

1. В физике на данный момент известно 4 вида взаимодействий:

1) гравитационное

2) сильное

3) слабое

4) электромагнитное

Гравитационное вз. заметно лишь между телами астрономич. масштабов. Сильное проявляется

при сближении определенных частиц на расстоянии $< 10^{-15}$ м. Слабое вз. - лишь при взаимопревращениях определенных частиц.

Лишь эл.-магн. проявляется в обычных для нас пространственных масштабах.

Эл. заряд - одна из первичных характеристик частицы. Ему присущие фунд. свойства:

1) сущ. в двух видах: полож. и отриц.

2) в любой электрически измеримой системе ал. сумма зарядов постоянна (закон сохр.)

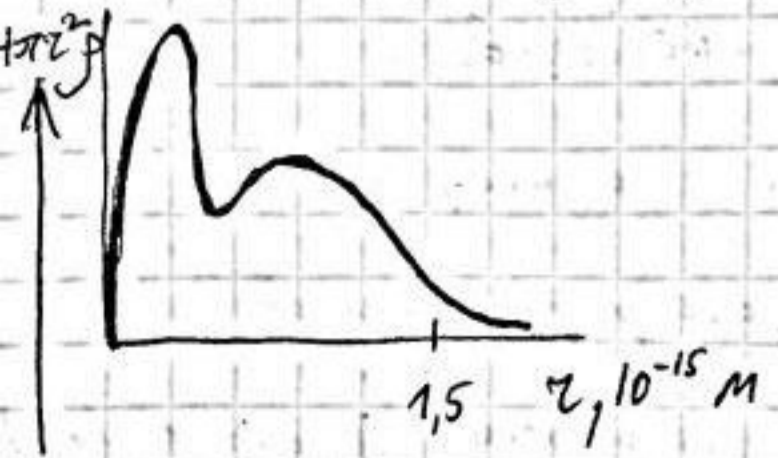
3) эл. заряд - релятивистская инв. величина,

т.е. его величина не зависит от системы отсчета.

Микроскопические ^{носители} зарядов - заряженные частицы, ионы. Заряженность ионов обусловлена тем, что в э. оболочке соответствующего атома или молекулы недостает e или, наоборот, имеются лишние e . Вопрос об ионах, как о микроскоп. носителях зарядов, сводится к вопросу о заряде e и p .
 $[e]$ - материальной носитель элемент. заряда (обычно понимается как точечная бесструктурная частица)

$[p]$ - носитель полож. элементарного заряда.
В отличие от e не рассматривается как точечная частица.

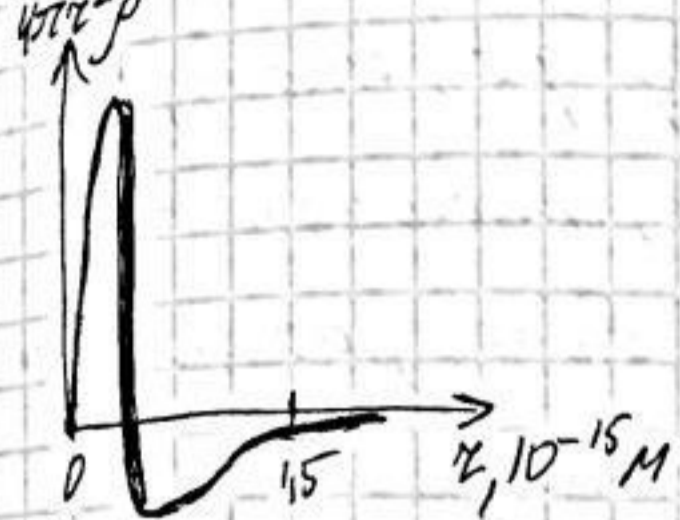
Эл.-маг. структура протона:



плотность суммарного по всем направлениям заряда на расстоянии r от центра

Нейтрон n не является точечной элементарной

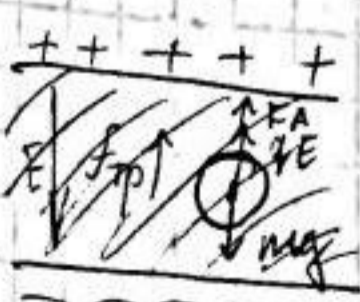
или нейтральной частицей



Видно, что вблизи центра n - полож. заряд, дальше от центра отриц. Плоскопараллельные кривые и ось абсцисс - равног из чего следует, что "+" заряд равен "-" и в целом нейтрон электрически нейтрален.

Отчет Миньжана (прямое эксп. измерение эл. заряда)

Маленькие шарообразные частицы движутся в вязкой жидкости при наличии однород. эл. поля E. На них



действует подъемная сила F_а, и F_{тр} - сила вязкого трения, направлена против скорости; F_{тр} ~ v по формуле Стокса.

При v = const равнодействующая сил 0. Все силы, кроме силы со стороны эл. поля, могут

Богма волислелоз експериментално при движење
честичког в среде без ел. поля. Изучав, затем,
движење ео в поле \vec{E} , најдемо силу $q\vec{E}$, што позволим
најти q . Можемо изменити E так, да бога честичка
бога в покое. Вэтом случае $F_{тр} = 0$, остальное
силе известно \Rightarrow можно најти q .

q честичког меняется с течением времени,
знак q_1 и q_2 в разное моменты, најдемо
 $\Delta q = q_2 - q_1$. Проведа большое число измерений,
Милликен нашел, что Δq всегда целое, кратное
величине $1e$.

$$\Delta q = n|e|, \text{ где } |e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Закон сохранения эл. заряда: каков бы ни бога
процесс взаимопревращения частиц, суммарный
заряд частиц до превращения равен сумм. заряду
после превращения.

Интегральная формулировка закона:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi V = - \oint (\vec{j}, d\vec{S})$$

$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$ - скорость изменения заряда в объеме V 5

$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ - сила тока через пов-ть, ограничивающую S объем

Дифф. формулировка закона: $\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$,

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$$

Магнитная энергия контура с током.

а. Пусть есть контур с источником сторонних

ЭДС. В процессе роста силы тока в контуре

источник сторонних ЭДС совершает работу

против ЭДС самоиндукции.

За время Δt по контуру проходит $\Delta Q = I \Delta t \Rightarrow$

против ЭДС самоиндукции источник сторон-

них сил в промежуток Δt совершает работу:

$$\Delta A = -E_{\text{инд}} I \Delta t = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right) I \Delta t = I \cdot \Delta \Phi$$

При совершении этой работы происходит превра-

щение энергии ист. сторонних ЭДС в энергию

магнитного поля:

$$\Delta W = I \Delta \Phi$$

\vec{B} магнитного поля тока (согласно з.

Био-Савара) пропорциональна I , \Rightarrow

5
=> при переменной силе тока индукция в
каждой точке пропорц. току => поток Φ индук-
ции растет $\sim I$ =>

$$\Phi = LI, \text{ где } I = \text{const}$$

$$dW = I \cdot d\Phi = I(L dI) = d\left(\frac{LI^2}{2}\right)$$

$$W = \frac{LI^2}{2} - \text{энергия магн. поля, создаваемого током}$$

I в контуре.

Энергия маг. поля нескольких контуров.

Пусть I_1, I_2 - силы токов в 1, 2 контурах

Полные потоки через каждой контур!

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad \uparrow \text{поток, создаваемый током } I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

$$\Phi_{11} = L_{11} I_1, \quad \Phi_{22} = L_{22} I_2$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2 \quad (\text{поток } \Phi_{12} \text{ создается 1 конту-}$$

ром за счет поля, созданного током,
 I_2)

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \quad \Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2; \quad \Phi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

$$E_{\text{инд}1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\left(L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}\right)$$

$$E_{\text{инд}2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt}\right)$$

Для работы источника:

$$dA = dA_1 + dA_2 = -\mathcal{E}_{\text{ист}1} \cdot I_1 dt - \mathcal{E}_{\text{ист}2} \cdot I_2 dt$$

$L_{12} = L_{21}$ (объяснение Матвеев стр 323-324)

Тогда:

$$dA = (L_{11} I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1 + L_{22} I_2 dI_2) \stackrel{L_{12}=L_{21}}{=} d\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2\right)$$

$$W = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$$

Случай N контуров:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$$

Энергия маг. поля и объемная плотность.

Рассм. тороидальную катушку

$$L = \mu \mu_0 N^2 S$$

$$W = \frac{L I^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l} \cdot i^2$$

По теореме о циркуляции для H :

$$H \cdot 2\pi r = H \cdot l = Ni \quad \text{Отсюда} \quad H = \frac{Ni}{l}$$

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 i^2 \cdot S = \frac{1}{2} \mu_0 S H^2 l \stackrel{Sl=V}{=} \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V$$

V - объем катушки

$$W = w \cdot V$$

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{B}{\mu_0} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- плотность энергии магнитного поля

1. Закон Кулона: сила взаимодействия F двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12} .

$$F = C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad C = \text{const}$$

$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ в СИ, в вакууме

В векторной форме: $\vec{F}_{ik} = q_i q_k \cdot \frac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3}$, где

\vec{F}_{ik} - сила, действ. на q_k со стороны q_i ,

\vec{r}_{ik} - радиус-вектор, проведенный от q_i к q_k .

Последняя штриховка:

Напряженность поля неподвижного точечного заряда q на r от него (из опыта (закон Кулона)):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{e}_r, \quad \text{где } \vec{e}_r \text{ - орт радиус-вектора}$$

Эта формула выражает з. Кулона, но в "колебой" форме.

т.е. q создает в окр. пространстве эл. поле с

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad (\vec{r} \text{ проводим из точки нахождения}$$

заряда в точку, где опр. напряженность)

Поч. заряд q , находящийся в точке с \vec{E} , на

вергаемая действии со стороны поля:

$$10 \vec{F} = q\vec{E}$$

Напряженностью эл. поля в точке наз-ая величина, равная отношению силы, с которой поле действует на положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к заряду.

Напряженность поля - локальное понятие.

Напряженность поля точечного заряда q :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{r}$$

Напряженность эл. поля \vec{E} нескольких неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждой из зарядов в присутствии других:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

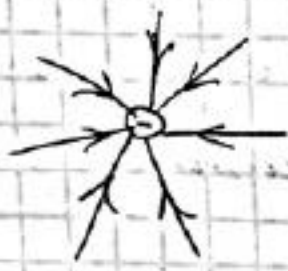
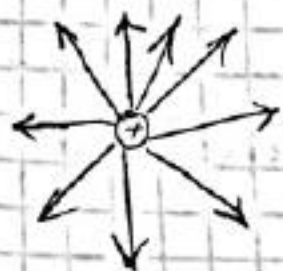
(принцип суперпозиции электростатических полей)

Принцип суперпозиции:

а) сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов

б) сила, действующая на точечный заряд со стороны двух точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого в отсутствие другого.

Силовая линия — линия, направление касательной к которой в любой точке, через которую она проходит, совпадает с направлением \vec{E} в той же точке.



Чем гуще линии \vec{E} , тем поле сильнее.

2. Магнетики. — вещества, способные намагничиваться, то есть приобретать магнитный момент. Намагниченное тело создает свое магнитное поле B' , которое вместе с первичным полем B_0 образует результирующее поле $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

12
 Причина намагничивания в том, что во всех
 веществах существуют микроскопические эл. токи, заключенные
 в пределах каждого атома (молекулярные токи).

Магнитный момент контура с током:

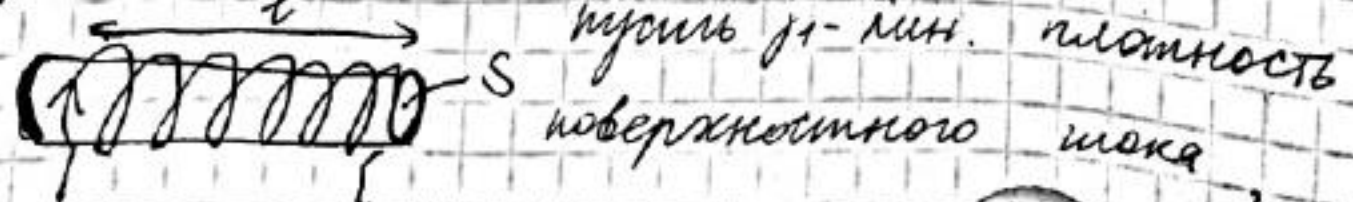
$$\vec{p}_m = i \vec{S}$$

Каждый мал. ток в магнетике обладает магнит-
 ным моментом \Rightarrow магнетик в целом приобре-
 тает магнитный момент при намагничива-
 нии, равной векторной сумме всех моментов
 молекулярных токов. Поэтому вводится поня-
 тие намагниченности \vec{I} - магнитного момента
 единицы объема.

$$\vec{I} = \sum \frac{\vec{p}_m}{\tau}, \text{ где } \tau - \text{физически малый}$$

объем, суммируются все токи в объеме τ .

\vec{I} характеризует магнитное состояние веществ.
 Если \vec{I} одинаков во всех точках
 магнетика, то остается только поверхност-
 ный ток.



тогда полная сила пов. тока $j_1 \cdot l$.

$$p_m = j_1 \cdot l \cdot S = j_1 \cdot V - \text{объем стержня}$$

с другой стороны, $p_m = I \cdot V \Rightarrow$

$\Rightarrow I = j_1$, т.е. при однородном намагничивании намагниченность I равна лнч. плотности пов. тока в магнетике.

Вектор \vec{H} .

В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания,

поэтому:

$$\oint (\vec{B}, \vec{H}) = \mu_0 (I + I'), \text{ где}$$

I, I' - токи проводящие и намагничивания соответствующей данной контуре

$$\oint (\vec{I}, \vec{H}) = I'$$

$$\oint (\vec{B}, \vec{H}) - \mu_0 I' = \mu_0 I$$

$$\oint (\vec{B}, \vec{H}) - \mu_0 \oint (\vec{I}, \vec{H}) = \mu_0 I$$

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}, \vec{H} \right) = I$$

Обозначим $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}$, \vec{H} - вспомогательный

ной вектор

$$\text{rot}(\vec{H}, \vec{H}) = \underline{I}$$

алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром.

\vec{H} - не "потенциальный", а лишь вспомогательный вектор

Дифф. форма теорема о циркуляции

$$[\text{rot} \vec{H}, \vec{H}] = \vec{j} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{плотность тока проводимости} \\ \text{токи } \vec{H} = \vec{j} \end{array}$$

Зная что \vec{J} зависит от \vec{H} в данной точке:

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}, \quad \chi - \text{магнитная восприимчивость}$$

$\chi > 0$ парамагнетики, $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$

$\chi < 0$ диамагнетики, $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$

$\vec{J}(H)$ - плотная зависимость для ферромагнетиков

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \cdot \vec{H}$$

$$(1 + \chi) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$, где $\mu = 1 + \chi$ - магнитная проницаемость

$\mu > 1$ парамагнетик, $\mu < 1$ диамагнетик

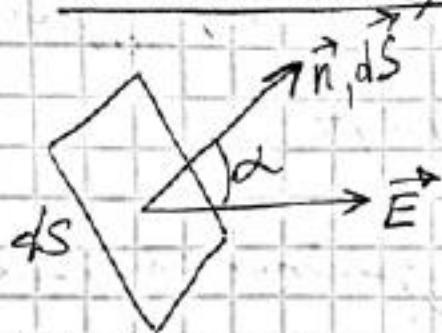
Материальное уравнение - соотношение, в котором входят величины, характеризующие индивидуальные свойства среды.

Для изотропных сред матер. уравнение для векторов магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

Вычет №3.

1. Поток вектора \vec{E}



$$d\Phi = E_n dS = (\vec{E}, d\vec{S})$$

E_n - проекция \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS

Для произвольной поверхности:

$$\Phi = \int_S (\vec{E}, d\vec{S}) \text{ - поток вектора напряженности } \vec{E} \text{ через поверхность } S.$$

Теорема Гаусса.

За положительную нормаль к S принимается внешняя нормаль. Допустим, сначала, что эл. поле создается ^{одн. точк. эл.} единичным зарядом q .

На поверхности S поле:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{r}$$

Рассм. простейшей случай: S - сферическая поверхность, q - в центре.

$$d\Phi = (\vec{E}, \vec{n}) dS = \frac{kq}{r^2} dS$$

Поток через всю сферу:

$$\Phi = \frac{kq \cdot S}{r^2} = \frac{kq}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kq$$

Докажем, что $\Phi = 4\pi kq$ вне зависимости от 17
 формы dS поверхности.



$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}) = (\vec{E}, \vec{n}) dS =$$

$$= E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E dS_z$$

где dS_z - проекция $d\vec{S}$ на плоскость,
 перпендикулярную к радиусу.

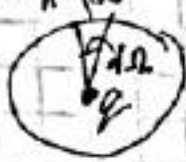
$$d\Phi = \frac{kq}{r^2} \cdot dS_z = kq \cdot \frac{dS_z}{r^2}$$

$\frac{dS_z}{r^2}$ - телесный угол $d\Omega$, под которым из точки
 нахождения заряда q видна площадка dS_z ,
 и следовательно dS . Будем считать $d\Omega > 0$,
 если dS обращена к q внутренней стороной,
 $d\Omega < 0$, если внешней.

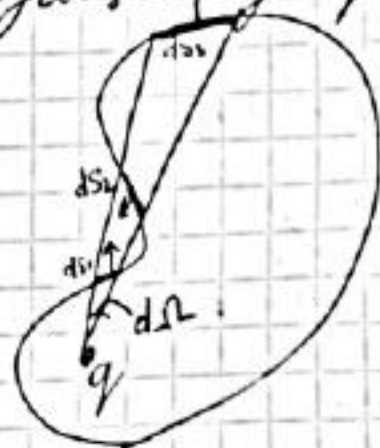
$$d\Phi = kq d\Omega$$

$\Phi = q \int d\Omega$, $\Phi = q \cdot \Omega$, где Ω - телесный угол,
 под которым из точки нахождения q видна
 пов-ть S .

Если S - замкнутая, возьмем II случай;

1) $q \in n$ -ву, ограниченную S . В этой ситу-

 ации Ω охватывает все направле-
 ния в пространстве \Rightarrow равен 4π .

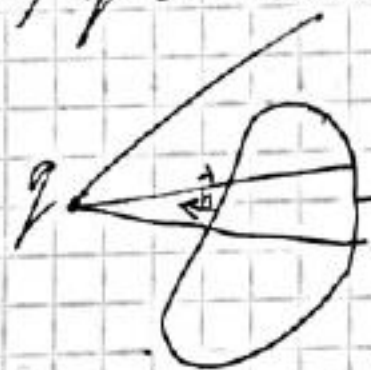
Не имеет значения, сколько раз прямая,
исходящая из q пересекает S .



dS_2 обращена к q внутрь.
сторона, dS_1 и dS_3 внешней \Rightarrow
в итоге останется только
телесный угол Ω который
видна S_1 (счит. угол для
 dS_2 и dS_3 в сумме дают 0)

$$\Phi = 4\pi q$$

2) $q \in$ области вне поверхности S .



В этом случае прямая, исходя-
щая из q , либо совсем не пересе-
кает S , либо пересекает ее

четное число раз \Rightarrow полный телесный

угол Ω и, как следствие, Φ равно 0.

Итак,

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi k q = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{— Электроста-}$$

тическая теорема Гаусса.

III. Гаусса в диффр. форме:

$$q = \langle \rho \rangle \cdot V$$

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\langle \rho \rangle \cdot V}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{V} \oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

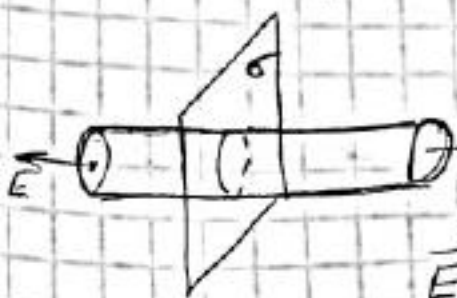
При стремлении $V \rightarrow 0$, $\langle \rho \rangle \rightarrow \rho$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{E}, d\vec{S})}{V} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Дивергенция поле \vec{E} связана с объ. плотностью заряда в точке: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ - т. Гаусса в диффр. форме (локальная теорема)

Примеры применения т. Гаусса:

1) Поле равном. заряженной плоскости;



$$2ES = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \text{ где } E_n - \text{ проекция } \vec{E} \text{ на нормаль } \vec{n}.$$

2) Поле бесконечного круглого цилиндра;



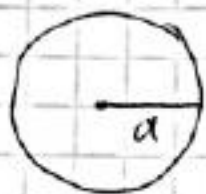
$$E_r \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (r > a); \quad E = 0 \quad (r < a)$$

3) Плоть равномерно заряженного шара:

20

$$r \leq a \quad E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} = \frac{q \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3$$



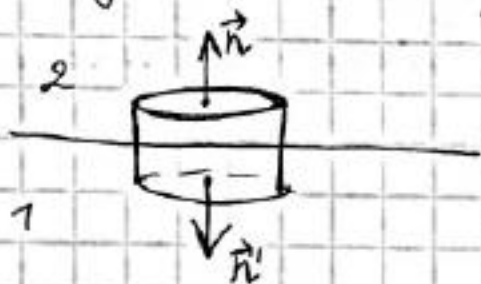
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^3} \cdot r \quad (r \leq a)$$

$r > a$:

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \quad E_r = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

2. Граничные условия для \vec{B} и \vec{H}

1) $\oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$, $\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = I$



$$B_{2n} \cdot \Delta S + B_{1n'} \cdot \Delta S = 0$$

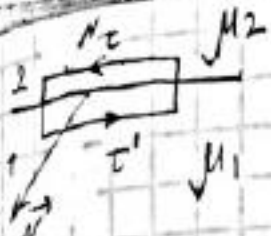
$$B_{1n'} = -B_{2n}$$

$$B_{2n} \cdot \Delta S - B_{1n} \cdot \Delta S = 0$$

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$

т.е. нормальная компонента \vec{B} скачка не испытывает.

2) Помните, что вдоль поверхности раздела магнетика течет пов. ток проводимости с лнн. плотностью i



$$H_{2\tau} \cdot l + H_{1\tau} \cdot l = i \cdot l$$

21

i_N - проекция i на нормаль N к

контуру (плоскости контура).

$$H_{1\tau} = -H_{2\tau}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$$

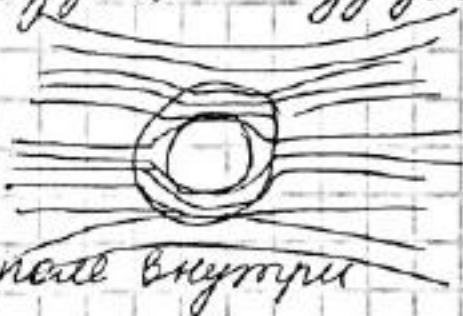
Плотность составляющая \vec{H} претерпевает скачок.

Если на границе $i=0$, то $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

Магнитная защита.

Если поместить какое-то тело, например цилиндр, в однородное магнитное поле с μ , меньшей чем у цилиндра, то линии индукции будут огибаться в теле цилиндра:

В плоскости центра линий



уменьшаются и \Rightarrow магнитное поле внутри цилиндра будет ослаблено (внутри воздушной полости поле практически нет). Этим пользуются для магнитной защиты. Чтобы предохранить прибор, их заключают в замкнутое оболочку из вещ-ва с большой μ .

Напряжения шар в шар. п.а.

стр. 273 Малвев


Напряжения на границе в шаре $H_{12} = \frac{3\nu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0 = H_0 + H_{\text{разм}}$

так $H_{\text{разм}} = H_{12} - H_0 = \frac{\mu_2 - \nu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0$ для шара

$$\frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0 = H_0 + H_{\text{разм}}$$

Влияние формы тела на его намагничивание?

пусто внутри бесконечного магнетика было поле H_0 . Рассмотрим ограниченный магнетик, например в форме короткого цилиндра 1.

