

студенты-
физики

Оптика

Ответы к экзамену

Юлия

Лектор Салецкий А.М.,
Семинары Митина И.В.

Июнь, 2014

Оптика

1. Электромагнитная теория света. Уравнения Максвелла и материальное уравнение. Волновое уравнение. Ориентации и взаимосвязь полей векторов в плоской бегущей гармонической волне

Пусть в однородной изотропной среде отсутствуют заряды и токи: $\rho = 0, \vec{j} = 0$

Тогда уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= - \frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{rot} H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \operatorname{div} D &= \rho \\ \operatorname{div} B &= 0 \end{aligned}$$

изначально \rightarrow

1) Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \oint E d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int B ds - \text{Циркуляция}$$

E по замкнутой контуре равна с противоположным знаком скорости изменения потока B через поверхность Σ , опирающуюся на этот контур

2) теорема о циркуляции вектора H

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \oint H d\vec{l} = \int (j + j_{em}) ds - \text{Циркуляция}$$

вектора H на замкнутой контуре Γ равна сумме токов проводимости и смещения через поверхность Σ , опирающуюся на этот контур.

3) теорема Гаусса для вектора D :

$$\operatorname{div} D = \rho \Rightarrow \oint D ds = \int \rho dV - \text{Поток вектора}$$

D через замкнутую поверхность Σ равен заряду в объеме V , отр. поверхностью Σ .

4) теорема Гаусса для вектора B :

$$\operatorname{div} B = 0 \Rightarrow \oint B ds = 0 - \text{отражает факт отсутствия магнитных зарядов}$$

Материальное уравнение: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Среда изотропная, если $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ $\vec{B} = \mu_0 (H + J)$
 Отражают связь между характеристиками
 электромагнитного поля в среде и откликом
 среды на воздействие поля.

Пусть среда электрически нейтральная.

$\rho = 0$ и $j = 0$. Уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

1: $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0 - \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = +\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2: $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial^2 (\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

3: $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}, \text{ где } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

- скорости
распространения
волны.

Аналогично: $\Delta \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

Ищем волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Решением уравнения $\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ будет функция
 с аргументом $t \pm \frac{z}{v}$. $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(t \pm \frac{z}{v})$

Одно из решений - плоская монохроматическая
 бегущая электромагнитная волна:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

\vec{k} - волновой вектор

фаза волны: $\varphi = k\vec{r} - \omega t + \varphi$. Она определена
 в пространстве плоскостью, перп. \vec{k} поверхностью

постоянной фазы - волновой фронт. Плоский волновой фронт = плоский волновой фронт.

Скорость распространения волнового фронта - фазовая скорость.

$$\frac{d\phi}{dt} = k \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow V_{\text{ф}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{\omega}{V_{\text{ф}}} = \frac{2\pi}{V_{\text{ф}} T} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} n - \text{дисперсионное уравнение}$$

Используем комплексную формулу:

$$E(z, t) = E_{00} \cdot \cos(kz - \omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (E_{00} e^{i(kz - \omega t + \varphi)} + E_{00} e^{-i(kz - \omega t + \varphi)}) = \frac{1}{2} E_0 e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\nabla \bar{E} = i k \bar{E}, \quad \nabla \cdot \bar{E} = i k \bar{E}, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -i \omega \bar{E}$$

Уравнения Максвелла принимают вид:

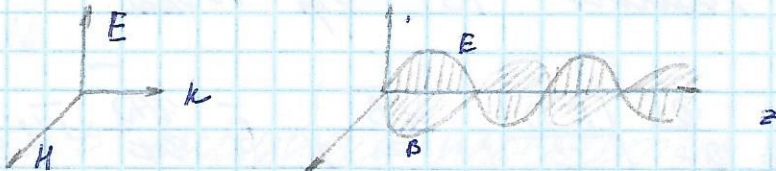
$$\nabla \cdot \bar{E} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0, \quad \nabla \times \bar{E} = -\omega \bar{B}, \quad V_{\text{ф}}^2 \cdot \nabla \times \bar{B} = -\omega \bar{E}$$

Отсюда следует поперечность плоских электромагнитных волн, то есть $\bar{E} \perp \bar{B} \perp \vec{k}$ - правило правой руки

Связь между амплитудами волн

$$\nabla \times \bar{E} = -\omega \bar{B} \Rightarrow \bar{E} \cdot \bar{B} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = \mu_0 H$$

В плоской волне \bar{E} и \bar{B} колеблются в одинаковых фазах.



Величина $A_0 = \text{const}$, то волна равномерная. Электромагнитная теория света

Исходя из принципов корпускулярно-волнового дуализма свет имеет волновые свойства - интерференция / дифракция...

2. Поток и плотность потока энергии электромагн. волны. Вектор Умова-Пойнтинга. Интенсивность. Объемная плотность импульса и давление электромагн. волны

Плотность энергии электрического $W_{эл} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

и магнитного $W_{магн} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2}$ Поураем

$W_{эл} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 v^2 B^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} B^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = W_{магн}$

то есть плотности энергии обеих составляющих одинаковы. суммарная плотность энергии:

$W_{э+м} = W_{эл} + W_{магн} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ Дж/м³

Электромагнитная волна, распространяясь в пространстве переносит энергию, характ. плотностью потока энергии - энергией, переносимой волной в единицу времени через площадь единичной площади. $[S] = \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$

В одну сторону $|S| = v_{ф} \cdot W_{э+м}$

$\frac{d}{dt} W_{э+м} = \text{div} \left(\frac{E \vec{D}}{2} + \frac{H \vec{B}}{2} \right) = \vec{E} \cdot \text{grad} + \vec{H} \cdot \text{grad}$

$(\vec{E} \text{ rot } \vec{H}) - (\vec{H} \text{ rot } \vec{E})$ т.к. $\text{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b}$

то $(\vec{E} \text{ rot } \vec{H}) - (\vec{H} \text{ rot } \vec{E}) = -\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}]$

$\frac{d}{dt} W_{э+м} = -\text{div} \vec{S}$, отсюда

$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$

то есть $\frac{d}{dt} \int W_{э+м} dV = - \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$, то есть

\vec{S} - плотность потока энергии волны

$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ - вектор Умова-Пойнтинга.

2. Плотность энергии и плотность потока усредняют по времени, т.к. ω велика.

$$\langle W_{\text{э-магн}} \rangle = \langle \epsilon \epsilon_0 E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2$$

Среднее значение плотности потока энергии - интенсивность:

$$\langle I \rangle = \langle |S| \rangle = V_{\text{ф}} \cdot \langle W_{\text{э-магн}} \rangle = \frac{1}{2} V_{\text{ф}} \epsilon \epsilon_0 E_0^2 \quad \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

В бегущей волне интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля.

Вектор плотности импульса \vec{G} (импульс единицы объема) сонаправлен с вектором скорости волны \vec{V} и связан с плотностью энергии $W_{\text{э-магн}}$:

$$|\vec{G}| = \frac{W_{\text{э-магн}}}{V}$$

через вектор Умова-Пойнтинга: $\vec{G} = \frac{\vec{S}}{V^2} \left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^4} \right)$



b_{\perp} - поперечное сечение.

За время dt площадке передается импульс

$$d\vec{P} = \vec{G} \cdot dV = \vec{G} \cdot b_{\perp} \cdot v dt$$

Из II закона Ньютона $\frac{dP}{dt} = F$

$$F = \vec{G} b_{\perp} \cdot v = W_{\text{э-магн}} \cdot b_{\perp}$$

$$P_{\vec{G}} = \frac{F}{b_{\perp}} = W_{\text{э-магн}} \quad \text{— для нормального падения}$$

При падении света под углом α к нормали к площадке:

$$P_{\text{гавн}} = \frac{F_n}{b} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{b \cos \alpha} = W_{\text{э-магн}} \cos^2 \alpha$$

Коэффициент отражения R . Моноотражающая поверхность создает дополнительную волну:

$$F_R = R \cdot W_{\text{пучка}} \cos \alpha$$

$$F_{\parallel} = (1+R) W_{\text{пучка}} \cos^2 \alpha$$

Минусу начальная составляющая силы светового давления: $F_{\parallel} = F_0 \sin \alpha = (1-R) W_{\text{пучка}} \cos \alpha \sin \alpha =$
 $= (1-R) \cdot W_{\text{пучка}} \cdot \cos \alpha \sin \alpha$

Свойство для давления через поле.

$$F = qE + q[V \times B] = F_{\text{эл}} + F_{\text{маг}} - \text{сила действует на элемент заряда в поле}$$

Можно: сила $F_{\text{эл}}$ заставляет заряд двигаться и приобретает скорость V , сонаправленную с E . В результате на д.в. заряд действует $F_{\text{маг}}$ $|E| = |B| \cdot c$, вектора составляют правую тройку векторов: $B = \frac{[n \times E]}{c}$, $n = \frac{V}{|V|}$

$$F_{\text{маг}} = q [V \times \frac{[n \times E]}{c}] = \frac{q}{c} [n(V \cdot E) - E(V \cdot n)] =$$

$$= \frac{n(V \cdot qE) - 0}{c} = \frac{n(V \cdot F_{\text{эл}})}{c}$$

$$(V \cdot F_{\text{эл}}) = P_{\text{поглощ}}.$$

При усреднении по всем зарядам:

$$F_{\text{маг}} = \frac{n \cdot P}{c}$$

$$\Delta W = W \cdot \Delta l = W \cdot c \cdot \Delta t$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = W \cdot c \Rightarrow$$

$$F = n W c$$

Сила направлена по напр. распространения волны и справедлива при любом положении поверхности, перекрывающего пучок. Если часть энергии отражается, то отраженный пучок дает дополнительную силу в направлении, противоположном дир. волне и пропорциональную R .

$$F = n \frac{W}{c}$$

3. Монохроматические и квазимонохроматические волны. Фурье-анализ и синтез волновых полей. Амплитуда и фаза спектра импульса. Связи между длительностью импульса и шириной спектра

Любую периодическую функцию $f(t)$ в периоде T можно представить суммой Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t]$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$
 $B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$

Непериодическую функцию представим в виде интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Фурье-образ $f(t)$ или спектр $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(-t)} dt = F^*(\omega)$$

Необходимость Фурье-преобразования в оптике. Фурье-преобразование от временной функции позволяет представить реальную волну как суперпозицию монохроматических волн (в един. ω)

Для \sin -и волны $f(t) = E(t) = E_0 \cos(\omega t)$

Энергия пропорциональна $f^2(t) = E^2(t)$

$$W_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot F^*(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ — теорема Парсеваля

Величина $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ - спектральная мощность интенсивности.

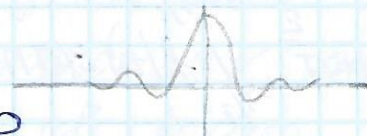
$$J = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

Вычисление дораза

1. Прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A_0 e^{i\omega t} dt = \frac{A_0 e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A_0 \cdot 2i \sin(\omega T/2)}{-i\omega} = \frac{A_0 \cdot 2 \sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = A_0 T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



Первый ноль - $\frac{\omega T}{2} = \pi$

$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$ или $\Delta \nu = \frac{1}{T}$ - ширина спектра - раст. до первого нуля.

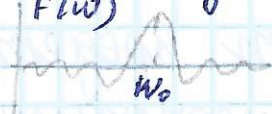
2. Пусть импульс модулирован высокочастотой

$$f_{\text{модул}} = f(t) \cdot \cos \omega_0 t = \frac{f(t) (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})}{2}$$

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} e^{-i\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

$$F = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2}$$

спектр сдвигается на ω_0



Упр:

3. Затухающий квазигармонический сигнал

$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

в отсутствие гармоник:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} A_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = A_0 \frac{e^{-(\delta + i\omega)t}}{-(\delta + i\omega)} \Big|_0^{\infty} = A_0 \frac{1}{\delta + i\omega} = A_0 \frac{\delta - i\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

спектральная функция $|F(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{\delta^2} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \omega^2} = \frac{A_0^2}{\delta^2} \frac{\omega}{\delta^2}$

$$= (A_0 T)^2 \cdot 2 \left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$

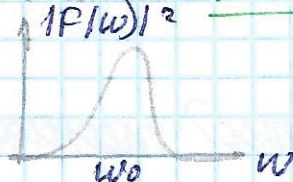
или наоборот. спектр сдвигается на ω_0 - ордин. $\Delta \omega = 2\delta$



4. Также $f(t) = A_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos \omega_0 t$

$$S(\omega) = \frac{F(\omega) \cdot F^*(\omega)}{2 \sqrt{2 \ln 2} / \tau} = |F(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{4} \pi \tau^2 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \tau^2 (\omega - \omega_0)^2\right]$$

$\Delta \omega =$



б. Бесконечной гармонической волны

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) \quad F(\omega) = \pi A_0 \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

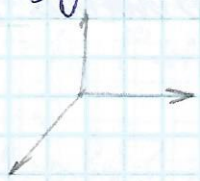
$$S = \frac{f}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \quad \text{— возм. в нуле.}$$

в. $f(t - \tau) = F_+(\omega) = F(\omega) e^{-i\omega \tau}$

спектральная плотность N углов возрастает в N раз

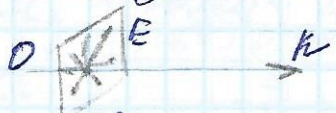
4. Ориентация полей векторов в плоской волне.
 Параметризация света. Классификация состояний
 параметризации.

Из электромагнитной теории света следует, что световые волны поперечны. Это значит, что в направлении распространения в вакууме или изотропной среде отсутствуют волны в любой момент времени в любой точке. Вектора E, H, k образуют правую тройку векторов



$$\begin{aligned} (\vec{k} \cdot \vec{E}) &= 0 & [\vec{k} \times \vec{E}] &= \omega \vec{B} \\ (\vec{k} \cdot \vec{B}) &= 0 & v_{\text{ф}}^2 [\vec{k} \times \vec{B}] &= -\omega \vec{E} \end{aligned}$$

Если в некоторой точке задано направление распространения, то в плоскости ортогональной к нему могут существовать все возможные напр. комбинации векторов E и H



Если направление E хаотически изменяется со временем (ω величина), то свет называется естественным.

$$P = \frac{I_n}{I_{\text{ест}} + I_n}$$

Пусть луч естественного света падает из вакуума на плоскую границу раздела с диэлектриком так, что $\theta = \theta_B$, то в отраженном свете будет присутствовать только одно направление комбинации E : перпенд. к плоскости падения. (θ - угол Брюстера)

Если, в какой-то точке которой конец вектора E движется вдоль прямой линии, перпендикулярно к линейно поляризованно

плоскость, образованная векторами E и k - плоскость поляризации.

