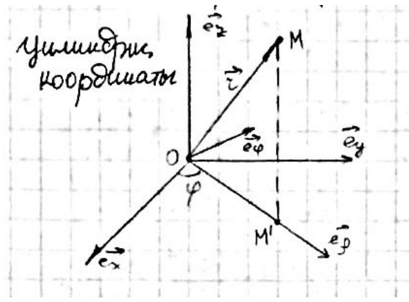
1) Цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$



$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z \qquad \rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\vec{r} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$$

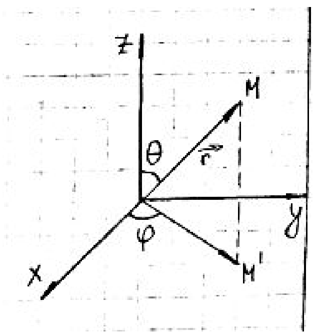
$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z}$$

$$\vec{\omega} = (\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2\rho)\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\rho^2)\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \vec{\dot{r}}\right] = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\rho^2$$

$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\varphi\vec{e_x} + \sin\varphi\vec{e_y} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\vec{e_x} + \cos\varphi\vec{e_y} \\ \vec{e_z} = \vec{e_z} \end{cases}$$

2) Сферические координаты. Орты (рисунок). Выражения для радиус-вектора, скорости точки. Связь сферических и декартовых координат.



$x = r * \sin(\theta) * \cos(\varphi)$

$y = r * \sin(\theta) * \sin(\varphi)$

$z = r * \cos(\theta)$

$0 \le r < \infty$

$0 \le \varphi < 2 * \pi$

$0 \le \theta < \pi$

$r = re_r$

$\dot{r} = \dot{r}e_r + \dot{\theta}re_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}e_\varphi$

Связь сферических и декартовых:

$e_r = e_x * \sin(\theta) * \cos(\varphi) + e_y * \sin(\theta) * \sin(\varphi) + e_z * \cos(\theta)$

$e_\theta = e_x * \sin(\theta) * \cos(\varphi) + e_y * \sin(\theta) * \sin(\varphi) - e_z * \sin(\theta)$

$e_\varphi = -e_x * \sin(\varphi) + e_y * \cos(\varphi)$

3) Уравнения Лагранжа II рода. Условия применимости. Голономные и идеальные связи.

Голономные связи – это связи вида $f(r_1, \ldots, r_n, t) = 0$, то есть связи, не зависящие от производных координат.

Идеальные связи – связи, не совершающие работы, т.е. для которых для бесконечно малых виртуальных перемещений δq_i: $\sum R_i \delta q_i = 0$.

Уравнения Лагранжа II рода: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d$

Уравнения -||- применимы тогда и только тогда, когда в системе действуют только идеальные голономные связи.

4) Уравнения Лагранжа второго рода. Учет диссипативных сил. Связь обобщенной диссипативной силой с реальной диссипативной силой в системе из N частиц.

Уравнения Лагранжа второго рода с учетом диссипативных сил

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d$$

$$\sum_\alpha \vec{F}_a^d \delta \vec{r}_\alpha = \sum_i Q_i^d \delta q_i$$

Обобщенная диссипативная сила связана с реальной $Q_i^D = \sum_{k=1}^{N} F_k^D \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$

5) Неоднозначность определения функции Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d \quad (1)$$

Пусть L - некоторый лагранжиан системы. По формуле (1) можно получить уравнения Лагранжа для этой системы (обозначим их (*)). Неоднозначность определения заключается в существовании такого лагранжиана $L' \neq L$, что полученные по формуле (1) уравнения Лагранжа совпадают со (*).

а. $L' = L + C$

б. Если $\vec{F}^d = 0$, то $L' = CL$

в. $L' = L + \frac{d}{dt}\Phi(q_i, t)$, где $\Phi(q_i, t)$ - произвольная дифференцируемая функция времени и обобщенных координат.

6) Обобщенный импульс (определение). Теоремы об изменении и сохранении обобщённого импульса.