 В нем существуют части 2, 3. Тогда B в ограниченном магнетике будет меньше и $\Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0}$ также будет меньше но на величину H' . Поле H' неоднородно намагничивающим. П.к. вклад частей 2 и 3 эквивалент пропорционален намагниченности J , то:

$$H' = \beta \cdot J, \text{ где } \beta - \text{зависящий от формы}$$

и размеров размагничивающий фактор.

Для разных тел β принимает след. значения:

1) для замкнутого тороида $H = H_0 \Rightarrow H' = 0 \Rightarrow \beta = 0$

2) для очень длинного стержня ($l \gg D$) $\beta \approx 0$

3) Для β для диска

Угол? диск поле: если намагниченность поля

J , то сила поля, обтекающего диск J

равна aJ , где a - толщина диска.

Полем в центре $H'' = \frac{aJ}{2r}$ (r - радиус диска)

$$B'' = \frac{aJ}{2r} \mu_0$$

Индукция внутри диска равна:

$$B = \mu_0 H_0 + \frac{aJ}{2r} \mu_0$$

Для беск. тонкого диска $\frac{a}{r} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$B = \mu_0 H_0, \quad H = \frac{B}{\mu \mu_0} = \frac{H_0}{\mu}$$

Полем. $H' = H_0 - H = H(\mu - 1) = \chi H$

$$J = \chi H \Rightarrow H' = J \Rightarrow \beta = 1$$

4) Для магнетика шарообразной формы

$$\beta = \frac{1}{3}$$

Билет №4.

1) Работа электростатич. поля.

$F = qE$ сила, действующая в эл. поле на точечный заряд q , совершает работу при перемещении на $d\vec{l}$

$$dA = (\vec{F}, d\vec{l}) = q(\vec{E}, d\vec{l})$$

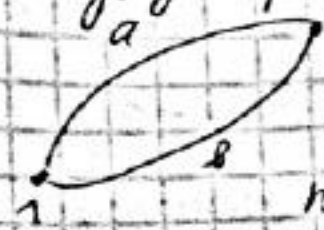
Работа, совершаемая полем считается положительной, а внешними относительно поля силами — отрицательной.

$$A = \int_{(1)}^{(2)} q(\vec{E}, d\vec{l})$$

Потенциальность электростатического поля.

Поле наз-ся потенциальным, если работа при перемещении в этом поле зависит лишь от начальной и конечной точек и не зависит от траектории.

Док., что циркуляция \vec{E} по любому замкнутому контуру равна 0, т.е. $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$



П.к. $\int (\vec{E}, d\vec{l})$ не зависит от пути интегрирования, то $\int_{(a)}^{(b)} = \int_{(b)}^{(a)}$

26 С другой стороны, ясно, что: $\int_{12}^{(b)} = - \int_{21}^{(b)}$

Поэтому:

$$\int_{12}^{(a)} \dots + \int_{21}^{(b)} = \int_{12}^{(a)} \dots - \int_{12}^{(b)} = 0$$

Поле, обладающее свойством $\oint(\vec{E}, d\vec{l}) = 0$

называют потенциальным.

тогда $\int_S (\text{rot } \vec{E}, d\vec{S}) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$ в силу произвольности S .

В эл. поле существует скалярная функция $\varphi(r)$, убойль которой:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l})$$

Потенциал — величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке.

$$\text{grad } \varphi = \vec{i}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$d\varphi = \vec{i}_x dx + \vec{i}_y dy + \vec{i}_z dz$$

Имеет место соотношение $\text{rot grad } \varphi = 0$,
но $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow$ можно \vec{E} предста-

Вить в виде:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

φ данного эл. поля определен с точностью до аддитивной постоянной.

Нормировка - приписывание потенциалу определенного значения в одной из точек.

$$A = \int_1^2 q(\vec{E}, d\vec{l}) = -q \int_1^2 d\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) q$$

Потенциал поле точечного заряда

$$\varphi(\infty) = 0$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_1^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l})$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_1^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r}, d\vec{l} \right) = \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}, d\vec{l} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_2^{+\infty} \left(\frac{\vec{r}}{r}, d\vec{l} \right) \end{aligned}$$

Трансформируем вдоль радиус-вектора, исходящего из точечного заряда. $\left(\frac{\vec{r}}{r}, d\vec{l} \right) = dr$

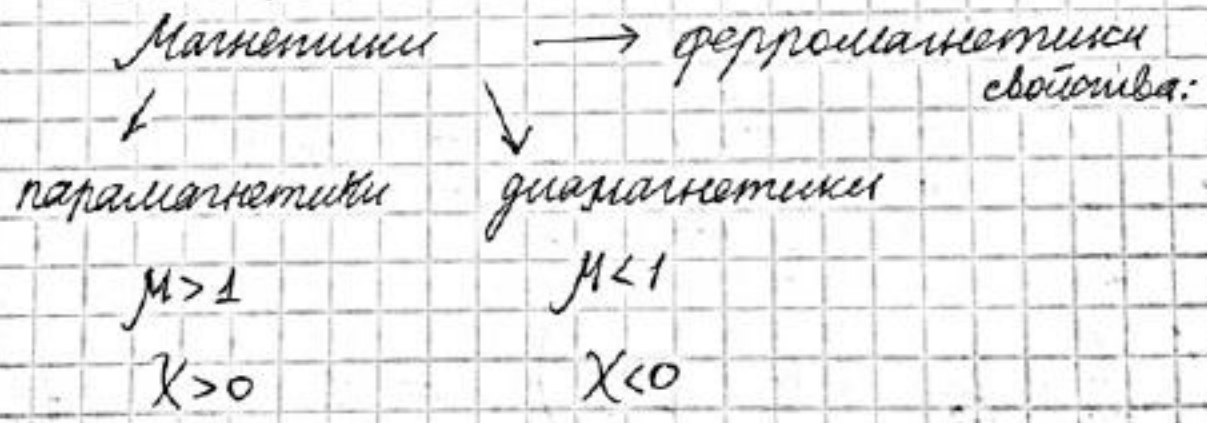
$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_2^{+\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

где $\varphi(r)$ - потенциал на расст. r от точечно-

10 заряда.

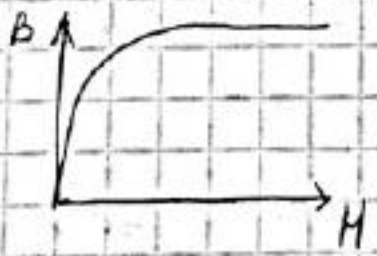
Эквипотенциальные поверхности - поверхности
равного потенциала. Перемещение заряда вдоль
эквипотенциальной поверхности происходит
без совершения работ. Значит сила, действующая
на заряд, все это время \perp перемещению \Rightarrow
линии напряженности всегда \perp потенциалов
поверхностям.

2) Классификация магнетиков.

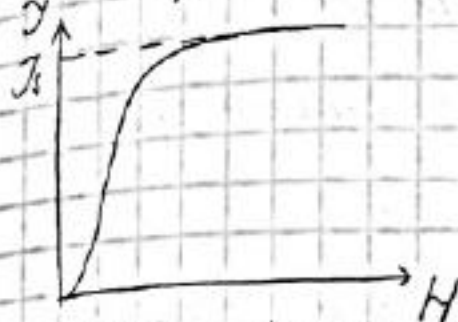


Свойства ферромагнетиков:

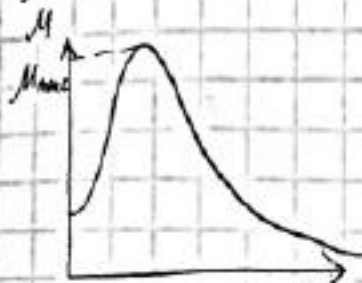
1) Нелинейная зависимость $B(H)$



$$2) \vec{j} = \frac{\vec{p}}{m_0} - \vec{H}$$



3) ТТ.к. $B(H)$ нелинейна, тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \mu(H)$



Диаметрики: стр 288 Матвеев

Ларморова прецессия. В магнитном поле магнетон вращения \vec{e} в атоме отклоняется от их частоты вращения в отсутствие магнитного поля. Рассмотрим движение по орбите e с частотой ω_0 : $m\omega_0^2 r = F_{ц}$, где $F_{ц}$ возникает за счет притяжения \vec{e} к ядру.

$F_{ц}$ настолько велика, что при помещении атома во внешнее поле e орбита электрона не меняется.

Теперь атом в магнитном поле, \vec{B} которого \perp \vec{m} -ти орбиты \vec{e} . $F_1 = |e|\omega r B$ по направлению либо совпадает с F_4 , либо противоположна ей.

Ур-е движения в магнитном поле:

$$m\omega^2 r = F_4 \pm |e|\omega r B ; F_4 \text{ свое значение неизменно}$$

$$m\omega^2 r - m\omega_0^2 r = \pm |e|\omega r B$$

П.к. $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0) \cdot (\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega\omega$, где

$$|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega, \text{ тогда:}$$

$$m r 2\Delta\omega\omega = \pm |e|\omega r B$$

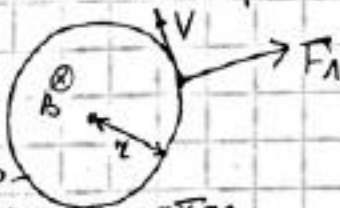
$$\Delta\omega = \pm \frac{|e|B}{2m}$$

Так в магн. поле \vec{e} приобретает доп. угловую скорость:

$$\omega_L = \frac{|e|B}{2m}$$

ω_L - Ларморова частота.

Случай: $\vec{B} \perp \vec{w}$



Скорость \vec{e} и частота вращения уменьшаются

2 случай: $\vec{B} \parallel \vec{w}$

Скорость \vec{e} и частота вращения увеличатся

В общем случае можно записать:

$$\vec{\omega}_0 = -\frac{e\vec{B}}{2m}$$

Образование дополнительной угловой скорости вращения без изменения радиуса орбиты можно представить в виде дополнительного вращения атома как целого с ω_0 в магнитном поле.

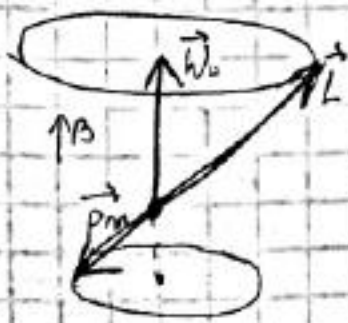
Атом движущийся по окр-ти \bar{e} можно рассматривать как петлю с магнитным моментом,

$$\vec{L} = m\vec{\omega}r^2 \text{ (момент инерции \bar{e})}$$

Витк. \bar{e} эквивалентен круговому току с силой

$$\frac{q}{T} = \frac{e}{T} = \frac{e \cdot \omega}{2\pi} \Rightarrow \text{магнитный момент атома}$$

$$\vec{p}_m = I \cdot \pi r^2 = \frac{e \cdot \vec{\omega}}{2\pi} \cdot \pi r^2 \text{ (учтено, что заряд \bar{e} отрицателен, а $\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$)}$$



Ур-е движения шпосопа:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_m \times \vec{B}] \Rightarrow \vec{r}_m = \frac{e\tau^2}{2} \cdot \vec{\omega} = \frac{e\vec{L}}{2m}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m} [\vec{L} \times \vec{B}] = -\frac{e}{2m} [\vec{B} \times \vec{L}]$$

Сравнивая с ур-ем движения точек абс. тв.

ища:

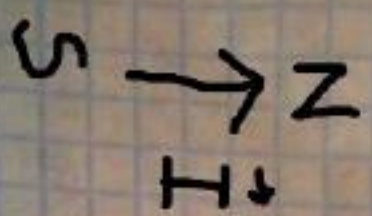
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Тогда $\vec{\omega} = -\frac{e\vec{B}}{2m}$, поэтому атом,
как шпосопа, совершает в магнитном
поле прецессионное движение, кот. наз-ся
лариморовой прецессией.

Диамagnetизм: В р-те лариморовой прецессии от каждого e в атоме возникает круговая ток, кот. с направлением \vec{B} образует левую систему. Создаваемая этими круговыми токами дополнительная индукция магнитного поля направлена навстречу вектору индукции внешнего магнитного

33
 поле. Магнитный момент атома, возникающий
 в рез-те прецессии, и намагниченность также
 направлены против \vec{B} внешнего поля.
 Это явление возникновения ларморовой
 прецессии и связанного с ней магнитного
 момента и дополнительного магнитного
 поля - циркулярности диамагнетизма.

Парамагнетизм. объясняется наличием отр.
 магнитного момента у атомов. В отсутствие
 маг. поля маг. моменты в парамагнетике вслед-
 ствие теплового движения ориентированы
 беспорядочно $\begin{matrix} \downarrow \mu \\ \nearrow \mu \\ \uparrow \mu \end{matrix}$, поэтому маг. момент тела
 близок к нулю \Rightarrow тело не намагничено. Во
 внешнем маг. поле на каждой атом действует
 пара сил, стремящаяся установить маг.
 моменты атомов \parallel полю. В итоге внутри
 парамагнетика возникает упорядоченное
 движение $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{B}$ расположение атомов и направление



направление ↑↑

$$W = -\vec{p}_m \vec{B}$$

минимум ↑↑
определенность

$$\langle P_{mz} \rangle = p_m L(\beta)$$

Ф-я Ландауэра.

$$\beta = \frac{p_m \hbar}{kT}$$

1. Мобильная сила центральных сил является потенциальной, т.е. работа сил поля не зависит от пути, а зависит только от начальной и конечной точки. Таким свойством обладает электростатическое поле (поле, образованное системой неподвижных зарядов)

$\oint (\vec{E}, d\vec{l})$ - циркуляция вектора E

Лемма: Циркуляция вектора \vec{E} в любом электростатическом поле равна нулю:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$$

Док-во: разобьем замкнутый путь на 2 части.



т.к. $\int (\vec{E}, d\vec{l})$ не зависит от пути интегрирования, то $\int_{(a)(b)} \dots = \int_{(b)(a)} \dots$

С др. стороны,

$$\int_{(a)(b)} \dots + \int_{(b)(a)} \dots = \int_{(a)(c)} \dots - \int_{(c)(a)} \dots = 0$$

$$\boxed{\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0}$$

Следствия теоремы о циркуляции \vec{E} :

- 1) Линии \vec{E} не могут быть замкнутыми
- 2) Невозможно поле такой конфигурации:



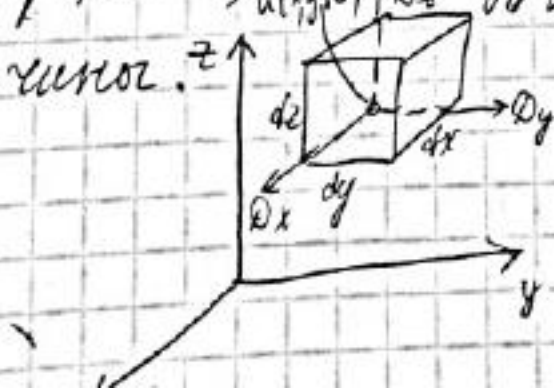
вклад на вертик. участках 0 ($\vec{E} \perp d\vec{l}$), вклад на горизонтальных участках противоположен по знаку, но не равен по модулю.

модулю.

Дифф. формулировка т. о циркуляции: $\text{rot } \vec{E} = 0$

Уравнение Пуассона и Лапласа.

Тл. Гаусса в форме $\int_S \vec{D}_n dS = q$ связывает понятие \vec{D} , относящееся к точкам замкнутой поверхности с зарядом, находящимся внутри объема. Можно записать теорему в форме, в кот. будут входить локальные величины.



$\vec{D} = \{D_x, D_y, D_z\}$ в каждой точке. Расм. бесконечно малой параметрически с верши-

пой в м.а. Поток \vec{D} через его пов-ть. 37

Поток через $dydz$, проходящую через $a(x, y, z)$:

$$-D_x dydz$$

Поток через грань $dydz$, проходящую через

$$a(x+dx, y, z):$$

$$+ \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx \right) dydz$$

Поток через обе грани:

$$\begin{aligned} \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx \right) dydz - D_x dydz &= \frac{\partial D_x}{\partial x} dx dydz = \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$

Пот. и складываем потоки через все грани получим:

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dV$$

всех поверхностей
Объем есть заряд с $\rho(x, y, z) = \rho$, тогда
 ρdV - в объеме $dx dy dz$, тогда (соотношение

$$\int_S D_n dS = q):$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \text{ уравнение Пуассона}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \text{ (уравнение Лапласа)}$$

Иначе, зная, что $E = -(\nabla, \vec{\varphi})$, $(\nabla, \vec{E}) = \rho/\epsilon_0$

3^o Тогда: $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ (ур-е Пуассона)

$\nabla^2 \varphi = 0$ (ур-е Лапласа)

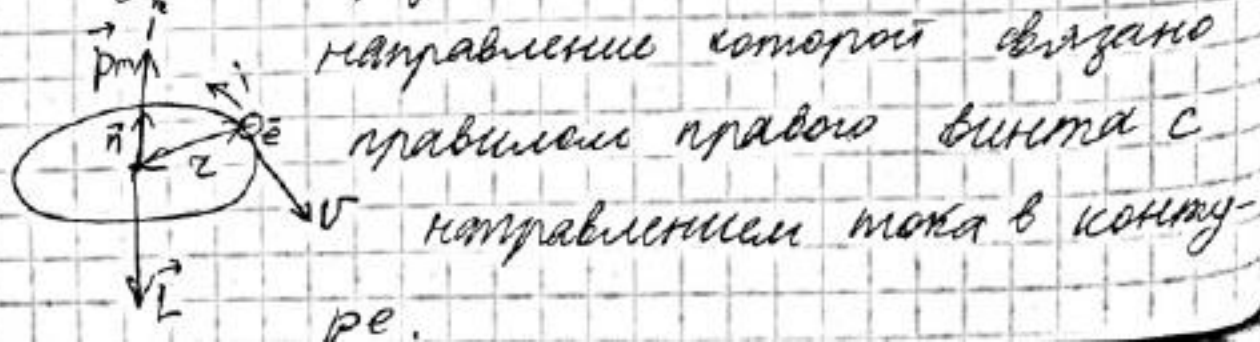
2. Электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой замкнутые эл. токи, являющиеся молекулярными токами, ответственными за намагничивание вещ-ва.

П.к. e имеют не только заряд, но и массу, то каждый e обладает не только магнитным, но и механическим моментом.

Если частота обращения $e - \nu$, тогда ампл. тока $i = \frac{e}{T} = |e|\nu$

Орбитальный магнитный момент \vec{m} :

$\vec{m} = |e|\nu \cdot S \vec{n}$, где \vec{n} - нормаль к контуру,



Орбитальный мех. момент:

$$\vec{L} = m\vec{\omega}r^2 = m \cdot 2\pi\nu \cdot \frac{S}{\pi} = 2m\nu S, \quad \vec{L} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

$$\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$$

Отношение магнитного момента к механическому;

$$\Gamma = \frac{p_m}{L} = \frac{\sqrt{|e|}}{2m} \quad \text{выражает, что}$$

$$\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$$

$$\Gamma = \frac{p_m}{L}$$

- универсальное отношение (справедливо и для эллиптических орбит)

Магнито-механические и механические явления

В любом изменении намагниченности должно сопровождаться мех. явление:

$$\vec{J} \cdot V = \sum \vec{p}_m$$

$$\vec{L}_{\text{полн.}} = \sum \vec{L} = \frac{1}{\Gamma} \sum \vec{p}_m = \frac{1}{\Gamma} \vec{J} \cdot V$$

↑
полный мех. момент.

↑
Итого
Если сначала тело не намагничено, $\vec{J} = 0$ и сумм. мех. момент всех элементарных токов $\vec{L}_{\text{полн.}} = 0$

При намагничивании э. токи приобретают
мех. момент силы, $\vec{L}_{\text{полн.}} = \frac{1}{\Gamma} \vec{J} V$

Но ориентирование шевов происходит из-за
соударений \Rightarrow должен ^{вытн.} ~~быть~~ закон сохранения
момента шевульса \Rightarrow намагничиваемое

тело должно приобрести момент $-\vec{L}_{\text{полн.}}$,
т.е. прийти во вращение вокруг оси $\parallel \vec{J}$

Возникновение вращения при намагничива-
нии — магнитомех. явление.

Опыт Эйнштейна-Тараза:



зеркало

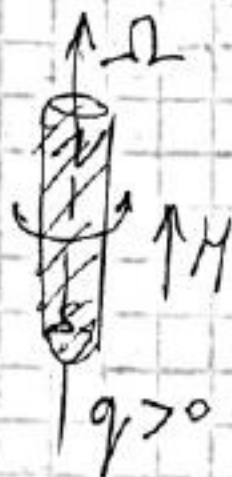
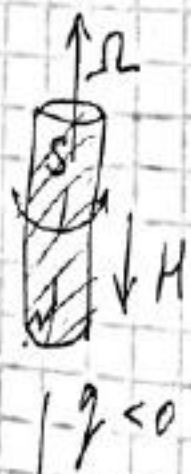
небольшой железной цилиндр подвешен
на тонк. нити и помещен внутрь
соленоида, при намагничивании он
начинает поворачиваться, причем
направление вращения изменялось при из-
менении направления \vec{B} . Поворот отмечался
с помощью зеркала, закрепленного с фильмо-
грам. Чтобы усилить эффект поставили
колебаний днами равной частоте пере-
менного тока (мех. резонанс).

49

Эффект Барнетта - эффект, где наблюдается намагничивание при вращении (механомагнитное явление)

Небольшой железный цилиндр приводился в боковое вращение вокруг своей оси, затем измерялось намагничивание, вызванное вращением.

Механомагнитное явление (как и магнито-механическое) доказывает, что мол. токи, обуславливающие намагничивание, обладают магнитным моментом.

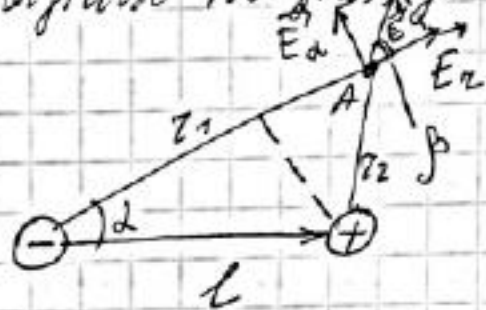


(стр. 259, Калашин.)
 (видно из 1-го рис пред. страницы)

Билет №6.

1) Эл. диполь. Потенциал и напряженность его поля

Эл. диполь - система двух одинаковых по модулю, но разных по знаку точечных зарядов.



$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} \right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right)$$

$l \ll r_1, l \ll r_2$. Тогда:

$$r_1 - r_2 = l \cdot \cos \alpha, \quad r_1 \cdot r_2 = r^2$$

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{p \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{где}$$

$$p = |\vec{p}| = |q \cdot \vec{l}|, \quad \alpha - \text{угол между } \vec{p} \text{ и } \vec{r}$$

Используем полярные координаты r, α с

начало в точке нахождения диполя и

полярной осью, направленной вдоль \vec{p} .

тогда $E_{\parallel} = |\vec{E}_{\parallel}| = -\frac{\partial \varphi_A}{\partial r} = \frac{p \cdot \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ - составляющая вдоль вектора \vec{r} .

\vec{E}_{\perp} - составляющая, \perp вектору \vec{r} ;

$$E_{\perp} = -\frac{\partial \varphi_A}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi_A}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \sin\alpha}{z^3}$$

Полная напряженность:

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_\perp^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{z^3} \sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{z^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

Или: $E = -\nabla\varphi = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{z})}{z^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p}, \vec{z}) \cdot \vec{z}}{z^5} - \frac{\vec{p}}{z^3} \right)$

Сила, действующая на диполь.

Центр диполя находится во внешнем неоднородном э. поле. \vec{E}_+ , \vec{E}_- - напряженности в точках, где расположены $+q$ и $-q$.

