Электричество и магнетизм.

① Эл.маг. взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе. Электрический заряд. Микроскопические носители заряда. Опыт Милликена. Закон сохранения эл.заряда.

Фундаментальные взаимодействия (силы) в природе.

Вид взаимод.	Скор.процесса t при $W = 1$ ГэВ, сек	$F = W/r$, Н	Радиус действия, см.
Сильные	10^{-24}	10^{14}	10^{-13}
Электромагн.	10^{-21}	10^{11}	∞
Слабые	10^{-10}	1	10^{-16}
Гравитац.	10^{+23}	10^{-33}	∞

• Электромагнитное взаимодействие – взаимодействие между электрически заряженными телами или между электрически заряженными телами и эл.маг. полем.

• Если тело электрически заряжено, то говорят, что оно имеет электрический заряд. То есть электрический заряд – это физ. величина, являющаяся источником электромагнитных взаимодействий.

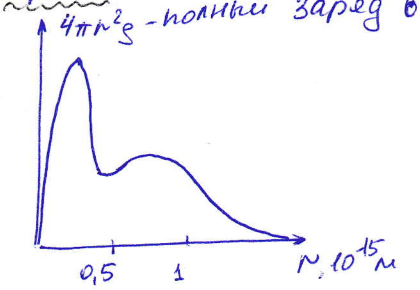
Под микроскопическими носителями зарядов понимаются заряженные частицы и ионы. Могут нести как положительный, так и отрицательный заряд. По числовому значению он должен быть лишь в целое число раз больше элементарного: $|e| = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл.

Заряженность ионов обуславливается тем, что в электронной оболочке соответствующего атома или молекулы недостает одного или нескольких e (положительные ионы) или, наоборот имеются лишние (отриц. ионы)

• Взаимодействие между покоящимися заряженными телами (или кратко зарядами) называют электрическими или, точнее, электростатическими взаимод.

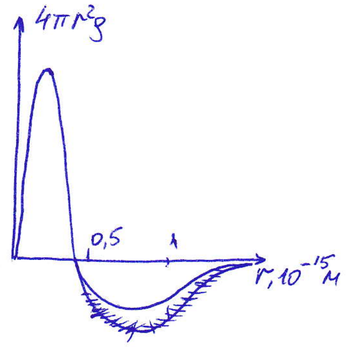
Электрон: обычно принимается, что e^- является точечной бесструктурной частицей. Однако такое представление противоречиво: $W_{\text{эл.поля от точ.заряда}} = \infty \Rightarrow m = \infty$ заряда, но $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. С этим приходится мириться.

Протон:

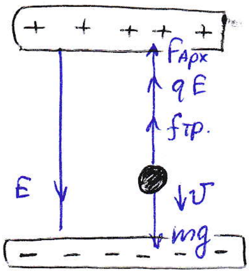


распределение заряда в протоне. (Второй max наверно из-за кварковой структуры)

Нейтрон:



Размеры областей, в которых сосредоточены эл. заряды, у протона и нейтрона примерно одинаковы.



Опыт Милликена

Маленькие шарообразные частицы движутся в вязкой жидкости при наличии однородного эл. поля E. На частицу действуют подъемная сила, направленная против mg ($\rho_{част} > \rho_{жид}$) и $f_{тр}$ против v (сила вязкого трения)

При постоянной скорости частицы $\sum F = 0$

Все силы можно измерить кроме qE, но т.к. E-известна, то можно определить q.

$$mg = qE + f_{вязк.тр} + F_{арх}$$

$$mg = qE + 6\pi\eta a v + m_{возд} g.$$

Заряд частицы с течением времени изменяется, что отражается на движении частицы. Определив q_1 и q_2 в различное время, можно определить $\Delta q = q_2 - q_1$

Произведя большое число измерений зарядов, Милликен нашел, что Δq является всегда целым, кратным одной и той же величине $|e|$:

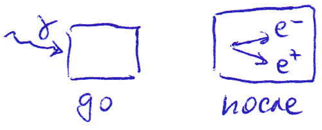
$$\Delta q = n \cdot |e|, \; n = \pm 1, \pm 2 \ldots, \; |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ - объемная плотность зарядов. Суммирование e_i с учетом знака

$j = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} e_i v_i$, где v_i - скорость e_i - плотность тока.

Закон сохранения эл. заряда:

Алгебраическая сумма зарядов в $\forall$ замкнутой системе сохраняется неизменной при $\forall$ электрических взаимодействиях и превращениях веществ внутри этой системы.



Интегральная формулировка закона сохранения заряда:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV}_{\text{скорость изменения заряда в объеме}} = \underbrace{-\oint_S j \, dS}_{\text{сила тока через поверхность, ограничивающую объем}}$$

dS по внешней нормали.

Если положит. заряд убывает в V, то плотность тока идет из объема.

② Электростатика. Закон Кулона. Его полевая трактовка. Вектор напряженности электрического поля. Напряженность эл. поля точечного заряда. Линии напряженности эл. поля. Принцип суперпозиции эл. полей.

• Электростатика — раздел электромагнетизма, в котором ~~изн~~ изучается взаимодействие неподвижных зарядов.

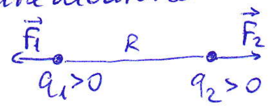
Закон взаимодействия неподвижных заряженных тел был открыт в 1785 году Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов.

Силы эл. взаимодействия уравновешиваются силами упругости закрученной нити.

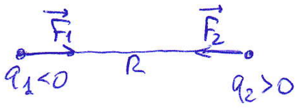
• Закон Кулона: величина силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$|\vec F| \sim \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$, $|\vec F| = k\frac{|q_1||q_2|}{R^2}$

• Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль линии, соединяющей эти заряды, и по модулю равны. Одного знака заряды — отталкиваются, разного — притягиваются.

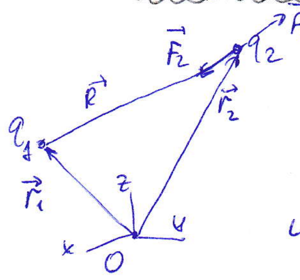


$|\vec F_1|=|\vec F_2|$



$|\vec F_1|=|\vec F_2|$

Векторная форма записи закона Кулона:



$$\vec F_2=\vec F_{21}=k\frac{q_2q_1}{R^2}\cdot\frac{\vec R}{R}=k\frac{q_2q_1}{|\vec r_2-\vec r_1|^2}\cdot\frac{\vec r_2-\vec r_1}{|\vec r_2-\vec r_1|}\Rightarrow$$

и $$\vec F_1=\vec F_{12}=k\frac{q_1q_2}{|\vec r_1-\vec r_2|^2}\cdot\frac{\vec r_1-\vec r_2}{|\vec r_1-\vec r_2|}=-k\frac{q_1q_2}{R^2}\cdot\frac{\vec R}{R}$$

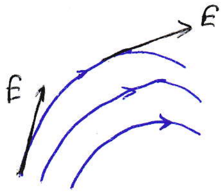
• Полевая трактовка закона Кулона

Заряд q создает в окружающем себе пространстве электрическое поле, которое характеризуется напряженностью E.

• Напряженностью эл. поля в точке называется величина, равная отношению силы, с которой поле действует на положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к заряду: $\vec E=\frac{\vec F_{q_{пр}}}{q_{пр}}$ (пробный заряд $q_{пр}$)

$\vec E_q=\frac{\vec F_{qq_{пр}}}{q_{пр}}=\frac{1}{q_{пр}}\cdot\frac{qq_{пр}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec R}{R^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec R}{R^3}$, а $|\vec E_q|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|}{R^2}$ — поле, создаваемое точечным зарядом q от расст. R.

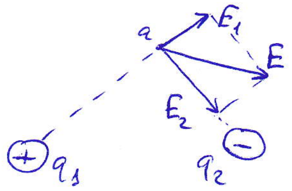
Линии напряженности электрического поля: - это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке.



Принцип суперпозиции:

а) сила взаимодействия двух точечных зарядов (а значит и поле, создаваемое ими) не изменяется в присутствии других зарядов.

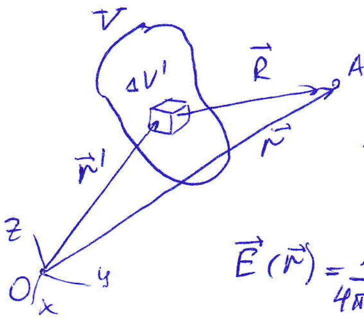
б) сила, действующая на точечный заряд со стороны 2х точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии другого.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$ - пов. плотность эл. заряда. $\gamma = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$ - лин. плотность эл. заряда.

Напряженность эл. поля, создаваемая непрерывным распределением зарядов.



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \Delta q = \rho(\vec{r}')\Delta V'$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V' (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\Delta q} \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \sum_{\Delta V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \Delta V' \quad \text{при } \Delta V' \to 0$$

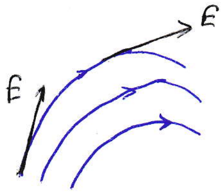
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \rho(\vec{r}') dV'$$

В случае распределения зарядов на поверхности S и на участке линии L для напряженности эл. поля имеем:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \sigma(\vec{r}') dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \gamma(\vec{r}') dl'$$

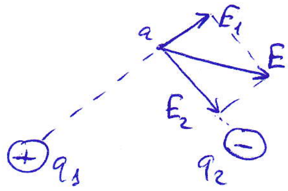
Линии напряженности электрического поля: - это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке.



Принцип суперпозиции:

а) сила взаимодействия двух точечных зарядов (а значит и поле, создаваемое ими) не изменяется в присутствии других зарядов.

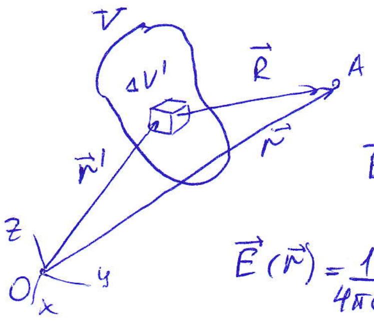
б) сила, действующая на точечный заряд со стороны 2х точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии другого.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$ - пов. плотность эл. заряда. $\gamma = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$ - лин. плотность эл. заряда.

Напряженность эл. поля, создаваемая непрерывным распределением зарядов.



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,', \quad \Delta q = \rho(\vec{r}\,')\Delta V'$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{\rho(\vec{r}\,')\Delta V' (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\Delta q} \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \sum_{\Delta V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot \Delta V' \quad \text{при } \Delta V' \to 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int\limits_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot \rho(\vec{r}\,') dV'$$

В случае распределения зарядов на поверхности S и на участке линии L для напряженности эл. поля имеем:

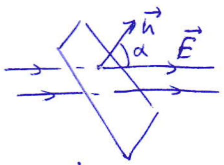
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot \sigma(\vec{r}\,') dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int\limits_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot \gamma(\vec{r}\,') dl'$$

③ Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Остроградского-Гаусса, её представление в ~~ф~~ дифференциальной форме. Примеры решения задач электростатики с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

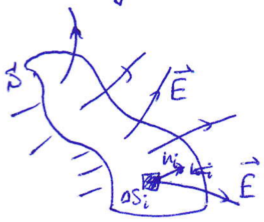
$\Phi = \int\limits_S A dS$ - поток векторного поля A через поверхность S

$\Phi = \int\limits_S A dS = \int\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})dS$, где $\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности S



$\Phi = E \cdot S\cos\alpha = E_n S$

$\Phi \sim N$ - количество линий $\vec{E}$

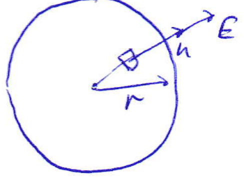


$\Delta\Phi_i = |\vec{E}_i|\Delta S_i \cos\alpha_i = \vec{E}_i \cdot \underbrace{\Delta S_i \vec{n}_i}_{\Delta\vec{S}_i} = \vec{E}_i\,\Delta\vec{S}_i$

$\Phi_S = \sum\limits_i \Delta\Phi_i = \sum\limits_i \vec{E}_i\,\Delta\vec{S}_i$

При $i \to \infty$: $\Phi_S = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S}$

Поток вектора напряженности электростатического поля через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд q.

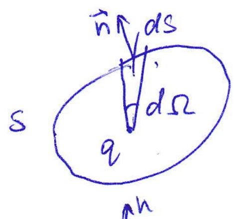


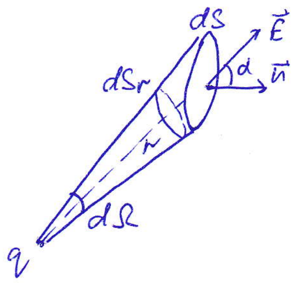
$$\Phi = \oint\limits_{S=4\pi r^2} \vec{E}d\vec{S} = \sum\limits_i E\cdot\Delta S_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Электростатическая теорема Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_{S_V} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

Доказательство:

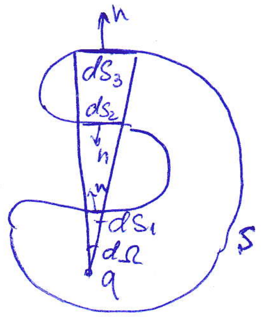




$d\Phi = EdS\cos\alpha$

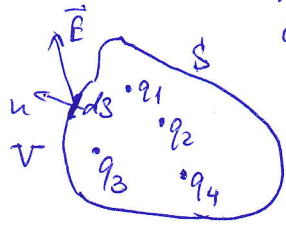
$EdS_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega$

$\oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$



рисунки 1й и 3й в разрезе.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \ldots$ Согласно принципу суперпозиции:

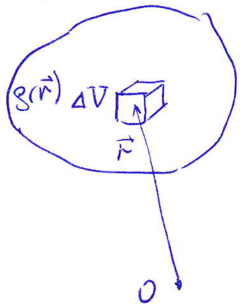


$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots)d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots}{\varepsilon_0} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

Для непрерывного распределения зарядов:

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}$$

Дифференциальная форма электростатической теоремы Остроградского-Гаусса



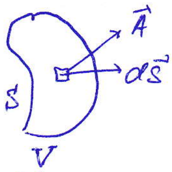
$$\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_0} \qquad \underbrace{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V}}_{div \vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

В декартовой СК:

$$div \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$div \vec{E}$ - характеризует мощность источников.

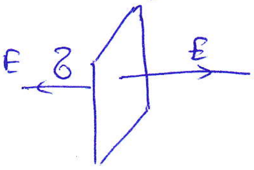
$$\oint_{S_V} \vec{A} d\vec{S} = \int_V div \vec{A} dV$$



$$\Rightarrow \oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \int_V div \vec{E} dV = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0} \Rightarrow div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Решение задач с помощью т. О-Г.

① беск. пластина



окружим поверхностью со стенками ∥ пластине

$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2S$ (где S - кусок пластины, огранич. поверхностью)

с другой стороны $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

② сфера с зарядом q:

- внутри сферы ($r<R$) $Q=0 \Rightarrow E=0$.
- снаружи: $\frac{q}{\varepsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

③ шар с плотностью $\rho(r) = ar$

- внутри шара ($r<R$) $\quad E \cdot 4\pi r^2 = \int_V \frac{ar dV}{\varepsilon_0}$, а $dV = V(r+dr) - V(r) = 4\pi r^2 dr$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{ar \cdot 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0} \Big|_0^r$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{a r^4 \pi}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{ar^2}{4\varepsilon_0}$$

- снаружи $\quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{aR^4 \pi}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

9. Работа сил электростатического поля. Потенциальность электростатич. поля. Потенциал электрического поля точечного заряда и его нормировка. Связь потенциала с вектором напряженности электрического поля. Эквипотенциальные поверхности.

Работа в электрическом поле:

Т.к. сила, действующая в эл. поле на точечный заряд q, равна $F=qE$, то при перемещении заряда на dl совершается работа: $dA = Fdl = qEdl$.

Удельная работа при перемещении заряда определяется как отношение работы к заряду: $dA' = dA/q = E\cdot dl \Rightarrow A>0$ – совершаемая полем, а внешними относительно поля силами – отрицательной.

Потенциальность электростатического поля:

Поле потенциально, если работа, соверш. этим полем, по замкнутому контуру равна 0.

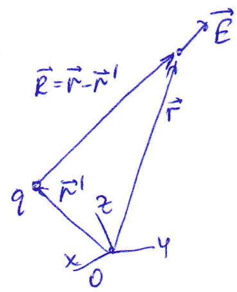
$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \text{ где } \varphi=\varphi(x,y,z) \text{ – потенциал}$$

Потенциал определен с точностью до константы, т.е. $\varphi'=\varphi+C$ тоже потенциал.

Для однозначности его нормируют, задавая ему определенное значение в некоторой точке пространства. Обычно выбирают нулевое значение потенциала на бесконечности или на поверхности Земли.