$p_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ - обобщенный импульс, соответствующий координате q_j

$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d$ - теорема об изменении ОИ

=> если $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ и $Q_j^d = 0$, то $p_j = const$ - теорема о сохранении ОИ

7) Обобщенная энергия. Теоремы о сохранении и изменении.

$$E^{об} \equiv \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

Теорема об изменении обобщенной энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum Q_j^d \dot{q}_j$$

Из этого следует теорема о сохранении, т.е. $E^{об} = E_0 = const$, если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и диссипативные силы в системе не действуют.

8) Функция Лагранжа для частицы (релятивистской, нерелятивистской) с массой m под действием потенциальной силы в а) декартовых б) цилиндрических в) сферических координатах.

I. Нерелятивистская частица

а) декартовые координаты

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t)$$

б) цилиндрические координаты

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z, t)$$

в) сферические координаты

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\mathrm{r}}^2 + (\mathrm{r}\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2\right) - U(r, \theta, \varphi, t)$$

II. Релятивистская частица

а) декартовые координаты

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} - U(x, y, z, t)$$

б) цилиндрические координаты

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} - U(\rho, \varphi, z, t)$$

в) сферические координаты

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{(\dot r^2+(r\dot\theta)^2+(r\dot\varphi\sin\theta)^2)}{c^2}}-U(r,\varphi,\theta,t)$$

F=-gradU

$$gradU=\vec e_x\frac{\partial U}{\partial x}+\vec e_y\frac{\partial U}{\partial y}+\vec e_z\frac{\partial U}{\partial z}$$ д е к а р т о в ы е

$$gradU=\vec e_\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}+\vec e_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}+\vec e_z\frac{\partial U}{\partial z}$$ ц и л и н д р и ч е с к и е

$$gradU=\vec e_r\frac{\partial U}{\partial r}+\vec e_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\vec e_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$ с ф е р и ч е с к и е

$U=-\int(\vec F;d\vec r)$ о б р а т н а я с в я з ь

9) Период колебаний частицы с массой m при финитном движении в поле U(x)

$$T=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0-U(x)\right)}}$$

10) Функция Лагранжа для частицы (нерелятивистской, релятивистской) с массой m в однородном поле силы тяжести $g=-g*e_z$**.** Интегралы движения.

1) Нерелятивистский:

$L=\frac{m}{2}v^2-mgz$

$E_0^{\text{об}}=\frac{m}{2}\dot v^2+mgz$

2) Релятивистский:

$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-mgz$

$E_0^{\text{об}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+mgz$

11) Функция Лагранжа одномерного осциллятора с массой m и частотой ω. Закон движения с диссипативной силой и без.

а) $L=\frac{m\dot x^2}{2}-\frac{m\omega^2x^2}{2}$

$$x=x_0cos(\omega t+\varphi_0)\,,\ \text{где}\ x_0=\frac{\sqrt{\dot x^2(0)+\omega^2x^2(0)}}{\omega},\ tg\,\varphi_0=-\frac{1}{\omega}\frac{\dot x(0)}{x(0)}$$

б) $L = e^{\frac{\gamma t}{m}}[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}]$

$$e^{\frac{\gamma t}{m}}\left[m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega^2 x\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\omega^2 x=0$$

1 $\frac{\gamma^2}{4m^2}>\omega^2$ $\quad x=e^{\frac{-\gamma t}{2m}}\left(Ae^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2}-\omega^2}}+Be^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2}-\omega^2}}\right)$

2 $\frac{\gamma^2}{4m^2}<\omega^2$ $\quad x=e^{\frac{-\gamma t}{2m}}\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)$ $\quad \Omega=\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4m^2}}$

3 $\frac{\gamma^2}{4m^2}=\omega^2$ $\quad x=e^{\frac{-\gamma t}{2m}}\left(A+Bt\right)$

12) Функция Лагранжа для релятивистской и нерелятивистской частицы с массой m и зарядом e в неоднородных электромагнитных полях E и H. Векторный и скалярный потенциал. Обобщенная энергия. Обобщенный импульс.