Примеры для получения λ -поляризатора
(двойное лучепреломление, дихроизм, отражение и рассеяние)

Пусть лучи естественного света интенсивностью I_0 проходят через два поляризатора P и A , плоскости поляризации которых образуют угол α .

После прохождения поляризатора: $I_1 = \langle E_0^2 \cos^2 \alpha \rangle = \sim I_0 \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{I_0}{2}$ и линейная поляризация

плоскость поляризации анализатора повернута на угол α , поэтому через него пройдет $E_2 = E_1 \cdot \cos \alpha$ компонента

$I \propto E^2 \Rightarrow I_2 = \boxed{I_1 \cdot \cos^2 \alpha}$ - Закон Малюса



Если для световой волны задано k , то ее можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн с перпендикулярными направлениями поляризации.

Если амплитуды постоянны, а частоты одинаковы, то в зависимости от разности фаз будут наблюдаться различные состояния поляризации.

Пусть распространяются две волны: $E_x = a \sin(\omega t - kz + \varphi_1)$

$$E_y = b \sin(\omega t - kz + \varphi_2)$$

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - \frac{2E_x E_y}{ab} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi$$

1. $\Delta \varphi = 0$.

$\frac{E_x}{a} = \frac{E_y}{b}$, результирующая волна Π с амплитудой $A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Плоскость поляризации образует угол $\alpha = \arctg(b/a)$ с осью x .

2. $\Delta \varphi = \pm \pi$

$\frac{E_x}{a} = -\frac{E_y}{b}$, Π с $A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = -\arctg(b/a)$ с осью x .

3. $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$ (x опережает на $\frac{\pi}{2}$ y)

$(\frac{E_x}{a})^2 + (\frac{E_y}{b})^2 = 1$. При этом вектор E в любой

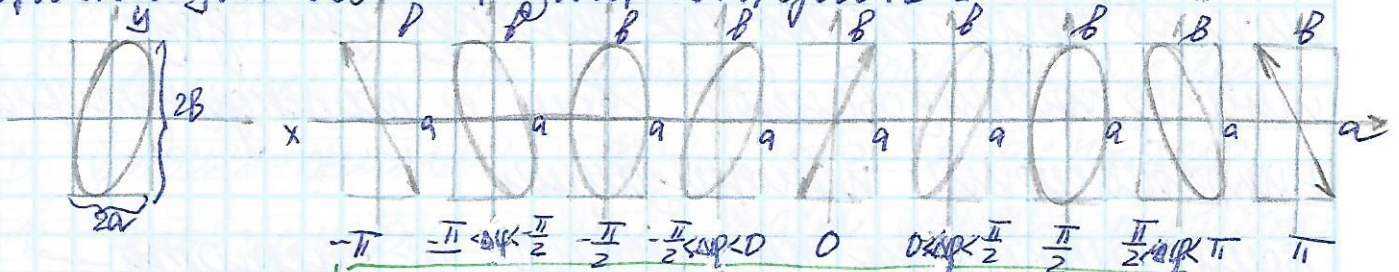
момент будет вращаться в плоскости $z = const$ против часовой стрелки, а кончик вектора E описывает эллипс с полуосями a и b - левая эллиптически поляризованная волна.

Если $a = b$ - циркулярно поляризованная.

4. $\Delta \varphi = -\frac{\pi}{2}$ - правая эллиптически/циркулярно поляризованная волна.

5. $\Delta \varphi$ произвольно. E вращается в плоскости $z = const$, кончик описывает эллипс, вписанный в прямоугольник.

Ориентация осей и размер определяются $\frac{b}{a}$ и $\Delta \varphi$



$0 < \Delta \varphi < \pi$ - левая поляризация
 $-\pi < \Delta \varphi < 0$ - правая поляризация

Интенсивность волн не зависит от $\Delta \varphi$ и пропорциональна сумме квадратов амплитуд

$I \propto a^2 + b^2$ т.к. волны не интерферируют.

5. Модулированное поле. световые пучки и импульсы. Теорема Планка-Резерфорда. Связь между спектром плотности интенсивности и модулем спектра импульса

Изменение амплитуды или фазы во времени означает вариацию интенсивности и носит название модуляции

Монохроматических волн в реальности не существует. все волны ограничены во времени и пространстве.

Световой пучок - волна, модулированная в пространстве масштабом модуляции, существенно превышающим длину волны

Пусть плоская волна распространяется вдоль z

$$E_x(t, x, y, z) = E_x(t, z) = A_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Установив пространственное ограничение в величине $z=0$, сформируем пучок: $E_x(t, x, y, 0) = A(x, y) \cos \omega t$

- амплитудная модуляция.

$E_x(t, x, y, 0) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x, y))$ - фазовая модуляция.

Гауссов пучок: $E_x(t, x, y, 0) = A_0 \exp(-\frac{x^2+y^2}{2a^2}) \cos \omega t$

Пучок будет слабо расширяться, его ширина практически неизменной до некоторого диаметра, называемого дифракционным: $z_{\text{дифф}} = \pi \frac{a^2}{\lambda}$

Затем пучок начинает расходиться,

Амплитуда убывает как $A \cdot \frac{1}{z}$, фронт становится сферическим, угловой размер

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Световой импульс - волна, модулированная во времени в масштабах модуляции, существенно превышающих период колебаний волны.

$$E_x(t, x, y, z) = A(t) \cos \omega t.$$

Это приводит к изменению спектра и необходимости учитывать конечность скорости: $E_x(t, z) = A(t - \frac{z}{c}) \cdot \cos \omega(t - \frac{z}{c})$

Фурье-преобразование от временной функции позволяет представить малую электромагнитную волну как суперпозицию монохроматических волн.

Для электромагнитной волны:

$$f(t) = E(t) = E_0 \cos \omega t$$

энергия, падающая на единичную площадь в единицу времени пропорциональна $f^2(t) = E^2(t)$

$$\begin{aligned} W_{\text{полн}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot F(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

теорема Парсеваля

Для нахождения энергии таких

характеристики достаточно знать
спектральное разложение энергии по частотам

$$S(\omega) \sim |F(\omega)|^2 - \text{спектральная мощность интересующей}$$

$$J = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

По измеренной $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ восстановление $F(t)$ невозможно, т.к. потеряна информация о фазе сигнала.

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

6. Излучение света классическим осциллятором.

Зависимость интенсивности излучения от частоты комбина осциллятора. Оценка естественной ширины спектральной линии излучения радиационно затухающего осциллятора. Форма линии излучения.

Излучение электромагнитных волн происходит при ускоренном движении заряда в вакууме. Классическая модель оптического излучения возбужденного атома дает пример квазиклассического света. Напряженность поле в волне, испускаемой осциллятором:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 \cos \omega_0 t & t > 0 \end{cases} \quad \text{вектор потенциал}$$

Спектр такого сигнала $F(\omega) = \pi E_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

где $\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$ - бесконечно узкий и бесконечно высокий пик в нуле.

Величину осциллятора испускает луч

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cos \omega_0 t \quad |t| < \tau/2$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0 e^{-i\omega t} dt = \frac{A_0 e^{-i\omega \tau/2}}{-i\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{A_0 2 \sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega \tau} \cdot \frac{\tau}{2} = A_0 \tau \text{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)$$

$$\frac{\omega \tau}{2} = \pi \Rightarrow \Delta \omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{ или } \Delta \nu = \frac{1}{\tau}$$

~~$$J = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 \tau)^2 d\omega = \int_0^{\infty} A_0^2 \frac{(2\pi)^2}{\omega^2} d\omega = \frac{A_0^2 (2\pi)^2}{\omega} \Big|_0^{\infty}$$~~

Затухающий осциллятор:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t & t < 0 \\ E_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t & t > 0. \end{cases}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t e^{i(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t e^{i(\omega + \omega_0)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} E_0 \left[\frac{1/(\omega - \omega_0) + \gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{1/(\omega + \omega_0) + \gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2} \right]$$

Для спектральной плотности энергии получим

$$\alpha |E(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} = \boxed{\frac{1}{2\pi} E_0^2 \gamma^2 \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \gamma^2}}$$

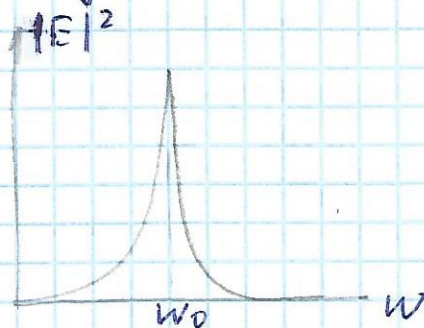
Относительная форма - Лоренцевский

контур. кривая имеет резкий максимум при $\omega = \omega_0$

Уширение спектра обусловлено рациональным затуханием свободных колебаний осциллятора. Минимальность ширины имеет место в том случае, когда затухание отсчитывается от ω_0 на $\gamma = \frac{1}{T}$.

Отсюда для ширины линии на половине высоты $\Delta\omega = 2\gamma = \frac{2}{T}$

т.к. $\Delta\omega = 2\gamma \ll \omega_0$ - квазимонохроматич. свет



Рассмотренный пример позволяет оценить рациональное затухание

естественную ширину, электронных линий

$$m. k. \quad \sigma \sim 10^{-8} e$$

$$\Delta \nu \sim 10^8 \text{ Гц}$$

7. Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов. Спектральная ширина излучения и ее ширина. Механизм уширения спектральной линии.

Рассмотрим спектральный состав излучения большого количества света, состоящего из белого шума источников - ансамбля излучателей.

Пусть через точку наблюдателя в течение интервала T проходит большое число волновых углов.

Пусть колебания напряженности этих волн описываются одной и той же функцией $E(t-t_k)$. Волны различного момента t_k . Пусть направление поляризации во всех случаях одинаково

Пусть за интервал $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ пройдет n волн. Тогда

$$E(t) = \sum_{k=1}^n E(t-t_k)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega} \sum_{k=1}^n e^{i\omega t_k} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Тогда $F_{\omega} = E_{\omega} \sum_{k=1}^n e^{i\omega t_k}$

$$J \sim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |E^2(t)| dt$$

$$J \sim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{2}{T} |F_{\omega}|^2 = \frac{2}{T} |E_{\omega}|^2 \left| \sum_{k=1}^n e^{i\omega t_k} \right|^2 = \frac{2}{T} |E_{\omega}|^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{i\omega(t_k - t_l)}$$

Равномерную функцию можно преобразовать

$$\left[n + 2 \sum_{k=1}^n \cos \omega (t_i - t_k) \right]$$

т.к. t_k распределена случайным образом, поэтому функция вероятности появления положительных и отрицат. значений косинуса \Rightarrow все функции сводится к n

значит, $S_n = S \cdot \frac{n}{T}$

Спектр излучения источника как целого будет таким же, как и распределение интенсивности для измеренного атома, если обеспечить отсутствие соударений атомов и их движение с одинаковой скоростью.

В других условиях наблюдаемая на опыте ширина линий обусловлена, как правило, вторичными явлениями. Прежде всего уширение линий вызывается толчками атомов. При определенном количестве зероэффективное время жизни излучающего атома в возбужденном состоянии складывается из суммы радиационного времени.

Другая причина уширения - эффект Доплера. Спектр излучения, испущенного движущимся атомом,

связаны по частоте. Излучающие атомы совершают тепловое движение, и поэтому спектр определяется наложением спектров.

Радиационное и столкновительное уширение обусловлено тем, что каждый атом излучает пуз. Излучению атомного атома соответствует весь пропуск спектра - единое уширение.

Доплеровское - излучению разных атомов соответствует различные части спектра - неоднородное уширение.

8. Интерференция двух монохроматических волн.
 Уравнение интерференции и функция видности.
 Основные схемы двухволновой интерференции.
 Метод деления волнового фронта и амплитуды.
 Минимум и условная ширина полосы в схеме Юнга

Интерференция - круп явление, в котором при наложении двух или нескольких волн происходит пространственное перераспределение энергии излучения. При этом возникают устойчивые во времени чередующиеся светлые и темные участки - интерф. полосы.
 Пусть в точку приходит две волны:

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t) \quad \vec{E}_2(t) = \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

$$I \sim \langle (\vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle \sim I_1 + I_2 + 2 \langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle$$

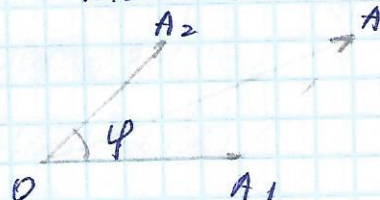
$2 \langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle$ - интерференционный член. Вращается в нуль, если $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ - волны некогерентны.
 $\omega_1 \neq \omega_2 \quad I = I_1 + I_2$

Пусть волны имеют одинаковые частоты и одинаково поляризованы:

$$E_1(t) = A_1 e^{i\omega t + k \cdot r} \quad \text{и} \quad E_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi) + k \cdot r} = A_2 e^{i\varphi} e^{i\omega t + k \cdot r}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

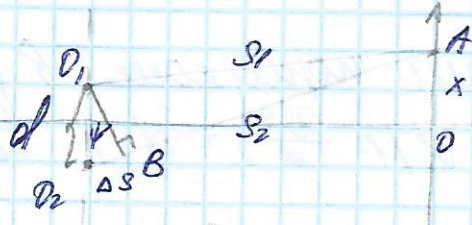


Если $I_1 = I_2 = I_0$, то $I = 2 I_0 (1 + \cos \varphi)$

Возьмем между разностью хода и разностью фаз:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (k r_2 - \omega t + \varphi_0) - (k r_1 - \omega t + \varphi_0) = k \Delta r$$

Схема Юнга:



$$S_1 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2; \quad S_2^2 - S_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2x \cdot d$$

$$\Delta S = \frac{x \cdot d}{L} \Rightarrow \varphi = k \Delta S = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x \cdot d}{L} = 2\pi \frac{x d}{\lambda L}$$

Тогда: $I = I_0 / (1 + \cos(2\pi \frac{x d}{\lambda L}))$

Максимумы $I = 4I_0 \quad \varphi = 2\pi n, \quad \Delta S = \lambda n$

Минимумы $I = 0 \quad \varphi = 2\pi(n + \frac{1}{2}), \quad \Delta S = \lambda(n + \frac{1}{2})$

n - порядок интерференции.