Потенциал электрического поля точечного заряда.

$$\vec{E} = k\frac{q}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R} = k\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\nabla_{\vec{r}}\left(k\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+C\right)$$



$\varphi = k\frac{q}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{R}} + C$, где $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Если $\varphi(\infty)=0$, то $C=0 \Rightarrow \varphi = k\frac{q}{R}$

Потенциал поля системы зарядов

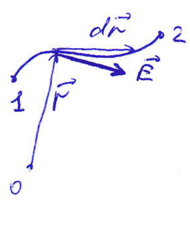
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i E_i(\vec{r}) = -\sum_i \nabla\varphi_i(\vec{r}) = -\nabla\Big(\sum_i \varphi_i(\vec{r})\Big)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

В случае непрерывного распред. зарядов $q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{dV'}_{dx'dy'dz'} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot dV'$$

Работа сил электростатического поля



$A_{12} = \int_1^2 \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}_q} d\vec{r} = -q\int_1^2 \nabla\varphi\, d\vec{r}$, а $\nabla\varphi\, d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi(x,y,z)$

$$A_{12} = -q\int_1^2 \nabla\varphi\, d\vec{r} = -q\int_1^2 d\varphi = \underbrace{q\varphi_1}_{\Pi_1} - \underbrace{q\varphi_2}_{\Pi_2}$$

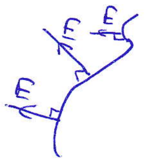
$\Pi = q\varphi$ - потенциальная энергия заряда в поле $\vec{E}$.

$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{Дж}{Кл} = В$, $\vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow [E] = \frac{В}{м}$

На основании принципа суперпозиции из потенциальности поля точечного заряда следует потенциальность произвольного электростатического поля:

$\oint E dl = \oint (\sum_i E_i) dl = \sum_i \oint E_i dl = \sum_i 0 = 0$, где $E = \sum_i E_i$, $\oint E_i dl = 0$.

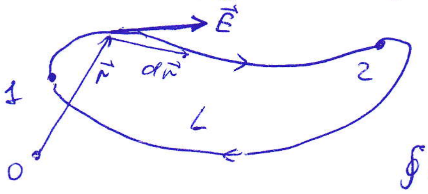
Эквипотенциальные поверхности:



- Это поверхности, на которых скалярный потенциал данного потенциального поля принимает постоянное значение (поверхность уровня потенциала)
- (другое опр.) поверхности, в $\forall$ своей точке ортогональные силовым линиям поля.

⑤ Циркуляция вектора напряженности электрического поля. Теорема о циркуляции, ее представление в дифференциальной форме. Уравнения Пуассона и Лапласа.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля



$\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ - циркуляция

условие потенциальности эл. поля.

$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_2^1 \vec{E} d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то есть $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$

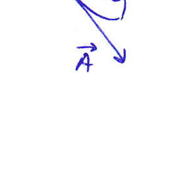
Формула Стокса. Теорема о циркуляции.

$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{S_L} rot\,\vec{E} d\vec{s}$ (в направлении внешней нормали к поверхности)

$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow rot\,\vec{E} = 0$ также это условие эквипотенциальной поверхности, на ней не должна циркулировать напряженность эл. поля.

Ротор векторной функции

$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} = (rot\,\vec{A} \cdot \vec{n})$

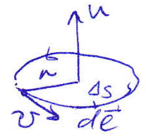


$rot\,\vec{A} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

Физическая аналогия с ротором:

$\exists$ тело вращ. по окружности радиуса r, со скоростью $\vec{\upsilon}$.

$\Delta S = \pi r^2$, $\upsilon = \omega r$



$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{\upsilon}\, d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r \oint d\vec{l}}{\pi r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r \cdot 2\pi r}{\pi r^2} =$$

$= 2\omega = \mathrm{rot}_n \vec{\upsilon} \Rightarrow$ ротор линейной скорости точек вращающегося абсолютно твердого тела равен удвоенной угловой скорости её вращения.

Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.

$$\oint_{S_V} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\int_V \rho\, dV}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \;; \qquad \oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \quad , \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0.$$

а ур-ние $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ - дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля.

Уравнения Лапласа и Пуассона

Если $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то тождественно $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$. Тогда $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}\,\vec{E} = -\mathrm{div}\,\nabla\varphi = -\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

Уравнение Пуассона: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и Уравнение Лапласа: $\Delta\varphi = 0$, если в области $\rho = 0$

По ним удобно находить потенциал и напряженность.

Уравнение Пуассона не предполагает определенной нормировки потенциала и отсутствия зарядов на бесконечности, в отличие от уравнений $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho\, dV}{r}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma\, dS}{r}$ требующих нормировки $\varphi(\infty) = 0$.

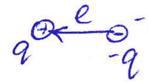
Теорема Ирншоу:

Не $\exists$ такой конфигурации неподвижных зарядов, которая была бы устойчивой, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы.

Доказательство: $\exists$ равновесие устойчиво. Тогда при смещении $\forall$ из зарядов системы из его пол. равновесия в $\forall$ напр. на него должна действовать $\vec{F}$, стремящ. возвратить заряд на прежнее место. $\Rightarrow$ А это значит, что E поля, создаваемого вблизи каждого из покоящихся зарядов всеми другими зарядами, направл. вдоль радиусов, исходящих из точки нахожд. этого заряда. $\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} \neq 0$, где S - пов. вокруг нашего ~~вращающ~~ смещенного заряда, т.к. E направлена в одном направлении. По теореме Гаусса поток создан зарядом в объеме, ограниченном S. Это противоречит исходному предположению о том, что он создается зарядами вне объема. ~~Система~~ Конфигурация неподвижных зарядов неустойчива.

6) Электрический диполь. Потенциал и напряженность эл. поля точечного диполя.

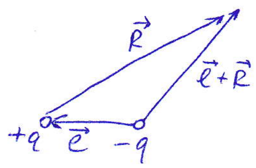
Электрический диполь – идеализированная электронейтральная система, состоящая из точечных и равных по абсолютной величине положительного и отрицательного электрических зарядов



- диполь

Дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$

Потенциал диполя.



$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} - \frac{q}{|\vec{R}+\vec{l}|}\right), \text{ где } q>0$$

$$\frac{1}{|\vec{R}+\vec{l}|} = \frac{1}{[(\vec{R}+\vec{l})^2]^{3/2}} = \frac{1}{[R^2+2\vec{R}\vec{l}+l^2]^{1/2}} = \frac{1}{R\left(1+\frac{2\vec{R}\vec{l}}{R^2}+\frac{l^2}{R^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{R} - \frac{\vec{l}\vec{R}}{R^3};$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}$$

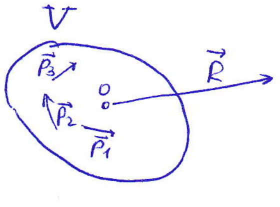
Поле диполя

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -k(\vec{p}\vec{R})\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{R^5} - k\frac{p_x}{R^3} =$$

$$= k\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\cdot x}{R^5} - \frac{p_x}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right)$$

Потенциал и поле системы диполей



Если $d \sim \sqrt[3]{V} \ll R$, то

$$\varphi_d = \sum_{i=1}^{N}\varphi_d^i = \sum_{i=1}^{N}k\frac{\vec{p}_i\vec{R}}{R^3} = k\frac{\left(\sum_i^N\vec{p}_i\right)\vec{R}}{R^3} = k\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = \sum_i^N\vec{p}_i$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right)$$

⑦ Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция. Напряженность поля у поверхности и внутри проводника. Распределение заряда по поверхности проводника. Электростатическая защита. Метод зеркальных изображений. Проводящий шар в однородном электрическом поле.

Проводники - материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает движение зарядов, т.е. электрический ток.

$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta l}{\Delta S}$, где Δl - длина бесконечно малого элемента проводника; ΔS - поперечное сечение проводника. $\Delta\varphi$ - разность потенциалов между концами проводника.

$I_\tau = j_\tau \Delta S$, индекс τ означает, что берется составляющая плотности тока вдоль проводника. γ - удельная эл. проводимость вещества.

$\Delta\varphi = j_\tau \Delta S \cdot \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta l}{\Delta S}$, а $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = E_\tau$ => $E_\tau = \frac{j_\tau}{\gamma}$ => $j_\tau = \gamma E_\tau$

Это соотношение справедливо при $\forall$ ориентировке элемента проводника, поэтому: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ - дифференциальный закон Ома.

Проводники характеризуются удельной электрической проводимостью (γ) большей, чем 10^3 ~~См~~ м/Ом. В основном - это металлы. У наилучших проводников $\gamma \approx 10^7$ м/Ом.

Отсутствие электрического поля внутри проводника.

В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, когда $j=0$. Из равенства $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ получим: $E=0$, т.е. внутри проводника при электростатическом равновесии электрическое поле отсутствует.

И объемные заряды внутри проводника отсутствуют. Это следует из уравнения $div E = \rho/\varepsilon_0$. При $E=0$ следует, что $\rho=0$.

Это означает, что заряд проводника концентрируется на его поверхности в слое атомарной толщины. Конечно, внутри проводника имеются как положительные, так и отрицательные заряды, но они взаимно компенсируются и в целом внутренние области проводника нейтральны.

Уравнение закона сохранения заряда в дифференциальной форме: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\, j = 0$. Также оно называется уравнением непрерывности.

Предположим, что в некотором объеме проводника возник объемный заряд в момент времени $t=0$ ($\rho(0) \neq 0$). Уравнение непрерывности:

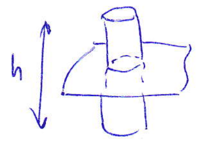
$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\gamma E) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \gamma\, div E = 0$; где $\gamma = const$ (для однородного проводника).

$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho$ => $\rho(t) = \rho_0(0)e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}$, т.е. плотность уменьшается экспоненциально.

По правилу можно считать, что заряд рассосался через $t = \varepsilon_0/\gamma$ - время релаксации.

Электрическая индукция (электростатическая) – явление перераспределения ~~зарядов~~ поверхностных зарядов на проводнике при его помещении во внешнее (стационарное) электрическое поле.

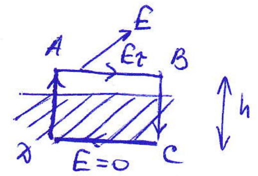
Поле вблизи поверхности проводника.



Возьмем площадку ΔS на пов. проводника. Построим цилиндр высотой h, пересекающий поверхность.

$\int_S E dS = Q/\varepsilon_0$.

Внутри проводника $E=0$. Заряд имеется только на поверхности: $Q = \sigma S$. $\Rightarrow$ поток через нижнюю часть поверхности цилиндра равен 0. $\Rightarrow$ общий поток = поток через крышку + поток через бок. пов снаружи проводника. При $h \to 0$ $\int_{\Delta S} E dS = E_n \Delta S$, где E_n – нормальная компонента E. $\Rightarrow E_n \Delta S = \sigma \Delta S/\varepsilon_0 \Rightarrow E_n = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow$ Нормальная компонента E у поверхности проводника однозначно определяется поверхностной плотностью зарядов.

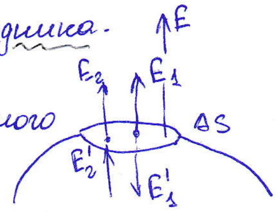


$E_\tau = 0$, иначе получился бы вечный двигатель.

при $h \to 0$ $A_{\text{работа поля}} = A_{DA} + ~~A_{AB}~~ A_{AB} + A_{BC} + A_{CD} = 0 + A_{AB} + 0 + 0$, т.к. у двух граней $h \to 0$, у нижней $E=0$.

$\Rightarrow$ поле у поверхности $E = \sigma/\varepsilon_0$ и $\perp$ поверхности.

Механизм образования поля вблизи поверхности проводника.



Рассмотрим площадку ΔS.

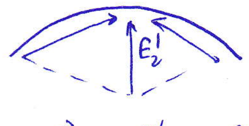
Напряженность поля E создается напр. E_1 поля, создаваемого зарядами площадки ΔS и E_2 зарядами не входящими в эту площадку. Т.к. обе стороны площадки ΔS эквивалентны, то поле идет в обе стороны: $|E_1| = |E_1'|$.

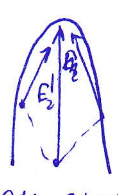
Поле E_2 создается всеми зарядами, которые наход. вне площадки ΔS. Поскольку это поле есть эл. поле в пространстве вне зарядов, которые его создают, то из условий непрерывности: $E_2 = E_2'$.

Т.к. $E=0$ внутри, то $\vec{E}_2' + \vec{E}_1' = 0$ $|E_2'| = |E_1'|$, а внешнее поле $E = E_1 + E_2$. $E_1 = E_2 = E/2$

Т.е. напряженность поля вблизи поверхности проводника созд. двумя равными полями: от прилегающего элемента поверхности и от всех остальных зарядов.

Распределение поверхностной плотности зарядов от радиуса кривизны:





Во втором случае $E_2' >$ ~~через~~ чем в первом, а $E_2' = E/2$

$\Rightarrow$ у первого поверхностная плотность зарядов $\sigma_1 = 2E_2'\varepsilon_0$ во втором случае больше. $\Rightarrow$

$(\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2)$ чем больше кривизна поверхности ~~то~~ тем ~~больше~~ меньше на ней плотность зарядов. $\sigma \uparrow$ при $R_{\text{кр.}} \downarrow$. (На вогнутой внутрь поверхности проводника σ уменьшается)

Электростатическая защита: - помещение приборов, чувствительных к электрическому полю, внутрь замкнутой проводящей оболочки для экранирования от внешнего эл. поля.

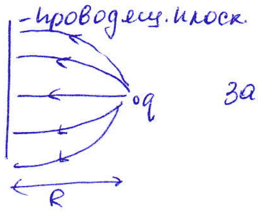
Это явление связано с тем, что на поверхности проводника (заряж. или незаряж.), заряды под действием внешнего поля перераспределяются так, что создаваемое ими внутри проводника поле полностью компенсирует внешнее. (явление электростат. индукции)

Метод зеркальных изображений:

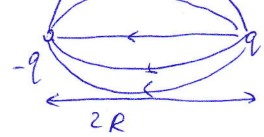
Поле точечного заряда хорошо известно. Стараются подобрать такую систему точечных зарядов, суммарное поле которых удовл. всем условиям задачи.

Из теоремы об единственности решения, заключаем, что это поле дает искомое решение.

Например:

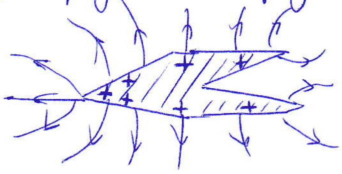


заменяем на



\- - - - -

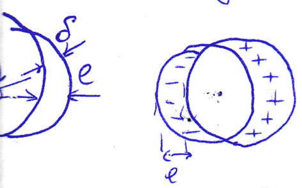
Распределение заряда по поверхности проводника:



Проводящий шар в однородном поле

Рассмотрим проводящий шар как 2 наложенных друг на друга шара с ρ противоположными q.

Сдвинем их чуть-чуть.



E - напряженность поля во внутренних точках шаров.

$E = E_+ + E_-$

напр. от положит. и отриц. заряж. шаров.

$E(r) = (|\rho|/3\varepsilon_0)\, r_+ - (|\rho|/3\varepsilon_0)\, r_- = |\rho|/3\varepsilon_0\, (r_+ - r_-)$, где r_+ и r_- радиус векторы до точки от центров шаров (определены E_+ и E_- по теор. Гаусса для обычного заряж. шара.

$E(r) = \cancel{|\rho|/\varepsilon_0)} - \frac{l|\rho|}{3\varepsilon_0}$ $(r_- = r_+ + l)$ => напр. направлена в шарах вдоль линии, соед. их центры.

Если $|l|$ - мало, то заряды можно считать поверхностными. (E_0 - внешнее однородное поле)

$\rho \Delta S \delta = \sigma \Delta S \Rightarrow \sigma = \rho\delta = \rho\, l \cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$; где $\delta = l\cos\theta$

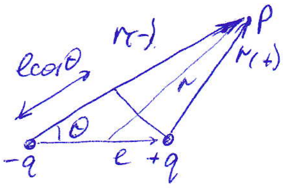
$E_n = \sigma/\varepsilon_0 = 3E_0\cos\theta$ - поле у поверхности шара.

Поле вне шара - это поле диполя с дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 3\varepsilon_0 \vec{E}_0$

$$\vec{E} = k\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) + \vec{E}_0 = \cancel{\left(1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right)\vec{E}_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot \frac{3(\vec{E}_0\vec{r})\vec{r}}{r^2}}$$

⑥ Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроемкость. Конденсаторы. Емкость плоского, сферического и цилиндрич. конденсаторов. Сложные конденсаторы. Емкостные коэффициенты.