Тогда рез. сила:

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

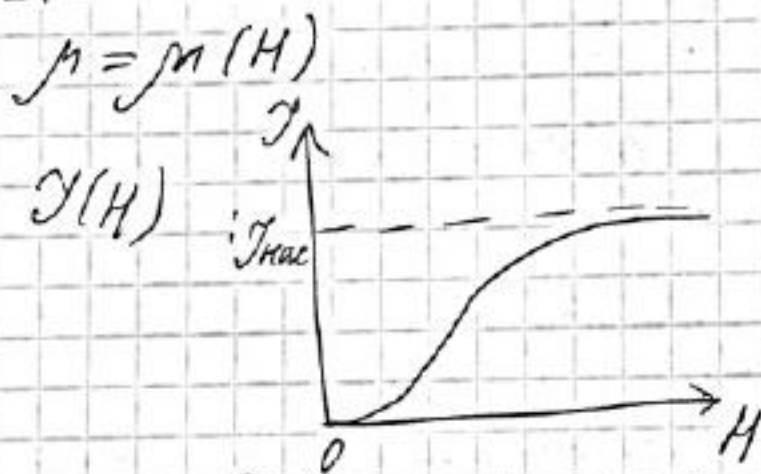
$\vec{E}_+ - \vec{E}_-$ - приращение \vec{E} на отрезке l , l -мал?

$$\Rightarrow \Delta\vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\Delta\vec{E}}{l} \cdot l = \frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \cdot l$$

$$\vec{F} = q \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \cdot l = p \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial z}, \text{ где } p = ql - \text{эл. момент диполя}$$

2) Ферромагнетики - магнетики, магнитная проницаемость которых достигает больших значений и зависит от внешнего магнитного поля и температуры. Образуют остаточной намагниченностью, т.е. она может быть отлична от нуля в отсутствие внешнего маг. поля.

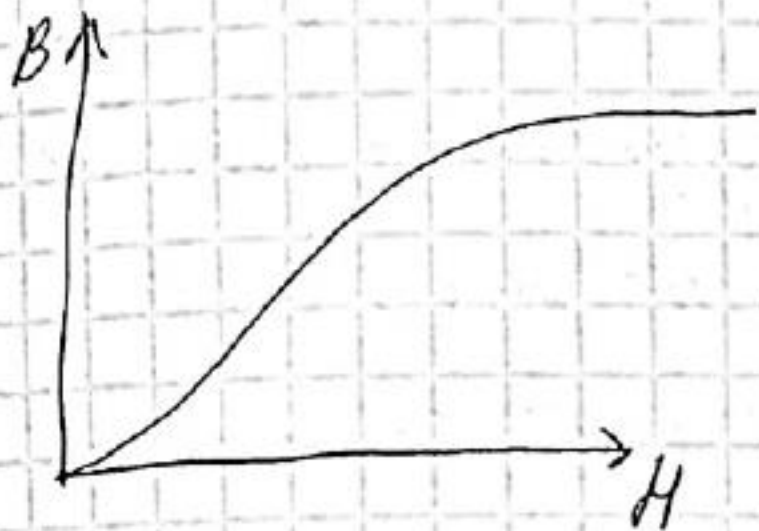
Кривая намагничивания и петля гистерезиса.



т.е. $B(H)$ не увеличивается безгранично, а имеет предел, наз. намагниченностью насыщения.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}), \quad \text{поэтому}$$

$B(H)$ не воходит на насыщение, хотя $J = |\vec{J}|$ использует насыщение



$B(H)$ - кривая намагничивания 45

стр 298-303 Мамвеев

стр 238-242, 265-271 Калашников.

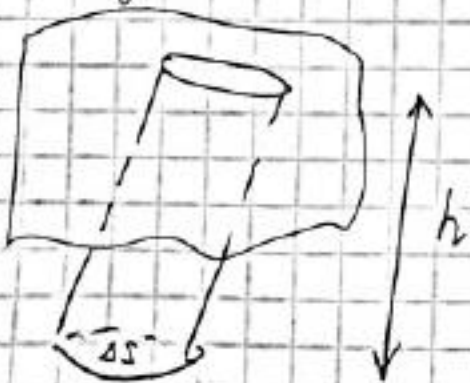
Билет №7.

46
1) Электростатическая индукция - явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике при его помещении во внешнее электрическое поле.

Если нейтральный проводник помещается во внешнее эл. поле, то пов. заряды на проводнике перераспределяются так, что создаваемое ими внутри проводника поле полностью компенсирует внешнее поле, в результате чего суммарная напряженность поля внутри проводника $\vec{E} = 0$.

Поле вблизи поверхности проводника.

Возьмем на пов-ти элемент ΔS , построим цилиндр высотой h , пересекающий пов-ть.



Применим к цилиндру теорему Гаусса:

$$\int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

S - пов-ть цилиндра,

Q - заряд в объеме цилиндра

47

$$Q = \sigma S$$

Внутри проводника $\vec{E} = 0$, поэтому поток \vec{E} через всю пов-ть проводника, находящуюся в объеме цилиндра $= 0$. Поток \vec{E} , в итоге, складывается из потоков через нижнее основание и боков. пов-ть. При $h \rightarrow 0$, $S_{\text{бок.}} \rightarrow 0$
 \Rightarrow при $h \rightarrow 0$ остается только поток через основание цилиндра:

$$\int_{\Delta S} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_n \cdot \Delta S$$

$$\text{при } h \rightarrow 0: E_n \cdot \Delta S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ - нормальная компонента \vec{E} у поверхности проводника однозначно определяется поверхностной плотностью зарядов

$E_{\tau} = 0$ равенство нулю тангенциальной компоненты эл. поля у поверхности проводника является следствием потенциальности эл. поля и отсутствия поля внутри проводника (док-во стр 109-110 Матвеев)

\vec{E} вблизи поверхности проводника направлена
 \perp к поверхности и равна $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Механизм образования поля вблизи пов-ти
проводника - поле создается всеми пов.



зарядами и всеми зарядами
вне проводника

\vec{E} состоит из 2 частей:

\vec{E}_1 , созд. зарядами, которые есть на ΔS

\vec{E}_2 , созд. всеми остальными зарядами вне ΔS

$$|E_1| = |E_1'|, \vec{E}_1 \perp \vec{E}_1'$$

$$E_2 = E_2'$$

$$E' = 0 = E_1' + E_2' \Rightarrow E_1' = -E_2'$$

$$|E_1'| = |E_1|, E_2' = E_2 \Rightarrow |E_1| = |E_2| \Rightarrow$$

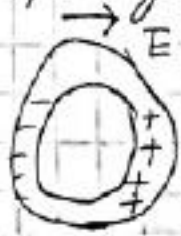
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \vec{E} \text{ (напр. поля вблизи пов-ти сост.}$$

из двух равных частей)

Распределение заряда по пов-ти проводника
зависит от кривизны пов-ти, стр 111 Мат-

велв

Электростатическая защита:
Распределение зарядов внутри проводника
уничтожает поле внутри \Rightarrow можно
рассматривать его как замкнутую
проводящую оболочку. В п-ве, окруженной
оболочкой $\vec{E} = 0$, оболочка наз-ся
экраном.



Метод зеркального изображений: можно
заменить эквипотенциальную поверхность
проводника той же формы и создать на
ней потенциал, равной потенциалу
рассматриваемой эквипот. поверхности.

пример: поле двух зарядов можно раз-
делить плоскостью на две
равные части, эта пл-ть будет
эквипотенциальной поверхностью



т.е. если в АА находится неограниченная проводящая плоскость, то поле между плоскостью и зарядом $+q$ не изменится и будет совпадать с полем двух точечных зарядов $+q$ и $-q$. Тогда действие проводящей плоскости с ее индуцированным зарядом можно заменить действием точечного заряда, яв-ая зеркальным изображением данного заряда в проводящей пл-ти.

Пример: волн. емкость цил. провода с радиусом a , подвешенного на высоте h над землей. Можно рассмотреть вместо



этого два провода на расстоянии $2h$, но напряжение между поверхностью земли и проводом при тех же

заряде провода будет в 2 раза меньше напряжении между проводами \Rightarrow емкость в 2 раза больше емкости

двухпроводной линии.



по Гауссу $E_{\text{ч}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$ вне усн.

$$E(x) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x} - \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d-x}$$

$q_1 = \lambda$ - заряд на единицу длины

$$U = \int_a^{d-a} E(x) dx = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dx}{x} - \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{1}{d-x} dx =$$

$$= \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

$$C = \frac{q_1}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)} \quad \text{- емкость двухпровод-$$

ной линии \Rightarrow некая емкость

(в 2 раза большая) $C_{\text{ч}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$

2) Пусть есть фикс. распределение токов, которое в свободном п-ве создает маг. поле с $\vec{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \vec{H}_0(x, y, z)$

Энергия поля $W_0 = \frac{1}{2} \int (\vec{H}_0, \vec{B}_0) dV$

Допустим, что все п-во заполнено однородной магнетикой с $\mu = const$, а поле создается тем же распределением токов, тогда $\vec{H} = \vec{H}_0$, $\vec{B} = \mu \vec{B}_0 \Rightarrow$ при наличии магнетика энергия поля:

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{H}_0, \vec{B}) dV$$

Т.е. энергия поля увеличивается. Энергия магнетика во внешнем поле \vec{H}_0 является величиной:

$$W_M = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\vec{H}_0, \vec{B} - \vec{B}_0) dV = ?$$

$$(\vec{H}_0, \vec{B} - \vec{B}_0) = (\vec{H}_0, \mu \mu_0 \vec{H}_0 - \mu_0 \vec{H}_0) = (\mu - 1) \mu_0 H_0^2$$

$$\vec{J} = \chi \vec{H} = (\mu - 1) \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0} = \frac{\mu - 1}{\mu} \vec{B}$$

$$\begin{aligned} (\vec{H}_0, \vec{B} - \vec{B}_0) &= (\mu - 1) \mu_0 H_0^2 = (\mu - 1) \mu_0 (\vec{H}_0, \vec{H}_0) \\ &= (\mu - 1) \mu_0 \left(\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0} \right) = \frac{(\mu - 1) \mu_0}{\mu_0^2 \mu} (\vec{B}_0, \vec{B}) = \end{aligned}$$

$$54 \quad = \frac{(M-1)}{\mu_0} (\vec{B}_0, \vec{B}) = \left(\frac{M-1}{\mu_0} \vec{B}_0, \vec{B}_0 \right) =$$

$$= (\vec{J}, \vec{B}_0)$$

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{J}, \vec{B}_0) dV$$

Сила, действующая на магнитики в маг. поле.

$$d\vec{p}_m = \vec{J} dV$$

$$F_x = p_m \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\vec{F} = \vec{i} \cdot \left(p_m, \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \vec{j} \cdot \left(p_m, \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \vec{k} \cdot \left(p_m, \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

$$dF_x = dp_m \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \left(\vec{J}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) dV$$

$$dF_y = \left(\vec{J}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) \cdot dV$$

$$dF_z = \left(\vec{J}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \cdot dV$$

$$\vec{J} = \chi \vec{H} = (M-1) \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{(M-1)}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\vec{J} = \frac{(M-1)}{\mu_0} \cdot \vec{B}$$

$$f_x = \frac{dF_x}{dV} = \left(\vec{j}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) = \left(\frac{M-1}{M \mu_0} \vec{B}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \quad 55$$

$$= \frac{M-1}{M \mu_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial x}$$

$$\vec{f} = \vec{i} \cdot f_x + \vec{j} \cdot f_y + \vec{k} \cdot f_z$$

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \frac{M-1}{M \mu_0} \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial z} \right)$$

↑
 объемная плотность сил, действующей на магнетик.

Физикет №8.

1)

$$\varphi = \int_{\text{поверхности проводника}}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l})$$

φ должен быть пропорционален заряду, т.к. \vec{E} в подынтегральном выражении пропорционально заряду. Потенциал зависит от размеров и формы проводника, которые учитываются его емкостью.

Емкостью проводника называется отношение заряда Q удлинённого проводника к его потенциалу φ .

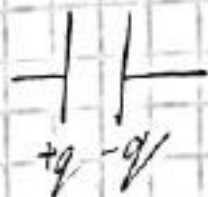
$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Конденсатором наз-ся совокупность двух любых проводников с одинаковым по абсолютному значению, но противоположными по знаку зарядами.

Емкость конденсатора $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$

Плоский конденсатор.

57



$$U = Ed = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0}$$

$$q = \sigma S$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S \cdot \epsilon_0}{\sigma \cdot d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Если диэлектрик - не вакуум, а вещ-во с ϵ :

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Сферический конденсатор.



$$U = \Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

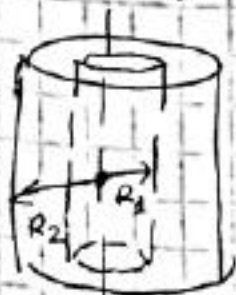
Цилиндрический конденсатор.

E в $r_1 < r < r_2$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\alpha \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\alpha}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$U = \Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{2\pi r \epsilon_0} dr = \frac{\alpha}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



Емкость ед. длины

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$

Сложное конденсаторы, емкостные коэффициенты,

Случ. более сложное случаи, когда линии смещены относительно друг друга. Такую систему проводников называют сложным конденсатором.



В этом случае заряд каждого тела будет зависеть от потенциалов всех проводников.

Полный заряд конденсатора

Заряд можно найти таким образом: Рассмотрим проводник 1, выделим на нем часть пов-ти, которая соединяется только с проводником 2. Заряд этого участка: $q_{ab} = C_{ab} U_{12}$ где C_{ab} - емкость уч. аб относительно тела 2, U_{12} - напр. между телами 1 и 2.

Полный заряд тела 1:

$$q_1 = C_{ab} \cdot U_{12} + C_{b\delta} \cdot U_{13} + C_{\delta a} \cdot U_{14}, \quad (1) \quad 59$$

где U_{14} — напряжение между проводником и тем телом, на котором заканчиваются линии шмещения, идущие с участка ba .

Вместо U_{12}, U_{13}, \dots можно ввести потенциалы U_1, U_2, \dots каждого из проводников (к примеру, относительно ∞):

$$U_{12} = U_1 - U_2, \quad U_{13} = U_1 - U_3, \dots \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1):

$$q_1 = C_{11} \cdot U_1 + C_{12} \cdot U_2 + \dots = \sum_k C_{1k} U_k \quad (3)$$

$$q_i = \sum_k C_{ik} \cdot U_k,$$

где i — номер проводника

Из (3) видно, что C_{11} равен заряду проводника 1, когда его потенциал равен 1, а потенциалы остальных проводников равны 0, C_{ik} зависят от форм, размеров рассматриваемых проводников, от их взаимного расположения.

$$C_{ik} = C_{ki}$$

60 (пример, Каламшиков стр 73-74)

2) квазистационарные токи, критерий квазистационарности. Переходные процессы в RC и RL цепях.

Определение квазистационарности.

При исследовании переменных полей и токов, нужно учитывать, что:

- 1) скорость распространения электромагнитных полей конечна.
- 2) изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

При небольших частотах переменного тока этими факторами можно пренебречь, т.е. считать, что электромагнитное поле распространяется мгновенно, а токи смещения не существуют. (иными словами, магнитное поле порождается только токами проводимости). Удовлетворяющие этим

условиями токи и поля называются квазиэлектростатическими.

61

1) $\lambda = cT$. Пренебречь применением нек. величин, можно, если она рассматривается в областях, линейные размеры которых $l \ll \lambda$.

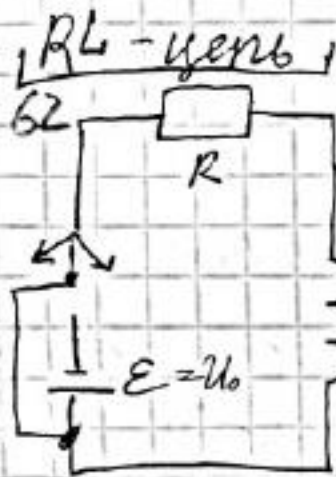
(критерий пренебрежения конечной скоростью распространения электромагнитных полей)

2) Если $D = D_0 \cdot e^{i\omega t}$, то $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = i\omega D_0 \cdot e^{i\omega t} = i\omega D = i\omega \epsilon_0 \epsilon E \Rightarrow$ пренебречь током смещения можно, если $|j_{\text{см}}|_{\text{max}} \ll |j|_{\text{max}}$

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$, $j_{\text{см}} = i\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, то:

$$\frac{|j_{\text{см}}|_{\text{max}}}{|j|_{\text{max}}} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\lambda} \ll 1$$

Однако, для переменных эл.-маг. полей в вакууме и диэлектрике учет токов смещения, как источника магнитного поля, необходим при всех частотах, т.к. там нет токов проводимости.



При $(t=0)$ включении источника ЭДС сила тока I начинает расти, но за счет роста индукции поля в контуре возникает ЭДС самоиндукции, противоположная источнику \mathcal{E} , Закон Ома:

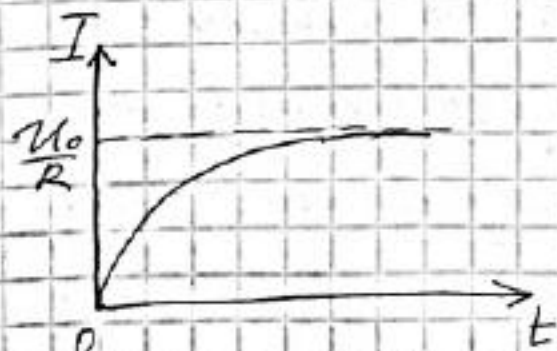
$$U_0 - L \frac{dI}{dt} = IR, \quad \text{Нач. условия } I(0) = 0$$

Говоря, что з. Ома соблюдается при любом t , мы предполагаем, что ток квазистационарен, т.е. во всех участках цепи сила тока одинакова.

$$\begin{cases} U_0 - L \frac{dI}{dt} = IR \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right)$$



$$I(\infty) = \frac{U_0}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R} - \text{время нарастания силы тока}$$

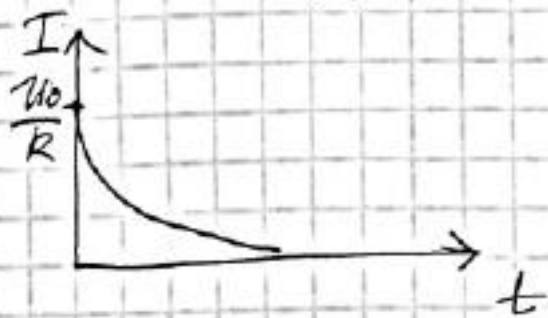
Нарастание I после включения ЭДС

При включении ЭДС:

63

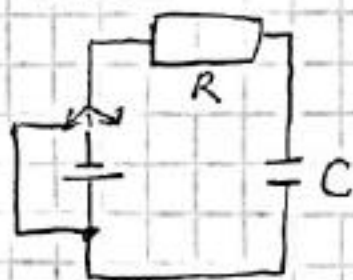
$$\begin{cases} IR = -L \frac{dI}{dt} \\ I(0) = U_0 \end{cases}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$



RC-цепь

Закон Ома: $IR = U_0 - \frac{Q}{C}$



$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} R = \frac{dU_0}{dt} - \frac{1}{C} I$$

Пусто U_0 включается при $t=0$.

Из ур-я: $IR = U_0 - \frac{Q}{C}$ видно,

что $I(0) = \frac{U_0}{R}$

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} R = -\frac{1}{C} I \\ I(0) = \frac{U_0}{R} \end{cases}$$



$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad \tau = RC$$

можно тоже как одна мока I упала до

Ну и, с зарядом до разности потенциалов, равной сторонней ЭДС, но противоположно направленной, т.е. они компенсируют друг друга, по цепи начинает течь ток нач. сила которого $\frac{\mathcal{E}_0}{R}$, а закон уменьшения аналогичен пред. случаю.

1) Диэлектрики. Свободные и связанные заряды.
Связь вектора \vec{P} со связанными зарядами.

Диэлектрики - вещ-ва, практически не проводящие эл. ток. Это значит, что в диэлектриках нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток.

Дипольный момент объема dV равен:

$$d\vec{p} = \vec{P} dV = \chi \epsilon_0 \vec{E} dV \quad \text{т.е. } d\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E} \quad \text{т.к.}$$

$\chi > 0 \Rightarrow$ Какая поле? (в диэлектрике) напряженность поля, создаваемого

го дипольным моментом, направлена противоположно напряженности внешнего поля и ослабляет его, т.е. при поляризации напряженность в диэлектрике ослабляется.



Результатом поляризации - разделение полож. и отриц. зарядов, в результате чего в объеме диэл., как и на его пов-ти образуются заряды. Их называют поляризационными (или связанными).

носим), т. к. они не могут свободно перемещаться по объему или пов-ти.

Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, называют сторонними (или свободными), они могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика.

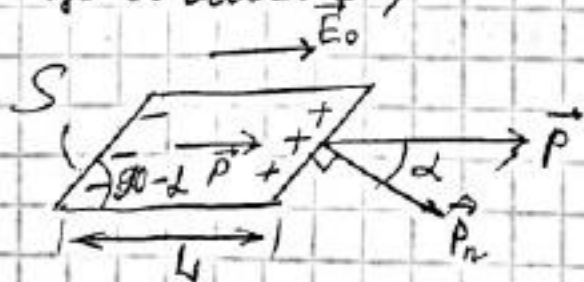
Поле \vec{E} в диэлектрике — суперпозиция поля сторонних \vec{E}_0 и связанных зарядов \vec{E}' ;

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Поляризованность (вектор поляризации) диэлектрика — электрический момент единицы объема вещества диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$$

(сумма эл. моментов всех молекул в единице объема V)



На одном из оснований появляется отриц. связанное заряды σ^{-} , на другом — полож. σ^{+}

пов. плотностью $+\sigma'$, и призма приобретает

67

эл. момент:

$$p = \sigma' S L$$

Объем призмы: $\tau = S \cdot L$

$$\text{Тогда } p = \frac{\sigma' \tau}{\cos \alpha}$$

(с другой стороны p выражается через эл. момент единицы объема:

$$p = P \tau$$

Тогда: $\sigma' = P \cos \alpha = P_n$ (P_n - проекция \vec{P} на направление внешней нормали

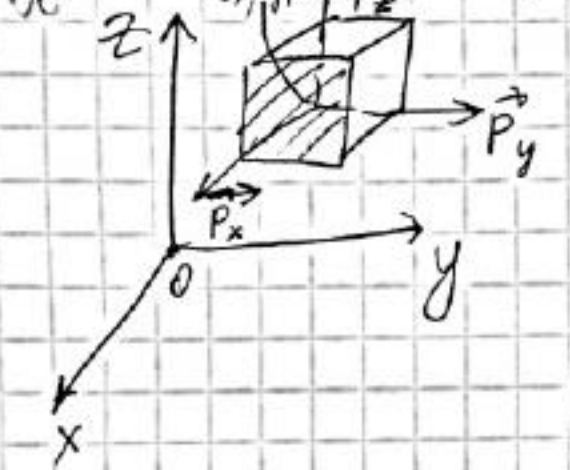
Для правой грани ($\cos \alpha > 0$) и $\sigma' > 0$,
для левой ($\cos \alpha < 0$) и $\sigma' < 0$.

Итого: пов. плотность поляриз. зарядов = норм. компоненте \vec{P} в данной точке.

Эл. заряд, прошедший через эл. поверхности, перпендик. к направлению смещения зарядов, равен модулю \vec{P} .

Если \vec{P} различен в разных точках, то могут возникнуть еще и объемные заряды ρ .

Объемная плотность поляриз. зарядов.