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{L} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda L}{d} - \text{ширина полосы}$$

Если из точки, расположенной посередине между D_1 и D_2 провести линию под углом ψ , то для всех точек эта линия ΔS -одинакова ($\Delta S = d \sin \psi$)

Если волна выходит под углом θ , то $\theta = \frac{d}{L}$,
 $\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\theta}$

Для получения интерференции излучение

разделяют на две волны, а затем соединяют.

Разделение можно осуществить двумя способами:

а) Методом деления волнового фронта

(бипризма, дифракция, бисерка, схема Юнга)

б) Методом деления амплитуды

(кольца Ньютона, тонкие пленки, интерферометры)

Если источник точечный, то в результате

применения опт. схем возникнут два источника

Если пленка, соединяющая источники, параллельна

плоскости экрана, то наблюдаются кольца

Если пленка перпендикулярна - кольца, е

максимальной поперекме в центре $m = \frac{d}{\lambda}$.

$$\Delta s = d \cos \alpha = d \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \approx d \left(1 - \frac{y^2}{2L^2}\right)$$

При интерференции в тонких пленках тот или иной цвет пленки зависит от толщины пленки — пленка равной толщины (лок. на поверхности)

Если толщина постоянна, то картина наблюдается при различных углах падения — пленка равного наклона (локализována на бесконечности)

Разность хода в пленке: $\Delta = 2h n \cos \theta' + \frac{\lambda}{2}$

Лучи света: выйдя из одной точки источника встретятся в одной точке на пов.ск.

Функция видности.

Видность интерференционной картины:

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Для монохроматического источника $I_{\min} = 0$,
значит, видность всегда равна единице $V = 1$

9. Интерференция квазимонохроматического света
 Временная и пространственная когерентность. Функция взаимной корреляции. Взаимосвязь спектра и функции корреляции (теорема Винера - Хинчина). Фурье - спектр. Степень временной когерентности и функция взаимности.

Квазимонохроматическое излучение - излучение удовлетворяющее условию $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \gg 1$.

Волны с различным частотами не интерферируют поэтому их формируются для каждого λ и суммируются. Рассматриваем экрану Юнга с различным расстоянием источников:

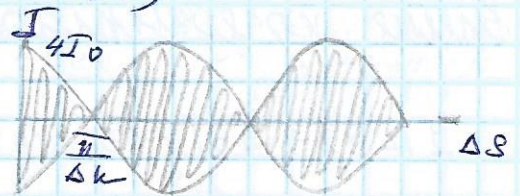
1. λ_1 и λ_2 , $\Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2| \ll \lambda_1, \lambda_2$. - Бихроматический источник.

$$I_j = I_0 (1 + \cos(k_j \cdot \Delta s))$$

$$I(\Delta s) = I_1(\Delta s) + I_2(\Delta s) = 2I_0 + I_0 (\cos(k_1 \Delta s) + \cos(k_2 \Delta s)) =$$

$$= 2I_0 + I_0 \cdot 2 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \Delta s\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \Delta s\right) =$$

$$= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\Delta k \Delta s}{2}\right) \cos k \Delta s\right)$$



Видимость интерференционной картины

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

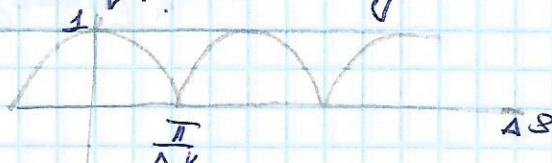
Для монохроматического источника $V = 1$

$$\left. \begin{aligned} \text{Для двух } \lambda: I_{\max} &= 2I_0 \left| 1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta s\right) \right| \\ I_{\min} &= 2I_0 \left| 1 - \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta s\right) \right| \end{aligned} \right\}$$

Для видимости: $V(x) = \left| \cos\left(\frac{\Delta k \Delta s}{2}\right) \right|$

Видимость равна 0, когда $\frac{\Delta k \Delta s}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Для первого нуля видимости $\Delta s = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$; $m = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$



2. Источник излучает в узком диапазоне от $(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2})$ до $(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2})$

Но мере удаления от центра максимумов для различных λ расходятся. Полное размывание произойдет, когда расстояние между максимумами m -го порядка для крайних длин волн станет равно ширине полосы Δx

$$\Delta s = (\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2})m + (\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2})(m-1)$$

$$m_{\max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

Способность двух лучей интерферировать при увеличении разности хода - временная когерентность. Максимальная разность хода, при которой возможна интерференция - длина когерентности $l_{\text{кор}} = m\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

а соответствующее время запаздывания - время когерентности $t_{\text{кор}} = \frac{l_{\text{кор}}}{v}$

$$I(\Delta s) = I_0 / (1 + \cos(k\Delta s))$$

$$k\Delta s = k_e \frac{\Delta s}{c} = \omega\Delta t$$

$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$, тогда для узкого $d\omega$ можно записать $dI = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega\Delta t)) d\omega$

$$I(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) / (1 + \cos(\omega\Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\Delta t) d\omega$$

$$= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\Delta t) d\omega, \text{ т.к. } \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin(\omega\Delta t) d\omega = 0,$$

$$\text{тогда } \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\Delta t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\Delta t} d\omega$$

Интерференционный мен - Фурье-преобразов. от $S(\omega)$

$$S_{\text{мен}}(\omega) = \frac{1}{2} (S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0))$$

$$\text{Инт. мен} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{мен}}(\omega) e^{i\omega\Delta t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)) e^{i\omega\Delta t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_0) e^{i\omega_0 t} d\omega = f_{\omega_0}(\Delta t) = f(\Delta t) \cdot e^{i\omega_0 \Delta t}$$

Инт. мен = $\frac{1}{\Delta} (f(\Delta t) e^{i\omega \Delta t} + f(\Delta t) \cdot e^{-i\omega \Delta t}) = \frac{f(\Delta t) \cos \omega \Delta t}{\Delta}$

$I = I_0 \left(\frac{f_0 \Delta t}{J_0} \cos \omega_0 \Delta t \right)$ тогда $V = \left| \frac{f_0 \Delta t}{J_0} \right| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega_0 t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|$

Формы
интерференции
лучей

Видность
лучей
сам. элемента
лучей

Пусть в точку приходят две волны:

$$\Delta s \Rightarrow \tau = \frac{\Delta s}{c}; \quad E_1(t) = E_0(t); \quad E_2(t) = E_0(t + \tau)$$

$$I(\tau) \propto \langle (E_1(t) + E_2(t))^2 \rangle = \langle E_0^2(t) \rangle + \langle E_0(t) E_0(t + \tau) \rangle$$

$B(\tau) = \langle E_0(t) E_0(t + \tau) \rangle$ - функция автокорреляции

$$I(\tau) = \langle I_0 + 2B(\tau) \rangle = \langle I_0 \rangle + \langle 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \rangle$$

$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega$ - теорема
Винера - Хинчина

Представим волну в виде $E(t) = \frac{1}{\Delta} E_0(t) e^{i\omega t} + \text{c.c.}$

$$\begin{aligned} \langle E(t) E(t + \tau) \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{\Delta} E_0(t) e^{i\omega t} + \frac{1}{\Delta} E_0^*(t) e^{-i\omega t} \right) \left(\frac{1}{\Delta} E_0(t + \tau) e^{i\omega(t + \tau)} + \frac{1}{\Delta} E_0^*(t + \tau) e^{-i\omega(t + \tau)} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle E_0(t) E_0(t + \tau) e^{i\omega(t + \tau)} + E_0^*(t) E_0(t + \tau) e^{i\omega \tau} + \dots \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} \left[\langle E_0^*(t) E_0(t + \tau) \rangle e^{i\omega \tau} \right] = I_0 \cdot \text{Re} [\gamma(\tau) e^{i\omega \tau}] \end{aligned}$$

$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t) E_0(t + \tau) \rangle}{\langle E_0^2(t) \rangle}$ - степень когерентности

$B^*(\tau) = I_0 \cdot \gamma(\tau) e^{i\omega_0 \tau}$ - функция корреляции

тогда две величины $V(\tau) = |\gamma(\tau)|$

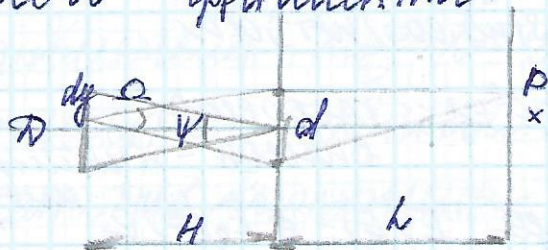
исследования интерференционной картины

позволяет определить спектральной состав излучения

Этот метод называется Фурье-спектрометрией.

н. Интерференция света от протяженного источника. Зависимость видности ИК от размеров источника. Пространственная когерентность. Радиус и угол когерентности. Звездный интерферометр.

Протяженный источник представляет собой совокупность некогерентных точечных источников, поэтому для расчета интерф. картины нужно проинтегрировать интенсивности от каждого точечного фрагмента.



дополнительная разность хода между лучами в точке Юнга: $\Delta S_y = \frac{y \cdot d}{H}$

$$dJ_{\text{нет}} = J_0 \frac{dy}{D}$$

$$\Delta S = \Delta S_x + \Delta S_y = \frac{x \cdot d}{L} + \frac{y \cdot d}{H}$$

$$dJ_{\text{экв}} = dJ_{\text{нет}} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\Delta S_x + \Delta S_y) \right) \right)$$

$$\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\Delta S_x + \Delta S_y) \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_y \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_y \right)$$

Интегрируем

$$J_{\text{экв}} = \frac{J_0}{D} \int_{-D/2}^{D/2} \left(D + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \cdot \int_{-D/2}^{D/2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_y \right) dy \right) dx =$$

$$= \frac{J_0}{D} \left(D + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y \cdot d}{H} \right) \Big|_{-D/2}^{D/2}}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y \cdot d}{H}} \right) dx =$$

$$= \frac{J_0}{D} \left(D + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{D \cdot d}{2H} \right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{D \cdot d}{2H}} \right) dx = \boxed{J_0 \left(1 + \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{D \cdot d}{2H} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_x \right) \right)}$$

Видность не зависит от x !

Видность станет равна нулю, когда $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{D \cdot d}{2H} = \pi$

откуда условие полного пропадания
интерференции: $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$

картина еще видна, если $V = \frac{z}{H}$, то есть $D = \frac{Dd}{z}$

Расстояние между щелями $d_0 = \frac{\lambda H}{D}$, при котором
пропадает интерференционная картина, —
диаметр когерентности.

Условие $V = \frac{D}{H}$ — условный размер источника,

параметр $d_0 = \frac{\lambda}{V}$

Условная апертура $\Omega = \frac{d}{H}$ — угол, под которым

из центра источника видна щель

Видность будет нулевой, если $D = \frac{H}{\Omega}$, $d = \frac{H}{V}$

Если источник не точечный, а состоит
из двух точечных некогерентных источников на
расст. D , то картина пропадет при условии
 $d_0 = \frac{\lambda}{2V}$. — этот факт используется в звездном
интерферометре Майкельсона для определения
условных расстояний между двумя близко
расположенными звездами.

Пусть $I(y)$ — распределение энергии по точкам
источника. $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I(y) dy$

$\int_{-\infty}^{\infty} I(y) \cos(k_0 y) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} I(y) \cos(k_0 y) dy$ или $\int_{-\infty}^{\infty} I(y) e^{ik_0 y} dy$ —
пространственное преобразование Фурье. Тогда

$V_{\text{проб}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(y) e^{ik_0 y} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} I(y) dy} \right|$ для квазимонохроматич.

$V_{\text{об}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{ik_0 w} dw}{\int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw} \right|$

Тогда $V_{\text{проб}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(y) e^{ik_0 y} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} I(y) dy} \right| \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{ik_0 w} dw}{\int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw} \right|$

$$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{c} = \frac{\lambda \Delta l}{L c}, \text{ степень монохроматичности шотти}$$

$$M_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$$

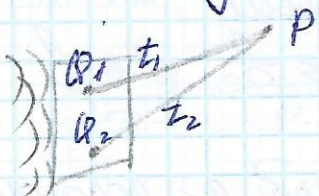
Пространственно-временная когерентность

комплексная степень когерентности:

$$g(r, r') = \frac{\langle E_0^*(r, t) E_0(r', t + \tau) \rangle}{\langle I \rangle_0}$$

В случае протяженного источника говорят о когерентности одного и того же поля в двух точках.

Поле излучения создается множеством источников



степень пространственно-временной когерентности

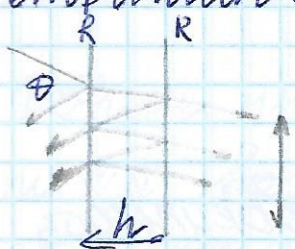
$$g(t_1, r_1, t_2, r_2) \sim \langle E_0^*(t_1, r_1) E_0(t_2, r_2) \rangle$$

Вам \$t_1 = t_2\$ - пространственная когерентность

и. Многолучевая интерференция. Интерференция Фраунгофера - Перо. формула Эйри.

Интерферометр Фраунгофера - плоскопараллельная стеклянная пластина, на поверхности которой нанесено высокоотражающее покрытие.

Падающая волна частично проходит, частично отражается на первой границе. Такое же разделение происходит при каждом пересечении отражающей поверхности.



Важно на пути отраженных или прошедших лучей уст. линзу, то в ее фокальной плоскости формируется картина в виде колец равного наклона.