К старому: поле диполя:



$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r(+)} - \frac{1}{r(-)}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r(-)-r(+)}{r(-)r(+)}\right)$$

$r(+)r(-) \approx r^2 \quad r(-)-r(+) = l\cos\theta$

а $\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec p \vec r}{r^3}$

и $ql\cos\theta = (\vec p \cdot \vec r)/r$

$$E = -\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{3(\vec p \cdot \vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p}{r^3}\right]$$

Потенциал проводника - одинаковое во всех точках значение потенциала

$\varphi(\vec r) = \oint_S k\frac{\sigma(r')}{|\vec r - \vec r'|}dS'$, $q = \int_S \sigma(r')dS'$

$\varphi = \frac{q}{C}$, где C - емкость (электроемкость)

Емкость проводника - отношение заряда Q уединенного проводника к его потенциалу φ:

$C = Q/\varphi$ (эмкость шара: $C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{\frac{kq}{r}} = \frac{r}{k}$; $C_{Земли} = \frac{6{,}4\cdot10^6}{9\cdot10^9} \approx 0{,}7\cdot10^{-3}$ Ф.

Конденсатор - совокупность двух $\forall$ проводников с одинак. по абс. значению, но противоположными по знаку зарядами. Проводники - обкладки конденсатора.

Емкость конденсатора $C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$

① Плоский конденсатор: $C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

② Сферический конденсатор $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

③ Цилиндрический конденсатор:

$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}$ (из теор. Гаусса: $E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}$, где l - длина цилиндра)

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Конденсаторы можно складывать послед и параллельно:

при последовательном соед. складываются напр на конденсаторах $\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$

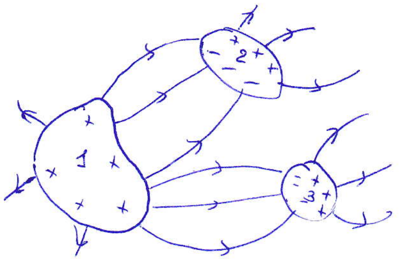
при параллельном - заряды: $q = q_1 + q_2 + \ldots \quad C = C_1 + C_2 + \ldots$

Система проводников: Если имеется несколько проводников, то потенциал каждого из них зависит не только от заряда проводника, но и от напряженностей полей, создаваемых другими проводниками, или, другими словами, от зарядов других проводников, причем по принципу суперпозиции он прямо пропорционален этим зарядам.

$\varphi_i = \sum_j V_{ij} q_j$, где $V_{ji} = V_{ij}$ - потенциальные коэффициенты.

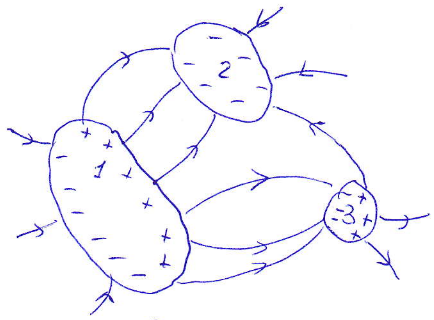
$q_j = \sum_i C_{ji} \varphi_i$, где $C_{ji} = C_{ij}$ - емкостные коэффициенты

$V_{ij} > 0$; $V_{ii} > V_{ij}$; $C_{ii} > 0$, $C_{ij} < 0$, $\sum_j C_{ij} > 0$



$\varphi_1 \sim q_1$, $\varphi_2 \sim q_1$, $\varphi_3 \sim q_1$.

$\varphi_i = a_{i1} q_1$



$\varphi_2 \sim q_2$, $\varphi_1 \sim q_2$, $\varphi_3 \sim q_2$.

$\varphi_i = a_{i2} q_2$

$\varphi_1 = a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 = \sum_j V_{ij} q_j$

⑨ Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Связь вектора поляризации со связанными зарядами.

Диэлектрики - вещества, в которых под действием электрического поля не возникает перемещения зарядов, как, например, в проводниках.
Но в диэлектрике заряды немного сдвигаются.

Внешнее поле (электрическое) стремится сдвинуть положительные заряды в направлении напряженности поля, а отрицательные - в противоположную.
=> в направл. $\vec{E}_{внеш}$ избыток „+", а в противоположном „-" Диэлектрик приобретает дипольный момент. Этот процесс называется поляризацией.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется поляризованностью:
$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta V}$, где Δp - дипольный момент элемента диэлектрика, ΔV - его объем.

Если в атоме при отсутствии внешнего эл. поля электронное облако распределено сферически симметрично относительно ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом.

Для полярных молекул главный механизм поляризации:
во внешнем $E_{внеш.}$ на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил, стремящиеся ориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля. В результате молекулы переориентируются так, что бесконечно малые физические элементы объема диэлектрика приобретают дипольные моменты, т.е. диэлектрик поляризуется.

Поляризованность за счет переориентации значительно больше, чем вследствие образования дополнительных дипольных моментов, индуцированных внешним полем.

Зависимость поляризованности от E.

① У электретов и сегнетоэлектриков P может быть $\neq 0$ при $E=0$.

② У остальных диэлектриков $P=0$ при $E=0$.

$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk} E_j E_k \ldots$, где индексы $i,j,k\ldots$ нумеруют компоненты величин по осям декартовой СК ($i=x,y,z$; $j=x,y,z,\ldots$) => P зависит от E не только в первой степени. Если зависимость от высших степеней существенна, то диэлектрик - нелинейный.

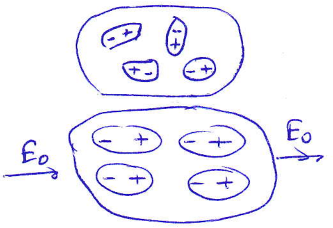
Если нелинейность не существенна, то $P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$ - диэлектрик линейный. Совокупность девяти величин χ_{ij} - тензор диэлектрической восприимчивости

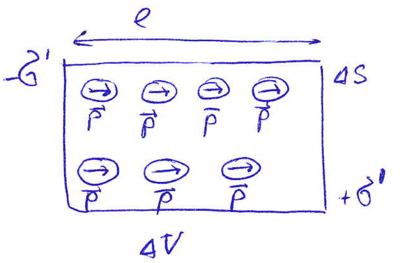
Для линейного изотропного (одинакового во все стороны) диэлектрика $P = \chi \varepsilon_0 E$. χ - диэлектрическая восприимчивость.

Из формулы $\overset{\text{дипольный момент}}{\Delta p} = PdV = \chi \varepsilon_0 E dV$ → дип. момент направлен по ~~поле~~ $\vec{E}$ => поле дипольного момента направлено в другую сторону от $\vec{E}$ => ослабляет его.

Поляризация разделяет „+" и „-" => в объеме и на поверхности образуются заряды. Эти заряды называются поляризационными или связанными

Свободные заряды - все электрические заряды, которые под влиянием $\vec{E}$ могут перемещаться на микроскопическом расстоянии (и еще дополнительно, к ним относятся заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающих их нейтральность). В диэлектриках почти отсутствуют свободные заряды.





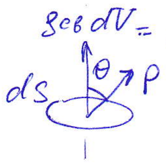
т.к. $\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}$ - дипольные мом. каждого атома или микроскопического объекта (неважно)

σ' - связанные заряды (по определению.

$\sum_{\Delta V} \Delta\vec{p}_i = \underbrace{\sigma' \Delta S}_{q} \cdot l$ - общий дипольный момент объема ΔV

по опред: $\sum_{\Delta V} \Delta\vec{p}_i = \vec{P}_n V$ => $\vec{P}_n V = \sigma' \Delta S \cdot l$ => $\boxed{\vec{P}_n = \sigma'}$ - нормальная составляющая ~~на~~ вектора поляризации равна пов. плотности связанных зарядов.

Рассмотрим $\rho_{св}$ – объемную плотность связанных зарядов.

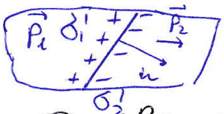


$\rho_{св} dV = dQ = P dS \cos\theta$

$\Rightarrow \int_V \rho_{св} dV = -\int_S \underbrace{P\cos\theta}_{P_n} dS$ (минус из-за того, в dV возникает заряд противоположный вытекающему через dS

по теореме Остроградского – Гаусса:

$\int_V (\rho_{св} + \operatorname{div} P_n) dV = 0. \Rightarrow \rho_{св} = -\operatorname{div} P_n \Rightarrow$ объемные связанные заряды будут только в том случае, когда P меняется от точки к точке.



Для границы 2х диэлектриков: $\sigma' = \sigma_1' - \sigma_2' = P_{1n} - P_{2n} = -\vec{n}(\vec{P_2} - \vec{P_1})$

(10) Вектор электрической индукции в диэлектрике. Диэл. восприимчивость и диэл. проницаемость вещества. Материальное уравнение для векторов эл. поля. Диэл. шар в однородном эл. поле. Фактор формы.

При наличии внешнего электрического поля вещество само становится источником электрического поля, в результате чего внешнее поле изменяется.

Электрическое смещение (электрическая индукция)

$\operatorname{div} E = \rho/\varepsilon_0 + \rho_{св}/\varepsilon_0$; подставив: $\rho_{св} = -\operatorname{div} P$ получим

$\varepsilon_0 \operatorname{div} E = \rho + \operatorname{div} P$

$\operatorname{div}(\varepsilon_0 E + P) = \rho$

$\Rightarrow D = \varepsilon_0 E + P$ – вектор смещения.

т.е. $\operatorname{div} D = \rho$: единственным источником D являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается.

Если $\rho = 0$, то вектор D – непрерывен, даже в точках, где есть $\rho_{св}$.

$D = (\varepsilon_0 + \chi\varepsilon_0)E = \varepsilon E \varepsilon_0$, $\varepsilon = (1+\chi)$ – относительная диэлектрическая проницаемость вещества

Материальное уравнение для векторов эл. поля.

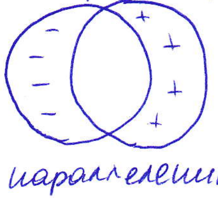
$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ или $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$

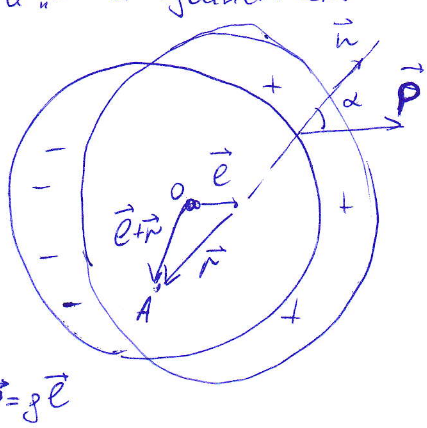
(см. что писал в прошлом вопросе)

~~Для многих сред~~ $P_i = \varepsilon_0 \sum_j^3 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_j^3 \sum_k^3 \chi_{ijk} E_j E_k + \dots$, где χ_{ij} – тензор линейной восприимчивости. χ_{ijk} – тензор нелинейной восприимчивости.

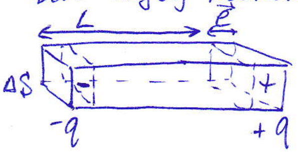
Диэлектрический шар.

Опять рассмотрим 2 шара с зарядами „+" и „–" и сдвинем их.





Разрежем систему на кучу маленьких параллелепипедов.



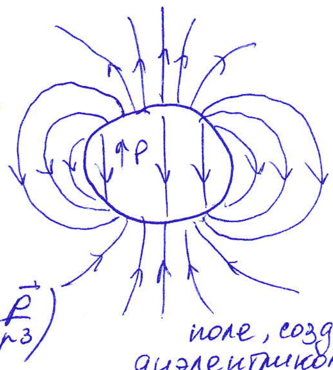
$L \gg \ell$

дипольный момент такого бруска: $p = qL$, а $q = \rho \Delta S \cdot |\vec{e}|$

$\Rightarrow p = \rho \Delta S L |\vec{e}| = \rho |\vec{e}| \Delta S L = |\vec{P}| \Delta V \Rightarrow \vec{P} = \rho \vec{e}$

Поле внутри шара:

$\vec{E}'_A = \underbrace{\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{r} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(\vec{r}+\vec{e})}_{\text{из теоремы Гаусса-Остр.}} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{e} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$ - при отсутствии внешнего направлено против $\vec{P}$



поле, создаваемое диэлектриком.

Поле вне шара совпадает с полем диполя:

$\vec{p} = V_{шара}\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3_{шара}\rho\vec{e}$, т.е. $\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$

Определим напряженности полей, если на шар действует внешнее $\vec{E}_0$

$\vec{E}'_A = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$, а $\vec{P} = \varepsilon_0\chi\underbrace{(\vec{E}_0 + \vec{E}')}_{\vec{E}} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0\chi(\vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P})$, $\vec{P} = 3\varepsilon_0 \cdot \frac{\chi}{3+\chi}\vec{E}_0 =$

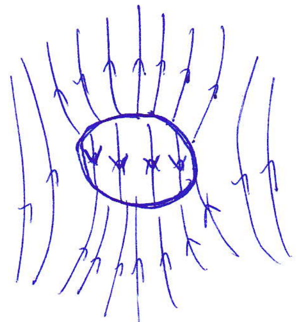
$= 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$

$\Rightarrow \vec{E}'_A = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$

а вне шара $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0$

$\vec{p} = \vec{P}\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\varepsilon_0 R^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$, где R-радиус шара.

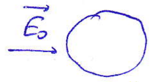
При $\varepsilon\to\infty$ - проводящий шар

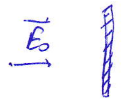


Полное поле E внутри и снаружи шара из диэлектрика

Фактор формы

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0}\vec{P}$, где N - фактор формы.

① Для шара $N = \frac{1}{3}$ 

② Для бесконечной пластины: если $\vec{E}_0 \perp$ плоскости пластины $N=1$ 

③ если $\vec{E}_0 \parallel$ плоскости пластины; $N=0$ 

(11) Теорема Остроградского-Гаусса для диэлектриков в дифференциальной и интегральной форме. Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.

Теорема Остроградского-Гаусса для случая диэлектриков:

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \varepsilon_0\underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{\frac{\rho+\rho'}{\varepsilon_0}} + \underbrace{\mathrm{div}\vec{P}}_{-\rho'} = \rho$ -ρ'-связанные заряды

Дифференциальная форма: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$

$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{D}\,dV = \int\limits_V \rho\,dV = \underset{\text{весь заряд в объеме V}}{Q} \xrightarrow{\text{по теор. Остр.-Гаусса}} \oint\limits_{S_V}\vec{D}d\vec{S} = \int\limits_V \rho dV = Q$ - интегральная форма.

Помня соотношение $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ можно найти $\vec{E}$.

Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэл. среде.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{D}=\rho \\ \operatorname{rot}\vec{E}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_{S_V}\vec{D}d\vec{S}=\int_V \rho dV \\ \oint \vec{E}d\vec{l}=0 \end{cases}$$

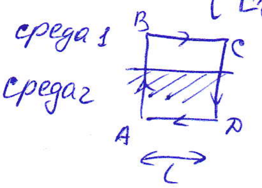
Для изотропной среды $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, тогда $\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot}\vec{E}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \oint_S \vec{E}d\vec{S}=\frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ \oint \vec{E}d\vec{l}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ В изотропной бесконечной диэлектрической среде $\vec{E}$, создавая свободными зарядами, будет в ε раз меньше по сравнению с вакуумом.

Граничные условия – связь между векторами поле по разные стороны поверхности, разграничивающей две области.

$$\begin{cases} D_{n2}-D_{n1}=\sigma \\ E_{\tau 2}-E_{\tau 1}=0 \end{cases}$$
, если одна среда проводник, т.е. $E=0$, то $E_{n2}=\sigma/\varepsilon\varepsilon_0$

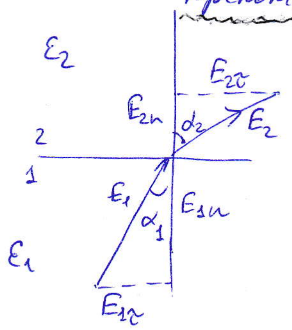
т.к. поле потенциально $\int Edl=0$ (условие потенциальности)



возьмем AB и CD сколь угодно малыми $\Rightarrow (E_{2\tau}-E_{1\tau})l=0 \Rightarrow E_{2\tau}-E_{1\tau}=0$.

σ – плотность свободных поверхностных зарядов на границе двух диэлектриков.

Преломление линий:

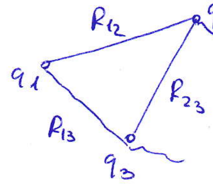


$$E_{2\tau}=E_{1\tau} \qquad \varepsilon_2E_{2n}=\varepsilon_1E_{1n}$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}=\frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

(12) Энергия системы эл. зарядов. Энергия электростатического поля и её объемная плотность. Эн. взаимод. и собственная энергия. Энергия эл. диполя во внешнем поле.

Энергия системы электрических зарядов.