пусть в (x, y, z) $\vec{P} = \vec{P} \{ P_x; P_y; P_z \}$

Тогда через заштрихованную грань волежит "+" заряд:

$$\underbrace{\left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right)}_{\sigma'_{(x+dx, y, z)}} dy dz$$

Полож. заряд, входящий в парам. через эту грань:

$$P_x dy dz$$

Приращение полож. заряда:

$$P_x dy dz - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$$

где $d\tau = dx dy dz$

Полный полож. заряд, вошедший внутрь параллелепипеда:

$$- \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) d\tau$$

С др. стороны, он равен $\rho' \cdot d\tau$, где ρ' - объемная плотность поляриз. зарядов, т.е.:

$\rho' = \text{div } \vec{P}$

$$-\rho' = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}, \text{ т.е.} \quad 69$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$$

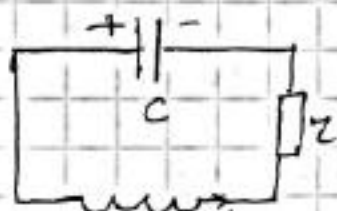
Если $\vec{P} = \text{const}$ (поляризация однородна), то $\rho' = 0$.

2) Электромагнитное колебание. Колеб. контур. Ур-е гармонических колебаний, Собств. колебания в контуре. Энергия, запасенная в контуре.

Электромагнитное колебание - колебания, при которых эл. величины (заряды, токи, электрические и магнитные поля) изменяются периодически.

Простейший эл. колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности, соединенных между собой. Предполагается, что емкость между витками катушки мала по сравнению с C конденсатора, а индуктивность конденсатора и соединительных проводов мала в сравнении с L .

Электрические колебания, происходящие под действием процессов см в самой колебательной системе, называют собственными электрическими, которые возникают при всяком нарушении равновесия.



Будем считать эл. процессы квази-стационарными (т.е. мгновенные значения i для любого места контура одно и то же, к мгновенным значениям эл. величин можно применить закон Кирхгофа).

По II закону Кирхгофа:

$$\tau i = U_C - L \frac{di}{dt}$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$i = -\frac{dq}{dt}$ (где минус стоит потому, что обратное направление i соответствует уменьшению заряда на конденсаторе)

$$-\tau \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \tau \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

71

$$\frac{r}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0}$$

уравнение колебательного контура — линейное дифф. ур-е второго порядка с постоянными коэфф. и обыкновенн. производными.

Нач. уса : $q = q_0, \quad \frac{dq}{dt} = 0$ при $t = 0$

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0 \\ q = q_0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 \end{cases}$$

Пусть $r = 0$, тогда ур-е колебаний:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0$$

Общее решение ур-я — гармонич. колебание с

част. ω_0 : $\boxed{q = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}$,

где A — ампл., φ — нач. фаза

A, φ найдем из нач. условий:

$$q_0 = A \cdot \cos \varphi, \quad A \omega_0 \cdot \sin \varphi = 0$$

Значит: $\varphi = 0$, $A = q_0$

72 Решение имеет вид:

$$q = q_0 \cdot \cos \omega_0 t$$



$$U_c = \frac{q}{C} = U_0 \cdot \cos \omega_0 t$$

Сила тока в контуре:

$$i = -\frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t = i_0 \sin \omega_0 t = j_0 \cdot \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

где $i_0 = q_0 \cdot \omega_0$ - амплитуда тока

Это значит, что между колебаниями заряда и силой тока $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$, колебания силы тока отстает по фазе.

Тема 10.

7.1) Введение \vec{D} .

Теорема Гаусса для поля \vec{D} .

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = (q + q')_{\text{внутр}},$$

где q, q' - свободн. и ϵ_0 связанное заряды, охватываемые пов-тью S

$$\oint \epsilon_0 \vec{E}, d\vec{S} = (q + q')_{\text{внутр}} ; \quad \oint (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'_{\text{внутр}}$$

$$\oint \epsilon_0 \vec{E}, d\vec{S} = q_{\text{внутр}} + (-\oint (\vec{P}, d\vec{S}))$$

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

\vec{D} - вспомогательный вектор, вектор электрической индукции, не явл. "целевым"

В случае однородного диэлектрика $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$

$$\text{Тогда } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

где ϵ - диэл. проницаемость вещ-ва:

$$\epsilon = 1 + \chi$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}} \text{ - материальное уравнение в}$$

случае однородных сред, не содержащих

Диэлектрический шар в однородном э.п. поле;
 пусть он поляризовался однородно с векто-
 ром \vec{P} . Найти \vec{E} внутри шара.

Плотность пов. связанных зарядов σ' на
 границе раздела $\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = -\vec{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$
 отсюда следует, что на шаре есть пов. заря-
 док с $\sigma' = P \cdot \cos \alpha = (\vec{P}, \vec{n})$, можно заменить
 ситуацию двумя, однородно заряженными
 шарами с объемной плотностью ρ , но с
 разными знаками



$h = a \cdot \cos \alpha$ толщина эквивал. слоев

$$\sigma = \rho \cdot h(\alpha) = \rho a \cos \alpha$$

Положим $\vec{P} = -\rho \vec{a}$ в данн. случае

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}, \text{ т.к. } \vec{a} = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{O}'$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{OO}_1}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{(-\rho) \cdot \vec{O}_1\vec{O}'}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}} = \boxed{\frac{-1}{3\epsilon_0} \vec{P}} \text{ - напр. внутри шара}$$

2) Ур-е затухающих колебаний (во ввод 77 см. билет №9).

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad \delta = \frac{r}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

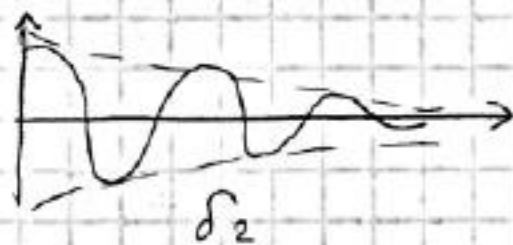
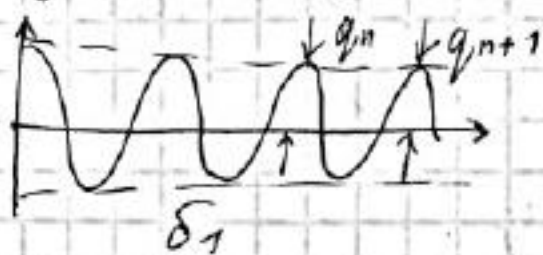
Решение имеет различный вид в зависимости от соотношения коэфф.:

Рассм. сначала случай $\omega_0^2 > \delta^2$

Тогда решение есть:

$$q = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

где A, φ отр. из нач. условий, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$



$$\delta_2 > \delta_1$$

Если δ мало, то небольшие отрезки кривых можно рассм. как отр. синусоиды и говорить о затухающих колебаниях как о гармонических, амплитуда которых уменьшается.

Для кон. характеристики затухания пользуются тем, что $\frac{q_n}{q_{n+1}} = \text{const}$ и вво-

дают величину: $\theta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}}$ - логарифмический декрем. затухания.

При малом δ формулу $q = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ можно понимать как гармон. колебание с крив. частотой ω и амплитудой $y = A \cdot e^{-\delta t}$, где δ наз-ся коэфф. затухания.

Док-во: $\frac{q_n}{q_{n+1}} = \text{const}$

Пусть q_n и q_{n+1} - макс. значения заряда конден. в двух послед. максимумах с номерами n и $n+1$ в моменты t_n и t_{n+1} , причем $t_{n+1} = t_n + T$, тогда:

$$q_n = A \cdot e^{-\delta t_n} \cdot \cos(\omega t_n + \varphi)$$

$$q_{n+1} = A \cdot e^{-\delta(t_n + T)} \cdot \cos\left(\omega\left(t_n + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) =$$
$$= A \cdot e^{-\delta T} \cdot e^{-\delta t_n} \cdot \cos(\omega t_n + \varphi)$$

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = e^{\delta T}, \text{ т.е. } \delta T = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \theta,$$

т.е. $\theta = \delta T$

Q - добротность контура

$Q = \frac{\pi}{\theta}$, $\theta = \frac{1}{N}$, где N - число полных колебаний, по истечении которых их амплитуда уменьшится в e раз.

$$Q = \pi N$$

Рассм. случай большого колебания:

$$\omega_0^2 < \delta^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ - мнимая величина}$$

Электрические колебания в контуре не

будет, решим $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$

будет:

$$q = A_1 \cdot e^{-k_1 t} + A_2 \cdot e^{-k_2 t}, \text{ где}$$

$$k_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$A_1, A_2 = \text{const}$$

Еще н. у. $t=0$: $q = q_0$, $\frac{dq}{dt} = 0$, но

$$\begin{cases} q|_{t=0} = A_1 + A_2 = q_0 \\ \frac{dq}{dt}|_{t=0} = -A_1 k_1 - A_2 k_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы:

$$A_1 = \frac{-q_0 k_2}{k_1 - k_2}, \quad A_2 = \frac{q_0 k_1}{k_1 - k_2}$$

Решение исходного уравнения:

$$q = \frac{q_0}{k_1 - k_2} (k_1 \cdot e^{-k_2 t} - k_2 \cdot e^{-k_1 t})$$

если $\delta^2 \gg \omega_0^2$, то $k_1 \gg k_2$ и

тогда:

$$q = q_0 \cdot e^{-k_2 t}$$

что соответствует

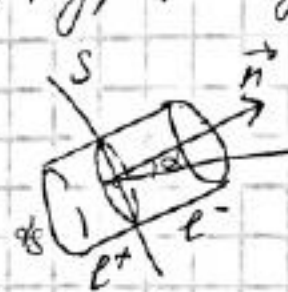


1) Теорема Гаусса для поля \vec{P} : $\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = q'_{внут}$
 Док-во; пусть приемл. пов-сть



диэл. S захватывает часть диэлектрика. При вкл. внешнего эл. поля диэлектрик поляризуется. Найдем

заряд, прошедший через элемент dS наружу:



l_+, l_- - векторы, характеризующие смещение полост. и отриц. связанных зарядов. Через dS наружу выйдет

полож. заряд: $q'_+ = \rho'_+ \cdot l_+ \cdot dS \cdot \cos \alpha$. Кроме того через dS внутрь выйдет отриц. заряд:

$q'_- = \rho'_- \cdot l_- \cdot dS \cdot \cos \alpha$. Тогда сумм. связанной заряд выходящей из сумм. наружу через dS :

$$dq' = \rho'_+ \cdot l_+ \cdot dS \cdot \cos \alpha + |\rho'_-| \cdot l_- \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

$$|\rho'_-| = \rho'_+, \text{ тогда}$$

$dq' = \rho'_+ \cdot l \cdot dS \cdot \cos \alpha$, где l - расст. на кот. сместимся отн. друг друга полост. и отриц. связанных зарядов

III. к. $\vec{P} = \rho' \cdot \vec{e}$, то $dq' = P dS \cos \alpha$,
 82 тогда $dq' = P_n dS = (\vec{P}, d\vec{S})$

весь заряд, вошедший при поляризации
 из объема, равен $\oint (\vec{P}, d\vec{S})$, в рез-те чего
 в объеме ост. избыточной ~~отр.~~ св. заряд
 q' , равной с обр. знаком нулю, то вошли,

тогда $\oint (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'_{\text{внутр}}$

Дифф. форма: $\text{div } \vec{P} = -\rho'_{\text{внутр}}$

III. Тейлора для поле \vec{D} .

III. к. источниками поля яв-ся все заря-
 ды - и связанные, и свободные, тогда:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{(q + q')_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}$$

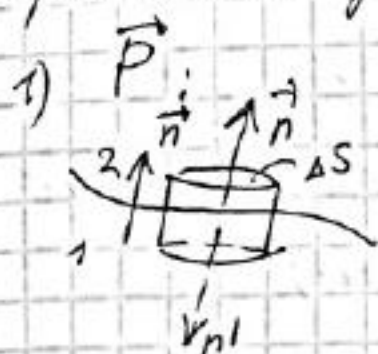
$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} + \frac{q'_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} - \frac{\oint (\vec{P}, d\vec{S})}{\epsilon_0}$$

т.е.: $\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}}$

$$\oint (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

Граничные условия для:

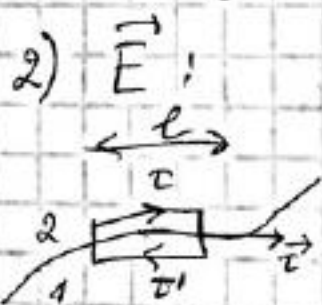


$P_{2n} \cdot \Delta S + P_{1n'} \cdot \Delta S = -\sigma' \Delta S$
 (объемн. связь зарядов нет, т.к. див. поперечна к поверхности)

$$P_{2n} \cdot \Delta S - P_{1n} \cdot \Delta S = -\sigma' \cdot \Delta S$$

$$\boxed{P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'}$$

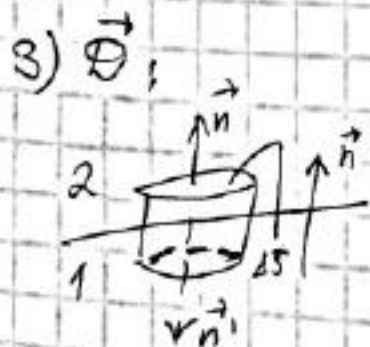
Если среда 2 - вакуум, то: $P_{2n} = 0$ и $\boxed{P_{1n} = \sigma'}$



$E_{2\tau} \cdot l + E_{1\tau} \cdot l = 0$, т.к.

$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$, тогда:

$$\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}$$



$\oint (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}}$

$$D_{2n} \cdot \Delta S + D_{1n'} \cdot \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

Если свободные заряды на границе

раздела отсутствуют, то: $\boxed{D_{2n} = D_{1n}}$

2) Колебания в связанных контурах. Норм. колеба-
ния (моды) и их частоты.

Связанные контуры - контуры, в которых колебания в одном контуре влияют на колебания в другом (индуктивно св. контуры).



$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} + L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0 \\ \frac{Q_2}{C_2} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} + L_1 \ddot{Q}_1 + L_{12} \ddot{Q}_2 = 0 \\ \frac{Q_2}{C_2} + L_2 \ddot{Q}_2 + L_{21} \ddot{Q}_1 = 0 \end{cases}$$

Решение имеет вид (отн. производных)

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_2 + a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 = 0 \end{cases}$$

Рассм. контур



с емкостной связью

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q}{C} + L_1 \dot{I}_1 = 0 \\ \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q}{C} + L_2 \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

Получим:

85

$$\begin{cases} \ddot{I}_1 + a_{11} \cdot I_1 + a_{12} I_2 = 0 \\ \ddot{I}_2 + a_{21} \cdot I_1 + a_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

т.е. в обоих случаях колебания описываются однокритическими уравнениями, причем ур-я того же типа, что и ур-я системы двухгранок маятников.

Будем рассм. общий случай:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0 \end{cases} \quad a_{ik} = \text{const}$$

Ищем τ . решение в виде:

$$x_1 = A_1 \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2 = A_2 \cdot e^{i\omega t}$$

После подстановки:

$$(a_{11} - \omega^2) A_1 + a_{12} A_2 = 0$$

$$(a_{21} \cdot A_1) + (a_{22} - \omega^2) A_2 = 0$$

Если отличное от нуля решение только при условии:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Пусть корни этого квадрат. ур-я: ω_1^2 и ω_2^2

26 Которая система $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ имеем только
вещ. решения системы, Но вещ. частн
 $A \cdot e^{i\omega t}$ и $A \cdot e^{-i\omega t}$ имеют вид:

$$C \cdot \cos(\omega t + \delta), \text{ где } C, \delta = \text{const}$$

$$\text{можно } h = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega^2 a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 a_{22}} \Rightarrow$$

двум значениям частоты соответству-
ют две величины h_1 и h_2

Ч. решения:

$$\text{Первое: } x_1 = e^{i\omega_1 t}, x_2 = h_1 \cdot e^{i\omega_1 t}$$

$$\text{Второе: } x_1 = e^{i\omega_2 t}, x_2 = h_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$$

Общее решение - лк двух решений:

$$x_1 = C_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + C_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$$

$$x_2 = h_1 C_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + h_2 C_2 \cdot e^{i\omega_2 t},$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$

C_1, C_2 можно найти из нач. условий:

$$\text{Введем } \xi_1 = C_1 \cdot e^{i\omega_1 t}, \xi_2 = C_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$$

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_2 \\ x_2 = h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2 \end{cases}$$

$$\xi_1 = \frac{h_2 x_1 - x_2}{h_2 - h_1}, \quad \xi_2 = \frac{-h_1 x_1 + x_2}{h_2 - h_1}$$

87

ξ_1, ξ_2 - новые координаты

ξ_1 - соверш. колебание с ω_1 , ξ_2 - колебание с ω_2 , ξ_1 и ξ_2 наз-ая норм. координа-

тами, а ω_1, ω_2 - нормальными частотами.

В общем случае колебание системы - суперпозиция двух норм. колебаний с частотами ω_1 и ω_2 .

ЭЭФШмет n 12,

$$1) W' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r} \quad (1)$$

W' равна работе, совершаемой при разведении Q_1 и Q_2 от расстояния r до бесконечности.

Между разноим. зарядами - сила притяжения, $A < 0$; между одноим. зарядами - сила отталкивания $A > 0$. В первом случае A совершается за счет внешних источников энергии.

(1) - энергия взаимодействия заряженных шаров.

$$W' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 \cdot Q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r} \right) = \frac{1}{2} (\varphi'_1 \cdot Q_1 + \varphi'_2 \cdot Q_2)$$

φ'_1 - потенциал, созданной 2-ым зарядом в месте нахождения 1-го

Обобщение на случай нескольких зар. шаров;

$$W' = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi'_i \cdot Q_i \quad (1)$$

Энергия взаимодействия системы зарядов

Энергия взаимодействия при непрерывном

распределении зарядов:

пусть в объеме dV ; $dQ = \rho dV$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \rho dV$$
 (2), где φ - потенциал в

точке элемента объема dV

Собственная энергия.

(1) учитывает лишь энергию взаимодействия между заряженными шарами, но не учитывает W взаимодействия элементов заряда каждого шара между собой. (2) учитывает и энергию взаимодействия между шарами, и энергию взаимодействия элементов заряда каждого шара между собой, назовем эту собственной энергией зар.

шара.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i \rho dV$$

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(об)}$$

↑
созд. зарядами
той же шара

← созд. зарядами
и-го шара

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho dV + \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(коб)} \rho dV$$

$$\int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho dV = \varphi_i' \cdot Q_i, \text{ где } \varphi_i' - \text{ потенциал в центре шара}$$

Тогда:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i' \cdot Q_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^{(коб)} \rho dV =$$

$$= W' + \sum_i W_i^{(коб)}$$

$W_i^{(коб)}$ зависят от распределения заряда

в шарах и значений зарядов. Пусть, к приме-

ру, по пов-ти шара равномерно распреде-

лен Q , тогда $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ и, тогда:

$$W^{(коб)} = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \cdot Q =$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R}$$

$$W^{(коб)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R}$$

Энергия поля, w .

91

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{\Phi} dV$$

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{\Phi}) = (\nabla, \varphi \vec{\Phi}) = (\nabla, \varphi \vec{\Phi}) + (\nabla, \varphi \vec{\Phi}) = \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{\Phi} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{\Phi})$$

$$\boxed{\varphi \operatorname{div} \vec{\Phi} = -(\operatorname{grad} \varphi, \vec{\Phi}) + \operatorname{div}(\varphi \vec{\Phi})}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}, \vec{\Phi}) dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{\Phi}) dV,$$

где $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{\Phi}) dV = \int_S (\varphi \vec{\Phi}, d\vec{S})$$

$\varphi \sim \frac{1}{r}$, $\Phi \sim \frac{1}{r^2}$, т.е. $\varphi \Phi \sim \frac{1}{r^3}$, $S \sim r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi \Phi S \sim \frac{1}{r}} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \Rightarrow$$

для всего пространства:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}, \vec{\Phi}) dV}$$

Плотность эл. энергии:

$$\boxed{w = \frac{1}{2} (\vec{E}, \vec{\Phi})}$$

Энергия диполя в поле.

Энергия точечного заряда $W = q\varphi$, где

φ - потенциал в точке нахождения заряда q .

Диполь - система из 2 зарядов \Rightarrow его

энергия во внешнем поле:

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где φ_+, φ_- - потенциалы поля в точках расположения q_+, q_- .

$$\varphi_+ - \varphi_- \approx \frac{\partial \varphi}{\partial l} l$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial l} = E_{\parallel} \quad (E = -\text{grad} \varphi)$$

$$\varphi_+ - \varphi_- \approx -E_{\parallel} \cdot l = -(\vec{E}, \vec{l})$$

$$W = q \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot l = q(-(\vec{E}, \vec{l})) = -(\vec{E}, \vec{p})$$

$$W = -(\vec{p}, \vec{E})$$

$W_{\min} = -pE$ при $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$ (положение устойчивого равновесия)

2) Ур-е колебаний при отсутствии

сторонних ЭДС: $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0$ 93

когда в контур включена внешняя перемен-

ная ЭДС: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$

Ур-е колебательного контура:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \left(\frac{\mathcal{E}_m}{L}\right) \cos \omega t$$

Решение: сумма общего решения однородного

ур-я и частного решения неоднородного

ур-я. Среди ч.р. есть такое, которое меня-

ется во времени синусоидально с частотой

внешней возбуждающей силы ω .

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

Ч.р. (1) ищем в виде:

$$q = q_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Значит: $\dot{q} = i\omega q$, $\ddot{q} = -\omega^2 q$

Из ур-я получаем:

$$q = \frac{(\mathcal{E}_m/L)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta} \cdot e^{i\omega t}$$

Это ч.р. описывает вынужденное колебл

ния осциллятора с частотой ω .

Добавляя к т.р. общее решение однородного ур-я:

$$q = \frac{(E_m/L)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta} e^{i\omega t} + e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$$

слагаемое $e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$ описывает свободные колебания осциллятора

C_1, C_2 находящиеся из нач. условий

Свободные колебания всегда экспоненциально затухают, причем за $\tau = \frac{1}{\delta}$ в е раз

Установление колебаний - процесс затухания свободных колебаний, τ - время установления

При $t \gg \tau$ свободные колебания почти совсем затухнут, останутся только вынужденные, совершенно не зависящие от нач. условий!

В любое время $q = \frac{(E_m/L)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta} \cdot e^{i\omega t}$

должна быть оставлена только действительная часть

нужно $\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta = \rho \cdot e^{i\delta}$

95

$$q = \frac{(E_m/L)}{\rho} \cdot e^{i(\omega t - \delta)} \quad \text{или}$$

$$q = \cancel{\frac{E_m}{L}} a \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 = \rho \cos \delta \\ 2\omega\delta = \rho \sin \delta \end{cases}$$

откуда: $\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$a = \frac{(E_m/L)}{\rho}$$

$$\rho^2 \cos^2 \delta + \rho^2 \sin^2 \delta = \rho^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2$$

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$a = \frac{(E_m/L)}{\rho}$$

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}$$

$$q = a \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

(*)

Вынужд. колебание будет гармоническим,
амплитуда и фаза кот. определяется
формулами (*).

96
Колесания на C, R, L см. Калашников
стр 507 - 512.

Электромех. аналогия:

$$\boxed{L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}}$$

Мех. аналог - движение груза на пружине

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha x' + F$$

$-\alpha x'$ - тормозящая сила, пропорц. v

$$\boxed{m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha x' + kx = F}$$

$$x \Leftrightarrow q$$

$$m \Leftrightarrow L$$

$$\alpha \Leftrightarrow R$$

$$F \Leftrightarrow \mathcal{E}$$

$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

1) На движущееся тело, находящееся в эл. поле действуют силы, называемые иногда пандермоторными силами поля, т.е. действующими именно на тела, в отличие от др. сил, действующих на заряды внутри тел.