Амплитудные коэффициенты:

отражения ρ
 пропускания τ

$$\delta = k \Delta s = 2k h n \cos \theta', \text{ где } \sin \theta = n \sin \theta'$$

Для прошедшей волны:

$$E_{прош} = E_0 \tau^2 \cdot (1 + \rho^2 e^{i\delta} + \rho^4 e^{i2\delta} + \dots) = \frac{E_0 \tau^2}{1 - \rho^2 e^{i\delta}}$$

Для отраженной:

$$E_{отр} = E_0 \rho - E_0 \tau^2 \rho e^{i\delta} / (1 - \rho^2 e^{i\delta} - \rho^4 e^{i2\delta} + \dots) = E_0 \rho / (1 - \rho^2 e^{i\delta})$$

Для интенсивностей применяем формулу Эйри

$$I_{прош} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$I_{отр} = I_0 \frac{\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

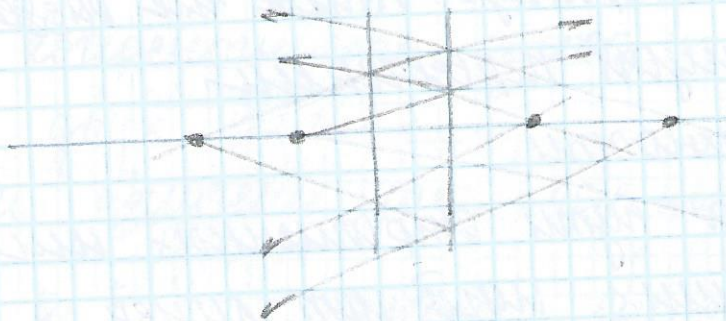
$R = \rho^2$, $T = 1 - R = \tau^2$ - к-ты по энергии

Условия минимума и максимума:

$$I_{\text{прош}} = I_0 \text{ если } \frac{\delta}{2} = \pi m$$

$$I_{\text{прош}} = 0 \text{ если } \frac{\delta}{2} = \pi (m + \frac{1}{2})$$

$\frac{\delta}{2} = \pi m \Rightarrow \Delta s = \frac{\delta}{k} = m \lambda$, т.е. в результате интерференции лучи усиливают друг друга



Интерференционная картина - совокупность концентрических колец, расстояние между которыми максимально в центре и уменьшается к периферии.

Максимальный порядок интерференции соответствует нулевому углу падения

$\Delta s = a \sin \theta$ в ростом $\Delta \lambda$ размывается центральная часть.

// Пусть $n=1$: $\delta = a \sin \theta$. Две максимума $\delta = 2\pi m$, $a \sin \theta_m = m \lambda$.

$$a \cos \theta_m d\theta_m = m \lambda, \quad d\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{2a \sin \theta_m}$$

у края очень маленькая свободная область диаметри $\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{a}$. $\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2a} \ll \lambda$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = m F, \text{ где } F = \frac{\pi D}{1-D} \text{ - фокусное расстояние.}$$

$$\text{Если } R \approx 1, \left(\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 \right) \quad \theta = \frac{2(1-R)}{1R} \quad \left(\theta: \delta = \delta_m \pm \frac{\delta}{R} \right)$$

$$d\theta = \frac{\delta \lambda}{4\pi h \sin \theta}, \quad \delta_m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi R}, \quad F = \frac{1}{\delta_m}$$

12. Дифракция. Принцип Гюйенса - Френеля Дифракционный интеграл Френеля и его трактовка Зона Френеля.

Дифракция света - совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света и наблюдаемых при его распространении в среде с резко выраженными свойствами неоднородностью. (отличающиеся предметами, отличающиеся от законов геометрической оптики)

Абелем предположи построение: каждая точка волнового фронта принимается за источник вторичных сферических волн. При этом волновой фронт есть огибающая этих вторичных волн.

Френелем: сферические волны когерентны и поле в любой момент времени - результат интерференции вторичных волн.

Принцип Гюйенса - Френеля

Пусть на пути сферической монохроматической волны, исходящей из P_0 , находится непрозрачный объект с отверстием Σ .



Напряженность поле в точке P определяется суперпозицией волн от вторичных источников расположенных в плоскости Σ .

Комплексная амплитуда $U(P)$ может быть найдена в помощью интегральной формулы Френеля - Кирхгофа

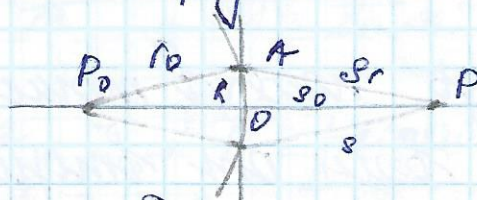
$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} \left(1 + \frac{\cos\theta}{2} \right) \exp(iks) ds$$

Множитель $\frac{\exp(ikr)}{r}$ описывает волну, распр. из P_0 до некоторого вторичного источника $\frac{\exp(iks)}{s}$ - волну, расходящуюся от вторичного источника до точки наблюдения P .

$k(\alpha)$ - коэффициент, описывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла α между направлением расхождения падающей и вторичных волн

Если размер отверстия мал по сравнению с r и s , то $k(\alpha)$ и $\frac{1}{r}$ неизменно изменяются при интегрировании. Разложение $\exp(i k(r+s))$ существенно упрощает формулу. Убавление в расхождении этого приближения - дифракция Френеля.

Пусть между источником и точкой наблюдения расположи экран с круглым отверстием радиуса R .



Вспомогательная поверхность - сфера радиуса r_0 .

Комплексная амплитуда в точке наблюдения Σ :

$$U_{\Sigma} = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

диф) - $U_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} d\Omega k(\chi)$ - вклад от элемента $d\Omega$

$$U(P) = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} \int \frac{e^{iks}}{s} k(\chi) d\Omega - \text{амплитуда в } P$$

- Интеграл Френеля

$$d\Omega = r_0^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad s^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0) \cos \theta$$

$$R s ds = -2r_0(r_0 + s_0) d\cos \theta = 2r_0(r_0 + s_0) \sin \theta d\theta$$

$$U(P) = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} \int \frac{e^{iks}}{s} k(\chi) \frac{r_0}{r_0 + s_0} s dr d\varphi = \frac{U_0 e^{ikr_0} r_0}{r_0(r_0 + s_0)} 2\pi \int k(\chi) e^{iks} ds$$

Можно считать, что $k(\chi) = k_0 = \text{const}$.

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot k_0 \frac{1}{ik} e^{iks} \Big|_{s_0}^{\infty} = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot k_0 \frac{i}{ik} e^{ik s_0} / e^{ik(s_0 - s_0)} =$$

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \cdot k_0 \frac{2\pi}{ik} e^{ik s_0} / (e^{i\varphi} - 1) =$$

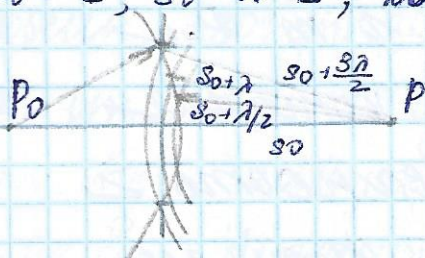
$$= U_0 \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} \cdot k_0 \lambda / (e^{i\varphi} - 1) = \Gamma$$

$\Gamma = i/(1 - e^{i\varphi})$ комплексный множитель. (Окружность е.р.р.)

При $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ $|\Gamma| = 2$ $U_{\max} = 2U$

$$\Delta s_{\max} = \frac{\varphi_{\max}}{k} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots, \quad \Delta s_{\min} = \frac{\varphi_{\min}}{k} = \lambda n$$

Построим сферы с центрами в P_0 и радиусами $s_0, s_0 + \frac{\lambda}{2}, s_0 + 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$, которые разобьют Σ на зоны Френеля



Если отверстие открывает четное число зон Френеля, то U_{\max} , если нечетное - U_{\min} .

Радиус n -ой зоны: $r = \sqrt{R^2 + a^2} = a \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} \approx a \left(1 + \frac{R^2}{2a^2}\right)$

$$s = \sqrt{R^2 + b^2} = b \sqrt{1 + \frac{R^2}{b^2}}$$

$$\Delta s = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\text{Ширина } \Delta s = \frac{\pi \lambda}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \text{const.}$$

13. Дифракция Френеля на круглом отверстии.
 Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Зонная пластинка, линза.

Интеграл Френеля-Кирхгофа:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\exp(iks)}{s} dS$$

Если размер отверстия мал по сравнению с r и s , то множитель k/α и $\frac{1}{rs}$ неизменно выносятся при интегрировании.
 Общее, отсюда вытекающее в рамках этого приближения дифракция Френеля.

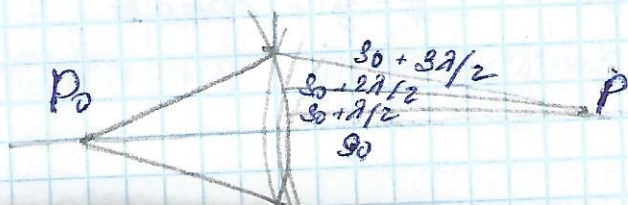
Пусть между источником P_0 и приемником P расположен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R .

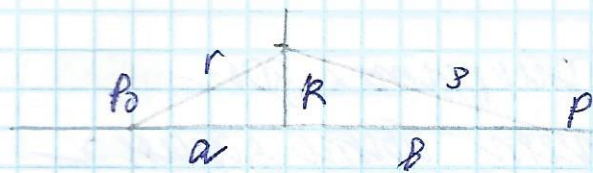
Можно выполнить следующее построение.

Построим сферу с центром в т. P_0 и радиусом $s_0, s_0 + \frac{\lambda}{2}, s_0 + \frac{2\lambda}{2}$, которые назовем сферической поверхностью Σ на кольцевой зоне - зона Френеля.

Соответствующие границам зон Френеля значения разности фаз будут равны $\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi$.

Если для P отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то $U(P)$ максимальное, если четное, $U(P) = 0$.





Радиус n-й зоны Френеля:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2} = a \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} = a \left(1 + \frac{R^2}{2a^2} \right)$$

$$s = \sqrt{R^2 + b^2} = b \left(1 + \frac{R^2}{2b^2} \right)$$

$$\Delta s = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Для луча, идущего от внешней границы n-й зоны

$$\Delta s_n = n \frac{\lambda}{2}, \text{ поэтому}$$

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Площадь n-й зоны Френеля:

$$S_n = \pi R_n^2 - \pi R_{n-1}^2 = \pi \left(\frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{(n-1)\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = \frac{\pi\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \text{const}$$

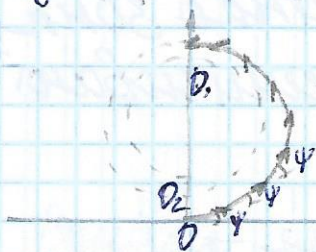
Площади зон Френеля равны.

$$\Psi_n = k \Delta s_n = \frac{kR^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \Psi_n \sim R^2$$

$$\Psi_R = \frac{kR^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}$$

Разобьем первую зону Френеля на m подзон так, чтобы $d\Psi_n$ была равна $\frac{\pi}{m}$.

$d\Psi \sim dR^2 = 2R dR$, то есть площади подзон одинаковы. Построим векторную диаграмму.



Векторы имеют одну и ту же длину, повернуты на один угол $d\Psi$. Вектор $k(x)$ полагая не замыкается в окружность.

(т.к. $k(x)$ увеличивается, то конец пологого полагает не в O, а в PO_2).

Сфера Френеля.

При небольшом числе открытых зон Френеля любая точка может быть связана с помощью только одной переменной - ν_n

410.



r_1/r_1

При дифракции на непрозрачном диске. В центре картины всегда наблюдается светлая пятно - пятно Пуассона.

Если в отверстие поместить линзу.

$$\Delta S_n = -\frac{r^2}{2f} < 0$$

$$\Delta S = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)$$

из формулы тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

все лучи, вышедшие из источника и прошедшие через линзу, проходят один и тот же опт. путь. Виртуальное "раскрутители" $\Gamma_n = (m\pi)^2$

Зонная пластинка - плоскопараллельная стекленная пластинка с выгравированными концентрическими окружностями, радиусы которых совпадают с радиусами зон Френеля.

Она "выключает" четные или нечетные зоны или исключает погашение и увеличивает освещенность точки наблюдения.

Линзитусные закрывают, фазовые - "разворачивают" на π

Вейнберга параметр (число Френеля)

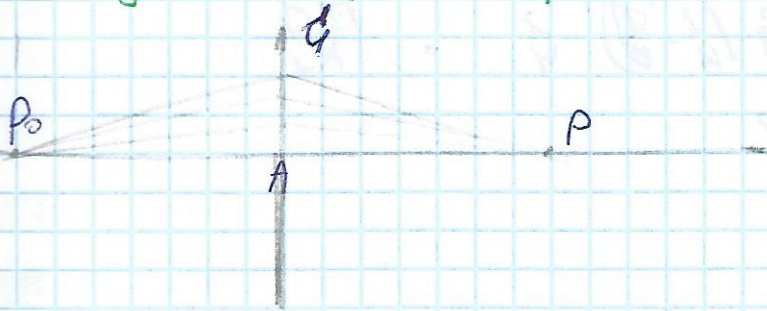
$$p = \frac{r^2 \lambda}{r}$$

$p \ll 1$ - геометрия.

$p \gg 1$ - Фраунгофер

$p \approx 1$ - Френель

14. Дифракция Френеля на крае экрана и на щели. Спираль Корню.

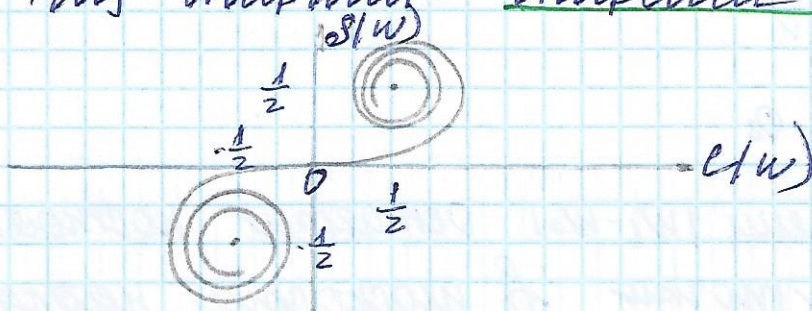


Пусть непрозрачный экран закрывает полуциркульную область $\phi < 0$. Разобьем область $\phi > 0$ на равные по ширине подзоны —

узкие бесконечно длинные полоски, параллельные краю. Излучение от всех вторичных источников одной волны не приходит в одну и ту же фазе.