Энергия = работа, совершенная по перетаскиванию одного из 2х зарядов к другому на расстояние r из бесконечности

$$W_2=q_2\varphi_2=k\frac{q_2q_1}{R_{12}}; \quad W_3=q_3\varphi_3=k\frac{q_3q_1}{R_{13}}+k\frac{q_3q_2}{R_{23}}$$

$$W=W_2+W_3=k\left(\frac{q_1q_2}{R_{12}}+\frac{q_2q_3}{R_{23}}+\frac{q_3q_1}{R_{13}}\right)$$

$$W=k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{R_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}k\frac{q_iq_j}{R_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$
, где $\varphi_i=k\sum_j\frac{q_j}{R_{ji}}$, но эта формула не учитывает взаимодействие эл. заряда каждого шара между собой.

Энергия взаимодействия зарядов при наличии диэлектриков:

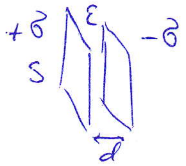
$W=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$, но $\varphi_i \neq k\sum_j \frac{q_j}{R_{ji}}$

Энергия взаимодействия зарядов при непрерывном распределении зарядов:

$$W=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV$$

Пример: Энергия конденсатора: $W=\frac{1}{2}q_1\varphi_1+\frac{1}{2}q_2\varphi_2=\frac{1}{2}q_1(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}q_1 U=\frac{CU^2}{2}$

Энергия электростатического поля и её объемная плотность:



$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon E}_{D}\cdot E\cdot\underbrace{Sd}_{V}=\frac{DE}{2}\cdot V$$

$\Rightarrow w=\frac{W}{V}$ - объемная энергия.

Строгий вывод формулы для плотности энергии электростат. поля:

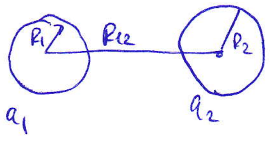
$$W=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi\, dV=\frac{1}{2}\int_\infty\rho\varphi\, dV=\frac{1}{2}\int_\infty(\mathrm{div}\vec{D})\varphi\, dV=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial D_i}{\partial x_i}\right)\varphi\, dV=\cancel{\frac{1}{2}\int_\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(D_i\varphi)}{\partial x_i}}_{\mathrm{div}(\varphi\vec{D})}-\underbrace{\sum_{i=1}^{3}D_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}_{-\vec{D}\vec{E}}\right)dV=\underbrace{\frac{1}{2}\oint_{S_{R\to\infty}}\varphi\vec{D}\,d\vec{S}}_{\to 0}+\frac{1}{2}\int_\infty\vec{D}\vec{E}\,dV=\int_\infty w\,dV,\ \text{где } w=\frac{\vec{D}\vec{E}}{2}$$

Энергия взаимодействия и собственная энергия.

- Собств. энергия заряженного тела - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.
- Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела

Пример:



2 заряженных проводящих шара:

① для уединенных шаров:

$W_1^{\text{собств}}=\frac{q_1\varphi_1}{2}$, $W_2^{\text{собств}}=\frac{q_2\varphi_2}{2}$

② Для взаимод. шаров:

$\varphi_1=\varphi_1^{q_1}+\varphi_1^{q_2}$, $\varphi_2=\varphi_2^{q_1}+\varphi_2^{q_2}$. $W=\frac{1}{2}q_1\varphi_1+\frac{1}{2}q_2\varphi_2=\underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_1}}_{W_1^{\text{собств}}}+\underbrace{\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_2}}_{W_2^{\text{собств}}}+\underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_2}+\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_1}}_{W_{\text{взаимод.}}}$

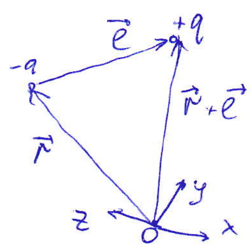
В рамках полевого формализма:

$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

$$W=\int_\infty\frac{\varepsilon_0(\vec{E}_1+\vec{E}_2)^2}{2}dV=\underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec{E}_1^2}{2}dV}_{W_{1\,\text{собств.}}}+\underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec{E}_2^2}{2}dV}_{W_{2\,\text{собств.}}}+\underbrace{\int_\infty\varepsilon_0\vec{E}_1\vec{E}_2\,dV}_{U^{\text{взаимод}}}$$

При $R_{1,2}\to 0$, $W_{1,2\,\text{собств}}\to\infty$; $U^{\text{взаимод}}\le 0$ или ≥ 0

Энергия электрического диполя во внешнем поле



$$W = q\varphi(\vec{r}+\vec{l}) - q\varphi(\vec{r})$$

а $\varphi(\vec{r}+\vec{l}) = \varphi(x+l_x, y+l_y, z+l_z) = \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial\varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} l_z + \ldots,$

$$W = \underbrace{q\vec{l}}_{\vec{p}} \cdot \underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec{E}} = -\vec{p}\vec{E}$$

(13) Пондеромоторные силы в электростат. поле. Силы, действующие на диполь. Объемные и поверхностные силы, действующие на диэлектрик в эл. поле.

Пондеромоторные силы — силы, действующие на тела, находящиеся в электромагнитном поле.

Все силы, возникающие в электростатическом поле, являются в конечном счете силами, действующими на заряд.

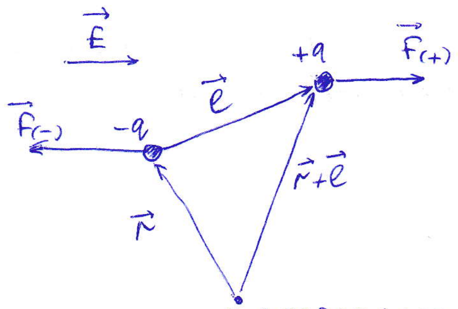
Сила, действующая на точечный заряд:

$\vec{F} = q\vec{E} = -q\cdot \operatorname{grad}\varphi$

Сила, действующая на непрерывно расиределенный заряд:

$d\vec{F} = \rho\vec{E}dV$

Сила, действующая на диполь.



O-начало координат.

Сила, действующая на диполь.

$$\vec{F} = \vec{F}_{(+)} + \vec{F}_{(-)} = q\left[\vec{E}(\vec{r}+\vec{l}) - \vec{E}(\vec{r})\right]$$

Представим $E(r+l)$ в виде:

$$E(r+l) = E(r) + l_x\frac{\partial E(r)}{\partial x} + l_y\frac{\partial E(r)}{\partial y} + l_z\frac{\partial E(r)}{\partial z} + \ldots =$$

$= E(r) + (l\cdot\nabla)E(r)$, где

$$(l\nabla) = l_x\frac{\partial}{\partial x} + l_y\frac{\partial}{\partial y} + l_z\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Сила, действующая на диполь: ~~F(~~ $\vec{F} = (p\nabla)\vec{E}$

Момент сил, действующих на диполь: $\vec{M} = [\vec{p}\cdot\vec{E}] = [(\vec{r}+\vec{l})q, \vec{E}(\vec{r}+\vec{l})] - [\vec{r}q, \vec{E}(\vec{r})]$

Объемные силы, действующие на диэлектрик.

$dF = \sum\limits_{\Delta V} F_i = \sum\limits_{\Delta V}(p_i\cdot\nabla)E_i$ — сила, приложенная к элементу объема dV диэлектрика, равна сумме сил, действующих на элементарные диполи внутри этого объема.

$$\sum_{\Delta V} p_i = P\Delta V \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\Delta F}{\Delta V} = (P\nabla)E$$

$P = \chi\varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E$, а ~~(E∇E)~~ $(E\nabla)E = \frac{1}{2}\operatorname{grad}E^2 - [\cancel{E\times \operatorname{rot}E}]\, E\cdot\operatorname{rot}E$

(но т.к. поле E потенциально, то $\operatorname{rot}E = 0$) $\Rightarrow$ $f = \varepsilon_0\frac{(\varepsilon-1)}{2}\operatorname{grad}E^2$

Пример: Вычислить силу притяжения пластин плоского конденсатора, помещенного в жидкий диэлектрик, если $q=const$.

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}, \quad d \text{ - обобщенная координата.}$$

$$F_d=-\frac{\partial W}{\partial d}\Big|_{q=const}=-\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}=-\frac{q}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}=-\frac{q}{2}E$$

В диэлектрике сила взаимодействия пластин уменьшилась в ε раз, т.е. $F_d=F_d/\varepsilon$.

Формула $f=\varepsilon_0\frac{(\varepsilon-1)}{2}\cdot \operatorname{grad} E^2$ справедлива как для абсолютно жестких диэлектриков, так и сжимаемых, если p_i - дипольные моменты отдельных молекул не сжимаются (~~const~~) и не растягиваются.

Сила, действующая на проводник:

На заряд $dq=\sigma dS$, находящийся на элементе поверхности dS проводника, действует лишь половина напряженности поля, имеющегося у поверхности проводника, поскольку вторая половина создается самим зарядом элемента поверхности и не может на него действовать (см. пункт с диэлектриками)

$$\Rightarrow f_{пов}=\frac{dF}{dS}=\frac{\sigma E}{2}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\vec{n}.$$

Т.о., на поверхности проводника сила всегда действует в направлении внешней нормали и как бы стремится увеличить его объем.

Сила на диэлектрик: $f_n=\frac{1}{2}D_n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$

(14) Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле. Неполярные диэлектрики. Формула Клаузиуса - Моссотти. Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена.

Поляризационные свойства диэлектриков определяются поляризационными особенностями молекул вещества.

Все молекулы можно разделить на полярные и неполярные молекулы.

У неполярных молекул в отсутствие внешнего эл. поля дипольный момент равен 0. Полярные молекулы обладают собственным дипольным моментом.

Поляризация неполярных молекул:

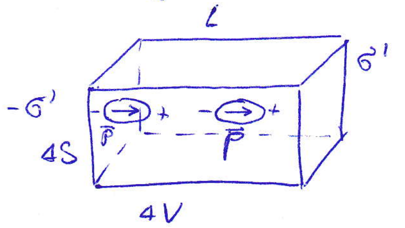
- дипольный момент

$\vec{p}=\varepsilon_0\beta\vec{E}_0$, где β - поляризуемость молекулы. Для оценки можно рассматривать молекулу как проводящий шар с $R\sim10^{-8}$ см, тогда $\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0$, $\beta=4\pi R^3\sim4\pi\cdot10^{-24}$ см^3

Микроскопическое и макроскопическое поле в веществе.

$$\vec E_{макро} = \langle \vec E(\vec r,t)_{микро} \rangle \big|_{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \vec E(\vec r,t)_{микро}\, dV$$

Поле в диэлектрике это $\vec E = \vec E_{макро}$



Локальное поле:

В результате поляризации диэлектрика, помещенного во внешнее поле, сам диэлектрик становится источником электрического поля. => Поле внутри диэлектрика, которое действует на его молекулы, отличается от внешнего. Оно называется локальным. Отличие локального $\vec E_{лок}$ от $\vec E_{внеш}$ существенно для диэлектриков с большой плотностью - жидкостей и твердых тел.

$$\vec E_{лок} = \vec E_{внеш} - \vec E_{мол} \neq \vec E_{внеш}$$

Поляризуемость разреженных газов.

, поляризация

$$\vec P = \frac{\sum_i \vec p_i}{\Delta V} = \frac{N_{\Delta V}}{\Delta V}\vec p_1 = n\cdot \vec p_1 = n\cdot \varepsilon_0 \beta \vec E_0 = \varepsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec E$$

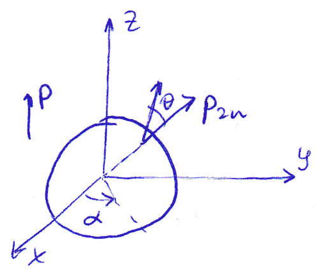
Таким образом имеем

$\alpha = \varepsilon - 1 = n\beta$

Вычислим напряженность локального поля:

Выделим в объеме диэлектрика физически малую сферу, в центре которой вычисляется напряженность локального поля:

$$\vec E_{в центре} = \vec E_1 + \vec E_2$$



$\vec E_1$ порождается частью диэлектрика вне объема шара.

E_2 - создается той частью диэлектрика, которая расположена в шаре

При вычислении E_1 - можно считать диэлектрик сплошной средой: напряженность в центре сферы создается связанными зарядами на её поверхности, как на границе раздела между двумя средами с различной диэлектрической проницаемостью.

$\sigma_{св} = -(P_{2n} - P_{1n}) = -P_{2n}$ (P_{1n} - направлена внутрь сферы (а там ничего нет (в расчете E_1 учитывается только внеш. часть диэл.)

I поляризованность P вдоль оси z:

Тогда $\sigma_{св} = -P_{zn} = P\cos\theta$

В телесном угле $d\Omega$ расположен поверхностный заряд:

$dQ = \sigma_{св} r^2 d\Omega$, где r - радиус ~~о~~ сферы. Этот заряд создает напр. поле по оси z:

$\Rightarrow dE_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2}\cos\theta$.

Видно, что отличной от 0 является только компонента напр. поля только вдоль оси z.

$$E_z = E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot P\int\cos^2\theta\, d\Omega = E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot P\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{3\varepsilon_0}\cdot P$$

$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$ - формула справедлива лишь для бесконечного однородного диэлектрика. Если диэлектрик конечен, то напряженность поля в нем зависит, вообще говоря, от его размеров и формы.

Напряженность E_2 зависит от распределения дипольных моментов молекул внутри выделенной физически малой сферы.

Вычислим напряженность для случая, когда молекулы расположены в узлах кубической кристаллической решетки, а все дипольные моменты имеют одинаковое направление в пространство.

Найдем E_2 в начале координат, пустим оси x, y и z по ребрам.

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r}_i)\vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{p}}{r_i^3}\right) \Rightarrow E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i \frac{3(p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i)x_i - p_x r_i^2}{r_i^5} = 0$$

Это следует из: для кубической симметрии при суммировании по сферическому слою: $\sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i r_i^2$; $\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \sum_i \frac{1}{3} r_i^2$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0. \Rightarrow E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i \frac{3p_x x_i^2 - p_x r_i^2}{r_i^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i\frac{3p_x\cdot\frac{1}{3}r_i^2 - p_x r_i^2}{r_i^5} = 0$$

Аналогично: $E_{2y} = E_{2z} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{E}_{лок} = \vec{E} + \vec{E}_{поляризации} = \vec{E} + (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{E} + \vec{E}_1 = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$$

Таким образом вектор поляризации равен:

$$\vec{P} = n\varepsilon_0\beta\vec{E}_{лок} = n\varepsilon_0\beta\left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\right)$$

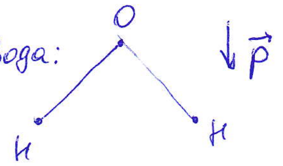
$\Rightarrow \vec{P} - \frac{\vec{P}n\beta}{3} = \varepsilon_0 n\beta\vec{E}$ $\quad \vec{P} = \varepsilon_0\frac{n\beta\vec{E}}{1-\frac{n\beta}{3}}$ $\qquad \beta = \chi$ в старых обозначениях.

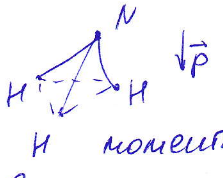
и $\frac{n\beta}{1-\frac{n\beta}{3}} = \varepsilon - 1 \Rightarrow \frac{n\beta}{3}(\varepsilon - 1) + n\beta = \varepsilon - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2} = n\beta}$ формула Клаузиуса-Моссотти.

Её можно представить в виде:

т.к. $n = \frac{\rho_m}{\mu}N_A$, то $\beta N_A = \frac{\mu}{\rho_m}3\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ в широких пределах для неполярных диэлектриков не зависит от физич. параметров (пример: для CO_2 до $P = 100$ МПа при $t = 100°C$)

Полярные диэлектрики.

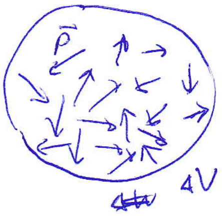
Вода:


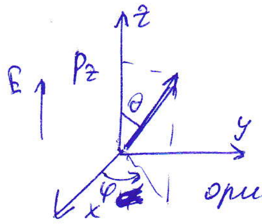


см. химию 2 семестр.

Т.к. устойчивое сост. с $E=\min$, то моменты диполей полярных молекул стремятся повернуться до совпадения с направл. напряженности эл. поля.

Поляризация газообразного полярного диэлектрика:





ориентировка диполя в сферической с.к.

$W=-pE\cos\theta=-p_zE$ из рисунка

В соответствии с распределением Больцмана: ~~$dN=Ae$~~ число молекул, дипольные моменты которых расположены в телесном угле $d\Omega$

$$dN = Ae^{\frac{pE\cos\theta}{kT}}d\Omega = Ae^{\frac{pE\cos\theta}{kT}}d\varphi\sin\theta d\theta$$

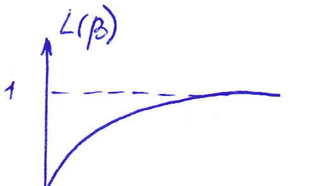
Тогда среднее значение компоненты момента диполей по оси z равно:

$$\langle p_z\rangle = \frac{\int p_z dn}{\int dn} = \frac{Ap\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta}{A\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\sin\theta d\theta},$$ где $p_z=p\cos\theta$ и $\beta=\frac{pE}{kT}$

1) $\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{\partial I}{\partial\beta}$, где $I=\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\sin\theta d\theta$

$I=\int_0^{\pi}e^{\beta\cos\theta}\sin\theta d\theta=-\frac{1}{\beta}e^{\beta\cos\theta}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\beta}\operatorname{sh}\beta$, откуда $\frac{\partial I}{\partial\beta}=\frac{2}{\beta}\left(\operatorname{ch}\beta-\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta\right)$

$\Rightarrow \langle p_z\rangle = pL(\beta)$, где $L(\beta)=\operatorname{cth}\beta-1/\beta$ – функция Ланжевена.



