогда смотрим на наше отображение:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-pt} f(t) dt$$

$t_0 = 0, t_n \to \infty$, то есть t_i - разбиение отрезка от 0 до бесконечности. Тогда, обозвав $u_k(p) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-pt} f(t) dt$, $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(p)$. Остаток этого ряда есть ни что иное как $F(p) - \int_{t_n}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ и стремится к нулю в силу равномерной сходимости для любого p. При этом каждая из u_k - есть обыкновенный интеграл, зависящий от параметра и для него можно применить доказанную из их раздела теорему, показав, что u_k - аналитические функции. Тогда, для этой функции выполнены все условия первой теоремы Вейерштрасса, то есть в любой замкнутой подобласти $F(p)$ - аналитическая функция, а значит она аналитическая в своей области определения. Ч.т.д.

Докажитет еорему о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$

Пускай $F(p)$ - аналитическая функция, равномерно убывающая на 0 по углу. Пусть также для всех p: $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M, \mathrm{Re}(p) > a$. Тогда интеграл из формулы Меллина($\mathrm{Re}(p) = x$):

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{\mathrm{Re}(p)t} |F(p)| dy \leq \frac{M}{2\pi} e^{xt}$$

Т.е. сходится для любого p. Эта же оценка, посокльку не зависит от мнимой части p, является доказательством равномерной сходимости нужного нам интеграла. Теперь нам осталось показать, что: $f(t) \equiv 0, t < 0, F(p)$- изображение $f(t)$ и указанный интеграл не зависит от x. Докажем последний пункт: Выберем прямоугольные контур, соединяющий два вертикальных отрезка: $x \pm Ai, x' \pm Ai$. Поскольку функция $F(p)$ - аналитическая, то по формуле коши интеграл по этому контуру равен 0. По условию теоремы $F(p)$ уходит на ноль независимо от угла, значит, при стремлении отрезков к прямым, интегралы по горизонтальным(соединяющим) частям даст ноль. То есть мы получим:

$$\int_{x-iA}^{x+iA} e^{-pt} F(p) dp = -\int_{x'+iA}^{x'-iA} e^{-pt} F(p) dp$$

Ч.т.д. Ограниченность степени роста оригинала следует из уже проведенной оценки для нашего интеграла с показателем inf$x = a$.
Тепреь отрицательные t. Выделим контур в виде бесконечной полуокружности справа от прямой Re$p = a$. Интеграл по дуге этого контура теперь являет собой лемму Жордана для правой полуплоскости и дает ноль. Сам интеграл в силу формулы коши равен нулю, т.е.:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp + \int_{C_R} e^{pt}F(p)dp = 0 = \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, t < 0$$

Ч.т.д. Последнее утверждение - изображение функции:

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t}f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_0 t}dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

Внутренний интеграл не зависит от x и поэтому можно выбрать его любым, если выбрать его до p_0, то можно будет поменять порядок интегрирования в силу равномерной сходимости интегралов(иначе $(p - p_0)$ может оказаться положительным и все будет плохо). То есть, вынося независимые переменные из нужного интеграла:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)dp \int_0^\infty e^{-(p_0-p)t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\frac{dp}{p_0 - p}$$

Так как в силу равномерной сходимости к 0 $F(p)$ по углу, подынтегральная функция имеет порядок стремления меньше -1, то последний интеграл можно будет вычеслить с помощью вычетов. Так как у этой функции единственная особая точка, причем полюс первого порядка, то:

$$I = F(p_0)$$

Чютюдю

Впереееееед! К Финааааалу!