Векторная диаграмма.

Векторы, характ. вкляд каждой подзоны, будут иметь одинаковую длину, но разность фаз будет увеличиваться по мере удаления от центра. Диаграмма будет иметь вид спирали — спираль Корню.



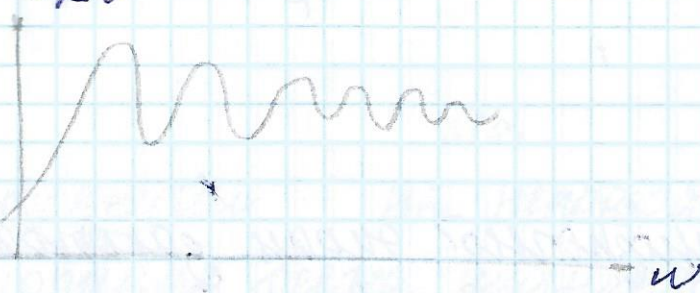
Спираль Корню задается в параметрическом виде с помощью интегралов Френеля.

$$\begin{aligned}
 c(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \\
 s(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt
 \end{aligned}$$

Длина от начала до любой ее точки

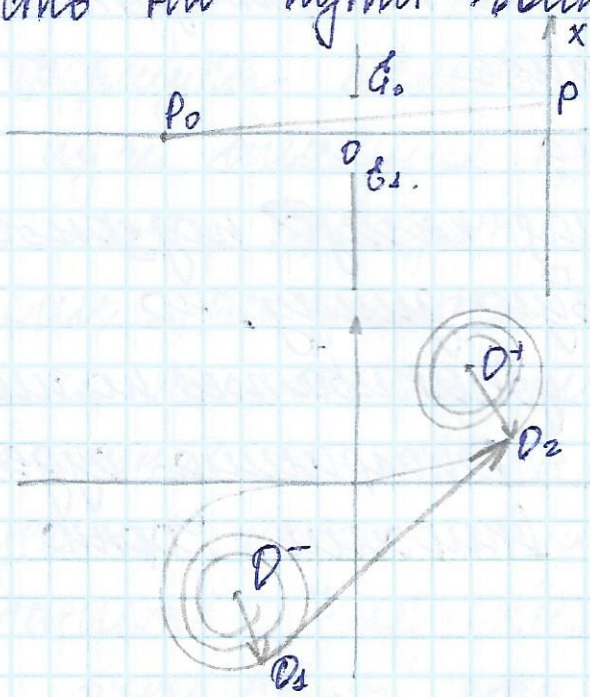
пропорциональна координате ζ .

$$w(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\frac{\zeta}{a} - \frac{\pi}{2} \right) \zeta = \frac{\sqrt{2} \zeta^2}{R_1}$$

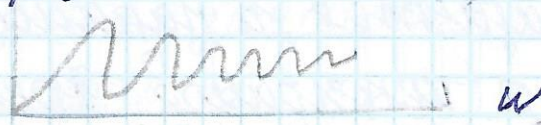


Спираль можно использовать для нахождения напряженности интенсивности при дифракции на щели w в проводнике.

Пусть на пути волны находится щель



Ширина щели $|w_1 - w_2|$ остается постоянной для любой точки в плоскости наблюдения.



Иногда реализуется разделение на полосы шириной, параллельной краю - зона Кустера. Координаты краев соответствуют $w = \sqrt{2}i$.

Касательная к спирали параллельна оси абсцисс

Изоляции зон Кустера называются, а
наклоны фаз при переходе от одной
зоны к соседней - π .

Величина $w \ll z$, открытый угол зрения
корень - величина начала координат.

Этот угол - практически горизонтальный
отрезок, значит, излучение приходит
в точку наблюдения в фазе. С увеличением
 $w \propto w, I \propto w^2$ - дифракция Фраунгофера.

В то же время $w \ll z$ (зона Френеля)

Величина характерного размера препятствия
много меньше размера I зоны, то
справедливо приближение Фраунгофера.

$$d \ll \sqrt{\lambda z}, \quad d \ll \sqrt{\lambda b}$$

Объект однородного, если

$$a_1(x, y) + a_2(x, y) = 1. \quad \left(a - \text{функция проницаемости, } \frac{E}{E_0} \right)$$

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{(x, y)} a(x, y) \kappa(\alpha) \frac{\exp(i\kappa r)}{r} \frac{\exp(i\kappa s)}{s} dx dy =$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 + U_2 = U_0} \quad - \text{принцип Бабине}$$

Пусть $\theta_0 = 0, \theta = \pi$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{b}$$

$$u(\rho) = \frac{iA}{\lambda} \frac{1}{ab} \int_{\Sigma} (\exp[ik(r+s)]) d\Sigma$$

$$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} = a \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)$$

$$s = \sqrt{b^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} = b \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2b^2} \right)$$

$$x' = 0, y' = 0$$

$$u(\rho) = \frac{iA}{\lambda} \frac{\exp[ik(a+b)]}{ab} \int_{\Sigma} (\exp[ik \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)]) dx dy$$

Если область - прямоугольник.

$$u(\rho) = \frac{iA}{\lambda} \frac{\exp[ik(a+b)]}{ab} \int_{x_1}^{x_2} \exp[ik \frac{x^2}{2P}] dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} \exp[ik \frac{y^2}{2P}] dy$$

$$P = \sqrt{\frac{2}{\lambda P}} x = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} x$$

Получим интеграл Френеля:

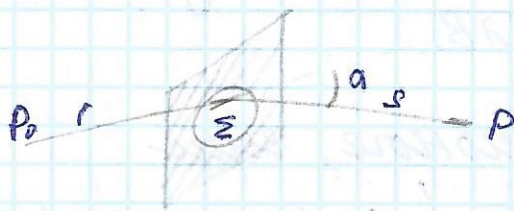
$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

$$S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

16. Дифракция света. Ближняя и дальняя зоны. Дифракционная длина. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне. Приближения Френеля и Фраунгофера

Дифракция - совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света и наблюдаемых при его распространении в среде с резко выраженной оптической неоднородностью.

Комплексная амплитуда поле может быть найдена с помощью интегральной формулы Френеля - Кирхгофа



$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} k(\alpha) \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\exp(iks)}{s} dS$$

Когда характерный размер отверстия мал по сравнению с расстояниями r и s , считаем $k(\alpha)$ и $\frac{1}{rs}$ неизменными при интегрировании

Основную роль играет интеграл от величины $\exp(i k(r+s))$. Разложение

в ряд этого интеграла существенно упрощает формулу. Обычно, рассматрив. в рамках этого приближения - дифракция Френеля. или дифракция в ближней зоне

При $r \rightarrow \infty$ фронт параболы ~~всегда~~ можно считать плоским. Если $r \rightarrow \infty$, то и вторичный фронт образует плоский волновой фронт. Дифракционные явления, наблюдаемые в этих условиях, - дифракция Фраунгофера или дифракция в дальней зоне.

Если в круглое отверстие поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием f , возникнет дополнительная разность хода

$$\Delta S_1 = -\frac{r^2}{2f} < 0$$

$$\Delta S = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)$$

Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ - все лучи, вышедшие из источника и прошедшие через линзу в точку, где фокусируется изображение, проходят один и тот же оптический путь.

Участок сферы Френеля накрывается и выжимается в плоскую линзу.

Пусть круглое отверстие открывает m зон Френеля.

Площадь участка сферы $m \cdot \pi a_0$.

Интенсивность в точке наблюдается:

$$I = (m\pi)^2 I_0$$

Пусть на нашу линзу соответствует большое число зон Френеля

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r_0^2}{\lambda f}$$

Кольца зон парно и нечетно как соседние зоны равны 0, кольца

$$I_f = \left(\frac{N}{8\pi}\right)^2 I_0 = \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0$$

Из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \pi r_0^2 \cdot I_0 &= \pi r_f^2 \cdot I_f \\ r_0^2 I_0 &= r_f^2 \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0 = r_f^2 \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{r_0^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 \\ r_f &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda f}{r_0} = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda f}{d_0} = \frac{\lambda f}{d_0} \end{aligned}$$

d_0 - диаметр отверстия.

- Все жерние, упавшие на ишзу, будет сосредоточена в перетоме.

После перетомки пучок расходится и, пройдя расстояние f , вновь будет иметь диаметр r_0 .

Угловая расходимость: $\theta_0 = \frac{r_0}{f} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{r_f} = \frac{4\lambda}{\pi d_f} \approx \frac{\lambda}{d_f}$

Границу между приближениями Френеля и Фраунгофера можно в помощию зон Френеля. Если характерный размер предмета много меньше размера первой зоны Френеля, то справедливо приближение Фраунгофера. В противном случае - приближение Френеля. Для приближения Фраунгофера: $d \ll \sqrt{\lambda a}$
 $d \ll \sqrt{\lambda b}$.

дифракционная длина $\boxed{b_{\text{дифр}} = \frac{d^2}{\lambda}}$ - граница между приближениями Фраунгофера и Френеля. Если $b \gg b_{\text{дифр}}$ - в дальней зоне
 $b \leq b_{\text{дифр}}$ - в ближней зоне

$$N(P) = \frac{1}{A} \frac{1}{aB} \iint \exp(ik(r+s)) dS$$

$$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} = a \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}$$

$$s = \sqrt{b^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} = b \sqrt{1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{b^2}}$$

$$r+s = a + b + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{xx' + yy'}{b} + \frac{x'^2 + y'^2}{2b} \right)$$

$$N(x', y') \approx \iint \exp(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{xx' + yy'}{b} \right)) dx dy$$

- приближенное выражение.

$$k \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \ll \pi$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \ll 1.$$

$$x^2 + y^2 = r \ll \frac{\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = R_s.$$

$$N(x', y') \approx \iint \exp(-ik \left(\frac{xx' + yy'}{b} \right)) dx dy$$

- приближенное выражение для дифрактора.

16. Недостатки положения принципа
Юнга-Френеля. Понятие о теории дифракции
Кирхгофа. Интеграл Френеля-Кирхгофа.

Принцип Юнга-Френеля:

Можно предположить построение:
каждая точка волнового фронта
принимается за источник вторичных волн,
распространяющихся во все стороны,
при этом волновой фронт - огибающая
вторичных волн.

Френель: вторичные волны когерентны.
В любой момент времени световое
поле в рассматриваемой точке - результат
интерференции вторичных волн.

• Принцип Юнга-Френеля не позволяет
получить выражение для коэффициента
 $k(x)$. Кроме того, фаза волны, приходящая
в точку наблюдения в отсутствие препятствия,
отличается на $\frac{\pi}{2}$ от фазы волны, идущей
от вторичного источника, расположенного
спереди на оси.

В теории дифракции Кирхгофа:

- основана на преобразовании
волнового уравнения с заданными условиями
на границе и уравнении Гельмгольца
- использует интегральную теорему

Кирхгофа - Гельмгольца, позволяющая найти поле в точке P, если известна комплексная амплитуда и ее производная по нормали.

В теории Кирхгофа поверхность вторичных источников окружает точку наблюдения.

Уравнение Гельмгольца: $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$.

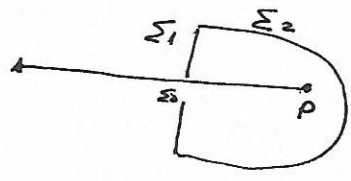
Простые решения: $\psi = \psi_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ - плоская
 $\psi = A \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r}$ - сферическая.

$$\int_{\Sigma} \left(A \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{dA}{dn} \right) dS =$$

Интегральная теорема

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \right) dS$$

1. $\Sigma_0: A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-ikr}$
2. $\Sigma_1: A_{\Sigma_1} = 0$
3. $\Sigma_2: A_{\Sigma_2} \rightarrow 0$



$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \frac{-ik e^{-ikr} r - e^{-ikr}}{r^2} \frac{dr}{dn} = \frac{e^{-ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \frac{e^{-ikr}}{r} (-ik) \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{e^{-ikr}}{r} (-ik) \cos \theta$$

$$\frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{A_0 e^{-ikr_1}}{r_1} \right) = -ik A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \cos \theta_1$$

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_0} \left(A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \left(-ik e^{-ikr} \frac{1}{r} \cos \theta \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \left(-ik A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \cos \theta_1 \right) dS$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \frac{e^{-ikr}}{r} i k (\cos \theta_1 - \cos \theta) dS = \int_{\Sigma} \frac{i}{2\lambda} A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta) dS$$

интеграл Френеля - Кирхгофа.

17. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная картина в дальней зоне как пространственная фурье-сериальная комплексная спектральная амплитуда. Условья электр интенсивности. Равенство ширины спектра с поперечными размерами щели

Рассмотрим дифракцию на одной щели и применим формулу Френеля-Кирхгофа так как на протяжении щели плоская волна, то комплексная амплитуда поле во всех точках Σ будет одно?

и то же и равно? U_0 .

Лучи, идущие от вторичных источников под углом φ и первоначальному напр. распространения, обернутся в фокальной плоскости ширины b т.н.

$$U(x, y) = U_0 \int_{-b/2}^{b/2} e^{i k x \sin \varphi} dx \approx U_0 \cdot \frac{e^{i k s_0}}{s_0} k_0 e^{i k s_0} dx$$

где $(s - s_0) = x \sin \varphi$ - разность хода

$$U(x, y) = U_0 \frac{e^{i k s_0}}{s_0} k_0 \int_{-b/2}^{b/2} e^{i k x \sin \varphi} dx$$

функция пропускания $\alpha(x, y) = \frac{E_2(x, y)}{E_1(x, y)}$

Для щели $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| < b/2 \\ 0, & |x| > b/2 \end{cases}$

$$U(x, y) = U_0 \frac{e^{i k s_0}}{s_0} k_0 \int_{-b/2}^{b/2} \alpha(x) e^{i k' x} dx,$$

$$k' = k \sin \varphi$$

Данная формула - пространственное преобразование Фурье от функции

A

пропускаемо $a(x)$.