ЗСЭ:

1) $U = const$ (проводники подсоединены к источникам тока)

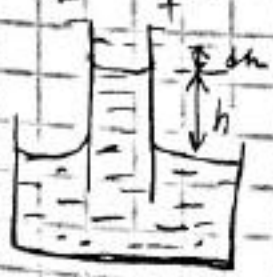
$$\int \epsilon_i \cdot dt = \delta A + dW + \int r i^2 dt$$

\uparrow работа $\quad \quad \quad \uparrow$ увеличение
 пандермоторной энергии поля
 сил

2) $q = const$

$$\delta A + dW = 0$$

Пример: f ? $E = U/d$



$$dA = S \cdot f \cdot dh$$

dW (изменение энергии эл. поля)

$$W = \left(\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) S \cdot dh$$

На пластинку перейдет тот заряд

На пластину перейдет дон. заряд:

$$dq = (\epsilon \epsilon_0 E - \epsilon_0 E) a \cdot dh,$$

где a - ширина пластин

$\epsilon = \mathcal{U}$ (сопр. проводов мало)

$$f = ?$$

$$(\epsilon \epsilon_0 E^2 - \epsilon_0 E^2) S dh = S f dh + \left(\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) S dh + 0.$$

$$f = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

т.е. f равно разности объемных плотностей энергии эл. поля со обеих сторон границы раздела)

Сила, действующая на диполь в эл. поле. Пусть

\vec{E}_+, \vec{E}_- - напр. внешнего поля в точках,

где q_+, q_- .

$$\vec{F} = q_+ \vec{E}_+ - q_- \vec{E}_- = q (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

$\vec{E}_+ - \vec{E}_-$ - приращение $\Delta \vec{E}$ на отрезке

l , l - мало \Rightarrow

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\Delta \vec{E}}{\Delta l} l = \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} \cdot l$$

99

$$\vec{F} = q \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} \cdot l = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$$

$$\boxed{\vec{F} = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}}$$

Объемные силы, действующие на диэлектрик.

$$d\vec{F} = \sum_{\Delta V} \vec{F}_i = \sum_{\Delta V} (\vec{p}_i, \nabla) \vec{E}_i$$

в макроскопич. картине \vec{E} - медленно изм. величина $\Rightarrow \vec{E}_i \rightarrow \vec{E}$

$$\sum_{\Delta V} p_i = \vec{P} \cdot \Delta V$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{\Delta V} = (\vec{P}, \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$[\vec{E}, \text{rot } \vec{E}] = [\vec{E}, [\nabla, \vec{E}]] =$$

$$= \nabla \cdot (\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla, \vec{E}) =$$

$$= - [\vec{E}, [\vec{E}, \nabla]] =$$

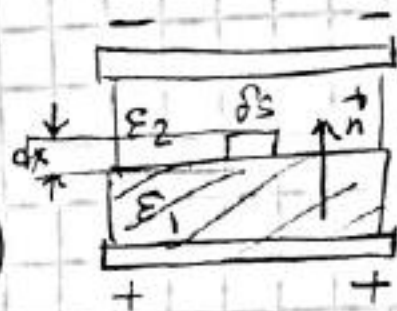
$$= \frac{1}{2} \text{grad } E^2 - (\vec{E}, \nabla) \vec{E}$$

$$(\vec{E}, \nabla) \vec{E} = \frac{1}{2} \text{grad } E^2 - [\vec{E}, \text{rot } \vec{E}]$$

поле \vec{E} потенциально $\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \text{grad } E^2 \cdot (\epsilon - 1) \epsilon_0$$

Пов. шло, действ. на диэлектрик:



$$dA = \Delta S f_n \cdot dx$$

f_n - пов. плотность шло

$D_2 = D_1$ на границе диэлектриков

$$dA = -dF$$

dF - изменение свободной энергии

При смещении на dx объем $\Delta S dx$, сперва

заполненной электрической энергией с

плотностью $\frac{E_2 D_2}{2}$ станет заполненной

энергией $\frac{E_1 D_1}{2}$

Изменение свободной энергии, происходящее при постоянном заряде, в объеме

$\Delta S dx$ есть разность энергий в этом объеме
после и до перемещения: (1)

$$(\Delta F)|_q = \left(\frac{1}{2} D_{1n} \cdot E_{1n} - \frac{1}{2} D_{2n} \cdot E_{2n} \right) \Delta S dx$$

$$dA = -(\Delta F)|_q$$

тогда $F_n = \frac{1}{2} E_{2n} \cdot D_{2n} - \frac{1}{2} E_{1n} \cdot D_{1n}$

П.к. $D_{2n} = D_{1n} = D_n$

и $E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_2 \cdot \epsilon_0}$; $E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_0}$, то

$$F_n = \frac{1}{2} \frac{D_n^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$$

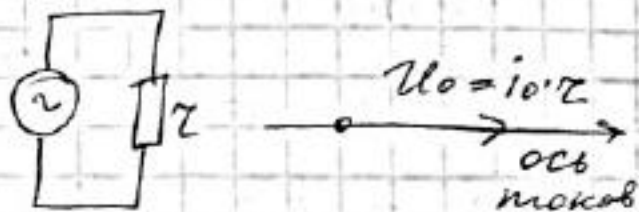
F_n направлена в сторону диэ. с меньшей
диэлектрической проницаемостью

12) Ваттен анализ шлленно гармонич. переменного тока, т.к. любую функцию можно представить в виде ряда или интеграла Фурье, т.е. свести к анализу гармон. пер. тока.

Сопротивление:

$$1) \quad i = i_0 \cdot \sin \omega t$$

$$u = i \cdot z = i_0 z \cdot \sin \omega t$$



$$2) \quad q = \int i dt$$

$$i = i_0 \cdot \sin \omega t$$



$$q = \int i_0 \cdot \sin \omega t dt = -\frac{i_0}{\omega} \cdot \cos \omega t + q_0$$

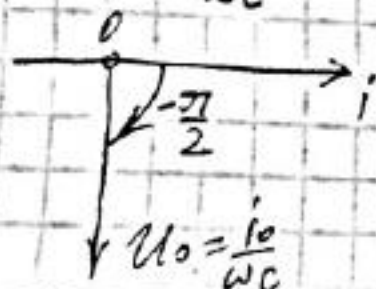
Пусть $q_0 = q(t=0) = 0$

$$\frac{q}{C} = u = -\frac{i_0}{\omega C} \cdot \cos \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

колебание напряжения смещено от колебания силы тока на $\frac{\pi}{2}$

$$u_0 = \frac{i_0}{\omega C}$$

$z_c = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление





$$u = u_a - u_b$$

$$u = i r - \mathcal{E}$$

$$u = L \frac{di}{dt}$$

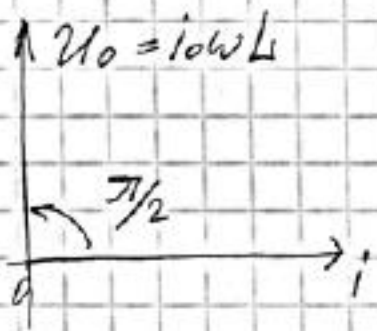
103

$$i = i_0 \sin \omega t$$

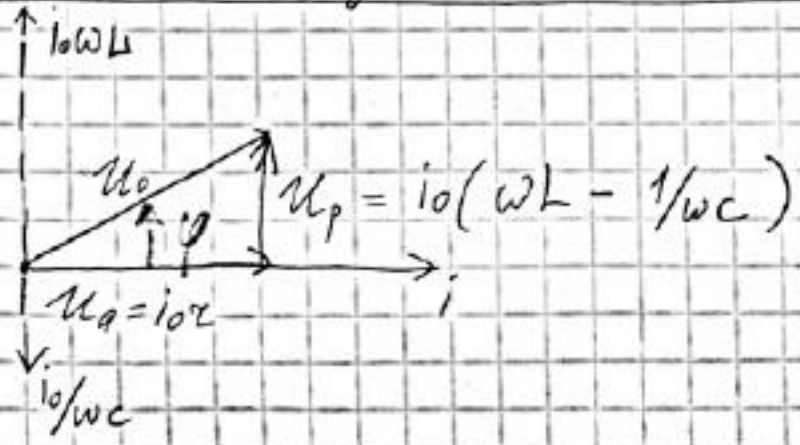
$$u = L \cdot i_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = i_0 \cdot \omega L \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

колебание напряжения на инд. элементе
от колебание силы тока на $\frac{\pi}{2}$

$$U_0 = i_0 \omega L \Rightarrow Z_L = \omega L$$



Закон Ома для переменных токов.



$$U_0 = U_a + U_p$$

$U_a = i_0 r$ активная составляющая

$U_p = i_0(\omega L - 1/\omega c)$ реактивная составляющая

Уаг

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U_0 = i_0 \cdot \sqrt{Z^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{Z}$$

$U_0 = i_0 \cdot \sqrt{Z^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ - закон Ома для переменного тока, однако эта формула относится к амплитудам, но не к мгновенным значениям U и i .

$$Z = \frac{U_0}{i_0} = \sqrt{Z^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$X = \frac{U_a}{i_0}$ - активное сопротивление цепи

i_0 (всегда приводит к выделению

тепла Джоуля - Ленца)

$$Y = \frac{U_p}{i_0} = \omega L - 1/\omega C$$

- реактивное сопротивление цепи (не сопровождается выделением тепла)

Метод контур. амплитуд стр 394 Методика

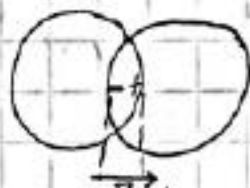
Вект. диаграммы Матвеев стр 341.

1) Теория поляризации диэлектриков:

а) у диэл. с непостоянными молекулами:

каждая молекулу грубо можно представить в виде двух равном. заряж. сфер с совпадающими центрами. В эл. поле оба заряда смещаются и молекула будет возм. эл. поле, совпадающее с полем диэла вне молекулы. Это смещение (при малом полев) $\sim \vec{E}' \Rightarrow$ дип. момент молекулы $\sim \vec{E}'$:

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}'$$



где \vec{E}' - поле, действующее на молекулу. \vec{E}' отличается от \vec{E} в диэлектрике

β - поляризуемость молекулы

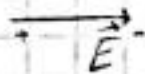
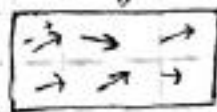
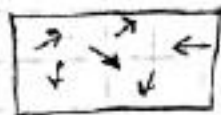
Тип такой поляризации - электронная поляризация смещения

2) у диэл. с постоянными молекулами

каждая молекула имеет дип. момент \vec{p}_0 без наличия внешнего поля. при наложении внешнего поля на каждой диполь действуют силы, стремящиеся ориентировать \parallel эл. полю. В

Этот угол сума всех дип. моментов уже не равна 0, и дип. приобретает э. момент

Тип поляризации - дипольная поляризация



е) Криот. решетки многих веществ состоят из полож. и отриц. ионов; рассматривая ионы порознь, можно вообразить простые решетки, сдвинутые друг от друга. Решетки под действием поля смещаются друг от друга, и может возникнуть э. момент

Тип поляризации - ионная поляризация.

Локальное поле - поле, которое действует внутри диэлектрика на его молекулы, отличающаяся от внешнего поля.

ε непарных диэлектриков.

Чтобы получить выражение для ε у плотных диэлектриков, нужно определить E' поле, действующее на молекулу (внутрен-

Для крист. тел с кубич. решеткой:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \quad \vec{P} - \text{поляризованности кристалла}$$

$$P = n p = n \beta \epsilon_0 E' = n \beta \epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + n \beta \left(\epsilon_0 E + \frac{1}{3} (D - \epsilon_0 E) \right) = \\ = \epsilon_0 E + \frac{1}{3} n \beta (D + 2\epsilon_0 E)$$

П.к. $D = \epsilon \epsilon_0 E$, то $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n \beta}{3}$ (ф-я Клаузиуса-Моссотти)

$$n = \frac{\rho N_A}{M}$$

$$\frac{N_A \beta}{3} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \text{const}$$

ϵ диэлектриков (для газообразных)

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_{ei}$$

$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum p_{ei}$, где p_{ei} - проекция эл. момента i -ой молекулы на напр. внешнего поля

$$\frac{1}{V} \sum p_{ei} = n \bar{p}_{ei}, \quad \bar{p}_{ei} - \text{ср. значение проекции}$$

n - число молекул в ед. объема, концентрация

Согласно законам стат. физики:

$$\bar{p}_e = \frac{p_0^2}{3kT} E'$$

где p_0 - пост. дипольный момент 1 молекулы, E' -

напр. поля, действующего на диполь.

Для дип. поляризации величина $\frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT}$ играет ту же роль, что β для неспарных дипол.

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \right) = \frac{p_0^2 \cdot n}{9 \cdot \epsilon_0 kT}$$

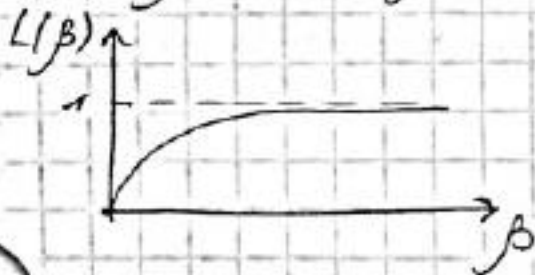
$$\epsilon = f(T), \quad \epsilon_1 < \epsilon_2 \text{ при } T_1 > T_2$$

Воздействие малой поляризуемости $E' \approx E$ для газобр. дипол. $\Rightarrow \epsilon + 2 \approx 3$

дипол. прониц. газа:

$$\epsilon = 1 + n \left(\beta + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \right) \quad \text{см. рез. стр. 96, карандаш.}$$

$$L(\beta) = \coth \beta - \frac{1}{\beta} \quad \text{— ф-я Ланжевена}$$

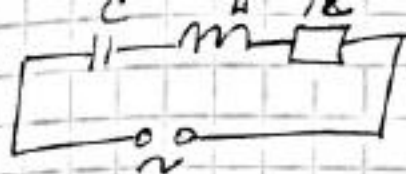


$L(\beta)$ — Больцмановская статистика
средней величины $\cos \alpha$, где

α — угол между вектором
эл. дипольного момента и внешним полем

\vec{E} . Применяется Дебая в теории поляризуемости
диэлектриков.

2)



$$E = E_0 \cdot \sin \omega t$$

$$i = i_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_0 = \frac{E_0}{Z}, \text{ где } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

φ - фазовый угол на кот колебание тока отстает от колеб. напря.:

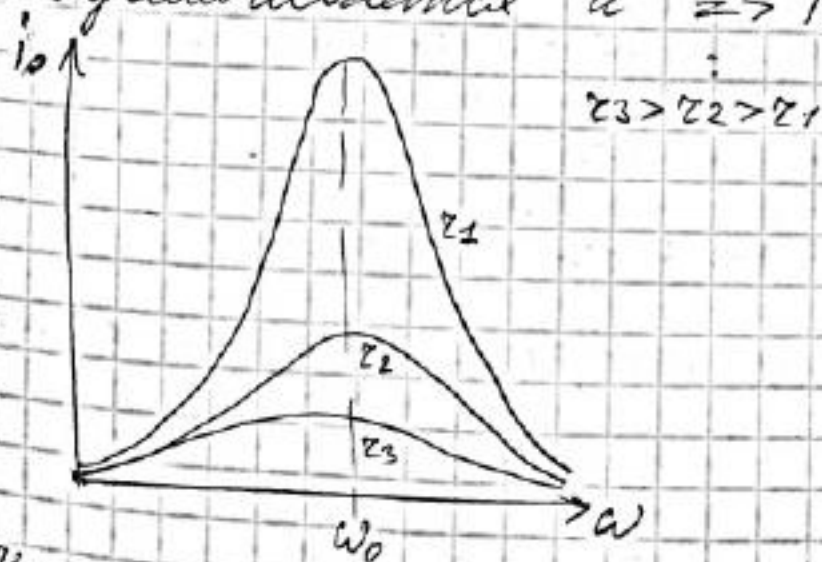
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_{\text{реакт}}}{R_{\text{акт}}} = \frac{R_p}{R_A} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Изменение ампл. тока при изменении ω

Если $\omega = 0$, то $Z \rightarrow \infty$, $i_0 = \frac{E_0}{Z} \rightarrow 0$

При увел ω : $(\omega L - 1/\omega C)^2$ сначала уменьшится и при $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ реакт. сопротивление обращается в нуль, поэтому $Z_{\min} = R$

При $\omega > \omega_0$: $(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$ увеличивается \Rightarrow Z увеличивается и $\Rightarrow i_0$ уменьшается



Чем меньше z , тем меньше δ и больше Q , тем больше i_0 и острее максимум.

110
Иссл. φ : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

При малом ω : $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$, $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$,

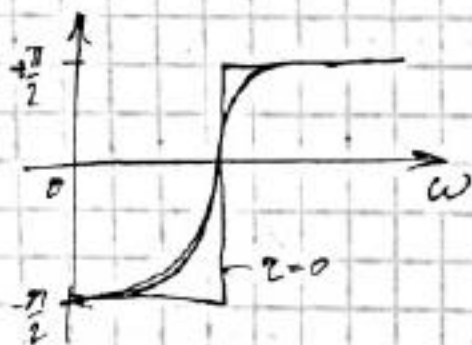
ток опережает напряжение

При возр ω : $\omega L - 1/\omega C < 0$, φ увеличивается,

При $\omega = \omega_0$: $\operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

При дальнейшем увел. ω : $\omega L - 1/\omega C > 0$ и

ток отстает от напряжения



Резонанс напряжений. Когда $\omega = \omega_0$, амплитуда тока достигает макс. значения, сдвиг фаз между током и напряжением равен 0, т.е. контур действует как активное сопротивление - это резонанс напряжений.

Амплитуда тока при резонансе: $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$

Амплитуда напр. на C: $U_{0C} = I_0 \cdot Z_C = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{1}{\omega_0 C}$
 $= \frac{\mathcal{E}_0}{R \omega_0 C}$

$$\frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{(R/2L) \cdot 2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{\delta T} = 111$$

$$= Q$$

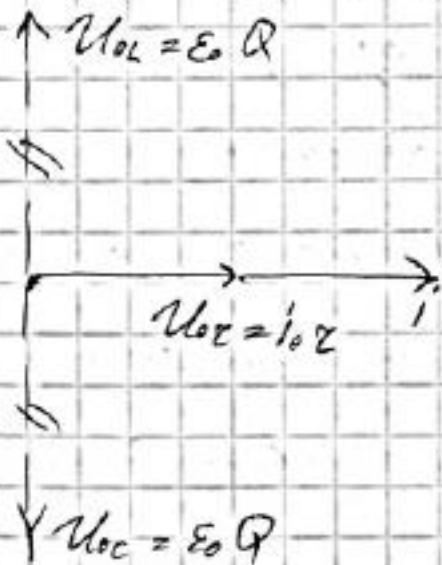
$$\frac{1}{\omega_0 RC} = Q, \text{ т.е. } U_{0c} = \varepsilon_0 \cdot Q$$

Амплитуда напр. на индуктивности:

$$U_{0L} = i_0 \cdot \omega L = \varepsilon_0 \cdot \frac{\omega L}{R} = \varepsilon_0 \cdot \frac{f \cdot L}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 \cdot Q$$

$$= \varepsilon_0 \cdot Q$$

Схем. при резонансе:



Ширина рез. кривой равна:

$$2 \cdot \Delta \omega = \omega_0 \cdot Q = \frac{R}{L}$$

1) Эл. свойства кристаллов. -?

Матвеев стр 189 - 196.

2) Граница Кирхгофа для цепей переменного тока. Резонанс токов.

1) К переменным токам без всяких изменений применимо 1 правило Кирхгофа, т.е. точка соединения проводов обладает пренебрежимо малыми емкостями, то в них не могут накапливаться эл. заряды \Rightarrow в любой момент времени ал. сумма сил токов, входящих в узел, равна ал. сумме токов, из узла выходящих:

$$\sum_p (\pm) I_p = 0 \quad \text{в каждом узле}$$

i_0 - амплитуда ($i = i_0 \cdot \exp(i\omega t)$)

2) Второе правило Кирхгофа:

$$\sum_k Z_k \cdot i_{ok} \cdot \exp(i\omega t) = \sum_k \varepsilon_{ok} \cdot \exp(i\omega t)$$

$$\boxed{\sum_k Z_k \cdot i_{ok} = \sum_k \varepsilon_{ok}}$$

для всякого рин-

ксисты. амплитуды

кнута контура.

Резонанс токов см. ~~Буду~~

Калашников 527.

Билет № 16.

¹¹⁴
Эл. ток - упорядоченное движение электрических зарядов.

Линии, вдоль которых движется заряженные частицы наз-ва линиями тока. За направление линий тока принято направление движения положительных зарядов.

Для колич. характеристики эл. тока используют плотность тока и силу тока.

Плотность тока равна заряду, проходящему в ед. времени через ед. поверхности, перпендикулярной к линиям тока. В проводнике введем площадку с $S=1$, расположенную перпендикулярно к линиям тока, построим параллелепипед с длиной, равной $|\vec{v}|$, тогда через S в ед.



времени пройдет $n \cdot v \cdot S$ частиц; заряд, переносимый ими nev .

Плотность тока $\vec{j} = ne\vec{v}$

Если в проводнике введем беск. малую площадку $dS \perp \vec{j}$, то заряд q через dS :

$$dq = j dS dt$$

В общем случае $dq = j \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} dt$, где \vec{n} - нормаль к $d\vec{S}$

Сила тока - заряд, проходящий в ед. времени
через сеч. проводника

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \int_S j_n dS, \quad S - \text{пов-ть сечения проводника}$$

Если $j = \text{const}$ и $i = \text{const}$ во времени, то
внутри проводника течет постоянный
(амплитудный) ток.

Из закона сохр. заряда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S j_n dS$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_S (j_n, d\vec{S})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S (j, \vec{n}) dS = - \int_V \text{div} j dV$$

Тогда: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div} j$

$$\boxed{\text{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

- уравнение непрерывности

Если ток стационарный, т.е. не зависит от времени, то

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$\boxed{\text{div } \vec{j} = 0}$ условие стационарности тока

Поле внутри проводника.

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$. Внутри проводника с током существует эл. поле (В сравнении: в эл.-статике поле внутри проводника отсутствует)

Плотность пост. тока по сечению проводника распределена, вообще говоря, неравномерно.



Вдоль ^{пов-ти} проводника плотность тока может быть направлена

либо по кас. к поверхности $\Rightarrow \vec{E}$ вдоль

пов-ти касательна пов-ти \Rightarrow эл.пот. пов-ти

\perp его пов-ти \Rightarrow если участок изогнут,

то две близкие э.п. не могут находиться друг от друга ~~во всех~~ на неизменной

расстоянии. Т.к. расстояние между

з.п. меняется, то меняется и \vec{E} . 117

Вблизи пов-ти как напряженность поля так и плотность тока направлены касательно поверхности. I_n, j_n отсутствуют \Rightarrow ^{внутри проводника} исходя из граничного условия: вблизи пов-ти вне проводника имеется эл. поле, \vec{E}_1 , которого равна \vec{E}_2 поля внутри проводника.

Эд. источником пост. эл. поля может быть только заряд; какими зарядами порождаются поле внутри проводника и где они находятся? см. стр. 199 Матвеев.

п.2) В интегральной форме система ур-ий Максвелла имеет следующий вид:

$$1) \oint (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right) \quad \oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

$$2) \oint (\vec{H}, d\vec{l}) = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right) \quad \oint (\vec{D}, d\vec{S}) = \int \rho dV$$

$$1) \vec{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\vec{E} = \int (\vec{E}, d\vec{l}) \quad ; \quad \Phi = \int \vec{B}, d\vec{S}$$

Тогда $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$

18 Это соотношение выражает кол. связь между изменяющимися магнитным полем \vec{B} и вихревым эл. полем \vec{E} .

2) стр 309 Калашников.

$$\sigma = D$$

$$q = S\sigma = SD \text{ (заряд обкладки)}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

i связана с быстротой изменения индукции эл. поля, \Rightarrow меняющееся поле к-го. создает такое же магн. поле, как ток движущий силой $S \frac{dD}{dt}$

и плотность:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$\vec{j}_{\text{см}}$ - плотность тока смещения

Переменное во времени эл поле вызывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с плотностью $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}$.