функция Ланжевена.

При не очень больших напряженностях поля, когда $pE\ll kT$, т.е. $\beta\ll 1$, разлагая $\operatorname{cth}\beta$ в ряд

$\operatorname{cth}\beta = 1/\beta+\beta/3-\beta^3/45+\ldots$ получим:

$L(\beta)\approx\beta/3$.

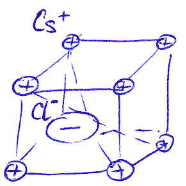
$\Rightarrow \langle p_z\rangle = \frac{p^2E}{3kT}$

При $\beta\gg1$, т.е. $pE\gg kT$ $\langle p_z\rangle=p$ $(L(\beta\to\infty)\to1)$ При выполнении условия $\langle p_z\rangle=p$ достигается максимально возможная поляризованность и дальнейшее увеличение напряженности поля не приводит к её увеличению.

E – напряженность поля насыщения.

⑮ Электрические свойства кристаллов. Пироэлектрики. Пьезоэлектрики. Прямой и обратный пьезо эффект и его применение. Сегнетоэлектрики. Их основные свойства. Доменная структура сегнетоэлектриков. Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектриков. Применение сегнетоэлектриков.

Поляризация ионных кристаллов.



Элементарная ячейка кристалла хлористого цезия CsCl

В кристаллических веществах возможно смещение положительной и отрицательной ионных подрешеток относительно друг друга под действием внешнего эл.поля. Такая поляризация - ионная поляризация

Пироэлектрики.

• Пироэлектрики - кристаллические диэлектрики в состоянии термодинамического равновесия обладающие спонтанной (самопроизвольной) поляризацией, т.е. поляризацией в отсутствие внешних воздействий (например: кристалл турмалина)
(из-за того, что решетки положительных и отриц. ионов смещены)

Пироэлектричество - явление возникновения электрического поля в кристаллах при изменении их температуры.

Обычно спонтанная поляризация пироэлектриков незаметна (т.к. эл.поле, создаваемое ею, компенсируется полем свободных электрических зарядов, которые „натекают" на поверхность ~~не~~ из его объема или из окруж. воздуха.

При изменении температуры величина спонтанной поляризации изменяется, что вызывает появление электрического поля, которое можно ~~набру~~ наблюдать, пока свободные заряды не успеют скомпенсировать его. Это явление называется пироэлектрическим эффектом или пироэлектричеством.

Пьезоэлектрики

• Пьезоэлектричество - способность вещества при изменении формы продуцировать электрическую силу.

• Пьезоэлектрики - кристаллы, обладающие свойством при деформациях возникновение электрической поляризации (прямой пьезоэффект) и наоборот при наложении электрического поля происходит деформация (обратный пьезо эффект) (кристаллы кварца, турмалина, титаната бария и другие)

Пьезоэлектрики используются: ① как датчик давления, пьезоэл. детонатор, источники звука огромной мощности, миниатюрные трансформаторы.
② зажигалки, пьезоэлектрические источники и датчик ультразвука.

(пьезоэлектрик колеблется (деформируется) под воздействие звука, и наоборот при деформации может создавать звук

Все пироэлектрики - это пьезоэлектрики, но не наоборот.

Т.к. спонтанная поляризация меняется и при механической деформации.

Сегнетоэлектрики

• Сегнетоэлектрики - полярные (кристаллические) ~~домены~~ диэлектрики, которые в определенном интервале температур, называемом полярной областью, спонтанно поляризованы, т.е. обладают поляризованностью в отсутствие внешнего эл. поля. (например: титанат бария $BaTiO_3$)

Свойства сегнетоэлектриков:

1. большие значения диэлектрической проницаемости ($\varepsilon \sim 10^3 - 10^4$)
2. нелин. зависимость P от E $\Rightarrow$ и зависимости $\varepsilon(E)$ эл. индукция.
3. явление сегнетоэлектрического гистерезиса, т.е. отставание изменения D от E

Т.к. поляризация сегнетоэлектрика определяется не только значением напряженности поля, но и зависит от предшествовавших значений поляризации

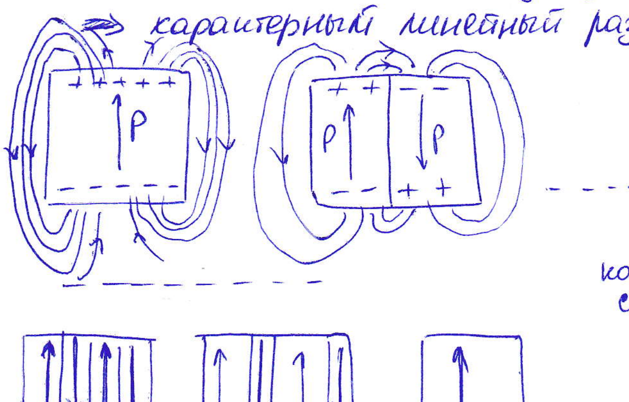
4. резкие max ε (при E-малых) при температурах, являющихся границами полярной области.

Доменная структура сегнетоэлектрика:

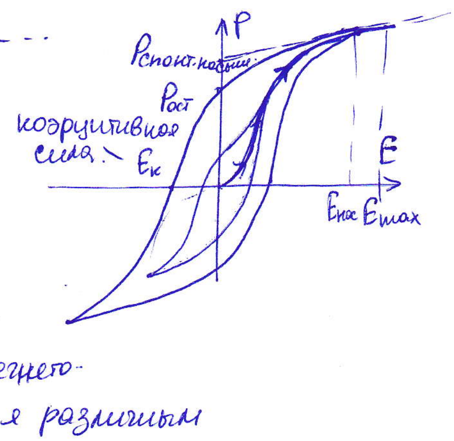
Сегнетоэлектрический кристалл в целом при $E_{внеш}=0$ не может быть поляризован однородно по всему макроскопическому объему, это энергетически невыгодно, не устойчивое состояние в термодинамическом соотношении $\Rightarrow$ min полной энергии сегнетоэлектрического образца достигается при самопроизвольном разбиении макроскопического объема кристалла на области, спонтанно поляризованные, но отличающиеся направлением вектора поляризации, так называемые диэлектрические домены. При этом средний дипольный момент $\to 0$, у макроскопич. образца энергия вызванного им поля понижается.

Но начинает расти энергия системы из-за роста энергии, увеличивающейся площади доменных стенок (границ доменов)

$\Rightarrow$ характерный линейный размер домена ≈ 1 мкм, зависит от температуры.



Гистерезис



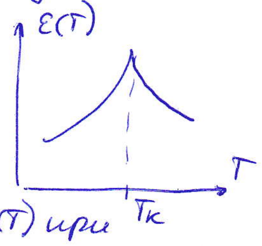
$0<E<E_A$ | $E_A<E<E_{нас}$ | $E>E_{нас}$

E_A - кое-то знач, с которого нач. процесс

доменная структура сегнетоэлектрика, соответствующая различным стадиям процесса поляризации.

Область ∃ полярной фазы: область температур, где спонтанная поляризация и все процессы, обусловленные ею, существуют в сегнетоэлектрическом кристалле.

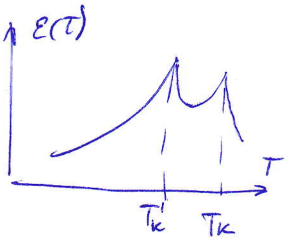
На границах полярной фазы сегнетоэлектрики испытывают фазовые переходы. Температуры, при которых наблюдаются сегнетоэлектрические фазовые переходы, называются сегнетоэлектрическими точками Кюри $T_к$



$\varepsilon(T)$ при фазовом переходе.

Вблизи точки Кюри в неполярной фазе выполняется закон Кюри-Вейсса, связывающий поляризуемость α и T сегнетоэлектрика $\alpha = \frac{C}{T - T_0}$, где C и T_0 - константы, определяемые видом сегнетоэлектрика.

Если 2 точки Кюри, то $\alpha = \frac{C}{T - T_0}$ (у верхней (правой)) и $\alpha = \frac{C'}{T_0' - T}$ (нижней (левой))



Применение сегнетоэлектриков:

① Малогабаритные конденсаторы в качестве нелин. элементов радиотех. устройств.

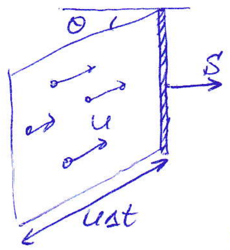
② в $\vec{E}$ внеш изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления): это явление используется для управления световыми пучками

(16) Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока. Линии тока. Электрическое поле в проводнике с током и его источники. Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока.

Электрический ток - упорядоченное движение электрических зарядов.

Сила электрического тока через заданную поверхность определяется величиной заряда, проходящего через эту поверхность за единицу времени. $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

Плотность тока - это векторная величина, проекция которой на нормаль к элементарной поверхности равна величине электрического заряда, проходящего через единицу поверхности за единицу времени.



концентрация заряженных частиц.

$$I_S = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{q n \Delta V}{\Delta t} = \frac{q n u S \Delta t \cos\theta}{\Delta t} = q n (\vec{u}\vec{S})$$

$$\vec{J} = q n \vec{u}$$

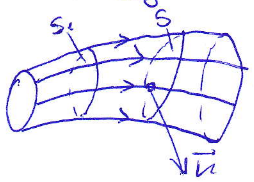
Если заряды движутся с разными скоростями:

$$I_S = \sum_i q n_i (\vec{u}_i \vec{S}) = \vec{J}\cdot\vec{S}$$, где $\vec{J} = \sum_i q n_i \vec{u}_i$ - плотность тока.

$$\vec{J} = q\cdot\frac{\sum_i n_i \vec{u}_i}{n}\, n = q n \langle\vec{u}\rangle$$, где $n = \sum_i n_i$; $\langle\vec{u}\rangle = \frac{\sum_i n_i \vec{u}_i}{n}$

Линии тока.

Линии тока - это линии, касательные к которым направлены по направлению средней (или дрейфовой) скорости. Для стационарных токов вдоль этих линий движутся заряженные частицы

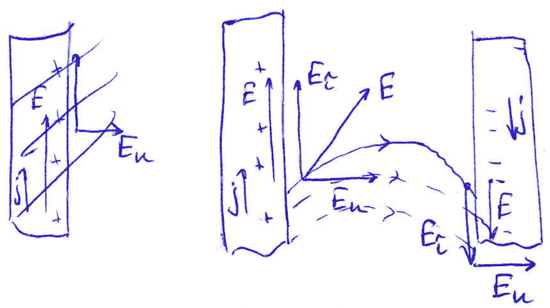


трубка тока.

Поле в проводнике

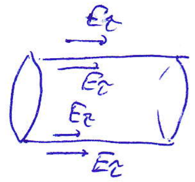
Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид $j = \lambda E$. При наличии тока $j \neq 0$ ($j = J$ в обозначениях выше) $E \neq 0$. Таким образом, внутри проводника с током имеется электрическое поле. (Но в электростатике ток внутри проводников отсутствует).

Будем рассматривать линейные проводники, у которых $I = j\Delta S$



Из граничного условия $\mathrm{div} D = \rho$ заключаем, что вблизи поверхности вне проводника имеется электрическое поле, тангенциальная составляющая напряженности E_τ которого равна тангенциальной составляющей напряженности E_τ поля внутри проводника.

Уравнение непрерывности. Условие стационарного тока.



Согласно закону сохранения заряда:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_V = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\oint_{S_V} \vec{J} d\vec{S} = -\int_V \mathrm{div}\vec{J}\, dV \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J}\right) dV = 0$$

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J} = 0$ - уравнение непрерывности

В стационарном случае: $\partial\rho/\partial t = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{J} = 0$

(17) Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электросопротивление. Закон Ома в дифференциальной форме. Удельная электропроводность вещества. Отсутствие в однородном проводнике объемных зарядов.

Дополнение к вопросу 16:
Т.к. видно, что силовые линии электрического поля не касательны к поверхности проводника, то вне проводника вблизи его поверхности наряду с тангенциальной составляющей напряженности E_τ электрического поля имеется также нормальная составляющая E_n. Однако внутри проводника $E_n = 0$. Поэтому из ур-ния $E = \delta/\varepsilon_0\varepsilon$ заключаем, что на поверхности проводника должны существовать заряды, поверхностная плотность которых:

$\delta = \varepsilon_0 E_n$ (если снаружи нет диэлектрика $\varepsilon = 1$.)

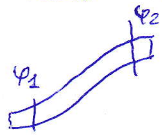
Поверхностные заряды:
Т.о. на поверхности проводника, по которому течет постоянный электрический ток, имеются электрические заряды. Они и являются источниками электрического поля, которое $\exists$ в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока.
Поверхностная плотность заряда на различных участках проводника может иметь различные знаки (см. рисунок с пластинками: вопрос 16.)

Объемные заряды:
В однородных проводниках имеются только поверхностные заряды. В неоднородных проводниках, когда проводимость изменяется от точки к точке, возникают также заряды в объеме проводника (объемный заряд в веществе в принципе может быть как свободным, так и связанным)

В однородном проводнике отсутствуют объемные заряды:

Для стационарных токов: $div\,\vec{J} = 0 = div(\lambda\vec{E}) = \lambda\, div\,\vec{E} + (\vec{E}\nabla\lambda)$
Если $\lambda = const$, то $\nabla\lambda = 0$. $\Rightarrow div\,\vec{E} = \mathfrak{s}q/\varepsilon_0 = 0$.

Электрическое напряжение между точками A и B электрической цепи или электрического поля $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{e}$



Электрическое сопротивление-
-физическая величина, характеризующая свойства проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему. Сопротивление для цепей переменного тока и для переменных электромагнитных полей описывается понятиями импеданса и волнового сопротивления.

Закон Ома для участка цепи.

Из опыта $I = f(U)$.

Для многих проводников эта зависимость линейная:

$I = \Lambda U = \frac{1}{R} U$, где Λ и R – электрическая проводимость и сопротивление.

$R = [\text{Ом}]$

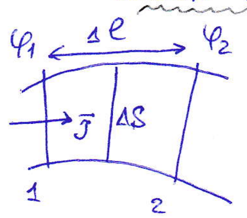
Удельное электрическое сопротивление ρ: $R = \rho \frac{l}{S}$

Удельное сопротивление зависит

от температуры: $\rho = \rho_0 (1 + \alpha(t - t_0))$, где α – температурный коэффициент сопротивления

Для чистых металлов $\alpha \approx 1/273\ K^{-1} = 0{,}00367\ K^{-1}$

Закон Ома в дифференциальной форме:



$$I = \underset{\text{поток}}{J dS} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta S}}$$

с ~~другой~~

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} \cdot \Delta S = \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(-\frac{d\varphi}{dl} \right)}_{E} \Delta S = \frac{1}{\rho} E \Delta S$$

$J = \frac{1}{\rho} E = \lambda E$, где

$\lambda = \frac{1}{\rho}$ – удельная электропроводность.

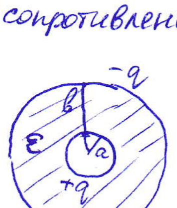
В векторной форме: $\vec{J} = \lambda \vec{E}$ – закон Ома в дифференциальной форме.

(18) Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца и его дифференциальная форма.

Дополнительно к вопросу ~~18~~ 17.

Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах.

а) сопротивление сферического конденсатора с утечкой.



$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$; $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{b}\right)$, $\underbrace{\varphi_a - \varphi_b}_{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b}\right)$, $J = E\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 \frac{J}{\lambda} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda} I$, где $I = 4\pi r^2 J$ ($4\pi r^2$ – площадь поверхности шара радиуса R.

$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda} I = R \cdot I$, где сопротивление $R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

Заметим, что емкость сферического конденсатора $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon / \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ и $CR = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$ – универсальное соотношение

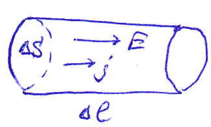
Работа, совершаемая при прохождении тока.

Если между точками с разностью потенциалов U переносится заряд dQ, то совершается работа $dA = dQU$

~~І~~ ~~В~~ по проводнике протекает ток ~~dI~~ I. Рассмотрим участок проводника, между ~~которыми~~ концами которого имеется разность потенциалов U. В течение времени dt на участке перемещается заряд $dQ = Idt$ и, следовательно, совершаемая работа равна: $dA = IUdt$.