величина $k' = k \sin \varphi$ - пространственная частота

1. 2

2. 3

3. 4

Дифракция Фраунгофера есть пространств. изображение светового пучка на плоскости Френеля.

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

$\frac{\partial A}{\partial n}$

A/P

$\approx \frac{1}{4\pi}$

Для приближения Фраунгофера:

$$U(x', y') = \iint_{\Sigma} \exp(-ik \sqrt{\frac{x x' + y y'}{b}}) dx dy$$

$$U(x', y') \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x, y) \exp(-ik \sqrt{\frac{x x' + y y'}{b}}) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x, y) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy$$

$$\| E(P) = \frac{i + 1}{12 \lambda b} e^{i k b} E_0(k_x) \exp(i k x \sin \theta) dx$$

$$E_0(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp(i k x \sin \theta) dx -$$

пространственная спектральная амплитуда.

$$I(P) = \frac{e}{8\pi} \frac{1}{\lambda b} S_0(k_x), \text{ где}$$

$S_0(k_x) = |E_0(k_x)|^2$ - простр. спектр. мощность или угловое спектр. излучение.

Угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне повторяет форму углового спектра пучка.

связо с θ ? ? ?

18. Дифракция Фраунгофера на трехмерных структурах. Дифракция на щели. Амплитудное и фазовое дифр. решетки. Положение и ширина главных максимумов

Идеальной кристалли - регулярная трехмерная периодическая структура с характерным периодом $\sim 1\text{ \AA}$.

Вещь, падающая на кристалл, возбуждает на атомах, которые становятся в точности источниками когерентного излучения.

Условие максимума: $d_x \cdot (\sin \theta_x - \sin \theta_{0x}) = m_x \lambda$
 $d_z \cdot (\sin \theta_z - \sin \theta_{0z}) = m_z \lambda$

$\alpha_x = \frac{\pi}{2} - \theta_x$: Получим уравнение Лауэ:

$$\begin{cases} d_x (\cos \alpha_x - \cos \alpha_{0x}) = m_x \lambda \\ d_y (\cos \alpha_y - \cos \alpha_{0y}) = m_y \lambda \\ d_z (\cos \alpha_z - \cos \alpha_{0z}) = m_z \lambda \end{cases}$$

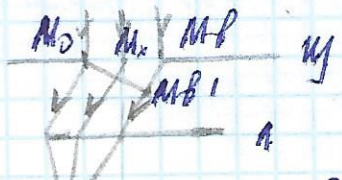
Соотношения: $\cos^2 \alpha_{0x} + \cos^2 \alpha_{0y} + \cos^2 \alpha_{0z} = \delta$
 $\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$

Полученная картина - Лауэграмма

Дифракция может наблюдаться в отраженном свете. Атомы образуют набор параллельных плоскостей. В результате отражения возникает интерференция.

Условие Брэгга - Вульфа: $\Delta s = 2d \sin \theta = m \lambda$

Дифракция на щели



каждая точка вещного фронта, достигшего щели - источник сферических волн

интерф. (добавочное) максимумы: $\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}$

Ближайшие к максимумам минимумы
находятся из условия $\sin \varphi = 0$

$$d \sin \varphi = (m \pm \frac{1}{2}) \lambda$$

$$d \cos \varphi d\varphi = dm \cdot \lambda = \frac{1}{2} \lambda$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2d \cos \varphi} = \frac{1}{2d \cos \varphi} - \text{ширина}$$

максимума

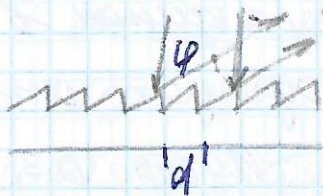
Амплитудные и фазовые решетки.

Амплитудные решетки:

периодически изменяется коэффициент
отражения или пропускания, что вызывает
изменение амплитуды падающей волны.



У фазовых решеток ихних амплитуда
фазы, которая периодически изменяет
фазу световой волны



19. Спектральный анализ светового излучения.

Дифракционные, интерференционные и дисперсионные

спектральные приборы. Основные характеристики

В экспериментах разложение излучения в спектр осуществляется с помощью специальных приборов, действие которых может быть основано на различных физических принципах. Основным элементом спектрального прибора является диспергирующий элемент, осуществляющий пространственное разделение излучения разных длин волн.

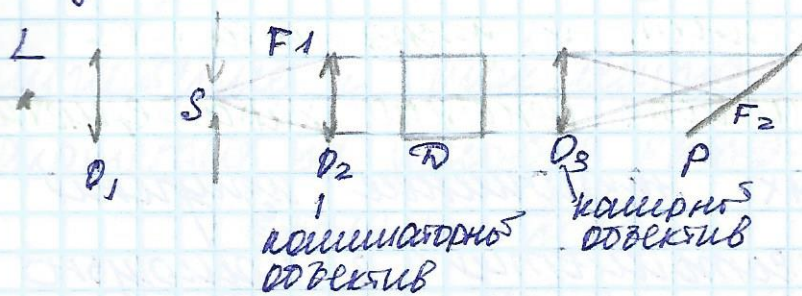
Спектральные приборы подразделяют на 3 группы

1. В призмных приборах используется зависимость показателя преломления от длины волны, а точнее $n(\lambda)$ - дисперсия

2. Диспергирующим элементом дифракционных приборов служит дифракционная решетка, осуществляющая разложение на монохроматические составляющие. ($\sin \varphi = m \frac{\lambda}{a}$)

3. Интерференционные приборы в большинстве случаев используют многолучевую интерференцию

Кинематическая схема прибора:



Основные характеристики приборов:

Дисперсия прибора характеризует изменение угла отклонения светового пучка в приборе при изменении λ .

Угловая дисперсия: $D\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}$

$d\varphi$ - угол между лучами с длинами волн λ и $\lambda + d\lambda$.

Линейная дисперсия $Dl = \frac{dl}{d\lambda}$ - dl - расстояние между спектральными линиями с длинами волн λ и $d\lambda$

Разрешающая способность

- отношение λ к наименьшей разнице $d\lambda$ спектральных линий, при которой спектральный прибор еще позволяет наблюдать их раздельно.

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}$$

Для сравнения разрешающих сил приборов.

используют критерий Рэли, согласно которому две линии считаются

разрешенными, если максимум распределения интенсивности одной линии соответствует

первому максимуму другого. Если шлицы имеют одинаковую интенсивность, то провал между ними должен быть не менее 20%.



Область свободной дисперсии - разность $\Delta\lambda$, при которой наступает перекрытие максимумов соседних порядков.

Дифф. решетка: Условие максимумов: $d \sin \varphi = m\lambda$

$$d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda \Rightarrow D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} \text{ - Дисперсия}$$

Разр. способность: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda \Rightarrow R = mN = \frac{d \sin \varphi N}{\lambda}$

Свободная область дисперсии: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda \Rightarrow$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

и направленные на минимум - $m + \frac{1}{2}$ из

условие $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right) = 0, \sin N\delta = 0 \Rightarrow d \sin \varphi = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda$

Интерферометр Фабри - Перо

$\delta = 2h n \cos \theta$, пусть $n = 1$

Условие максимума $\delta = 2\pi m, 2h \cos \theta = m\lambda$

$$2h \sin \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow D_{\theta} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{2h \sin \theta}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2h} \ll \lambda \quad \parallel \quad m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{m}$$

Возмем формулу Фабри: $I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$

Если $\sin^2 \left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \quad I_{\min} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} \rightarrow 0$

Минимум кощю: $\frac{I}{I_0} = 1 \Rightarrow \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 \Rightarrow \delta = 2\pi m \pm \frac{\delta}{2}$

$$\left| \sin \frac{\delta \pm \delta/2}{2} \right| = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \sin \left(\pm \frac{\delta}{4} \right) = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \Rightarrow$$

$$\delta \approx \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \Rightarrow d\theta = \frac{\delta \lambda}{4\pi h \sin \theta} \quad \delta m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{(1-R)}{\pi \sqrt{R}} = F$$

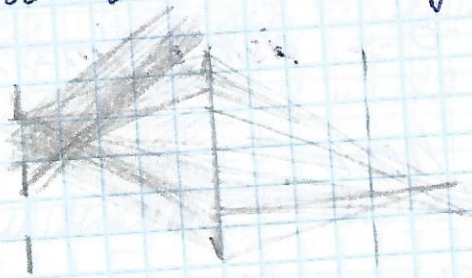
F - резкость. $R: \theta = m\lambda + \lambda \delta m \Rightarrow R = \frac{\lambda m}{\lambda \delta m} = m F$

20. Дифракционная теория формирования изображений. Разрешающая способность микроскопа и телескопа. Метод фазового контраста, метод темного поля.

Аббе: объектив микроскопа дает тем лучше изображение, чем больше его диаметр. Сущность теории Аббе, точнее фокусирующее изображение можно разделить на 2 этапа.

1. Формирование распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы - картина дифракции Фраунгофера на объекте.

2. Формирование распределения интенсивности интерференции волн, источниками которых можно считать дифракционные максимумы



световая волна, прошедшая сквозь дифракционную решетку, имеет дискретный набор максимумов, каждый из которых соответствует максимуму в волне, напр. по определенным углам дифракции. При формировании изображений наблюдается эффект потери четкости - эффект виньетирования.

Угол дифракции падает от 0 до 90°. Поэтому сквозь объектив пройдут не все волновые

волны дифрагируют на мелких деталях, напр. на больших углах. Именно они могут не попасть в апертуру объектива.

Распределение интенсивности - фурье-преобр. поле - фурье-анализ. Благодаря дальнейшему распространению, волны перекрываются и интерферируют. - фурье-синтез

Пусть на объектив падает плоская волна. В фокальной плоскости получим распределение максимумов и минимумов. $\sin \varphi = 1,22 \lambda$

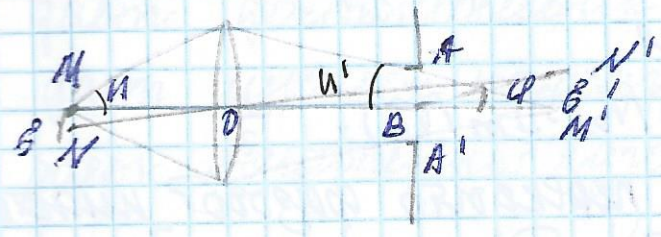
$r = f \sin \varphi$ - радиус первого темного кольца.
($r = 0,61 \lambda$ - диск Эйри)

При расположении максимумов, соотв. критерию Рэли, угол φ радиус первого темного кольца φ равен угл. расст. φ .

$$\sin \varphi = \sin \varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{D}$$

Разрешающая сила $A = \frac{1}{\varphi} = \frac{D}{0,61 \lambda}$

Для микроскопа разрешающая способность Δr определяется минимальными размерами деталей.



$$AA' \sin \varphi = 1,22 \lambda$$

$$\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{AA'}$$

$$\delta' = \varphi \sin \varphi = 1,22 \frac{\lambda \sin \varphi}{AA'}$$

$$\frac{AA'}{BM'} = 2u' \Rightarrow \delta' = \frac{0,61 \lambda}{u'} \Rightarrow \delta' u' = 0,61 \lambda$$

$$\delta' n \sin u = \delta' n' \sin u'$$

$$\delta = \frac{\delta' n'}{n \sin u} = \frac{0,61 \lambda}{n \sin u}$$

δ - числовое отверстие
апертура

Принцип теневого поля: устранение прямых лучей и направление дифрагированных.

При перекрытии максимума нулевого порядка: максимум несет информацию о среднем значении амплитуды $E_0 = \frac{1}{\tau} \int \rho(x) dx$.

Пусть ρ : 

В рез. перекрытии амплитуда в нулевой точке уменьшится на E_0 : $\rho - E_0$. $J_{\text{св}} \sim (1 - E_0)^2$ $J_{\text{т}} \sim E_0^2$

Если ширина светового пучка меньше, то $E_0 < \frac{1}{2}$.

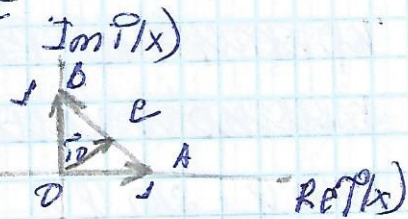
Если $E_0 > \frac{1}{2}$, то меньше света попадает в нуль. Если $E_0 = \frac{1}{2}$, то изобр. инвертируется.

Пусть $|\rho(x)| = 1$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$; $\tau(x) = e^{i\varphi(x)}$

$J \sim |\rho(x)|^2$, $J \neq I(\varphi) \Rightarrow J = \text{const}$

ρ_0 - комплексное число.

$\text{Re}(\rho_0) = 1 - E_0$, $\text{Im}(\rho_0) = E_0$.

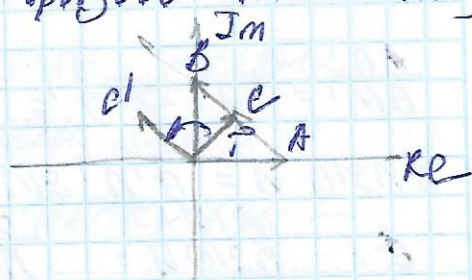


В результате перекрытия нулевого порядка амплитуда уменьшится на E_0 и изменит фазу $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

это приведет к повсеместно инвертированному методу теневого поля.

Если $E_0 = \frac{1}{2}$, то $\text{Re}(\rho_0) = \text{Im}(\rho_0) = \frac{1}{2}$.

Максимум - в точке перекрытия фазового множителя, вносящего $\Delta\varphi$ (напр $\frac{\pi}{2}$). Тогда амплитуда станет $\sqrt{E_0 + E_0}$ и $\sqrt{E_0 + E_0}$.



и изображение инвертируется.

дл. Гомографии. Основные схемы записи гомографии и восстановления изображений.

При измерении интенсивности излучения теряется информация о фазе. Информацию можно сохранить при интерференции, когда происходит преобразование фазовых соотношений в ампл. структуру ИК.