а) нерелятивистская частица

$$L=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{e}{c}(\vec{A},\vec{\upsilon})-e\Phi(\vec{r},t)$$

Где $\Phi(\vec{r},t)$ - скалярный потенциал, $\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r},t)$

$\vec{A}(\vec{r},t)$ - векторный потенциал, $\vec{H}=rot\vec{A}$

$$\vec{P}_{об}=m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A}$$

В случае, если потенциалы не зависят явно от времени можно вычислить

обобщенную энергию, $E_{об}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{e}{c}\Phi(\vec{r})$

б) релятивистская частица

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-e\varphi+\frac{e}{c}(\vec{A},\vec{\upsilon})$$

$$\vec{P}_{об} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

В случае, если потенциалы не зависят явно от времени можно вычислить

обобщенную энергию $$E_{об} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\Phi(\vec{r})$$

13) Функция Лагранжа для частицы (нерелятивистской, релятивистской) с массой m в однородном поле $H = H_0 e_z$ и $E = E_0 e_z$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах**.** Интегралы движения.

- нерелятивистский случай

  а. декартовы координаты

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{e}{c}H_0\dot{x}y + eE_0 z$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - eE_0 z$$

$$p_{0y} = m\dot{y} + \frac{e}{c}H_0 x$$

  б. цилиндрические координаты

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0\rho^2\dot{\varphi} + eE_0 z$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - eE_0 z$$

$$p_{0\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0\rho^2$$

  в. сферические координаты

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0 r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} + eE_0 r\cos\theta$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - eE_0 r\cos\theta$$

$$p_{0\varphi} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0 r^2\sin^2\theta$$

- релятивистский случай

  а. декартовы координаты

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}H_0\dot{x}y + eE_0 z$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} - eE_0 z$$

$$p_{0y} = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}H_0 x$$

б. цилиндрические координаты

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}{c^2}} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0\rho^2\dot{\varphi} + eE_0 z$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} - eE_0 z$$

$$p_{0\varphi} = \frac{m\rho^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0\rho^2\dot{\varphi}$$

в. сферические координаты

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{c^2}} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0 r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} + eE_0 r\cos\theta$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{c^2}}} - eE_0 r\cos\theta$$

$$p_{0\varphi} = \frac{mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0 r^2\sin^2\theta$$

14) Плоское движение частицы в центральном поле. Интегралы движения. Эффективная энергия. Финитное и инфинитное движение. а) Закон движения. б) Траектория.

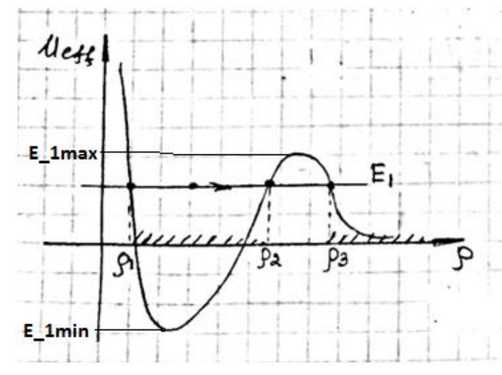
Центральное поле – поле, потенциал которого зависит только от расстояния до силового центра $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$

Выберем систему координат так, чтобы траектория лежала в одной плоскости.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} - U(r)$$

Закон сохранения импульса для циклической координаты φ:

$$mr^2\dot{\varphi} = const = L_0$$



Закон сохранения обобщенной энергии:

$$E_0 = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r),\ \text{где}\ U_{eff}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r)$$ – эффективный потенциал

Закон движения

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))} \Rightarrow t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}},$$

Области финитного и инфинитного движений определяются анализом *эффективного потенциала* (см. рисунок)

Траектория: $\varphi - \varphi_0 = \pm\int_{r_1}^{r_2} \frac{L_0/(mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}} dr$

Условие замкнутости траектории: $\Delta\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, k, n – целые числа

15) Лагранжианы релятивистской и нерелятивистской частицы для плоского движения в центральном поле. Интегралы движения.