$\Rightarrow$ Мощность, развиваемая током на этом участке, определяется формулой:
$P = dA/dt = IU$

Если все падение потенциала происходит на омическом сопротивлении проводника, то по закону Ома $U = IR$, где R - сопротивление участка.
В этом случае вся энергия выделяется в виде теплоты с мощностью:
$P = IU = I^2R$ - закон Джоуля-Ленца



Дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца.

Применим закон $P = IU = I^2R$ к бесконечно малому цилиндру, ось которого совпадает с направлением тока, получим $\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\lambda}\frac{\Delta l}{\Delta S}$
где $I = j\Delta S$, j - плотность тока. Сопротивление бесконечно малого цилиндра $\Delta R = \Delta l/(\lambda\Delta S)$, а т.к. $\Delta S\Delta l = \Delta V$ - объем цилиндра.

Тогда из ΔP находим объемную плотность тепловой мощности P_V, выделяющуюся в проводнике, т.е. теплоты, образующейся в $1 м^3$ проводника в 1 сек.

~~$P_V = \frac{\Delta P}{\Delta S\Delta l}$~~

$P_V = \Delta P/(\Delta S\Delta l) = j^2/\lambda$

~~Уравнение $P_V = \Delta P/(\Delta S\Delta l)$ - дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца, поскольку все вели~~

Уравнение $P_V = j^2/\lambda$ - дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца, поскольку все величины относятся к одной и той же точке

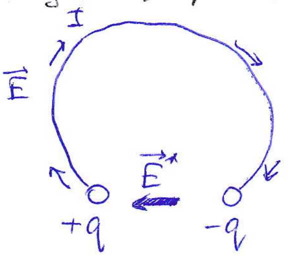
Пользуясь законом Ома в дифференциальной форме, получим:
$P_V = j^2/\lambda = \lambda E^2 = jE$
$\forall$ из этих равенств, когда в левой части стоит P_V, является записью закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Источник энергии для работы электрического тока.

Падение потенциала в цепи тока компенсируется соответствующим подъемом потенциала, возникающим в результате действия сторонних электродвижущих сил на заряды. При прохождении тока производится работа и выделяется энергия, например в форме теплоты. Сторонние электродвижущие силы совершают работу над зарядами, сообщая им соответствующую энергию.

Поэтому получается, что вся работа, совершаемая током, производится за счет сторонних электродвижущих сил.

⑲ Сторонние силы. ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.



Для поддержания электрического тока в замкнутой цепи необходимо устройство (источник тока), совершающее посредством сторонних сил перемещение зарядов против действия электрических сил.

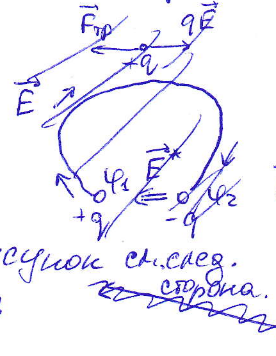
$\vec{E}^*$ - сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд (напряженность сторонних сил),

$\vec{E}$ - напряженность электрических сил.

Сторонняя электродвижущая сила не может иметь электростатического происхождения по той простой причине, что электростатическое поле является потенциальным. Следовательно, работа поля по замкнутому контуру, по которому течет ток, равна 0, т.е. при этом условии ток не мог бы существовать, поскольку он должен совершать работу для преодоления омического сопротивления проводников. Существование постоянного тока доказывает, что сторонние электродвижущие силы имеют неэлектростатическое происхождение.

Электродвижущая сила (ЭДС) - скалярная физическая величина, характеризующая работу сторонних сил, то есть ∀ сил неэлектрического происхождения, действующих в квазистационарных цепях постоянного или переменного тока. В замкнутом проводящем контуре ЭДС равна работе этих сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль его контура.

Рассмотрим контур: движение q по контуру:



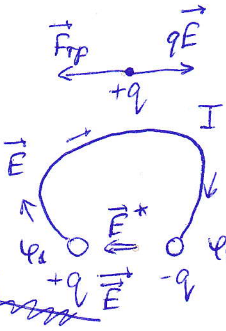


рисунок см. след. сторона.

$$\int_1^2 q\vec{E}\,d\vec{l} = q(\varphi_1-\varphi_2) = qU$$

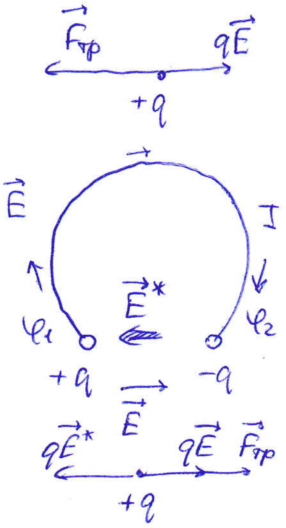
$$\int_1^2 q\vec{E}\,d\vec{l} = -\int_1^2 \vec{F}_{тр}\,d\vec{l} = Q_{джоулево\ тепло},$$

$Q_{джоулево\ тепло} = I^2Rt = qIR$, где R - сопротивление внешней цепи.

$$q\underbrace{\int_2^1 \vec{E}^*d\vec{l}}_{\mathcal{E}} = -q\underbrace{\int_2^1 \vec{E}\,d\vec{l}}_{-U} - \underbrace{\int_2^1 \vec{F}_{тр}\,d\vec{l}}_{-Q'_{джоулево\ тепло}}$$

$Q'_{джоулево\ тепло} = qIr$, где r - внутреннее сопротивление цепи

Замечание: $Ir = I\rho\int_2^1 \frac{dl}{S} = \int_2^1 \rho\frac{I}{S}dl = \int_2^1 \rho\vec{j}\,d\vec{l} \Rightarrow \rho\vec{j} = \vec{E}+\vec{E}^*$

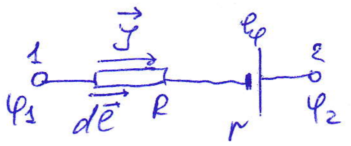


В результате имеем $\mathcal{E} = U + Ir = IR + Ir$ — закон Ома для замкнутой цепи.

Здесь $\mathcal{E} = \int_2^1 \vec{E}^* d\vec{l}$ — электродвижущая сила (ЭДС), равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

Если направление тока характеризовать относительно электродов, то во внешней цепи ток течет от положительного электрода к отрицательному, а внутри источника токов — от отрицательного электрода к положительному

Закон Ома для участка цепи с ЭДС.



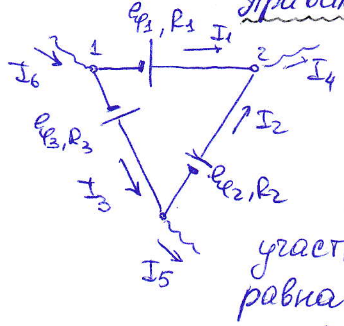
$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}+\vec{E}^*)$$

$$\int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l} = \underbrace{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}_{\varphi_1-\varphi_2} + \underbrace{\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}}_{\mathcal{E}}$$

$$\int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l} = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} dl = I\int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = I(R+r)$$

$$I(R+r) = \underbrace{\varphi_1-\varphi_2}_{U} + \mathcal{E}$$

Правила Киркгоффа.



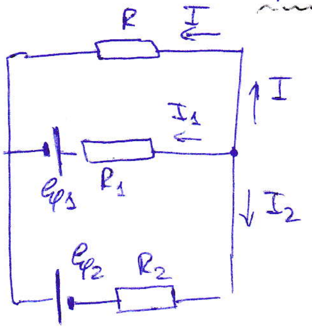
1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0.

$$I_1+I_2-I_4=0 \Rightarrow \sum_k I_k = 0$$

2) Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$+\begin{cases} I_1R_1 = \varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_1 \\ -I_2R_2 = \varphi_2-\varphi_3-\mathcal{E}_2 \\ -I_3R_3 = \varphi_3-\varphi_1-\mathcal{E}_3 \end{cases} \Rightarrow \sum_n I_nR_n = \sum_k \mathcal{E}_k$$

Пример применения правил Кирхгофа.



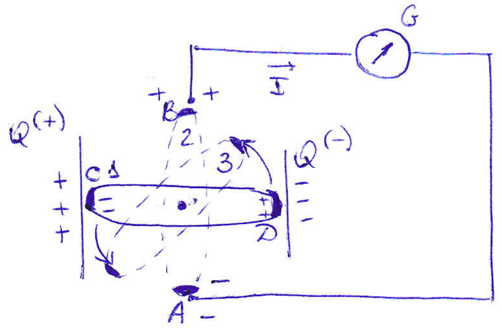
1) $\begin{cases} I + I_1 + I_2 = 0 \\ -IR + I_1R_1 = -ℰ_1 \quad | \cdot R_2 \\ -IR + I_2R_2 = ℰ_2 \quad | \cdot R_1 \end{cases}$ } $+ \Rightarrow$

$$\Rightarrow -IR(R_1+R_2) + R_1R_2(-I) = -ℰ_1R_2 + ℰ_2R_1$$

$$I = \frac{ℰ_1R_2 - ℰ_2R_1}{R(R_1+R_2) + R_1R_2}$$

Примеры источников тока.

• Электростатическая машина



• $Q^{(+)}$ и $Q^{(-)}$ – заряженные пластины, между которыми создается электростатическое поле.

• В положении 1 пластины будут соединены перемычкой (неподвижным проводником)

В результате электростатической индукции C и D - проводящие пластины. Пластины C и D в этом положении заряжаются соответственно отрицательно и положительно.

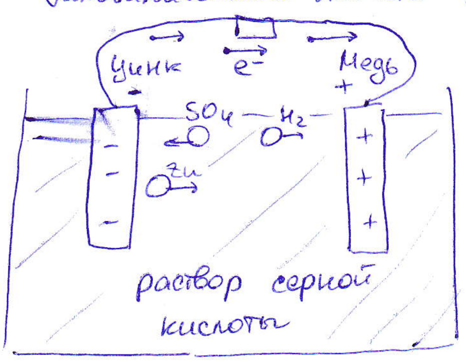
• При дальнейшем вращении их контакт (пластин C и D) пластины изолированы друг от друга, но несут на себе разноименные заряды.

• В положении 3 они вступают в контакт с электродами A и B, на которые переходит заряд с C и D. По цепи BGA течет импульсный ток. По 2 импульса за каждый оборот.

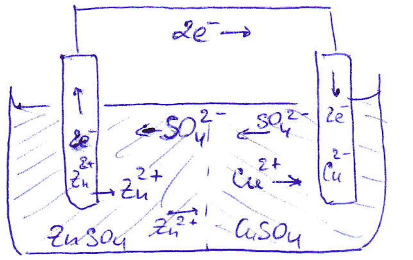
• Если увеличить число пластин C и D, то получится почти постоянный ток.

Такая машина реализует стороннюю ЭДС механического происхождения, возникающую за счет механических сил, обеспечивающих движение пластин C и D по окружности

• Гальванический элемент Вольта:



• Элемент Даниэля-Якоби



• Свинцово-кислотный аккумулятор.

Li - Ion (литий-ионные) аккумуляторы.

- Li - наиболее химически активный металл. На его основе работают современные источники питания для ноутбуков. Практически все высокоплотные источники питания используют литий в силу его химических свойств.
- Килограмм лития способен хранить 3860 ампер-часов. Для сравнения, показатель цинка - 820, свинца - 260.

(20) Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах. Электросопротивление сплошной среды. Заземление.

Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах.

Электрический ток может $\exists$ не только в проводах. Например, почва (особенно сырая) является проводником электрического тока.

Стоит проблема: определение сопротивления между электродами, введенными в сплошную среду.

Рассмотрим сплошную однородную среду с погруженными в неё электродами, между которыми протекает электрический ток. Линии плотности тока совпадают с линиями напряженности электрического поля в среде, поскольку $\vec{J} = \lambda \vec{E}$.

Сила тока сквозь замкнутую поверхность S, окружающую один из электродов, равна: $I = \oint_S \vec{J} d\vec{S} = \lambda \oint_S \vec{E} d\vec{S}$

Теперь представим себе, что проводящая среда удалена, а электроды рассматриваются как обкладки конденсатора. По определению емкости C конденсатора имеем: $Q = CU$, где Q - заряд электрода, U - разность потенциалов между электродами. По теореме Гаусса получаем: $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$, где $\vec{E}$ - напряженность поля конденсатора, S - та же поверхность, что и выше.

Однако вследствие единственности решения задач электростатики заданная разность потенциалов между заданными электродами однозначно определяет напряженность поля. $\Rightarrow$ напряженность поля в проводящей среде, по которой протекает ток I совпадает с напряженностью поля, создаваемого в вакууме между теми же электродами при той же разности потенциалов.

Поэтому из всех уравнений получим:

$$I = \frac{\lambda Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda C U}{\varepsilon_0}$$

Тогда сопротивление однородной среды:

$$R = U/I = \varepsilon_0/(\lambda C)$$

⚠ Но, все эти рассуждения неприменимы ~~только~~ для неоднородной среды т.к. в ней при прохождении тока образуются объемные заряды, которые являются источниками электрического поля.

В этом случае электрическое поле в среде при прохождении постоянного тока не совпадает с полем в вакууме, хотя электроды и поддерживаются при той же разности потенциалов.

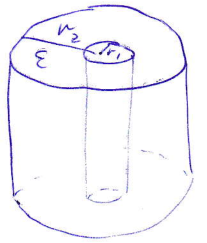
Условие применимости $R=\frac{\varepsilon_0}{\lambda C}$.

Эта формула позволяет вычислить R, если известна емкость конденсатора, обкладками которого являются электроды. Результаты получаются тем точнее, чем лучше соблюдается постоянство потенциала электрода при прохождении через него тока. Если последнее требование плохо удовлетворяется и потенциалы разных точек электрода при прохождении по нему тока существенно различаются, то рассчет R нельзя свести к рассчету C, поскольку у конденсатора потенциал всех точек обкладки должен быть одинаков.

Поэтому, в частности, необходимо потребовать малости удельного сопротивления электродов по сравнению с ρ среды. Если электроды достаточно малы по размерам, то это требование отпадает.

а) Сопротивление сферического конденсатора с утечкой (см. вопр. 18)

б) Коаксиальный конденсатор с утечкой.



Емкость цилиндрического конденсатора $C=2\pi l\varepsilon_0/\ln(r_2/r_1)$
(см. вычисление в первых вопр.)

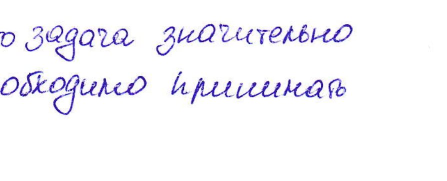
$$\Rightarrow R=\frac{\varepsilon_0}{\lambda C}=\frac{\varepsilon_0\ln(r_2/r_1)}{\lambda 2\pi l\varepsilon_0}=\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\lambda}$$

Неоднородная среда.

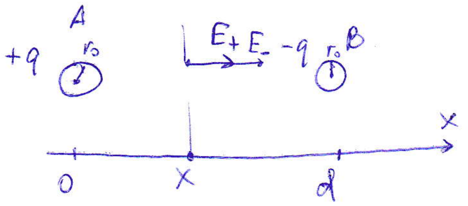
Если удельная проводимость не постоянна, то задача значительно усложняется, поскольку возникают объемные заряды и необходимо принимать во внимание порождаемое ими электрическое поле

Заземление (линий передач)

Задача: т.к. λ (удельная электропроводимость) грунта довольно значительна, возникает вопрос об использовании земли в качестве проводника электрического тока. Эл. цепь см. рис. (A и B - электроды, зарытые в землю). При этом процессе можно сократить расход проводов вдвое.



Найдем сопротивление сплошной среды, считая электроды сферами радиуса r_0. Расст. между центрами электродов d. Заряд сферически симметричен, а среда неограничена.



$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(d-x)^2}\right)$$

$\Rightarrow$ U между электродами

$$U=\int_{r_0}^{d-r_0} E\,dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{(d-x)}\right]_{r_0}^{d-r_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{d-r_0}+\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d-r_0}\right)$$

В большинстве случаев: $d \gg r$.

тогда $U=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_0}$, а т.к. $I=\oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = \lambda\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \lambda q/\varepsilon_0$

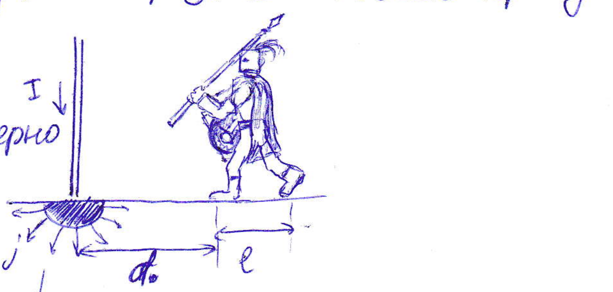
$$R=\frac{U}{I}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\varepsilon_0}{\lambda q}=\frac{1}{2\pi r_0\lambda}$$

⚠ Важное свойство: сопротивление R не зависит от расстояния между электродами. Физически объясняется тем, что при увеличении расстояния между электродами соответственно увеличивается эффективная площадь среды, через которую течет ток. Увеличение расстояния между электродами увеличивает сопротивление, а увеличение площади — уменьшает. Из формулы R следует, что эти 2 фактора компенсируют друг друга.