На приемник следует направить волну от объекта и опорную волну.

Гомография - метод регистрации фазы и ее восстановления.

Классическая схема. Плоская волна от монохроматического источника падает на объект и на зеркало. Волны образуют интерференционную картину на фотопластинке.

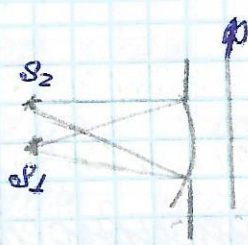
После проявления гомография освещают широким пучком. Формируются несколько пучков:

1. дает действительное изображение на экране
2. дает мнимое изображение, напр. мазом
3. дает реальный пучок

И на пластинке в момент освещения формируется множество дифракц. решеток

Гомография обычно записывают во встречных пучках. Это позволяет создавать только мнимое изображение.

Пример:



фаза несет информацию
о локализации источника.
Потери фазы - потеря
информации.

Плоская волна

Путь на экран H наудет плоская волна



H опорная волна O .

На экране образуется интерференция:
картина, имеющая вид параллельных

полос. Расстояние между полосами $B = \frac{\lambda}{2\varphi}$

Таким образом, измерив B на фотопластинке,
можно определить φ и определить смещение
волны относительно опорной.

Сферическая волна



φ плоскости H наблюдается ИК

φ в виде колец.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r^2}{2R} + \varphi_0$$

$R = SO$, r - радиус кольца.

Положение светлых колец находится из
условия $r_n = \sqrt{2\lambda R n}$, $n = n_1 - \frac{\varphi_0}{2\pi}$.

Измерив радиус кольца можно вычислить

$$R = \frac{r^2}{2\lambda n} \text{ и определить положение}$$

источника.

Голограмма Френеля



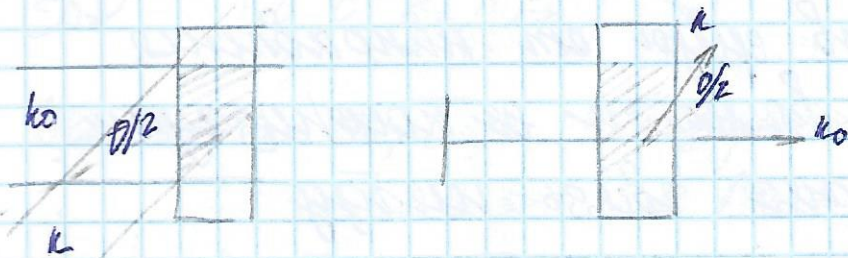
Голограмма - полученная

интерференционная картина

Изображение формируется в результате
просветления голограммы лазерным пучком

Объемные голограммы (метод Денсюка)

В свое фотоэмульсии, имеющей толщину, образуета трехмерная структура помешений, т.к. интерференционная поле не локализовано.



В методе используется брэгговское отражение просветляющей волны от трехмерной структуры голограммы.

Обеими светом разных λ можно получить цветную голограмму.

Один из методов прикладной голографии - голографическая интерферометрия.

На одну пластинку регистрируются два изображения. Такими образом исследуются деформации, вращение, вращение, неоднородности прозрачных объектов.

рр. Распространение света в анизотропной среде.
 Мат. уравнение, тензор диэ. проницаемости. Главные осн. соотношение между \vec{D} и \vec{E} . Двухлучевое распространение света: построение с помощью лучевой поверхности.

Оптическая анизотропия - зависимость оптических свойств среды от направления распространения волны и ее поляризации.

В общем случае связь между векторами \vec{D} и \vec{E} тензорная

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

где матрица размера 3×3 симметрична. В выбранной системе координат матрицу можно считать диагональной

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Диагональные значения тензора диэлектрической проницаемости - главные значения, главные диэлектрические проницаемости анизотропной среды. Соответствующие направления осей - главные направления среды.

Таким образом, в общем случае \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны. α - угол между \vec{D} и \vec{E}

Уравнение Максвелла в отсутствие токов и зарядов:

$$\text{div } \vec{D} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0; \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{11/17-23}$$

Решение в виде плоских волн: $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\text{div } \vec{A} = -i(\vec{k} \cdot \vec{A}) \quad \text{rot } \vec{A} = -i[\vec{k} \times \vec{A}]; \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A}$$

$$\text{Когда: } (\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{D}}) = 0$$

$$-i[\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}] = i\omega \bar{\mathbf{D}}$$

$$(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{B}}) = 0$$

$$-i[\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}] = i\omega \bar{\mathbf{B}}$$

Материальное уравнение:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{K}} \quad (\text{магнитно анизотропия нет})$$

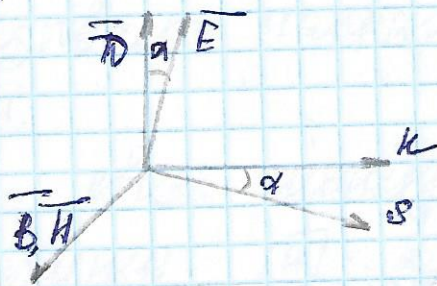
$$\begin{pmatrix} \bar{D}_x \\ \bar{D}_y \\ \bar{D}_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\bar{\mathbf{D}} \text{ и } \bar{\mathbf{E}} \text{ не сонаправлены})$$

Векторы $\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{k}}$ образуют правую тройку

$$\bar{\mathbf{E}} \perp \bar{\mathbf{B}} \Rightarrow \bar{\mathbf{E}} \in (\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{k}})$$

$$\bar{\mathbf{S}} = [\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}] \perp \bar{\mathbf{B}} \Rightarrow \bar{\mathbf{S}} \in (\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{k}})$$

Таким образом, векторы в анизотропном среде распространяются следующим образом



Если изменение состояния поляризации волны, распространяющейся в определенном направлении, не происходит, то эти направления называются оптическими осями.

Волны в одноосном среде вдоль оптической оси могут распространяться волны в любом состоянии поляризации.

Но если ϵ могут распространяться только волны, линейно поляризованы.

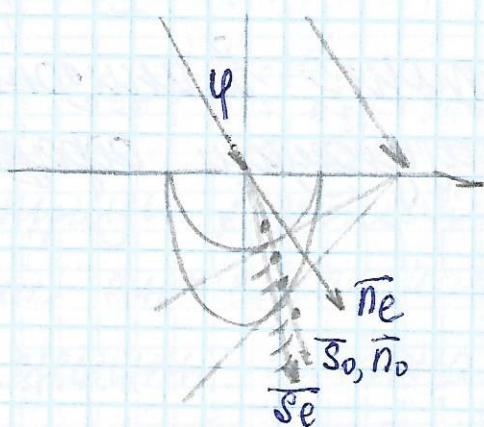
В одном из двух направлений:

перпендикулярно плоскости главного сечения - обыкновенная волна,

В кристалле двоякого луча - необыкновенная волна e зависящая от φ фазовой скоростью

лучевая поверхность - поверхность равных фаз для волн, исходящих одновременно из центра эллипсоида во всех направлениях.

φ используют для построения хода лучей при преломлении на границе анизотропно среды и изотропно - построение Брюстера.



Лучи, проведенные в точки касания, дают направления распространения лучей (s_o и s_e)

Касательные - фронт волны (n_o и n_e)

1) Вывучепреломление:

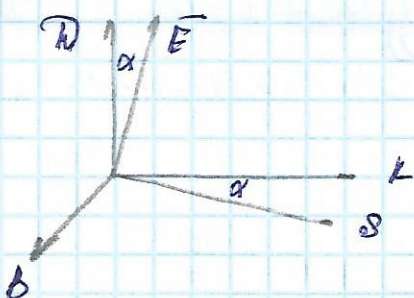
1670г. Франц Бартолин. Ввел на кристалле из исландского шпата нормально направит лучи света, но на выходе будут наблюдаться два луча.

Один проходит без отклонения - обыкновенный o)

Второй испытывает преломление - необыкновенный e)

23. Распространение света в анизотропной среде. фазовая и лучевая скорости.

Уравнения Френеля для фазовых и лучевых скоростей.



$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} - \text{нормаль к фронту}$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} - \text{лучевой вектор}$$

\vec{v} - фазовая скорость, сонаправлена с вектором \vec{n} , указывающим направление распространения фронта волны.

\vec{v} - лучевая скорость, сонаправлена с вектором \vec{s} , указывает направление распространения энергии.

Можно вывести связь между фазовой и лучевой скоростями: $|\vec{v}| = \frac{v_{ph}}{|\vec{n}|} = \frac{v_{gr}}{|\vec{s}|}$

Перепишем уравнение $-i[\vec{k} \times \vec{H}] = i\omega \vec{D}$

$$-i[\vec{n} \times \vec{E}] = i\omega \vec{B}$$

В виде: $[\vec{n} \times \vec{H}] = -\frac{\omega}{k} \vec{D}$; $[\vec{n} \times \vec{E}] = \frac{\omega}{k} \vec{B}$

$\frac{\omega}{k} = v$ - фазовая скорость

$$\vec{B} = \frac{1}{v} [\vec{n} \times \vec{B}]: \frac{1}{v} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = -v \vec{D}$$

$$\vec{D} = \frac{1}{v^2} \cdot \epsilon_0 \cdot (\vec{E} - \vec{n} \cdot \vec{n} \cdot \vec{E})$$

Из этого уравнения можно получить выражение для v в зависимости от \vec{n}

Величины $v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$, $v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$, $v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$ - главные скорости распространения

света в кристалле - скорости волны поперечной в заданном направлении

где x -координата и учетом $E_x = \frac{D_x}{\epsilon_x \epsilon_0}$:

$$D_x = \frac{\epsilon^2}{V^2} \cdot \epsilon_0 \left(\frac{D_x}{\epsilon_x \epsilon_0} - n_x (\vec{n} \cdot \vec{E}) \right)$$

$$D_x \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_x V^2} \right) = \frac{\epsilon^2}{V^2} \epsilon_0 (-n_x (\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

$$D_x \left(1 - \frac{V_x^2}{V^2} \right) = \frac{\epsilon^2}{V^2} \epsilon_0 (-n_x (\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

$$D_x (V^2 - V_x^2) = \epsilon^2 \epsilon_0 (-n_x (\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

$$D_x = \frac{-n_x}{V^2 - V_x^2} \epsilon^2 \epsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E})$$

$$n_x D_x = -\frac{n_x^2}{V^2 - V_x^2} \epsilon^2 \epsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E})$$

Аналогично для y и z -компонент

$$(\vec{n} \cdot \vec{D}) = 0 = \left(\frac{-n_x^2}{V^2 - V_x^2} - \frac{n_y^2}{V^2 - V_y^2} - \frac{n_z^2}{V^2 - V_z^2} \right) \epsilon^2 \epsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E})$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{V_i^2 - V^2} = 0} \text{ - уравнение Френеля для фазовых скоростей}$$

Уравнение биквадратное, существуют два решения, то есть в каждом направлении, задаваемом вектором \vec{n} , найдутся две волны, каждая со своей фазовой скоростью V^I и V^{II} .

$$\vec{D}^I \cdot \vec{D}^{II} = \frac{\epsilon^2}{V^{I2}} \cdot \epsilon_0 \vec{E}^I \cdot \vec{D}^{II}, \quad \vec{D}^{II} \cdot \vec{D}^I = \frac{\epsilon^2}{V^{II2}} \cdot \epsilon_0 \vec{E}^{II} \cdot \vec{D}^I$$

$$\vec{E}^I \cdot \vec{D}^{II} = \vec{E}^{II} \cdot \vec{D}^I$$

$$V^I \vec{D}^I \cdot \vec{D}^{II} = V^{II2} \vec{D}^{II} \cdot \vec{D}^I \Rightarrow (V^{I2} - V^{II2}) (\vec{D}^I \cdot \vec{D}^{II}) = 0$$

$$\vec{D}^I \cdot \vec{D}^{II} = 0$$

Векторы имеют взаимно ортогональные собственные поляризации
асимметрическая интерпретация -
анализ векторов нормалей.

$$\boxed{\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1}$$

Для нахождения лучевой скорости:

$$[\vec{n} \times \vec{H}] = -v \vec{D}$$

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = v \vec{B}$$

$$[\vec{s} [\vec{n} \times \vec{H}]] = -v [\vec{s} \times \vec{D}]$$

$$[\vec{s} [\vec{n} \times \vec{E}]] = v [\vec{s} \times \vec{B}]$$

$$\vec{n} / (\vec{s} \cdot \vec{n}) - \vec{n} / (\vec{s} \cdot \vec{n}) = -v [\vec{s} \times \vec{D}]$$

$$\vec{n} / (\vec{s} \cdot \vec{E}) - \vec{E} / (\vec{s} \cdot \vec{n}) = v [\vec{s} \times \vec{B}]$$

$$\vec{n} / (\vec{s} \cdot \vec{n}) = v [\vec{s} \times \vec{D}]$$

$$-\vec{E} / (\vec{s} \cdot \vec{n}) = v [\vec{s} \times \vec{B}]$$

$$n = \frac{v}{(\vec{s} \cdot \vec{n})} \Rightarrow$$

$$H = n [\vec{s} \times \vec{D}]$$

$$E = -n [\vec{s} \times \vec{B}]$$

$$B = \mu_0 \mu [\vec{s} \times \vec{D}] \Rightarrow \vec{E} = -\mu_0 \mu^2 [\vec{s} \times [\vec{s} \times \vec{D}]]$$

$$\vec{E} = \frac{\mu^2}{\epsilon^2 \epsilon_0} (\vec{D} - \vec{s} (\vec{s} \cdot \vec{D}))$$

таким же, как и для фазовой скорости, получаем $\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2 \mu^2}{v_i^2 - \mu^2} = 0$ уравнение Френеля

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 3 \quad \text{— эллипсоид лучевой скорости}$$

В каждом направлении, задаваемом вектором \vec{s} , распространяются две взаимно перпендикулярные волны.

еще. Эллипсоид лучевых скоростей. Оптическая ось. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Лучевая поверхность. Принцип Гюйгенса - Френеля для анизотропной среды

Уравнение Френеля для лучевых скоростей

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0.$$

Чешетки гекса интерпретации - эллипсоид лучевых скоростей.