Нерелятивистский случай:

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$p_{0\varphi} = L_0 = const = mr^2\dot{\varphi}$$

$$E_0 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r)$$

Релятивистский случай:

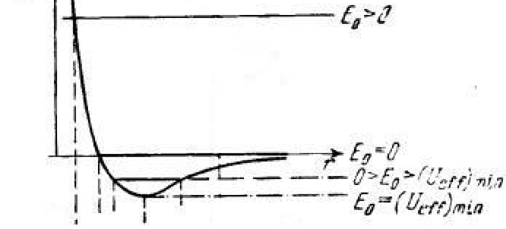
$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}} - U(r)$$

$$p_{0\varphi} = L_0 = const = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}}$$

$$E_0 = const = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} + U(r)$$

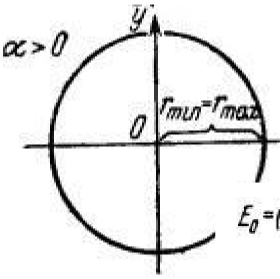
16) Задача Кеплера. Качественное исследование. Возможные траектории при движении в поле $U = \frac{-\alpha}{r}$. Параметры траектории. Законы Кеплера.

Кеплерова задача-это задача двух тел, взаимодействующих между собой посредством центральной силы, пропорциональной квадрату расстояния до силового центра

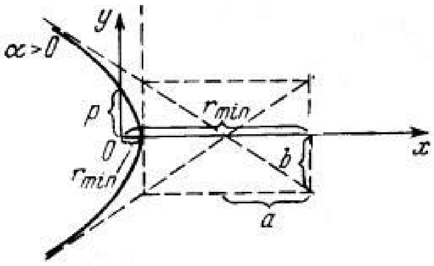


В зависимости от E_0 движение может быть инфинитным или финитным.

Возможные траектории:



$E_0 = (U_{eff})_{min}$ $(\varepsilon = 0)$



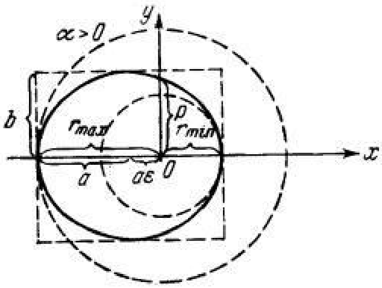
$E_0 > 0$ $(\varepsilon > 1)$

гипербола, если $E_0 > 0,$

парабола, если $E_0 = 0,$

эллипс, если $0 > E_0 > (U_{eff})_{min},$

окружность, если $E_0 = (U_{eff})_{min};$



$0 > E_0 > (U_{eff})_{min}$ $(\varepsilon < 1)$

Связь параметров эллипса с E_0 и L_0 :

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}$$

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{L_0}{\sqrt{2m|E_0|}}.$$

Законы Кеплера:

1) Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце
2) Секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна
3) Отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково

17) Дифференциальное сечение рассеяния на силовом центре. Определение. Формула для расчета

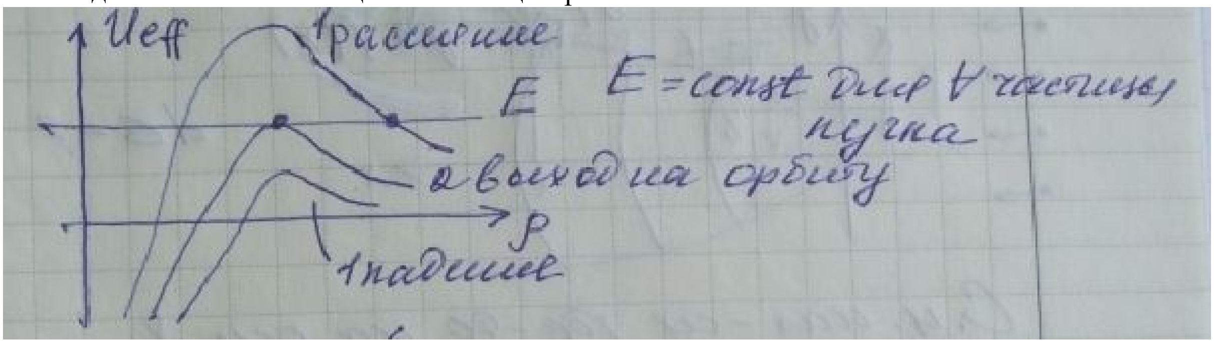
Дифференциальное сечение рассеяния – отношение числа рассеянных частиц dN в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$ к числу частиц, падающих на площадку единичной площади в единицу времени:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = [\text{см}^2]$$