$\Longrightarrow$ Главный вклад в сопротивление среды дают участки, непосредственно граничащие с электродами.

Напряжение шага.

$\exists$ произошел обрыв высоковольтной линии и провод длиной L лежит на земле. В прилегающих ~~точках~~ областях земли имеется электрический ток. Если мимо идет человек, то между точками его ног $\exists$ разность потенциалов, называемая напряжением шага. В результате через тело человека проходит ток.



эквипотенц. линии — ~~концентрич. круги~~ полуцилиндрич. поверхности (провод идет на L вглубь рисунка)

Считая, что ток от провода растекается равномерно в полуцилиндрическую область, где плотность тока на расстоянии r от провода получаем:

$j = I/\pi r L$

$E_r = j/\lambda = I/(\pi r L \lambda)$

$$\Rightarrow U_ш = \int_d^{d+l} E_r\,dr = \frac{I}{\pi\lambda L}\ln\frac{d+l}{d}.$$

(при $I=500$ А, $d=1$ м, $l=65$ см, $L=30$ м находим $U_ш \approx 270$ В)

$\Longrightarrow$ Возникает опасность даже нахождения рядом с упавшим проводом.

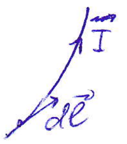
(21) Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока. Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля. Действие магнитного поля на ток. Закон Ампера.

Магнитное взаимодействие. –

– взаимодействие между токами, магнитными телами, ~~тока~~
В рамках представлений близкодействия это взаимодействие осуществляет магнитное поле.

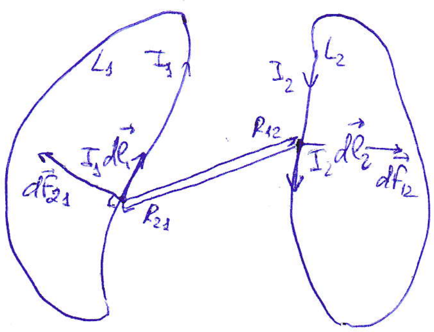
Магнитостатика.

Магнитостатика – изучает законы взаимодействия между неподвижными магнитными телами и проводниками со стационарными токами.



$I\vec{dl}$ – элемент тока (если эл. ток I течет по бесконечно тонкому (в физ. смысле) проводнику, то он называется линейным током.

Силы взаимодействия между токами:



$$d\vec F_{21} = k\frac{[I_1 d\vec l_1, [I_2 d\vec l_2, \vec R_{21}]]}{R_{21}^3}$$

$$d\vec F_{12} = k\frac{[I_2 d\vec l_2, [I_1 d\vec l_1, \vec R_{12}]]}{R_{12}^3}$$

$$\vec F_{21} = k\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{[I_1 d\vec l_1, [I_2 d\vec l_2, R_{21}]]}{R_{21}^3}; \quad \cancel{\vec F_{12} = k\oint_{L_1}\oint_{L_2} k[I_2 d\vec l_2, [I_1 d\vec l_1, R_{12}}$$

$$\vec F_{12} = k\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{[I_2 d\vec l_2, [I_1 d\vec l_1, R_{12}]]}{R_{12}^3}$$

$$-d\vec f_{12} \neq d\vec F_{21}$$

Для элемента тока III закон Ньютона не работает, однако для суммарных сил взаимодействия замкнутых контуров с током III закон Ньютона выполняется $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$.

Магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ – скорость света в вакууме.
$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$

Магнитная индукция $\vec B$: – векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля (его действие на заряженные частицы) в данной точке пространства. Определяет, с какой силой $\vec F$ магнитное поле действует на заряд q

Закон Био-Савара-Лапласа. – физический закон для определения вектора индукции магнитного поля, порождаемого постоянным эл. током.

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I\frac{[d\vec l, R]}{R^3}$ (В произвольной точке пространства $\vec R$ элемент тока $I d\vec l$ создает магнитное поле с индукцией $d\vec B$)

С точки зрения полевой трактовки взаимодействия токов величину $d\vec B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2[d\vec l_2, R_{21}]}{R_{21}^3}$ можно интерпретировать как силовую характеристику магнитного поля, создаваемого элементом тока $I_2 d\vec l_2$ в пространственной точке, определяемой $\vec R_{21}$.

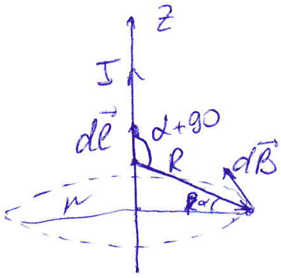
Величина индукции магнитного поля B_2 в точке R_{21}, создаваемого током всего контура L_2, согласно принципу суперпозиции равна:

$$\vec B_2 = \sum d\vec B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I_2 [d\vec l_2, R_2]}{R^3}$$

Тогда сила действия магнитного поля B_2 на элемент тока $I_1 d\vec l_1$ равна:

$$d\vec F_{21} = \Big[I_1 d\vec l_1, \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[I_2 d\vec l_2, \vec R_{21}]}{R_{21}^3}}_{d\vec B_2} \Big] = [I_1 d\vec l_1, \vec B_2]$$ – закон Ампера (сила Ампера)

Пример рассчета индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа:



$|d\vec l| = dz$, $\quad d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[I d\vec l, \vec R]}{R^3}$

$d\vec B$ – ⊥ к вектору $\vec R$ (вглубь рисунка)

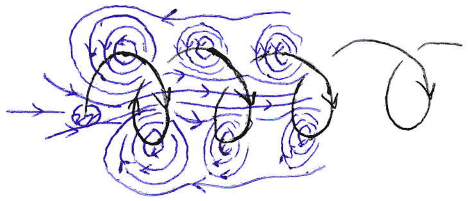
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz\cdot R\cdot \overbrace{\sin(\alpha+90^\circ)}^{\cos\alpha}}{R^3} \ ; \ z = tg\alpha\cdot r.$$

$dz = r\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$; $R\cos\alpha = r$

$$B = \int dB = 2\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{R\cos\alpha\, dz}{R^3} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{R^2} r \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha\cdot r}{r^2} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

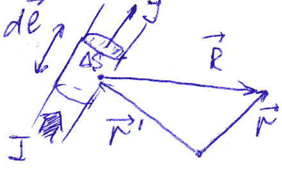
Линии индукции магнитного поля:



Магнитное поле в катушке

(22) Векторный потенциал магнитного поля тока. Вихревой характер магнитного поля. Уравнение для векторного потенциала. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме.

Закон Био-Савара-Лапласа для эл. объемного тока



$\vec R = \vec r - \vec r'$, $I d\vec l = \vec j \underbrace{\Delta S\, dl}_{\Delta V} = \vec j \Delta V$ $\quad d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec l, \vec R]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec j(\vec r'), \vec R]}{R^3}\Delta V$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec j(\vec r'), \vec r - \vec r']}{|\vec r - \vec r'|^3} dV'$$

Векторный потенциал магнитного поля тока.

- $\nabla_{\vec r}\underbrace{\frac{1}{R}}_{|\vec r-\vec r'|} = -\frac{\vec R}{|R|^3}$ $\quad\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{((x-x')^2+\ldots)^{3/2}}\right)$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V [\vec J(\vec r'), \frac{\vec R}{|R|^3}]dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V [\nabla_{\vec r}\frac{1}{R}, \vec J(\vec r')]dV' \qquad ([a;b] = [-b;a])$$

$$[\nabla_{\vec r}\frac{1}{R}, \vec J(\vec r')] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{J_x}{R} & \frac{J_y}{R} & \frac{J_z}{R} \end{vmatrix} = [\nabla, \frac{\vec J}{R}] = \mathrm{rot}_{\vec r}\frac{\vec J}{R}$$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}_{\vec r}\frac{\vec J}{R}dV' = \mathrm{rot}_{\vec r}\underbrace{\int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J}{R}dV'}_{\vec A(r)} = \mathrm{rot}\vec A$$

$\vec A(r) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J}{R}dV'$ - (векторный потенциал магнитного поля $\vec B = \mathrm{rot}\vec A$)

1) Представление $\vec B = \mathrm{rot}\vec A$ неоднозначно: $\vec A' = \vec A + \mathrm{grad}\varphi$, т.к. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0$.

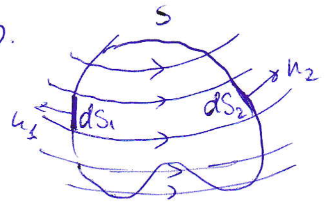
Вихревой характер магнитного поля.

$\mathrm{div}\vec B = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec A) \equiv 0$, т.к.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \equiv 0$$

, т.е магнитное поле вихревое.

По формуле Гаусса: $\int_{S_V} \vec B d\vec S = \int_V \mathrm{div}\vec B dV = 0$.



Уравнение для векторного потенциала.

$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$ $\Rightarrow$. Аналогия с электростатикой $\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV' \Rightarrow \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$.

$\Rightarrow \Delta\vec A = -\mu_0\vec J$

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

$$\mathrm{rot}\vec B = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec A = \mathrm{grad}\underbrace{\mathrm{div}\vec A}_{0} - \underbrace{\Delta\vec A}_{-\mu_0\vec J} = \mu_0\vec J$$

Из-за неоднозначности векторного потенциала на потенциал налагают определенное условие (обычно $\mathrm{div}\vec A = 0$)

$\mathrm{rot}\vec B = \mu_0\vec J$ $\{$ дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

По формуле Стокса:

$$\oint_L \vec B d\vec l = \int_{S_L} \mathrm{rot}\vec B d\vec S = \mu_0 \int_{S_L} \vec j d\vec S = \mu_0 \sum_{S_L} I.$$

$\oint_L \vec B d\vec l = \mu_0 \int_{S_L} \vec j d\vec S$ — интегральная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

Циркуляция вектора $\vec B$ вдоль замкнутого контура L равна векторной сумме токов ~~в том~~ пронизывающих этот контур на μ_0.

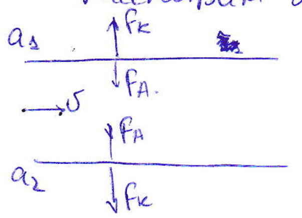
$B(R)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (у тороидальной катушки $B 2\pi r = \mu_0 N I \Rightarrow B = \mu_0 n I$)

Система полевых уравнений магнитостатики в вакууме.

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec B = 0 \\ \mathrm{rot}\vec B = \mu_0 \vec j \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec B d\vec S = 0, \\ \oint_L \vec B d\vec l = \mu_0 \int_{S_L} \vec j d\vec S \end{cases}$$

23 Релятивистская природа магнитных взаимодействий. Сила Лоренца. Магн. поле движущегося заряда. Эффект Холла.

Рассмотрим 2 проводника, движущихся со скоростью υ



$E_2 = \frac{1\cdot a_2}{2\pi R L \cdot \varepsilon_0}$ (из теоремы Остроградского-Гаусса)

a_1 и a_2 — линейные плотности зарядов. f_k — линейная сила $[\frac{F_k}{L}]$

$f_k = a_1 \cdot E_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot a_1 a_2$

а ток, текущий по проводу ~~линейный ток~~ $I_1 = a_1 \upsilon$ и $I_2 = a_2 \upsilon$; $B_1 = \frac{1}{2\pi R}\mu_0 I_1$; $B_2 = \frac{1}{2\pi R}\mu_0 I_2$

$f_A = I_1 \cdot B_2 = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a_1 a_2 \upsilon^2}{R}$.

$f = f_k - f_A = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a_1 a_2}{R} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a_1 a_2}{R}\upsilon^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a_1 a_2}{R}(1-\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{1/c^2}\upsilon^2) < f_k$

Из-за релятивистских эффектов $f_k' > f_k$,

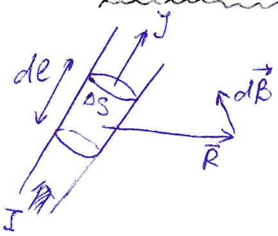
т.к. длина провода „уменьшится" => плотность зарядов возрастет.

т.к. $q = const$ и $l = l_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$, то $a = \frac{a_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a_1 a_2}{R}\frac{(1-\varepsilon_0\mu_0\upsilon^2)}{1-\upsilon^2/c^2}$ => если $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, то $f = f_k' - f_A' = f_k$

$f_A^* = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{a_1 a_2}{R}\upsilon^2 = \frac{1\cdot a_1 a_2}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot\varepsilon_0\mu_0\upsilon^2 = f_k\cdot\frac{\upsilon^2}{c^2}$ => сила Ампера — релятивистская поправка $\sim \upsilon^2/c^2$ в стат. силе Кулона.

Магнитное поле движущегося заряда.

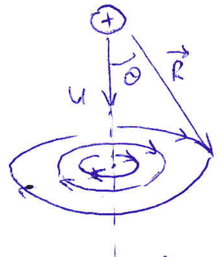


плотность тока ~~поток~~

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{J},\vec{R}]}{R^3}dV, \quad а \quad \vec{J} = qn\vec{u}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{u},\vec{R}]}{R^3}\,q\underbrace{n\,dV}_{N}$$

по определению B ($\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt}$, а $q/dt = I$)



$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\cdot\frac{[\vec{u},\vec{R}]}{R^3}; \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qu\sin\theta}{R^2}$$

Движущийся заряд создает элемент тока $q\vec{u} = q\frac{d\vec{l}}{dt} = Id\vec{l}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\cdot\frac{[\vec{u},\vec{R}]}{R^3} = \underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{1/c^2}[\vec{u},\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\vec{R}}{R^3}}_{\vec{E}}] = \frac{1}{c^2}[\vec{u},\vec{E}]$$

Силы, действующие на токи в магнитном поле. Сила Лоренца.

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l},\vec{B}] = [\vec{J},\vec{B}]dV; \quad F_A = I\int[d\vec{l},\vec{B}] = \int[\vec{J},\vec{B}]dV$$

Так как ~~сила тока~~ элемент тока движущегося заряда $Id\vec{l} = q\vec{u}$, то сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, равна:

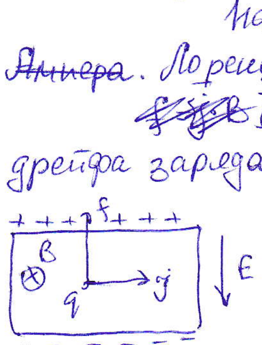
$\vec{F} = q[\vec{u},\vec{B}]$

Если имеется и электрическое поле, то и $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u},\vec{B}]$ - Сила Лоренца.

Эффект Холла.

На заряды, движением которых обуславливается ток, действует сила ~~Ампера~~. Лоренца.

$f = [\vec{J}\cdot\vec{B}] = nq[\vec{v}\cdot\vec{B}]$, где n - концентрация, q - заряд, $\vec{v}$ - скорость дрейфа заряда.



Под действием f заряды смещаются в направлении этой силы. В результате на соответствующей части поверхности проводника образуется избыток зарядов того же знака, что и зарядов осуществ. ток. Рисунки соответствуют: верхний $q>0$, нижний $q<0$.

Появляется разность потенциалов между противоположными сторонами проводника. => появляется E, которое нейтрализует эту силу Лоренца. Возникновение разности потенциалов в проводнике с током в магнитном поле называется эффектом Холла.

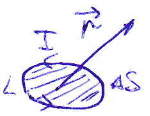
$E_{эф} = v\cdot B$ - поле Холла.

Разность потенциалов: $U = \int_0^d vB\,dx = vBd$, где d - толщина проводника. Т.к. $J = nqv$, то $U = dJB/(nq) = RJBd$

где $R = 1/(nq)$ - постоянная Холла. => можно оценить концентрацию зарядов.

(24) Элементарный ток и его магнитный момент. Поле элементарного тока. Элементарный ток в магнитном поле.

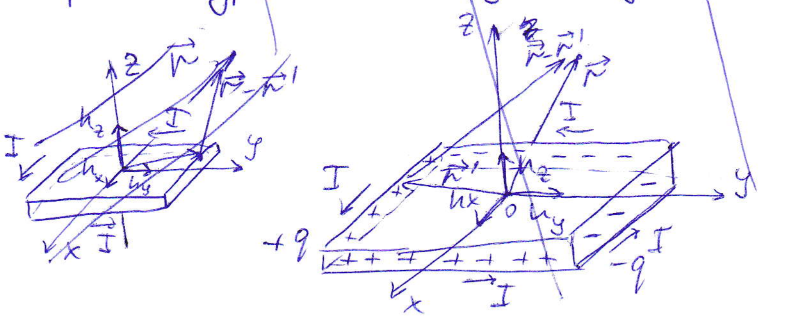
Элементарный ток – это линейный замкнутый ток, обтекающий поверхность с бесконечно малыми линейными размерами.