Если в каком-либо проводнике имеется пер. эл. ток, то внутри проводника имеется переменное эл. поле. Внутри проводника имеется и ток проводимости, и ток

магнитное поле определяется
 их суммой поингом токами: 112

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Взяв внутри проводника площадку S , ограничено контуром ℓ , применим к этой контуре теорему о циркуляции \vec{H} , учитывая что магнитное поле стр. поингом током:

$$I_{\text{полн}} = \oint_{\ell} (\vec{H}_{\ell}, d\vec{\ell})$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S (\vec{j}_{\text{полн}}, \vec{n}) dS + \int_S \frac{\partial \vec{D}_{\text{полн}}}{\partial t}, \vec{n}) dS$$

$$\oint_{\ell} (\vec{H}_{\ell}, d\vec{\ell}) = \int_S (\vec{j}, \vec{n}) dS + \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{n} \right) dS$$

Таким образом:

$$\oint_{\ell} (\vec{E}_{\ell}, d\vec{\ell}) = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\oint_{\ell} (\vec{H}_{\ell}, d\vec{\ell}) = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{n} \right) dS \quad (1)$$

$$\oint_{\ell} \vec{B}_{\ell} dS = \oint_{\ell} (\vec{B}, \vec{n}) dS = 0$$

$$\oint_{\ell} (\vec{D}, \vec{n}) dS = q = \int_V \rho dV$$

120
Взаимно, входящие в эти ур-я накладываются в
следующей зависимости:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{j} = \lambda \vec{E} \quad (2)$$

↑ ↑ ↑
ман. диэл. удельная электрич-
восприимчив- прониц- теская проводимость
ости вещ-ва вещ-ва вещ-ва

Уравнения (1) и (2) составляют систему уравнений Максвелла.

Плюс смещения. Постоянной ток не протекает в цепи с конденсатором, но переменный протекает. Сила квазистационарного тока проводимости во всех последовательно соединенных элементах одна и та же. В конденсаторе ток проводимости, связанной с движением \vec{E} , не может существовать, т.к. обкладки разделены диэлектриком. Поэтому исходят, что в конденсаторе происходит некий процесс, который "замогкает" ток проводимости, т.е. в нек. смысле обеспечивает обмен зарядами между обкладками конденсатора

Без переноса заряда. Этот процесс называют токами смещения.

121

Условия применимости ур-ий:

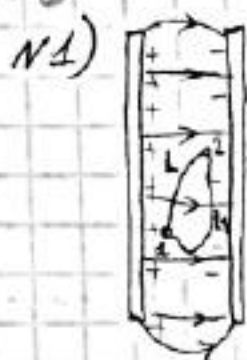
- 1) материальное тело в поле неподвижно.
- 2) $\epsilon, \mu, \chi = \lambda$ не зависят от вращения и вектора \vec{v} поля
- 3) в поле нет магнитов, ферромагнетиков.

Ур-я в диффр. форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

Взаимопр. Каламшиков стр 297-298 и

возврат из ур-ий Максвелла



Пусть в электростатическом поле из т. 1 в т. 2 перемещают единичный пункт. заряд. Работа поле не зависит от формы пути перемещения и в данном

случае при перемещении ед. заряда зависит от эл. поле, поэтому может служить его характеристикой и называется разностью потенциалов точек 1 и 2 или электрическим напряжением.

$$U_{12} = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{r})$$

Закон Ома для участка цепи: $i = \Lambda U$

Λ - электрическая проводимость

$$\frac{1}{\Lambda} = R \quad \text{- эл. сопротивление}$$

Λ, R зависят от рода вещества, его геометр. размеров, формы, состояния проводника.

Для цилиндров поперечного сечения

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ρ - удельное электрическое сопротивление

$\lambda = \frac{1}{\rho}$ - удельная электропроводность вез-ва

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

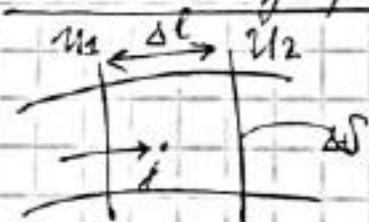
ρ_0 - уд. сопротивление при 0°C

ρ - уд. сопротивление при $t^\circ\text{C}$

α - температурный коэффициент сопротивления

123

3. Ома в дифф. форме.



$$i = j \cdot \Delta S = \frac{U_1 - U_2}{\rho (\Delta l / \Delta S)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U_1 - U_2}{\Delta l} =$$

$$= -\lambda \cdot \frac{\Delta U}{\Delta l}$$

$$\text{при } \Delta l \rightarrow 0 : j = -\lambda \cdot \frac{dU}{dl} = \lambda \cdot E$$

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}$$

Отсутствие в однородных проводниках объемных

зарядов при наличии постоянных эл. токов

В однородных проводниках имеются только

поверхностные заряды, в неоднородных

же проводниках, когда проводимость меня-

ется от точки к точке, возникают

также и заряды в объеме проводника.

2) Генератор переменного тока. - устройство для превращения мех. энергии в электрическую, основанное на явлении электромагнитной индукции при движении проводников в э.-магнитном поле.



α - угол между нормалью \vec{n} к плоскости витка и \vec{B} , поток через виток:

$$\Phi = BS \cdot \cos \alpha = \Phi_0 \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = \omega t + \varphi_0$$

ЭДС в одном витке:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \underbrace{E_0}_{BS\omega} \sin(\omega t + \alpha_0)$$

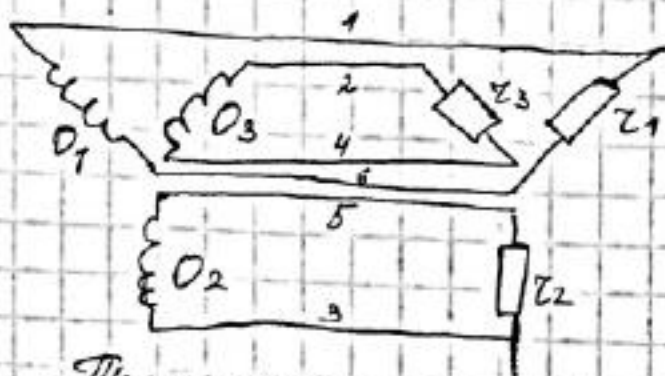
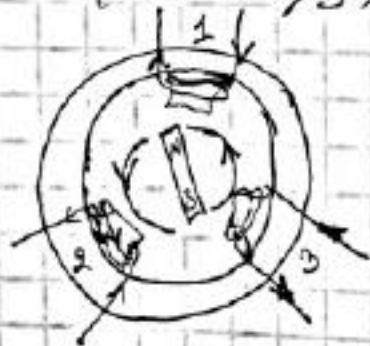
Для N лучков: $E = \underbrace{BS\omega N}_{E_0} \sin(\omega t + \alpha_0)$

Электрогенератор

Трехфазный ток. ¹²⁶ Максимальной до сих пор ток, характеризовавшийся амплитудой и фазой назывался однофазным. Совокупность трех одинаковых однофазных токов, сдвинутых друг от друга на $1/3$ периода, наз-я трехфазным током.

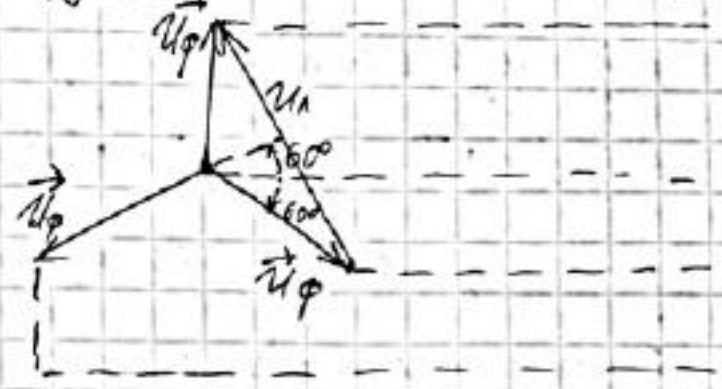
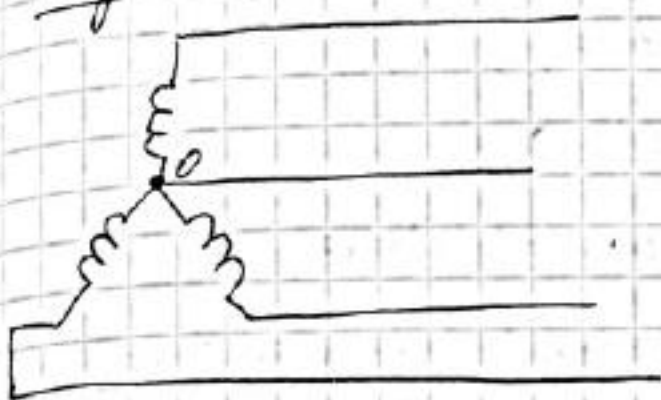
Генератор переменного тока с тремя обмотками, в кот. генерируется ток, расположенными под углом 120° относительно друг друга. Магнитное поле, возникшее вследствие вращения кот. магнита, создает в обмотках одинаковое, но сдвинутое по фазе напряжение:

$$U_1 = U_0 \cdot \sin \omega t, \quad U_2 = U_0 \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3), \quad U_3 = U_0 \cdot \sin(\omega t - 2\pi/3)$$



Трехфазная система токов.

Соединение обмоток звездой.



0 - точка одинакового потенциала. Напряжение на каждой из обмоток наз-ся фазным. Проводник, соединенный с точкой нулевого потенциала наз-ся нулевым проводом; проводники, соединенные со свободными концами обмоток - фазные проводы. Фазное напряжение яв-ся напряжением между нулевым и фазным проводом. Напряжение между фазными проводом наз-ся линейным.

Из векторной диаграммы:

$$U_{\text{л}} = 2 U_{\text{ф}} \sin 60^\circ = U_{\text{ф}} \cdot \sqrt{3}$$

Ток, текущий через обмотки - фазный ток $I_{\text{ф}}$.

Ток $I_{\text{л}}$, текущий в линии - $I_{\text{л}}$ ток линии.

При соединении звездой $I_{\text{ф}} = I_{\text{л}}$

Если к каждой обмотке присоединить одинако-

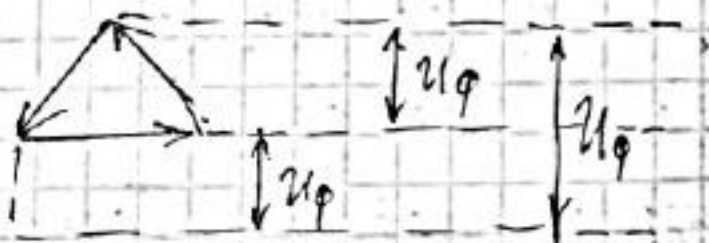
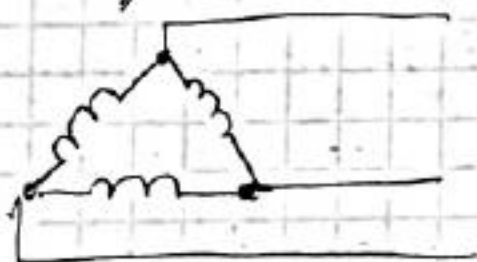
Все нагрузки R , то суммарная сила тока $\frac{12R}{R}$ через нулевой провод равна 0, т.к.

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{R} (U_1 + U_2 + U_3) = 0,$$

т.к. из вектр. диаграммы $\sum_i U_i = 0$

Соединение обмоток звездой позволяет для передачи электроэнергии вместо 6 проводов использовать 4.

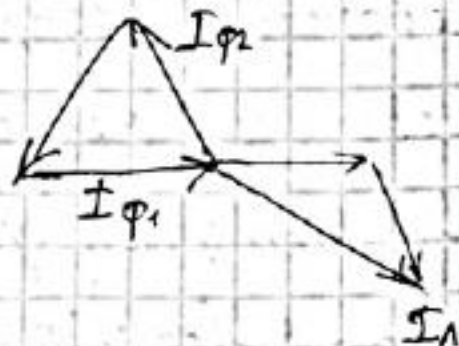
Соединение "треугольной обмотки":



$U_{\text{л}} = U_{\text{л}}$ и из векторной диаграммы токов:

$$I_{\text{л}} = 2 I_{\text{ф}} \cdot \cos 30^\circ = I_{\text{ф}} \cdot \sqrt{3}$$

$$I_{1\phi} + I_{2\phi} + I_{3\phi} = I_{\text{л}}$$



Соединение - нагрузок

1. Сторонние силы. ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи. Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа. Примеры их применения

☐ Сторонние силы - неэлектростатические силы, действующие на заряды в электрической цепи

K-136

☐ Э. Д. С (электродвижущая сила) - работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль электрического замкнутого проводящего контура.

C-18

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_s^* \cdot d\mathbf{l}$$

Закон Ома для замкнутой цепи

Применим закон Ома для участка цепи с ЭДС и для участка с внешним сопротивлением

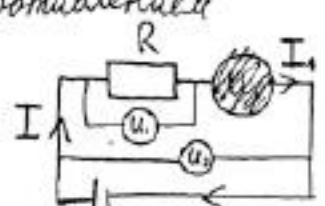
$$\begin{cases} I_1 R = U_1 \\ U_2 = I_2 r - \mathcal{E} \end{cases}$$

$$U_1 + U_2 = 0;$$

работа по замкнутой контуре равна нулю

$$IR + Ir = \mathcal{E}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$



$I = I_1 = I_2$ - закон сохранения заряда

Применим закон сохранения энергии в замкнутой цепи с гальваническим элементом: $Q_{хим} = A_{тока} + Q_{тепл}$

Пренебрегая теплоотдачей с окружающей средой и представив $Q_{хим} = \mathcal{E}q$, получим $\mathcal{E}q = I^2 R t + I^2 r t$ поделим на $q = It$

$$\mathcal{E} = IR + Ir$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$



☐ Разветвлённая цепь - цепь, имеющая точку, в которой сходятся три и более проводов. Точка называется точкой ветвления или узлом

Задача вычисления силы тока во всех участках цепи с известными сопротивлениями и ЭДС участков уже не так проста, как в случае одного замкнутого контура.

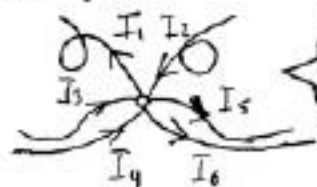
Но в состав любой цепи входят два простейших элемента:

- 1) узлы (точки ветвления)
- 2) замкнутые контуры

M-215

Для решения поставленной задачи используют правила Кирхгофа

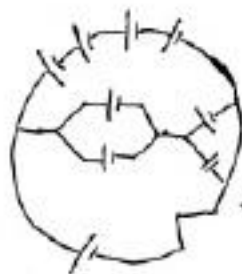
Первое правило Кирхгофа (закон сохранения заряда в узле)
 (частный случай закона непрерывности тока для цепи постоянного тока)
 Сумма алгебраических значений сил токов в каждом узле равна нулю



$$\sum_k (\pm) I_k = 0$$

Второе правило Кирхгофа

Сумма всех падений напряжения равна сумме всех э.д.с в этой любой замкнутой контуре



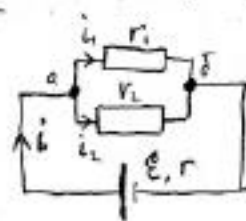
$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

Правила Кирхгофа не являются законами, так как не выражают новых свойств электрического поля, а являются следствием закона непрерывности тока $\sum |I_{\text{вх}}| - \sum |I_{\text{вых}}| = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

и потенциальности электрического поля $\oint E_{el} dl = 0$;

Примера приложения:

1) Параллельное соединение проводников.
 Шунт

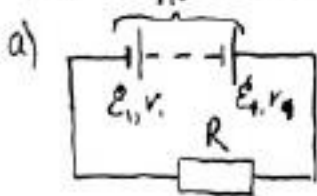


K-148

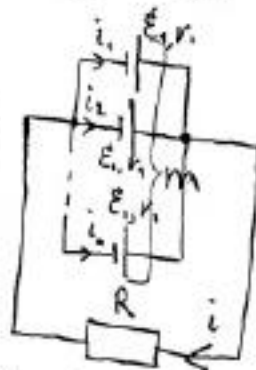
$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0 \\ -r_1 i_1 + r_2 i_2 = 0 \\ r i + r_1 i_1 = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r_n}$$

2) Соединение источников тока



ВПК: $i(n r_1 + R) = n \mathcal{E}$ б)
 $\mathcal{E} = n \mathcal{E}_1$; $r = n r_1$



$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$r_1 i_1 - r_2 i_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0$$

$$r_1 i_2 - r_3 i_3 = 0$$

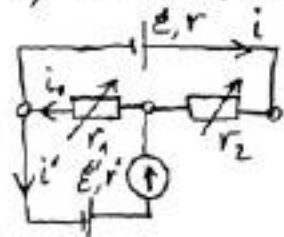
$$\dots$$

$$r_{n-1} i_{n-1} - r_n i_n = 0$$

$$R i + r_n i_n = \mathcal{E}_1$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1; r = \frac{r_1}{n}$$

3) Компенсационный метод измерения ЭДС



$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \frac{r_1}{r_1 + r_2 + r}$$

101) Задача. Решить задачу о электрическом поле в диэлектрике с зарядом Q .

Решение: Пусть Q - заряд, ϵ - диэлектрическая проницаемость.



Тогда D и E связаны соотношением $D = \epsilon E$.

Пусть E_0 - поле в вакууме, E - поле в диэлектрике. Тогда $E = E_0 / \epsilon$.

Если $Q = \text{const}$, то $E = \text{const} / \epsilon$.

Сила взаимодействия зарядов q и q' равна $F = qE$.

$$F = qE = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$



$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

(если $S(x) = \text{const}$)

Электрическое поле E и потенциал U в диэлектрике.

Внутреннее поле

Контрполюсное поле

$$\vec{I} = Y \vec{E}_1$$

$$\vec{I} = \int \vec{j} dS = Y \int \vec{E} dS$$

$$Q = Q_1;$$

$$\oint \vec{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow I = Y \frac{Q}{\epsilon_0} = Y \frac{Q_1}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\epsilon_0}{Y Q}$$

- signs opposite! charge
upon $N = \text{const}$.

МДМ

выражение

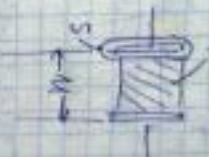
$$E(x) = E_+ + E_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right)$$

$$N = \int E dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)} \right]_{y_0}^{d-y_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{d-y_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0} - \frac{1}{d-y_0} \right] \approx \frac{d-2y_0}{2\pi\epsilon_0 y_0} Q$$

$$I = Y \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2\pi^2 \epsilon_0 y_0}{Q}$$



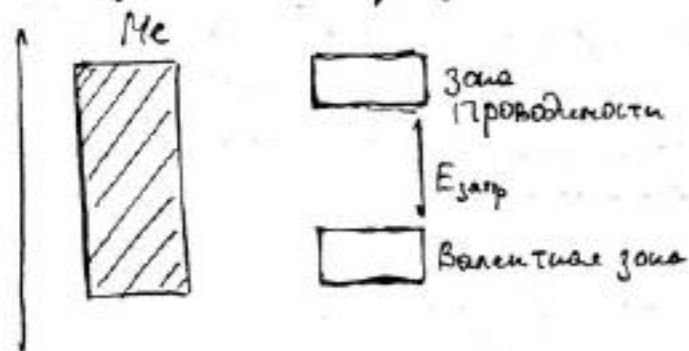
$$R(d) = \text{const} \cdot d^{-1}$$
$$R(y_0) \sim \frac{1}{y_0}$$

→ approximation

Полупроводники

Билет 20.

Полупроводник - материал, который по своей удельной проводимости занимает промежуточное место между проводниками и диэлектриками и отличается от проводников сильной зависимостью удельной проводимости от концентрации примесей, температуры и воздействия различных видов излучения.



Свободные электроны под действием внешнего электрического поля могут перемещаться в кристалле, создавая электрический ток проводимости. Зеркальное отражение электронов с внешней поверхности атомов в кристаллической решетке приводит к образованию положительного иона. Этот ион может ионизироваться, захватив электрон. Далее, в результате переносов свободных электронов от атома к положительному иону происходит процесс постепенного перемещения в кристалле ионов с переставшими электронами - дырками. Внешне этот процесс постепенного перемещения свободных электронов воспринимается как перемещение положительных зарядов. При помещении кристалла в электрическое поле возникает упорядоченное движение "дырок" - дырочный ток проводимости.

Собственная проводимость

Полупроводники, в которых свободные электроны и "дырки" появляются в процессе ionization атомов, иу которых носители все кристаллы, называют полупроводниками с собственной проводимостью. В полупроводниках с собственной проводимостью концентрация свободных электронов равняется концентрации "дырок".

Для создания полупроводников часто используют кристаллы с примесной проводимостью. Такие примеси изготавливаются с помощью введения в кристаллы с атомами трехвалентного или пятивалентного химического элемента.

Электроны в полупроводнике (n-тип)

Отрицательный заряд атомов носителей.

Этот вид полупроводников имеет примесную проводимость (в четырехвалентный полупроводник добавлен примесью пятивалентный)

Дырочные полупроводники (p-тип)

Положительный заряд атомов носителей.

Этот вид полупроводников характеризуется, кроме примесной основы, характеризуется формой примесной проводимости (в четырехвалентный добавлен трехвалентный)

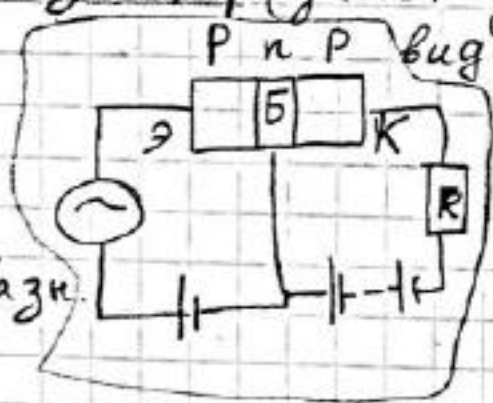
p-n контакт обладает односторонней проводимостью: если к p-области подключить "+" источника тока, а к n-области "-" источник тока, то запирающий слой разрушится и p-n-контакт будет проводить ток, электроны иу n-области перейдут в p-область. в первом случае ток не равен нулю, во втором - ток равен нулю.

Полупроводниковая и атомная техника, микросхемы, радиодетали

Биполярный транзистор (участвуют два вида зарядов)

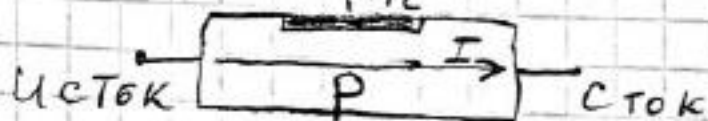
р-п-р

Ток коллектора
меняют током Базы.

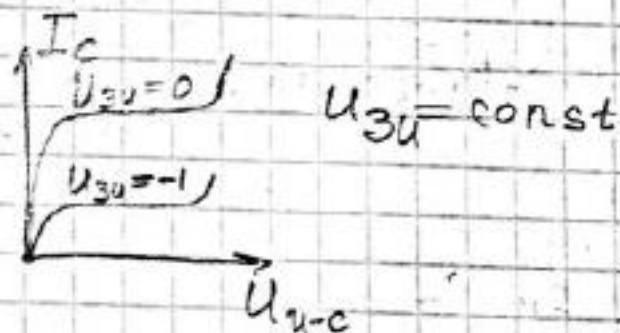


Полевой транзистор

Затвор
п



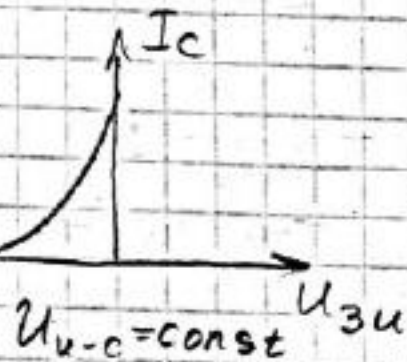
Напряжение, подаваемое на затвор с помощью изменения запирающего слоя управляет током.