Формула для расчета: $$d\sigma = 2\pi p dp = \frac{p}{\sin\theta}\left|\frac{dp}{d\theta}\right| d\Omega$$

18) Полное сечение «падения» частицы на силовой центр $U(r)$

Падение – захват частицы силовым центром.



p_0 – неизвестный радиус, такой, что частицы, летящие вдоль него, выходят на орбиту, находится из условия : $E = U_{eff\,max} = U_{eff}(p_0)$

При прицельном параметре $p < p_0$ происходит падение на силовой центр

$$\sigma_{пад} = \int d\sigma = \int_0^{p_0} 2\pi p dp = \pi p_0^2$$

19) Лагранжиан системы из масс m1 и m2 с потенциалом взаимодействия $U(r_{12})$. Интегралы движения.

В лабораторной системе отсчета:

$$L = \frac{m_1\dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{r}_2^2}{2} - U(|r_1 - r_2|)$$

Интегралы движения:

$$E_0 = \frac{m_1\dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{r}_2^2}{2} + U(|r_1 - r_2|)$$

В СЦИ:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{R}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{r}^2 - U(|r|)$$

Это можно разделить на 2 лагранжиана, для центра масс и для самих масс в СЦИ:

$$L_c = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{R}^2$$

$\tilde{L} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{r}^2 - U(|r|)$

$L = L_c + \tilde{L}$

Интегралы движения для ЦМ:

$E_0 = const = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{R}^2$

$p_{0i} = const = (m_1 + m_2)x_i^2$

Интегралы движения для масс:

$E_0 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{r}^2 + U(|r|)$

$p_{0\varphi} = L_0 = const = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\rho^2\dot{\varphi}$

Здесь **R=** $\dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$ – радиус-вектор центра масс, $r = r_1 - r_2$

20) Функция Лагранжа для нерелятивистской частицы с массой m и зарядом e в постоянных и однородных полях $E = E_0 e_z$ и $H = H_0 e_z$ при движении частицы по заданной поверхности (конусу, сфере, параболоиду) в а) цилиндрических б) сферических координатах. Записать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

а) конус

цилиндрические $z = \rho ctg\alpha$:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + (\rho\dot{\varphi})^2\right) + \frac{e}{2c}\rho^2 H_0\dot{\varphi} + e\rho ctg\alpha E_0$$

$$E_{об} = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + (\rho\dot{\varphi})^2\right) - e\rho ctg\alpha E_0 = const$$

$$p_{об} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}\rho^2 H_0 = const$$

сферические $\theta = \Theta$ =const:

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\sin^2\Theta\dot\varphi^2\right)+\frac{e}{2c}\rho^2\sin^2\Theta H_0\dot\varphi+e\rho\cos\Theta E_0$$

$$E_{об}=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\sin^2\Theta\dot\varphi^2\right)-e\rho\cos\Theta E_0=const$$

$$p_{об}=\dot\varphi mr^2\sin^2\theta+\frac{e}{2c}r^2H_0\sin^2\theta=const$$

б) сфера

цилиндрические $\rho^2+z^2=R^2$:

$$L=\frac{m}{2}\left(\frac{\dot\rho^2R^2}{R^2-\rho^2}+\rho^2\dot\varphi^2\right)+\frac{e}{2c}\rho^2H_0\dot\varphi+\sqrt{R^2-\rho^2}E_0e$$

$$E_{об}=\frac{m}{2}\left(\frac{\dot\rho^2R^2}{R^2-\rho^2}+\rho^2\dot\varphi^2\right)-\sqrt{R^2-\rho^2}E_0e=const$$

$$p_{об}=m\rho^2\dot\varphi+\frac{e}{2c}\rho^2H_0=const$$

Сферические $r=R$:

$$L=\frac{m}{2}\mathrm{R}^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{e}{2c}R^2\dot\varphi H_0\sin^2\theta+RE_0\,\mathrm{e}\cos\theta$$

$$E_{об}=\frac{m}{2}\mathrm{R}^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)-RE_0\,\mathrm{e}\cos\theta=const$$

$$p_{об}=mR^2\dot\varphi\sin^2\theta+\frac{e}{2c}R^2H_0\sin^2\theta=const$$