Учитывая, что для линейного тока $\vec{j}dV = Id\vec{l}$

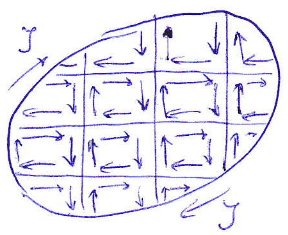
$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec l}{|\vec r-\vec r'|}\ ;\quad \vec A(\vec r)_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Idl'_x}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{c^2}\int_L \frac{Idl'_x}{|\vec r-\vec r'|},\ \text{где } c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

Выберем контур элементарного тока в виде прямоугольника со сторонами a и b:



$p_m = IS$ – магнитный момент элементарного тока.

Элементарный ток произвольной формы можно свести к совокупности прямоугольных элементарных токов.



$$\vec p_m = \sum_n \vec p_n = \sum_n J\vec S_n = J\sum_n \vec S_n = J\vec S$$

Векторный потенциал через магнитный момент: $\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec p_m,\vec r]}{r^3}$

Поле элементарного тока:

$$\vec B = rot\vec A = [\nabla,\vec A] = [\underbrace{\nabla}_{a}, \frac{\mu_0}{4\pi}[\underbrace{\vec p_m}_{b}, \underbrace{\frac{\vec r}{r^3}}_{c}]] = \qquad [a[bc]] = (b(ac) - c(a,b))$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec p_m\left(\nabla\frac{\vec r}{r^3}\right) - (\vec p_m\nabla)\frac{\vec r}{r^3}\right);$$

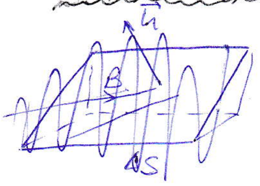
?

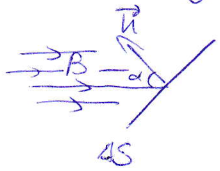
$$\left(\nabla\frac{\vec r}{r^3}\right) = \frac{(\nabla\vec r)}{r^3} + \left(\vec r,\nabla\frac{1}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{\vec r\cdot 3\vec r}{r^5} = 0\ ;\quad (\vec p_m\nabla)\frac{\vec r}{r^3} = \frac{(\vec p_m\nabla)\vec r}{r^3} + \vec r(\vec p_m\nabla)\frac{1}{r^3} =$$

$$= \frac{\vec p_m}{r^3} - \vec r\left(\vec p_m\frac{3\vec r}{r^5}\right);\qquad B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec p_m\cdot\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p_m}{r^3}\right)$$

(25) Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Потенциальная функция тока. Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток).



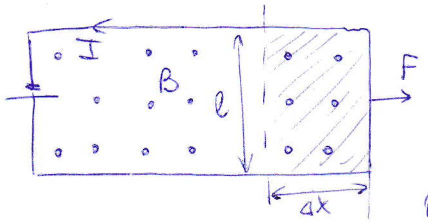


$$\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha = \vec{B}\Delta\vec{S} = B_n\Delta\vec{S}$$
$$\Phi = \iint_S B\,dS$$

можно выразить поток вектора магнитной индукции через векторный потенциал:

$$\Phi = \oint_L A\,dl$$

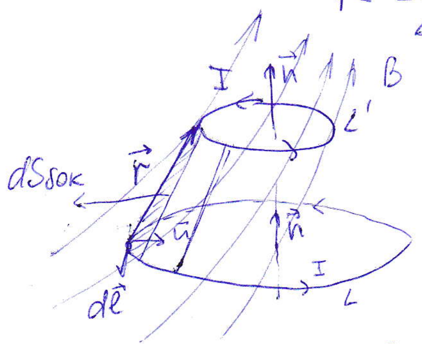
Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.



$$F = IlB \quad , \text{а } \Delta A = F\Delta x = IBl\Delta x = I\underbrace{B\Delta S}_{BS_2 - BS_1} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

Определим потенциальную функцию тока $U = -I\Phi$, тогда $\Delta A = F\Delta x = -\Delta U$, из этого соотношения:

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$



$$\cancel{dA = (\vec{q}\,d\vec{F}) = (\vec{q}\cdot[Id\vec{l},\vec{B}]) = I(\vec{B}\cdot[\vec{q},d\vec{l}])}$$

$$dA = (\vec{r}\,d\vec{F}) = (\vec{r}\cdot[Id\vec{l},\vec{B}]) = I(\vec{B}\cdot[\vec{r}\,d\vec{l}]) = I(\vec{B}\,d\vec{S}_{бок}).$$

$$\Delta A = I\oint_{S_{бок}}(\vec{B}\,d\vec{S}) = I\Delta\Phi_{бок}$$

$$\Phi_L = \int_{S_L}\vec{B}\,d\vec{S} \quad ; \Phi_{L'} = \int_{S'_L}\vec{B}\,d\vec{S}$$

$$\Phi_L + \Delta\Phi_{бок} = \Phi_{L'} \Rightarrow \Phi_{L'} - \Phi_L = \Delta\Phi_{бок} = \Delta\Phi_L$$

Имеем $dA = Id\Phi_L = -dU_{I=const}$, где $U = -I\Phi_L$

Используя потенциальную или силовую функцию, можно рассчитать обобщенные силы, действующие на контур с током.

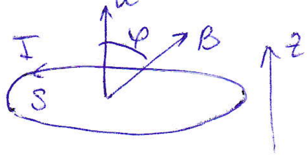
$$dA = \sum_{i=1}^{N} F_i\,d\xi_i = -dU(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\bigg|_{I=const} d\xi.$$

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\bigg|_{I=const.}$$

Пример:

$$dA = M_z d\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi; \quad U = -I\Phi = -IBS\cos\varphi.$$

$\vec{n}$ - не по оси z. (просто абстрактный вектор)



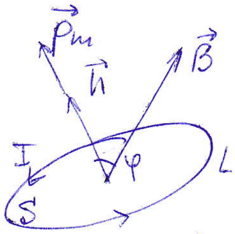
$$M_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\underbrace{IS}_{p_m} \cdot B\sin\varphi \Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m; \vec{B}]$$

(просто посмотреть)

Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Для элементарного тока, когда $I = const$ и $S = const$, потенциальная функция будет равна энергии взаимодействия элементарного тока или магнитного момента с внешним полем:

$$U = W = -(\vec{p}_m \vec{B}); \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \vec{B})$$

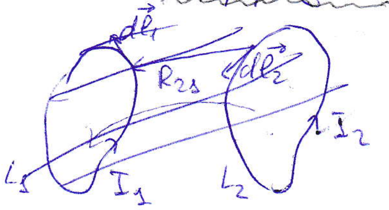


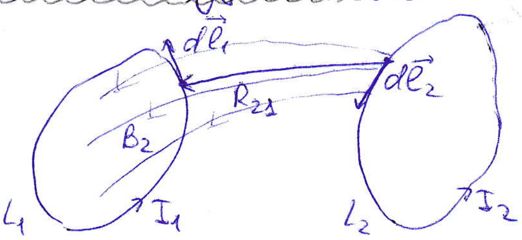
$$[\underbrace{\vec{p}_m}_{a} [\underbrace{\nabla}_{b}, \underbrace{\vec{B}}_{c}]] = \nabla(\vec{p}_m \vec{B}) - \vec{B}(\vec{p}_m \nabla)$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m, \vec{B}) = (p_m \nabla)\vec{B} + [\vec{p}_m, \underbrace{[\nabla, \vec{B}]}_{rot\, \vec{B}}]$$

Если $rot\, \vec{B} = 0$, то $\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla)\vec{B}$

Коэффициент взаимной индукции двух контуров





$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \underbrace{\vec{B}_2}_{rot A_2} d\vec{S}_1 = \oint_{L_1} \vec{A}_2 d\vec{l} =$$

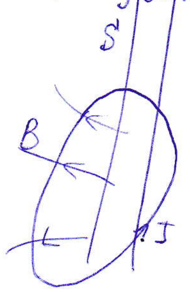
$$= \oint_{L_1} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2}{R_{21}} \right) d\vec{l}_1 = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{R_{21}} \right)}_{L_{12}} I_2 = L_{12} I_2$$

Аналогично получим: $\Phi_{21} = L_{21} I_1$, где $L_{21} = L_{12}$

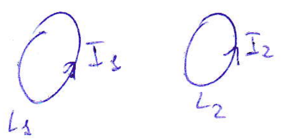
Индуктивность (коэффициент самоиндукции) - коэф. пропорциональности между эл. током, текущем в каком-либо замкнутом контуре, и магнитным потоком, создаваемым этим током через поверхность, границей которого является этот контур.

$$\Phi = LI.$$

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B}\,d\vec{S} = LI.$$



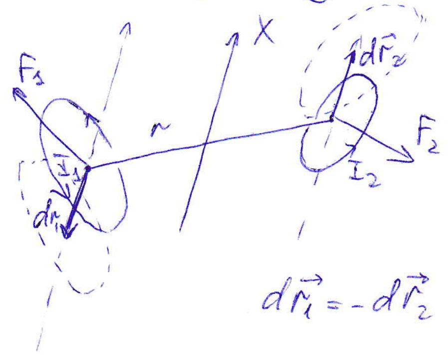
Коэффициенты индуктивности контуров с токами



$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2\,;\quad \Phi_2 = L_{22}I_2 + L_{21}I_1.$$

$\Phi_{ij} = \sum\limits_j L_{ij}I_{ij}$; $L_{ij} = L_{ji}$ - коэффициенты взаимоиндукции.

Взаимодействие двух контуров с током!



$$F_{2x} = -\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = I_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}$$

$$F_{1x} = -\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = I_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}$$

$d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2$, $\dfrac{\partial L_{12}}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial L_{21}}{\partial x_2}$ должно быть одинаковое изменение L_{12} и L_{21}, чтобы $L_{21} = L_{12}$.

$F_{1x} = -F_{2x} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

~~Рассмотрим 2 соленоида 2 провода, намотанных на один цилиндр.~~

поле снаружи меньшего соленоида не учитываем.

$$\Phi_2 = B_2 N_2 \pi r_2^2 + B_1 N_2 \pi r_1^2 = \underbrace{\frac{\mu_0 N_2}{l}}_{B_2 \text{ (из теор. о циркуляции)}} I_2 N_2 \pi r_2^2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1}{l}}_{B_1} I_1 N_1 \pi r_1^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_2 \pi r_2^2}{l}}_{L_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{l}}_{L_{21}} I_1$$

Аналогично: $\Phi_1 = B_1 N_1 \pi r_1^2 + B_2 N_1 \pi r_1^2 = \dfrac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_1 \pi r_1^2 + \dfrac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_1^2 = \underbrace{\dfrac{\mu_0 N_1^2 \pi r_1^2}{l}}_{L_{11}} I_1 +$

$$+ \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{12}} I_2 \Rightarrow L_{12} = L_{21}.$$

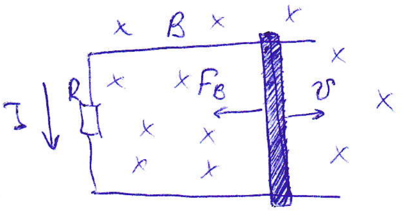
26 Электромагнитная индукция. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме. Правило Ленца. Индукционные методы измерения магнитных полей.

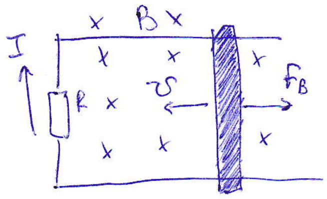
При движении проводника в магнитном поле его свободные электроны под действием силы Лоренца приводятся в движение относительно проводника, т.е. в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется индукцией токов в движущихся проводниках.

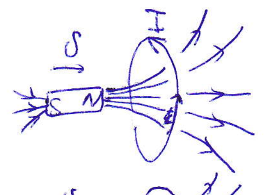
<u>Явление электромагнитной индукции</u> – возникновение электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции в этом контуре.

<u>Правило Ленца.</u>

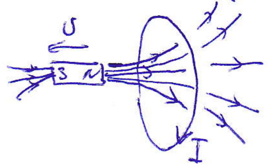
Индукционный ток всегда имеет такое направление, что ~~он ослабляет действие~~ создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.







ток I компенсирует увеличение потока через кольцо от магнита



ток I компенсирует уменьшение потока через кольцо от магнита

<u>Закон электро-магн. индукции Фарадея и его формулировка в инт. форме</u>

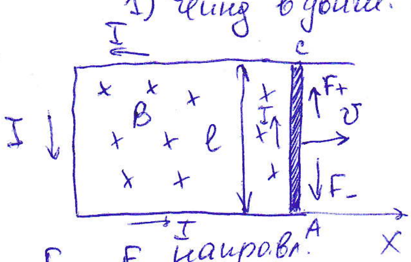
$\mathcal{E}_i = f\dfrac{d\Phi}{dt}$, где f – множитель пропорциональности, зависящий от выбора единиц. В системе СИ $f = -1$.

$\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, где знак минус согласует знаки ЭДС индукции и изменения потока магнитной индукции.

Выбор положительной нормали к поверхности контура определяет положительное направление проекции вектора индукции магнитного поля (положительное значение потока магнитного поля) и тока (или ЭДС) индукции. В приведенной записи закон э.м. индукции соответствует правилу Ленца.

<u>Вывод формулы для $\mathcal{E}_{инд}$:</u>

1) $\mathcal{E}_{инд}$ в движ. проводниках.



F_+ и F_- направл. силы для зарядов положит. и отриц.

Сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$ – сторонняя сила, создающая ЭДС.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = [\vec{\upsilon} \cdot \vec{B}]$$

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon$$

$$\mathcal{E}_{инд} = \int_A^C \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^C ([\vec{\upsilon}, \vec{B}]\,d\vec{l}) = \upsilon B l = \frac{d(xBl)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(вектора $\vec{B}$ $\vec{S}$ противонаправ.

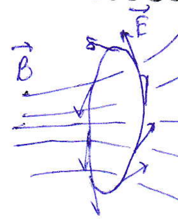
$\Phi = \vec{B}\vec{S} = -BS$

2) Вывод $\mathcal{E}_{инд}$ из З.С.Э. (Метод Гельмгольца)

1 виток движется в стационарном магнитном поле. Тогда амперовы силы совершают работу: $\Delta A = I\Delta\Phi$, и в контуре выделено джоулево тепло: $\Delta Q = I^2 R\Delta t$.

Источником этой работы и тепловой энергии является ЭДС сторонних сил в контуре: $\mathcal{E} I\Delta t = \Delta Q + \Delta A = I^2R\Delta t + I\Delta\Phi \Rightarrow I = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E} - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) \Rightarrow$ в контуре возникает ЭДС индукции. $\mathcal{E}^{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

Закон Фарадея в диф. форме:



Максвелловская трактовка электромагнитной индукции:
$\mathcal{E}_{инд} = \oint_L \vec{E}d\vec{l}$;

$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$ $\qquad \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$

По формуле Стокса: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} \Rightarrow \int_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ - трактовка закона Фарадея в диф. форме.

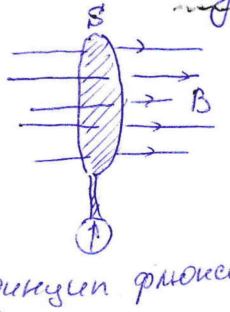
Непотенциальность индукционного эл. поля:
Т.к. $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$, то $\mathrm{rot}\vec{E} \neq 0$.
$\Rightarrow \vec{E} \neq -\mathrm{grad}\varphi$ и $\oint_L \vec{E}d\vec{l} \neq 0$.

В нестационарном случае магнитное поле остается вихревым, т.е. $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. $\Rightarrow \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Тогда по закону электромагнитной индукции:

$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = -\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$, т.е.

$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Индукционные методы измерения магнитных полей.



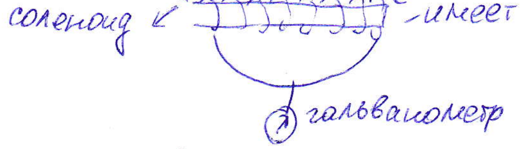
$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$; $q = \int I dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi}^{0} d\Phi = \frac{\Phi}{R}$

На этом соотношении основано определение ед. магн. потока в сист. СИ: Вебер - магнитный поток, при убывании которого до 0 в сцепл. с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит кол-во электричества 1 Кл.

Принцип флюксметра

$\Rightarrow$ Тесла - магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м³ равен 1 Вб.

Пояс Роговского:



- имеет форму почти замкнутого круга.

$\Phi = \int_1^2 S n\vec{B}d\vec{l} = Sn\int_1^2 \vec{B}d\vec{l} \Rightarrow \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{R}{Sn}q = aq$

a - пост. гальванометра.

Токи Фуко (вихр. токи)