Потенци

Применение полупроводников:

радиотехника, транзисторы,
усилители, полупр. термометры.



2.1.1 магнитостатика. Взаимод. токов. Фл-т тока. З-н БСА и полевая трактовка. Векторинтерпретация маг. поля. Действие маг. поля на ток. З-н Ампера.

165
125

Магнитостатика цепи. Взаимод. пот. токов посредством их пот. маг. поля

$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \vec{j} d\vec{l} - \text{эл-т ток}$

$d\vec{F}_{12} = \vec{j}_2 [d\vec{l}_2 \cdot d\vec{B}_1]$

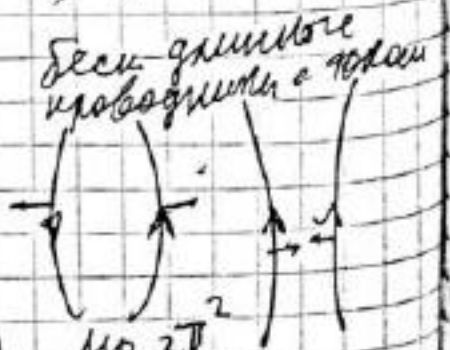
$B \in [T]$
- магнитное действие и поле на ток. как Ампера поле в трактовка

$B = \sum \vec{B}_i$ циркуляция (Биржедейств) поле в трактовка

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_2 [d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$

- Био-Савара-Лаплас (БСА) (дальнейшее)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A^2}$



$f(\frac{H}{A}) = \frac{\mu_0 2I}{4\pi r}$

Мгновенная мощность

Энергия с током испытывает следующие превращения

а) превращается в тепло в результате нагрева проводника

б) превращается в энергию магнитного поля

в) превращается в энергию электрического поля.

Полная мощность

$$P_t = P_{tR} + P_{tL} + P_{tC}$$

P_t называют мгновенной, разбиваемой током, или мгновенной мощностью

$$P_t = u_t + u_L I + u_C I = u I.$$

$$I = I_0 \sin \omega t$$

$$u_{tL} = I_0 \omega L \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$u_{tC} = [I_0 / (\omega C)] \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$u_{tR} = I_0 R \sin \omega t$$

Полная на сопротивлении R мощность тока

во все время положительна, т.е. ток совершает положительную работу. Мгновенная мощность, разбиваемая током на индуктивности и емкости, знакопеременная.

$$I_0 R = U_0 \cos \varphi$$

$$P_0 = 1/2 I_0 I_0 R = 1/2 I_0 U_0 \cos \varphi$$

$$P_R = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi, \text{ где } I_{\text{эф}} = I_0 / \sqrt{2}, U_{\text{эф}} = U_0 / \sqrt{2}$$

Максимум при резонансе

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \Rightarrow (X_L - X_C) = 0$$

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = f_{\text{рез.}}$$

$I = U/R$ - макс при резонансе



22.1

Векторный потенциал \vec{A} и скалярный потенциал ϕ и векторное поле \vec{E} для векторного потенциала. Теорема о циркуляционном векторе и циркуле \vec{A} и \vec{E} в \vec{H} и \vec{E} $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = B dl_{\perp}$$



$$d\alpha = \frac{dl_{\perp}}{r} \approx r d\alpha = dl_{\perp}$$

~~$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int d\vec{l} \times \vec{r}$~~ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (сек. пробег)

$$\vec{B} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} dl_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

$$\oint_L \vec{B} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int d\alpha = \mu_0 I$$

$\oint \vec{B} dl = \mu_0 I$
интеграл по контуру

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad \oint_L \vec{B} dl = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

группа Поисса $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{I} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right] dV$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left[\vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right] dV$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

$$V = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

$$dV = dx' dy' dz'$$

$$\operatorname{div} \left[\vec{j} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \left(\nabla \cdot \left[\vec{j} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \right) = \frac{1}{r^3} \left[\nabla \cdot \vec{j} \right] - \vec{j} \cdot \left[\nabla \frac{1}{r^3} \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{r^3} \operatorname{rot} \vec{j}}_{=0} - \vec{j} \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3}}_{=0} = 0$$

$$\vec{j}(x, y, z) = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(МАТЕМАТ.)}$$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ — всегда верно \Leftrightarrow безубаво

$$\Downarrow (\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

*

\vec{A} — векторный потенциал

Всегда ли существует?

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} \chi, \quad \chi - \text{люб. скал. поле}$$

$$\left(\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (\vec{A}_0 + \operatorname{grad} \chi) = \operatorname{rot} \vec{A}_0 = \vec{B} \right)$$

сп.е. для вект. потенциала

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta^2 \vec{A}$$

учет $\text{div } \vec{A} = 0$ (A выбрана невытекающей, можно наложить это условие)
(калибровка)

$$\text{тогда } \Delta^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \Delta^2 A_x &= -\mu_0 j_x \\ \Delta^2 A_y &= -\mu_0 j_y \\ \Delta^2 A_z &= -\mu_0 j_z \end{aligned} \right\} \text{уравнения}$$

$$\boxed{A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I} dl}{r} = \sum_i \vec{I}_i \int_{L_i} \frac{d\vec{l}}{r^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x dl}{r} \\ A_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y dl}{r} \\ A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z dl}{r} \end{aligned} \right\}$$

Волновое уравнение в математике — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике). Находит применение и в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн. Является одним из основных уравнений математической физики

Вектор Пойнтинга (также *вектор Умова — Пойнтинга*) — вектор плотности потока энергии электромагнитного поля, одна из компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга **S** можно определить через векторное произведение двух векторов:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \text{ (в системе СГС),}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \text{ (в системе СИ),}$$

где **E** и **H** — векторы напряжённости электрического и магнитного полей соответственно.

Пусть электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\mu = \epsilon = 1$) и пусть её скорость равна *C*. Тогда полная плотность электромагнитной энергии будет складываться из плотностей энергии электрического поля и энергии магнитного поля

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

В вакууме \vec{E} и \vec{B} изменяются синфазно, а, значит, можно положить, что $E\sqrt{\epsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$.

$$\text{Тогда } \omega = \frac{(E\sqrt{\epsilon_0})(E\sqrt{\epsilon_0})}{2} + \frac{(H\sqrt{\mu_0})(H\sqrt{\mu_0})}{2} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}EH = \frac{1}{c}EH.$$

Умножив последнее выражение на *C*, получим, модуль плотности энергии $S = \omega c = EH$.

Существование электромагнитных волн было теоретически предсказано великим английским физиком Дж. Максвеллом в 1864 году. Максвелл проанализировал все известные к тому времени законы электродинамики и сделал попытку применить их к изменяющимся во времени электрическому и магнитному полям. Он обратил внимание на асимметрию взаимосвязи между электрическими и магнитными явлениями. Максвелл ввел в физику понятие вихревого электрического поля и предложил новую трактовку закона электромагнитной индукции, открытой Фарадеем в 1831 г.:

Всякое изменение магнитного поля порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.

Максвелл высказал гипотезу о существовании и обратного процесса:

Изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Эта гипотеза была лишь теоретическим предположением, не имеющим экспериментального подтверждения, однако на ее основе Максвеллу удалось записать непротиворечивую систему уравнений, описывающих взаимные превращения электрического и магнитного полей, т. е. систему уравнений **электромагнитного поля** (уравнений Максвелла). Из теории Максвелла вытекает ряд важных выводов:

1. Существуют электромагнитные волны, то есть распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. Электромагнитные волны

$$\vec{E} \quad \vec{B}$$

поперечны – векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны

2. Электромагнитные волны распространяются в веществе с **конечной скоростью**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Здесь ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные: $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Длина волны λ в синусоидальной волне связана со скоростью v распространения волны соотношением $\lambda = vT = v / f$, где f – частота колебаний электромагнитного поля, $T = 1 / f$.

Скорость электромагнитных волн в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

3. В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей.

4. Электромагнитные волны переносят энергию.

5. Из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать давление на поглощающее или отражающее тело.

6. Электромагнитные волны могут возбуждаться только **ускоренно движущимися зарядами**.

Принцип действия сотовой связи

Сотовые панельные **антенны** на башне

Основные составляющие сотовой сети — это **сотовые телефоны** и базовые станции, которые обычно располагают на крышах зданий и вышках. Будучи включённым,

сотовый телефон прослушивает эфир, находя сигнал базовой станции. После этого телефон посылает станции свой уникальный идентификационный код. Телефон и станция поддерживают постоянный радиоконтакт, периодически обмениваясь пакетами. Связь телефона со станцией может идти по аналоговому протоколу (AMPS, NAMPS, NMT-450) или по цифровому (DAMPS, CDMA, GSM, UMTS). Если телефон выходит из поля действия базовой станции (или качество радиосигнала сервисной соты ухудшается), он налаживает связь с другой (англ. *handover*).

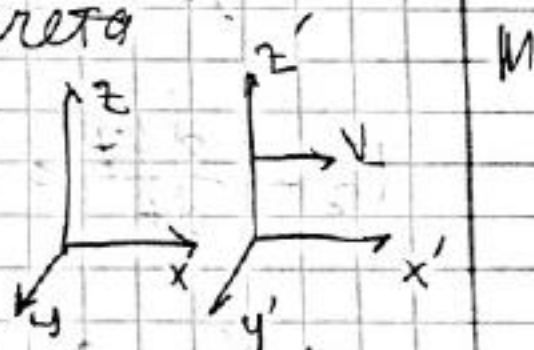
GPS (англ. *Global Positioning System* — система глобального позиционирования, читается Джи Пи Эс) — спутниковая система навигации, обеспечивающая измерение расстояния, времени и определяющая местоположение во всемирной системе координат WGS 84.

Основной принцип использования системы — определение местоположения путём измерения моментов времени приема синхронизированного сигнала от навигационных спутников антенной потребителя. Для определения трёхмерных координат GPS-приёмнику нужно иметь четыре уравнения: «расстояние равно произведению скорости света на разность моментов приема сигнала потребителя и момента его синхронного излучения от спутников»: $|x - a_j| = c(t_j - \tau)$. Здесь: a_j — местоположение j -го спутника, t_j — момент времени приема сигнала от j -го спутника по часам потребителя, τ — неизвестный момент времени синхронного излучения сигнала всеми спутниками по часам потребителя, c — скорость света, x — неизвестное трехмерное положение потребителя.

(23.7) Релятивистская физика \rightarrow и
 сил. Сила Лоренца. Маг поле
 группы Лоренца. Эфф Копла.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (K) \text{ — ин-ва инерции}$$

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}' \quad (K')$$



\uparrow заб
 ом
 эффекту \Rightarrow это сила не только Купла.
 а и др

$$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$$

$$\vec{F}' = \{F'_x, F'_y, F'_z\}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

$$\frac{dp'_x}{dt'} = F'_x$$

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y$$

$$\frac{dp'_y}{dt'} = F'_y$$

$$\frac{dp_z}{dt} = F_z$$

$$\frac{dp'_z}{dt'} = F'_z$$

$$p_x = \frac{p'_x + \left(\frac{E'}{c^2}\right)v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(E' = m'c^2)$$

$$p_y = p'_y$$

$$p_z = p'_z$$

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{p'_x + \left(\frac{E'}{c^2}\right)v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} =$$

$$= F_x' + \frac{\frac{v u_y'}{c^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} F_y' + \frac{\frac{v u_z'}{c^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} F_z' \quad (4)$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_y'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} F_y' \quad (5)$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp_z'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} F_z' \quad (6)$$

$\left(\frac{dE'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{u}' \right)$ — закон сохранения энергии в K' (7)

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} ; \quad u_z = \frac{u_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \quad (8)$$

(4): $F_x = F_x' + \frac{v u_y}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y' + \frac{v u_z}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z' \quad (9)$

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \Leftrightarrow u_y' = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y u_y' = \dots \Rightarrow \left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) = 1 - \beta^2 \quad (10)$$

$$(5): F_y = \frac{1 - \frac{v u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} F_y' \quad (11)$$

$$(6): F_z = \frac{1 - \frac{v u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} F_z' \quad (12)$$

Итак, (9), (11), (12) - искомого
преобр-е F через F' , зад от скорости!

$$\vec{\Phi} := \left\{ F_x', \frac{F_y'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{F_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\}$$

$$\vec{G} := \left\{ 0, \frac{(-\frac{v}{c^2}) F_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{(\frac{v}{c^2}) F_y'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\}$$

$$\vec{F} = \vec{\Phi} + \vec{u} \times \vec{G} \quad (15)$$

Сила Лоренца.

Вывод в K' - только эл поле $\Rightarrow \vec{F}'(\vec{u}') = \text{const.}$
 $\Rightarrow \vec{\Phi}(u) = \text{const}$ - эл. сила в K .

Аналогично $\vec{G}(u) = \text{const}$

$$\vec{F}_m(u) = \vec{u} \times \vec{G}$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{G}$$

F_m - сила магнитная

$$\vec{F}_m \perp \vec{u}$$

TK $\vec{\Phi}$ - эл. сила, то

$$\vec{E} = \frac{\vec{\Phi}}{q}$$

аналогично:

$$\vec{B} = \frac{G}{q}$$

\Rightarrow (15):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u} \times \vec{B}]$$

сила Лоренца
на точечной
заряд

\vec{B} - индукция маг. поля

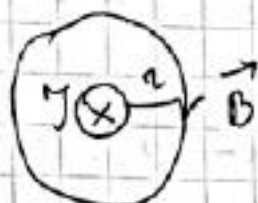
поле движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\vec{dl} \times \vec{r}]$$

$$j = \frac{dq}{dt} = \frac{dN \cdot e}{dt}$$

Маг. поле бесконечно проводящего

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r}$$



Эффект Холла

(напряжение):

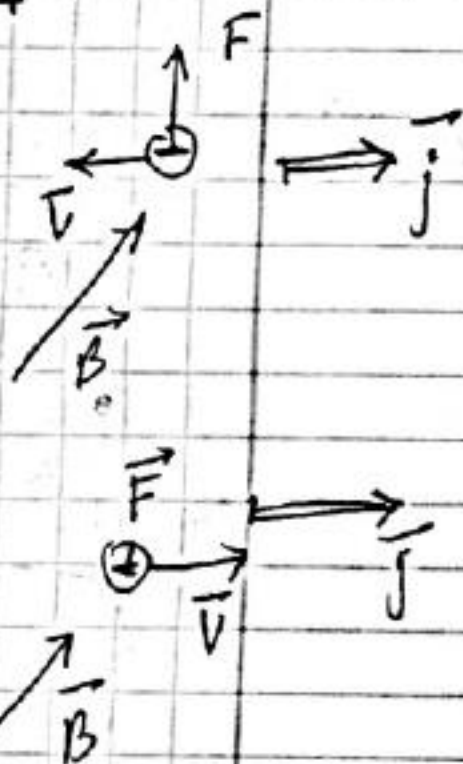
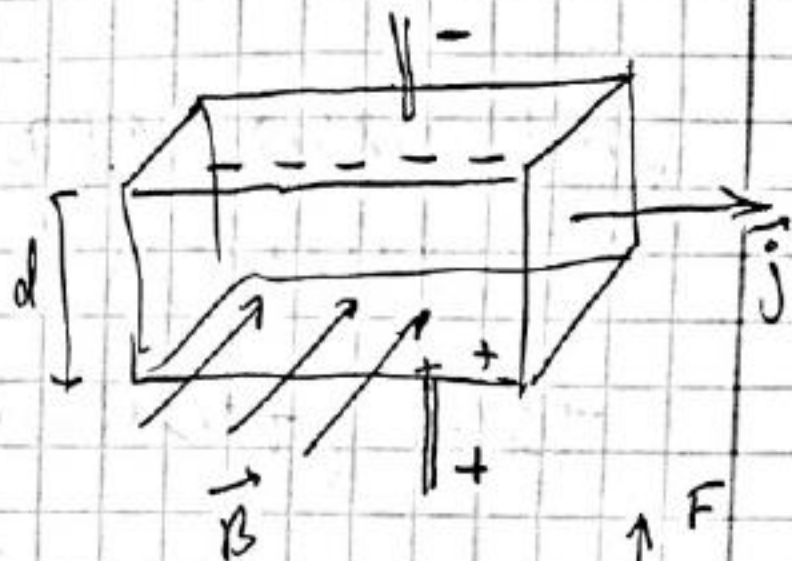
$$U = R \cdot d j \cdot b$$

R - наст. длина

$$U = \underline{E} d = \underline{v} B \cdot d$$

$$j = n e v \Rightarrow v = \frac{j}{n e}$$

$$U = \frac{1}{n e} d j b$$



Основные положения классической электронной теории проводимости

- 1) Носителями тока в металлах являются электроны, движение которых подчиняется законом классической механики.
- 2) Поведение электронов подобно поведению молекул идеального газа (электронный газ).
- 3) При движении электронов в кристаллической решетке можно не учитывать столкновения электронов друг с другом.
- 4) При упругом столкновении электронов с ионами электроны полностью передают им накопленную в электрическом поле энергию.

Опыты Толмена и Стюарта

Прямым доказательством, что электрический ток в металлах обуславливается движением электронов, были опыты Толмена и Стюарта, проведённые в 1916 г. Идея этих опытов была высказана Мандельштамом и Папалекси в 1913 г.

Возьмём катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на гальванометр. Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны в проволоке продолжают двигаться по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока.

При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что линейное ускорение катушки при торможении \dot{v} направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции — $m_e \dot{v}$, направленная противоположно ускорению (m_e — масса электрона). Под её действием электрон ведёт себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле:

$$E_{eff} = -\frac{m_e \dot{v}}{e}.$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\mathcal{E}_{eff} = \int_L E_{eff} dl = -\frac{m_e \dot{v} L}{e},$$

где L — длина провода на катушке.^[4]

Введём обозначения: I — сила тока, протекающего по замкнутой цепи, R — сопротивление всей цепи, включая сопротивление проводов катушки и проводов внешней цепи и гальванометра. Запишем закон Ома в виде:

$$IR = -\frac{m_e \dot{v} L}{e}.$$

Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время dt при силе тока I , равно

$$dQ = I dt = -\frac{m_e L}{e R} \dot{v} dt = -\frac{m_e L}{e R} dv.$$

Тогда за время торможения через гальванометр пройдет заряд

$$Q = \int dQ = -\frac{m_e L}{e R} \int_{v_0}^0 dv = -\frac{m_e L}{e R} v_0.$$

Значение Q находится по показаниям гальванометра, а значения L , R , v_0 известны, что позволяет найти значение $\frac{e}{m_e}$. Эксперименты показывают, что $\frac{e}{m_e}$ соответствует отношению заряда электрона к его массе. Тем самым доказано, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток обусловлен движением электронов.

1. Закон Ома. Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью $E = \text{const}$. Со стороны поля заряд e испытывает действие силы $F = eE$ и приобретает ускорение $a = F/m = eE/m$. Таким образом, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{\max} = eE \langle t \rangle / m,$$

где $\langle t \rangle$ — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, сталкиваясь с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v \rangle = (v_{\max} + 0) / 2 = eE \langle t \rangle / (2m). \quad (103.1)$$

Классическая теория металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время $\langle t \rangle$ свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега $\langle l \rangle$ и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной $\langle u \rangle + \langle v \rangle$ ($\langle u \rangle$ — средняя скорость теплового движения электронов). Ранее нами было показано, что $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$, поэтому

$$\langle t \rangle = \langle l \rangle / \langle u \rangle.$$

Подставив значение $\langle t \rangle$ в формулу (103.1), получим

$$\langle v \rangle = eE\langle l \rangle / (2m\langle u \rangle).$$

Плотность тока в металлическом проводнике, по (96.1),

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля, т. е. получили закон Ома в дифференциальной форме (ср. с (98.4)). Коэффициент пропорциональности между j и E есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (103.2)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

2. Закон Джоуля — Ленца. К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_z \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} E^2. \quad (103.3)$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем $\langle z \rangle$ столкновений:

$$\langle z \rangle = \langle u \rangle / \langle l \rangle. \quad (103.4)$$

Если n — концентрация электронов, то в единицу времени происходит $n\langle z \rangle$ столкновений и решетке передается энергия

$$w = n \langle z \rangle \langle E_z \rangle,$$

$$(103.5)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (103.3) и (103.4) в (103.5), получим таким образом энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w = \frac{ne^2 \langle I \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2, \quad (103.6)$$

Величина w является удельной тепловой мощностью тока. Коэффициент пропорциональности между w и E^2 по (103.2) есть удельная проводимость g ; следовательно, выражение (103.6) — закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме (ср. с (99.7)).

3. Закон Видемана — Франца. Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы — свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического (теплого) движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности (λ) к удельной проводимости (g) для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре:

$$\lambda/g = bT,$$

где b — постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение b : $b = 3(k/e)^2$, где k — постоянная Больцмана. Это значение хорошо согласуется с опытными данными. Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытным случаем. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил $b = 2(k/e)^2$, что привело к резкому расхождению теории с опытом.

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закону Видемана — Франца. Однако она помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана — Франца столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Рассмотрим некоторые из них.

Температурная зависимость сопротивления. Из формулы удельной проводимости (103.2) следует, что сопротивление металлов, т. е. величина, обратная g , должна возрастать пропорционально \sqrt{T} (в (103.2) n и $\langle u \rangle$ от температуры не зависят, а $\langle u \rangle \sim$

\sqrt{T}). Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым $R \sim T$ (см. § 98).

Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах. Чтобы по формуле (103.2) получить ρ , совпадающие с опытными значениями, надо принимать λ_{fp} значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде — Лоренца.

Теплоемкость металлов. Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти, теплоемкость одноатомного кристалла равна $3R$. Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна $\frac{3}{2}R$. Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к $4.5R$. Однако опыт доказывает, что она равна $3R$, т. е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла — Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена в дальнейшем. Надо, однако, отметить, что классическая электронная теория не утратила своего значения и до настоящего времени, так как во многих случаях (например, при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре) она дает правильные качественные результаты и является по сравнению с квантовой теорией простой и наглядной.

Выделим основные затруднения теории Друде Лоренца:

1. Согласно классической теории, зависимость удельного сопротивления металлов от температуры $\rho \sim \sqrt{T}$ в то время, как на опыте в широком интервале температур вблизи $T \approx 300\text{K}$ для большинства металлов наблюдается зависимость $\rho \sim T$.

2. Хорошее количественное совпадение с законом Видемана-Франца оказалось в известной степени случайным. В первоначальном варианте теории Друде не учитывал распределение электронов по скоростям. Позже, когда Лоренц учел это распределение, оказалось, что отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T$$

что значительно хуже согласуется с экспериментом. Согласно же квантовой теории,

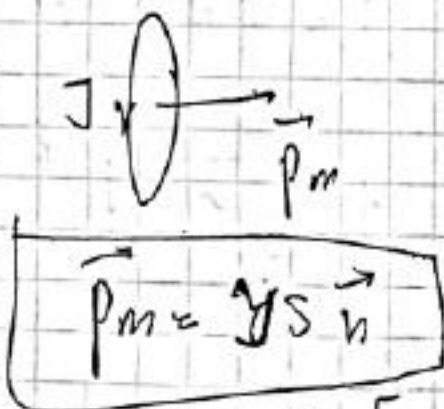
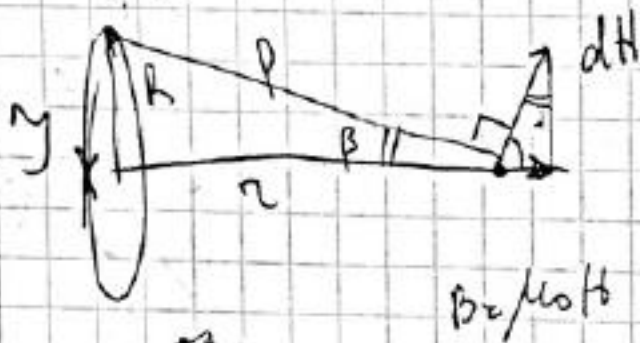
$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T = 2,45 \cdot 10^{-8} \cdot T$$

3. Теория дает неправильное значение теплоемкости металлов. С учетом теплоемкости электронного газа $C=9/2R$, а на практике $C=3R$, что примерно соответствует теплоемкости диэлектриков.

4. Теория оказалась полностью неспособной объяснить открытое в 1911г. Камерлинг-Оннесом (Kamerlingh Onnes H., 1853-1926) явления сверхпроводимости (полного исчезновения сопротивления) металлов при низких температурах, а также существования остаточного сопротивления, в сильной степени зависящего от чистоты металла (рис.6.4).

24.1) Элементарный ток и его магнитный момент. Поле элементарного тока. Элементарный ток в малом поле.

- элементарный ток - размерами замкнутого тока меньше радиуса го элемента.



магнитный момент

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \sin^3 \beta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R \sin^3 \beta}{R^2} \quad \left| \begin{array}{l} R = r \sin \beta \Rightarrow \\ r = \frac{R}{\sin \beta} \end{array} \right.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{n}}{r^3} \right)$$

контуры с токами в малом поле однородном

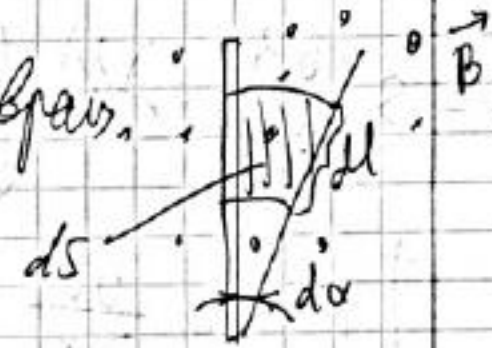
$F = \gamma l B$ - сила, действующая на проводник

$\delta A = \gamma l B_n dx = \gamma B_n ds$
или \equiv элемент



$\delta A_{\text{справ}} = \gamma dl B_n \underline{dx} = \gamma B_n \underline{ds}$, потому что

Модуль вектора = косинус + справ.



Итак, $\delta A = \gamma B_n ds$

объем $\Phi = BS \cos \alpha = B_n S$ - маг. поток
 $[\Phi] = B \cdot S$

$\delta A = \gamma d\Phi$

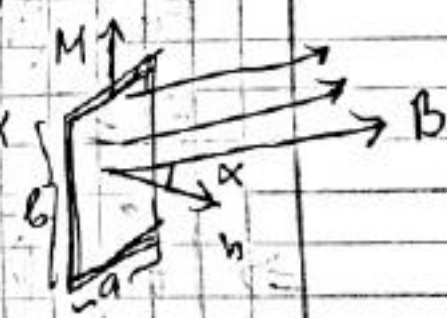
$A = \gamma (\Phi_2 - \Phi_1)$ - где концы произвольной формы

$p_m = \gamma S$ - маг. момент

механич. сил на плоский контур в поле

$\delta A = M d\alpha$ - работа при повороте
 $\delta A = \gamma d\Phi = \gamma d(BS \cos \alpha) = \gamma B S \sin \alpha d\alpha$

$\Downarrow M = \gamma B S \sin \alpha = p_m B \sin \alpha$



$$\text{умм: } \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{b}]$$

- Момент сил
на виток стержня
в направлении

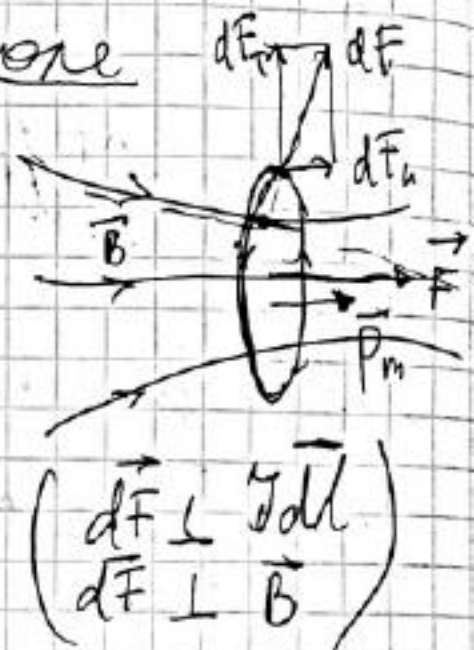
Расчет неизвестного момента

$$\delta A = F dx = \gamma S \frac{\partial B_n}{\partial x} dx$$

$$(d\Phi = S \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right) dx) \Rightarrow$$



dx



$$F = p_m \frac{\partial B_n}{\partial x}$$

Расчет произвольного вектора
момента в поле:

$$\vec{p}_m = \{ p_{mx}, p_{my}, p_{mz} \}$$

$$\vec{B} = \{ B_x, B_y, B_z \}$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B_x}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ F_y &= p_{mx} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \dots \quad (\text{аналогично}) \\ F_z &= \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p}_m \text{ grad}) \vec{B}$$

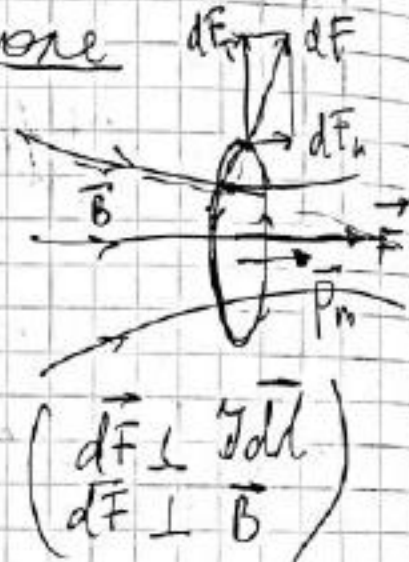
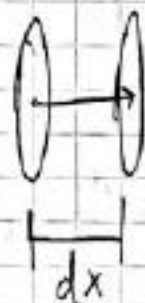
$$\text{умм: } \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{b}]$$

- Момент сил
на вектор стороны
в направлении

Расширение уравнения Лагранжа

$$\delta A = F dx = \gamma S \frac{\partial B_n}{\partial x} dx$$

$$(d\Phi = S \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right) dx) \Rightarrow$$



$$F = p_m \frac{\partial B_n}{\partial x}$$

Расширение уравнения Лагранжа
концы в поле:

$$\vec{p}_m = \{ p_{mx}, p_{my}, p_{mz} \}$$

$$\vec{b} = \{ b_x, b_y, b_z \}$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B_x}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ F_y &= p_{mx} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \dots \quad (\text{аналогично}) \\ F_z &= \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p}_m \text{ grad}) \vec{B}$$

где $(\vec{p}_m \text{ grad}) = p_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial}{\partial z}$ -
градив. оператор

Основные положения классической электронной теории проводимости

- 1) Носителями тока в металлах являются электроны, движение которых подчиняется законом классической механики.
- 2) Поведение электронов подобно поведению молекул идеального газа (электронный газ).
- 3) При движении электронов в кристаллической решетке можно не учитывать столкновения электронов друг с другом.
- 4) При упругом столкновении электронов с ионами электроны полностью передают им накопленную в электрическом поле энергию.

Опыты Толмена и Стоарта

Прямым доказательством, что электрический ток в металлах обуславливается движением электронов, были опыты Толмена и Стоарта, проведённые в 1916 г. Идея этих опытов была высказана Манделъштамом и Папалекси в 1913 г.

Возьмём катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на гальванометр. Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны в проволоке продолжают двигаться по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока.

При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что линейное ускорение катушки при торможении \dot{v} направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции — $m_e \dot{v}$, направленная противоположно ускорению (m_e — масса электрона). Под её действием электрон ведёт себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле:

$$E_{eff} = -\frac{m_e \dot{v}}{e}.$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\mathcal{E}_{eff} = \int_L E_{eff} dl = -\frac{m_e \dot{v} L}{e},$$

где L — длина провода на катушке.[4]

Введём обозначения: I — сила тока, протекающего по замкнутой цепи, R — сопротивление всей цепи, включая сопротивление проводов катушки и проводов внешней цепи и гальванометра. Запишем закон Ома в виде:

$$IR = -\frac{m_e \dot{v} L}{e}.$$

Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время dt при силе тока I , равно

$$dQ = Idt = -\frac{m_e L}{c R} \dot{v} dt = -\frac{m_e L}{c R} dv.$$

Тогда за время торможения через гальванометр пройдет заряд

$$Q = \int dQ = -\frac{m_e L}{c R} \int_{v_0}^0 dv = -\frac{m_e L}{c R} v_0.$$

Значение Q находится по показаниям гальванометра, а значения L , R , v_0 известны, что позволяет найти значение $\frac{e}{m_e}$. Эксперименты показывают, что $\frac{e}{m_e}$ соответствует отношению заряда электрона к его массе. Тем самым доказано, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток обусловлен движением электронов.

1. Закон Ома. Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью $E = \text{const}$. Со стороны поля заряд e испытывает действие силы $F = eE$ и приобретает ускорение $a = F/m = eE/m$. Таким образом, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{\text{max}} = eE \langle t \rangle / m,$$

где $\langle t \rangle$ — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, сталкиваясь с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v \rangle = (v_{\text{max}} + 0) / 2 = eE \langle t \rangle / (2m).$$

(103.1)

Классическая теория металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время $\langle t \rangle$ свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега $\langle l \rangle$ и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной $\langle v \rangle + \langle v_{\text{th}} \rangle$ ($\langle v_{\text{th}} \rangle$ — средняя скорость теплового движения электронов). Ранее нами было показано, что $\langle v_{\text{th}} \rangle \ll \langle v \rangle$, поэтому

$$\langle t \rangle = \langle l \rangle / \langle v \rangle.$$

Подставив значение $\langle t \rangle$ в формулу (103.1), получим

$$\langle v \rangle = eE\langle l \rangle / (2m\langle u \rangle),$$

Плотность тока в металлическом проводнике, по (96.1),

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля, т. е. получили закон Ома в дифференциальной форме (ср. с (98.4)). Коэффициент пропорциональности между j и E есть, не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (103.2)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

2. Закон Джоуля — Ленца. К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_x \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} E^2, \quad (103.3)$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем $\bar{v} \langle z \rangle$ столкновений:

$$\langle z \rangle = \langle u \rangle / \langle l \rangle, \quad (103.4)$$

Если n — концентрация электронов, то в единицу времени происходит $n \bar{v} \langle z \rangle$ столкновений и решетке передается энергия

$$w = n \langle z \rangle \langle E_x \rangle,$$

$$(103.5)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (103.3) и (103.4) в (103.5), получим таким образом энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w = \frac{ne^2 \langle I \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2.$$

(103.6)

Величина w является удельной тепловой мощностью тока. Коэффициент пропорциональности между w и E^2 по (103.2) есть удельная проводимость g ; следовательно, выражение (103.6) — закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме (ср. с (99.7)).

3. Закон Видемана — Франца. Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы — свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического (теплового) движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности (λ) к удельной проводимости (g) для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре:

$$\lambda/g = \beta T,$$

где β — постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение β : $\beta = 3(k/e)^2$, где k — постоянная Больцмана. Это значение хорошо согласуется с опытными данными. Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытом случайно. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил $\beta = 2(k/e)^2$, что привело к резкому расхождению теории с опытом.

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закону Видемана — Франца. Однако она помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана — Франца столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Рассмотрим некоторые из них.

Температурная зависимость сопротивления. Из формулы удельной проводимости (103.2) следует, что сопротивление металлов, т. е. величина, обратная пропорциональная g , должна возрастать пропорционально \sqrt{T} (в (103.2) n и $\langle u \rangle$ от температуры не зависят, а $\langle u^2 \rangle \sim \sqrt{T}$). Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым $R \sim T$ (см. § 98).

Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах. Чтобы по формуле (103.2) получить g , совпадающие с опытными значениями, надо принимать nl значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде — Лоренца.

Теплоемкость металлов. Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти, теплоемкость одноатомного кристалла равна $3R$. Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна $\frac{3}{2}R$. Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к $4,5R$. Однако опыт доказывает, что она равна $3R$, т. е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла — Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена в дальнейшем. Надо, однако, отметить, что классическая электронная теория не утратила своего значения и до настоящего времени, так как во многих случаях (например, при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре) она дает правильные качественные результаты и является по сравнению с квантовой теорией простой и наглядной.

Выделим основные затруднения теории Друде Лоренца:

1. Согласно классической теории, зависимость удельного сопротивления металлов от температуры $\rho \sim \sqrt{T}$ в то время, как на опыте в широком интервале температур вблизи $T \approx 300\text{K}$ для большинства металлов наблюдается зависимость $\rho \sim T$.

2. Хорошее количественное совпадение с законом Видемана — Франца оказалось в известной степени случайным. В первоначальном варианте теории Друде не учитывалось распределение электронов по скоростям. Позже, когда Лоренц учел это распределение, оказалось, что отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T$$

что значительно хуже согласуется с экспериментом. Согласно же квантовой теории,

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T = 2,45 \cdot 10^{-8} \cdot T$$

3. Теория дает неправильное значение теплоемкости металлов. С учетом теплоемкости электронного газа $C=9/2R$, а на практике $C=3R$, что примерно соответствует теплоемкости диэлектриков.

4. Теория оказалась полностью неспособной объяснить открытое в 1911г. Камерлинг-Оннесом (Kamerlingh-Onnes H., 1853-1926) явления сверхпроводимости (полного исчезновения сопротивления) металлов при низких температурах, а также существования остаточного сопротивления, в сильной степени зависящего от чистоты металла (рис.6.4).

25.1 Поток вектора маг. индукции
Потенциальная ф-я тока.

Сила, действ. на контур с током.
в неоднород. маг. поле.

см. билет 24.1,

Потенциальная ф-я тока в маг. поле

$$u = -\mathcal{U}\Phi$$

$$\delta A = -(d\mathcal{U})_{\pm}$$

- работа по изменению
пот. энергии контура
с током в маг. поле

Скин эффект - это физическое явление, заключающееся в неоднородном распределении плотности переменного тока по сечению проводника: она достигает наибольшего значения у его поверхности и уменьшается с глубиной. При очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое.

Уравнение, описывающее скин эффект Исходим из уравнения Максвелла,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

и выражения для \mathbf{j} по закону Ома:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

Дифференцируя обе части полученного уравнения по времени, находим:

$$\begin{aligned} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ - \text{rot rot } \mathbf{E} &= \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \text{ и } \text{div } \mathbf{E} = 0$$

окончательно получаем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Скин эффект в бесконечном проводнике с плоской границей.

Для упрощения решения предположим, что ток течёт по однородному бесконечному проводнику, занимающему полупространство $y > 0$ вдоль оси X. Поверхностью проводника является плоскость $Y=0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} j_x &= j_x(y, t), & j_y &= j_z = 0, \\ E_x &= E_x(y, t), & E_y &= E_z = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \mu \gamma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

В этом уравнении все величины гармонически зависят от t , и можно положить:

$$E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}$$

Подставим это в наше уравнение и получим уравнение для $E_0(y)$:

$$\frac{d^2 E_0}{dy^2} = i\gamma \mu \omega E_0$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$E_0 = A_1 e^{-ky} + A_2 e^{ky}$$

Учитывая, что $k = \sqrt{i\gamma\mu\omega} = \alpha(1+i)$, где $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}}$, находим

$$E_0 = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}$$

При удалении от поверхности проводника ($y \rightarrow \infty$) второе слагаемое неограниченно возрастает, что является физически недопустимой ситуацией. Следовательно, $A_2 = 0$ и в качестве физически приемлемого решения остаётся только первое слагаемое. Тогда решение задачи имеет вид:

$$E_0 = A_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}$$

Взяв действительную часть от этого выражения и перейдя с помощью соотношения $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ к плотности тока, получим

$$j_x(y, t) = j_0 A_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y)$$

Принимая во внимание, что $j_x(0, 0) = j_0$ — амплитуда плотности тока на поверхности проводника, приходим к следующему распределению объёмной плотности тока в проводнике:

$$j_x(y, t) = j_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y)$$

На скин-эффекте основано действие взрывомангнитных генераторов (ВМГ), взрывомангнитных генераторов частоты (ВМГЧ) и в частности ударно-волновых излучателей (УВИ).

Благодаря скин-эффекту на высоких частотах теплота выделяется преимущественно в поверхностном слое. Это позволяет раскалить проводник в тонком поверхностном слое без существенного изменения температуры внутренних областей. Данное явление используется в важном, с промышленной точки зрения, методе поверхностной закалки металлов.

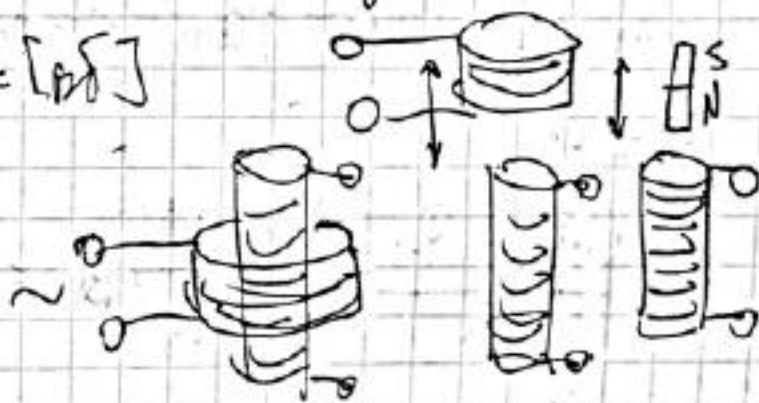
26.1 Электродинамическая индукция
 закон ЭМ индукции. Фарадей
 и его формула в диф. форме. Правило
 Ленца. Индукционные методы
 измерения маг. полей.

Э-м индукция - явление Э. токов
 в замкнутой катушке при изменении
 магнитного потока сквозь эту катушку.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

закон ЭМ
 индукции
 в диф. форме

$$\Phi = [Wb]$$



К 192

Правило Ленца: индукционный ток
 направлен так, что его действие
 противоположно действию причины,
 его вызывающей (т.е. ток всегда
 препятствует своему изменению).

Зан. Дина!

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$q = \int \gamma dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}$$

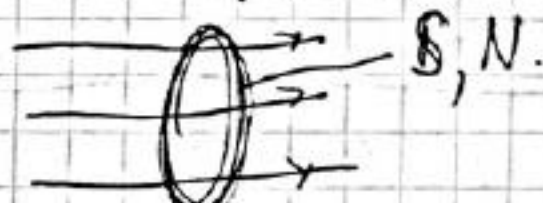
Способ измерения маг. индукции в

$$\Phi_1 = BSN$$

Флюксметр быстро
располагается так, чтобы

$$\Phi_2 = 0$$

$$q = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{R} = \frac{SN}{R} B = \underbrace{a}_{\text{const}} \cdot B$$



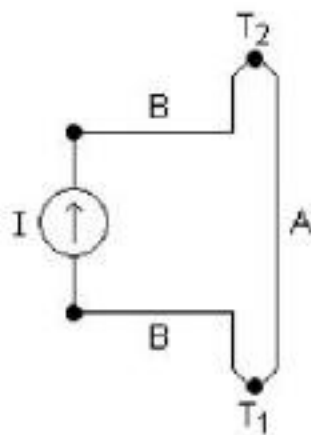
Флюксметр
(катушка)

Контактная разность потенциалов — это разность потенциалов между проводниками, возникающая при соприкосновении двух различных проводников, имеющих одинаковую температуру.

При соприкосновении двух проводников с разными работами выхода на проводниках возникает экстремальная зарядка. А между их свободными концами возникает разность потенциалов. Разность потенциалов между точками находится вне проводников, области их поверхности называется контактной разностью потенциалов. Так как проводники находятся при одинаковой температуре, то в отсутствие приложенного напряжения поле может существовать только в приповерхностных слоях. Различают внутреннюю разность потенциалов при соприкосновении металлов и внешнюю (в зазорах). Значение внешней контактной разности потенциалов равно разности работ выхода отсоединив к заряду экстрона. Если проводники соединить в кольцо то ЭДС в кольце будет равна 0. Для разных пар металлов значение контактной разности потенциалов колеблется от десятых долей вольта до единиц вольт.

Термоэлектричество представляет собой совокупность явлений, в которых разность температур создаёт электрический потенциал, или электрический потенциал создаёт разницу температур.

Эффект Пельтье — термоэлектрическое явление, при котором происходит выделение или поглощение тепла при прохождении электрического тока в месте контакта (или двух) разнородных проводников. Величина выделяемого тепла и его знак зависят от вида контактирующих веществ, направления и силы протекающего электрического тока:



$$Q = \Pi_{AB} I = \Pi_{AB} I t, \text{ где}$$

Q — количество выделенного или поглощённого тепла;

I — сила тока;

t — время протекания тока;

Π — коэффициент Пельтье, который связан с коэффициентом термо ЭДС α вторым соотношением Томсона $[\Pi = \alpha T]$, где T — абсолютная температура в К.

Термопара (термоэлектрический преобразователь) — устройство, применяемое для измерения температуры и проводимости, научных исследований, медицины, в системах автоматизации.

Принцип действия основан на эффекте Зеебека или, иначе, термоэлектрическом эффекте. Между соединёнными проводниками имеется контактная разность потенциалов: если стволы соединены в кольцо проводников находится при одинаковой температуре, сумма таких разностей потенциалов равна нулю. Когда же стволы находятся при разных температурах, разность потенциалов между ними зависит от разности температур. Коэффициент пропорциональности в этой зависимости называют коэффициентом термо ЭДС. У разных металлов коэффициент термо ЭДС разный и, соответственно, разность потенциалов, возникающая между контактами разных проводников, будет различна. Помещая стволы из металлов с различными коэффициентами термо ЭДС в среду с температурой T_1 , мы получим перемещение между противосложными контактами, изолированными при другой температуре T_2 , которое будет пропорционально разности температур T_1 и T_2 .

Сверхпроводимость — способность некоторых материалов обладать строго нулевыми электрическими сопротивлениями при достижении ими температуры ниже определённого значения (критической температуры).

Эффект Мейснера (в некоторых источниках — эффект Мейснера) — полное вытеснение магнитного поля из объёма проводника при его переходе в сверхпроводящее состояние. Впервые явление наблюдалось в 1933 году немецкими физиками Мейснером и Оксенфельдом.

При охлаждении сверхпроводника, находящегося во внешнем постоянном магнитном поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние магнитное поле полностью вытесняется из его объёма. Этим сверхпроводник отличается от идеального проводника, у которого при падении сопротивления до нуля индукция магнитного поля в объёме должна сохраняться без изменения.

Отсутствие магнитного поля в объёме проводника позволяет заключить из общих законов магнитного поля, что в нём существует только поверхностный ток. Он физически реален и поэтому занимает некоторый тонкий слой вблизи поверхности. Магнитное поле тока уничтожает внутри сверхпроводника внешнее магнитное поле. В этом отношении сверхпроводник ведёт себя формально как идеальный диамагнетик. Однако он не является диамагнетиком, так как внутри него намагниченность равна нулю.

Эффект Мейснера не может быть объяснён только бесконечной проводимостью. Впервые его природу объяснили братья Фриц и Хайнц Лондон с помощью уравнения Лондонов. Они показали, что в сверхпроводнике поле проникает на фиксированную глубину от

поверхности — лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ . Для металлов $\lambda \sim 10^{-2}$ мкм.

Явление сверхпроводимости используется для получения сильных магнитных полей (например, в циклотронах), поскольку при прохождении по сверхпроводнику сильных токов, создающих сильные магнитные поля, отсутствуют тепловые потери.

Важное применение находят миниатюрные сверхпроводящие приборы-кольца — сквиды, действие которых основано на связи изменения магнитного потока и напряжения. Они входят в состав сверхчувствительных магнитометров, измеряющих магнитное поле Земли, а также используемых в медицине для получения магнитограмм различных органов [16].

Отсутствие потерь на нагревание при прохождении постоянного тока через сверхпроводник делает привлекательным применение сверхпроводящих кабелей для доставки электричества.