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1.$$

Для лучевого эллипсоида в кристаллах низших симметрий существуют два круговых сечения. Для волн, распространяющихся в направлениях S_1 и S_2 , перпендикулярных к этим сечениям, скорость не зависит от состояния их поляризации - изменение состояния поляризации не происходит.

Такие направления называются оптическими осями кристалла, а сами кристаллы - двuosными.

Для эллипсоида в двух одинаковых направлениях существует одно круговое сечение, причем это направление распространения перпендикулярное этому сечению, совпадает с третьей осью. - одноосный.

Пусть $v_x \neq v_y = v_z$. $v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} \neq v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} = v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$

Ось кристалла совпадает с осью Ox .

Вдоль этого направления шло бы волна распространяется со скоростью $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$ — обыкновенная волна.

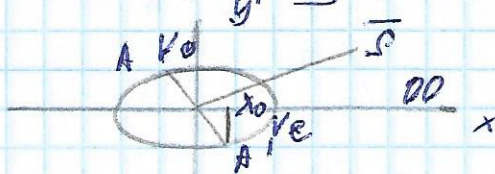
Для любого другого \vec{s} всегда имеет форму эллипса, одна из осей которого всегда v_o . Эта ось будет перпендикулярна к плоскости, образованной \vec{s} и OO_z — плоскость главного сечения.

Для второй волны $n = n(\theta)$ — необыкновенная поляризована в плоскости главного сечения.

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} < n < v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$$

$v_o > v_e$ — положительной

$v_o < v_e$ — отрицательной



— сечение плоскостью xOy .

$$\frac{x^2}{v_e^2} + \frac{y^2}{v_o^2} = 1$$

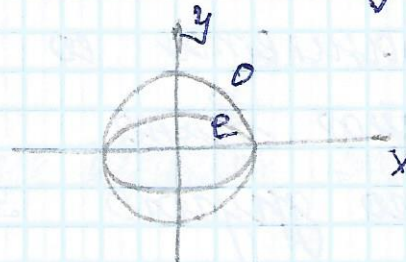
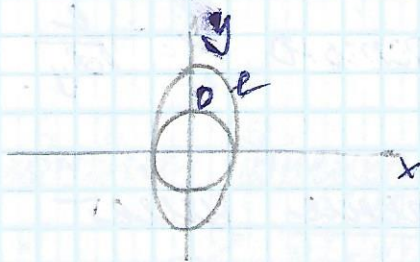
$$x_o^2 \left(\frac{1}{v_e^2} + \frac{\epsilon \tan^2 \theta}{v_o^2} \right) = 1 \Rightarrow n^2(\theta) \sin^2 \theta \left(\frac{1}{v_e^2} + \frac{\epsilon \tan^2 \theta}{v_o^2} \right) = 1$$

$$n^2(\theta) \left(\frac{\sin^2 \theta}{v_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{v_o^2} \right) = 1 \Rightarrow n^2(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{v_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{v_o^2}$$

Рассмотрим источник внутри одноосного кристалла и построим поверхность, до которой дойдут лучи. Поверхность лучевая поверхность будет представлять собой совокупность сфер и эллипсоидов. Сфера и эллипсоид будут касаться друг друга всего в двух точках, лежащих на OO_z .

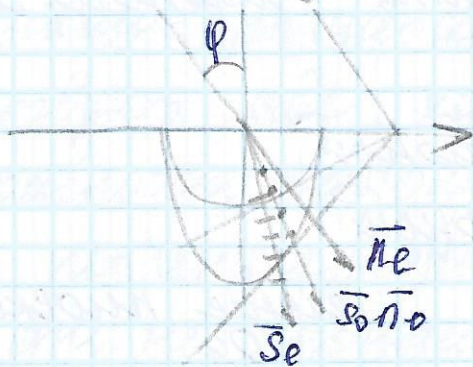
Если $v_0 < v_e$ - отрицательно? - эллипсоид
будет охватывать сферу (сфера в тени)

$v_0 > v_e$ - положительный - лево в сфере



Принцип Гюгенса - Френеля применяется
и для анизотропных сред и используется
для построения хода лучей при преломлении
в виде построения Гюгенса

(Фронт не лучи, интерференция нет)



р.б. Поверхностные устройства. Пластики $\frac{\lambda}{4}$ и $\frac{\lambda}{2}$. Интерференция поляризованных волн

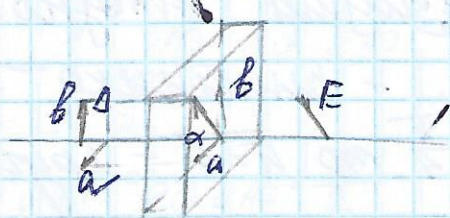
Пусть пластинка вырезана параллельно опт. оси. Направим нормально к поверхности лп волну, плоскость поляризации которой составляет угол α с главными осями кристалла.

Разложим падающую волну на две составляющие

амплитуда (II) $A = |E_0| \cos \alpha$

(I) $B = |E_0| \sin \alpha$

Через кристалл с различной скоростью будут распространяться две волны, поляризованные взаимно перпендикулярных направлениях — главные направления пластинки



Если толщина пластинки d , то

опт. разность хода $\Delta = (n_e - n_o)d$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)d$$

Пусть $n_e - n_o > 0$. В зависимости от угла α и разности фаз δ поляризации выходящей волны будет различно.

1. $\alpha = 0$ или $\frac{\pi}{2}$; δ - любое

Состояние поляризации и амплитуда волны после прохождения кристалла не изменится

2. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta = 2\pi m$, $\Delta\varphi = 0$.

Вошлинни поперизауни и амплитуда
волна не изменител, т.е. $\Delta\varphi = m2\pi$

3. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pi + 2\pi m$, $\Delta\varphi = \pi$

Входяща волна остане лп, но
плоскост поперизауни повернетел на угол 2α
- табличка $\frac{\lambda}{2}$.

Соответствующая разность хода $\Delta = \frac{\lambda}{2} + \lambda m$

4. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Необыкновенная волна становится обыкновенной.

но фазе на $\frac{\pi}{2}$, поэтому на выходе
наблюдается эллиптически поперизованная
волна, ось эллипса ориентирована по
направлению поперизауни исходных
составляющих волна. - табличка $\frac{\lambda}{4}$.

($\Delta = \frac{\lambda}{4} + \lambda m$) Если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $a = b$ - круговая
поперизауни.

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ - право попер. волна.

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $\delta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ } $\lambda/4$.

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $\delta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

В общем случае $\Delta = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda m}{2}$

Независимо от толщины таблички, ее
ориентации, состояни поперизауни
падающего пучка интенсивность пучка
на выходе из таблички не изменител.

интерференция когерентных волн
 волн на пути прошедшего через
 пластинку света помещается
 поперек - анализатор, направление
 пропускания которого составляет угол θ
 с осью Ox , то проекции компоненты E_x и E_y
 на это направление будут интерферировать.

в результате

$$I(\alpha, \beta, \varphi) = I_0 [\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos \varphi / (1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})]$$

$$I(\alpha, \beta, \varphi) = I_0 [(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}]$$

Если $\beta = \alpha - \theta$:

$$I(\alpha) = I_0 [\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\varphi}{2}]$$

В частности, если $\beta = 0$

$$I_H = I_0 [1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}]$$

Если $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$I_V = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$I_H + I_V = I_0$$



26. Анизотропия оптических свойств, индуциров.
механической деформацией, электрическим
и магнитными полями.

Многие оптически изотропные тела
состоят из анизотропных молекул или
других структурных элементов, хаотич.
ориентированных в пространстве.
В результате внешнего воздействия, создающего
физически выделенное направление в пространстве,
такая среда может стать анизотропной.

Двойное лучепреломление при механической
деформации. Брюстер, 1815 - фотоупругость.
При растяжении или сжатии направление
деформации становится выделенным
и играет роль оптической оси.

Распространяющиеся перпендикулярно оси
лучи O и E приобретают Δn , свет
становится эллиптически поляризованным.
($n_o - n_e$) пропорциональна механической
напряженности.

Возникновение анизотропии во внешнем
электрическом поле. Керр, 1875.

Эффект Керра.

Заполненный жидкостью сосуд
конденсатор помещают между
скрещенными поляризаторами так, что
при отсутствии поля свет через

материю не проходит. При наложении
поле среда становится оптически
анизотропной. Выходящий из конденсатора
свет поляризован эллиптически и
частично проходит через поляризатор.
Вводя конденсатор можно измерить
разность фаз, и $(n_e - n_o)$

$$(n_e - n_o) = k E^2$$

$$\varphi = \frac{2\pi E}{\lambda} (n_e - n_o) = 2\pi V E^2, \quad V = \frac{k}{\lambda} - \text{коэффициент Керра}$$

Изменение оптических характеристик
кристалла под действием внешнего
электрического поля - электрооптический
эффект Поккельса. Если кристалл
не обладает центром симметрии, то
при наложении внешнего поля
вдоль этой оси фазовые скорости
становятся различными.

Если анизотропные молекулы среды
обладают постоянными магнитными
моментами, то их ориентированная
ориентация может быть воздана
магнитным полем. В сильных
полях среда становится анизотропной.
- эффект Коттона - Мутона 1905г.

Эффект Фарадея: при распространении
лп света через оптически неактивное
вещество в магнитном поле.

наблюдается вращение плоскости поляризации

27. Дисперсия света. Классическая электронная теория дисперсии. Комплексный показатель преломления. Зависимость n и d газов от ω . Нормальная и аномальная дисперсия. Закон Бугера

Для однородной изотропной среды в отсутствие зарядов и токов из уравнений Максвелла можно получить волновое уравнение в виде: $\Delta E = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$
Решение ищем в виде плоской монохромной волны: $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$

частота ω и k , модуль волнового вектора должны удовлетворять дисперсионному уравнению: $k^2 = \frac{\omega^2}{\epsilon^2 \epsilon_0}$
среда называется диспергирующей, если $\epsilon = \epsilon(\omega)$

В диспергирующих средах $V_{ф} = V(\omega)$
Дисперсия объясняется тем, что среда под действием электрического поля волны поляризуется по-разному для различных частот.

В общем случае $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$
т.к. $D = \epsilon_0 \epsilon E$, то $|\epsilon| = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}$ определяет амплитуду D , а $\arg \epsilon = -\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ характеризует разность фаз между D и E .

Для прозрачных (непоглощающих) сред $\epsilon'' = 0$, тогда $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} n(\omega)$
 $V = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$

Вектор k можно представить

в виде $k = k' - i k''$
 Тогда $E = E_0 e^{-k' r} e^{i(\omega t - k' r)}$

Свойства среды в поле световой волны принято характеризовать с помощью показателя преломления n :

$k' = \frac{\omega}{c} n$, от которого зависит $v_{ф} = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n}$

ω показатель поглощения / экстинкции

$k'' = \frac{\omega}{c} \kappa$

Поскольку $I \sim E^2$, $I = I_0 e^{-2\alpha r}$, где

$\alpha = \frac{\omega}{c} \kappa$ - коэффициент поглощения,

не зависящий от интенсивности световой волны - закон Бугера.

$\kappa = n - i\alpha = \sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}$

$n^2 = \frac{1}{2} \epsilon' \left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2}} + 1 \right)$

$\alpha^2 = \frac{1}{2} \epsilon' \left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2}} - 1 \right)$

Если $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1$ - диэлектрик, то $n \approx \sqrt{\epsilon'}$, $\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon''}{\sqrt{\epsilon'}}$

Если $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \gg 1$ - проводник, то $n \approx \alpha = \sqrt{\frac{\epsilon''}{2}}$

Основные закономерности распространения света в среде зачастую удается описать с помощью модели среды как ансамбля гармонически осциллирующих - модель Лоренца

Уравнение движения оптического электрона

$m \ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E(t)$

Если $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$, то ищем решение $r = r_0 e^{i\omega t}$

$$\gamma_0(t) = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} E_0$$

т.к. дипольный момент $\vec{p} = -e\vec{r}_0$, поперечная составляющая $\vec{p} = N\vec{p}$, $\vec{P} = \chi(\omega) \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon(\omega) - 1) \epsilon_0 \vec{E}$

$$\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad \text{— закон Дисперсии}$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \quad \text{— плазменная частота}$$

Для разреженных газов можно считать, что

$$\omega_0 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) = 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

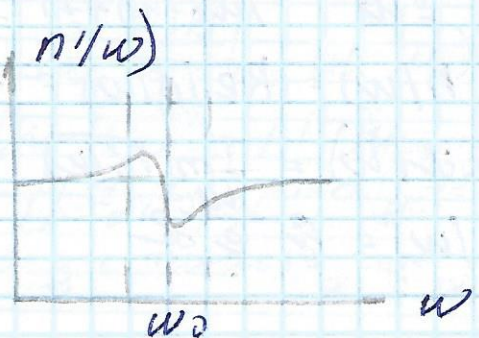
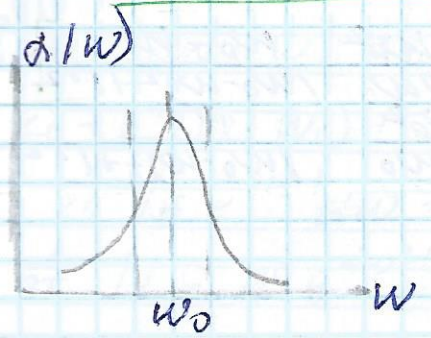
$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - 2i\gamma\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma}$$

$$= 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{(\omega_0 - \omega) + i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

$$n(\omega) = \text{Re} \sqrt{\epsilon(\omega)} = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

$$k(\omega) = \text{Im} \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

$$a(\omega) = v \frac{\omega}{c} k$$



В полосе шириной $\Delta\omega = \gamma$ где

$\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ — область аномальной дисперсии ($n < 1$)

вне полосы поглощения $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ — область

нормальной дисперсии

Если $\omega \ll \omega_0$, то $(\epsilon(\omega) - 1) \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

$$n - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \left[\frac{A}{1 + \frac{B}{\lambda^2}} \right] \quad \text{— формула Коши}$$

28. Распространение света в диспергирующей среде. Зависимость $n(\omega)$ фазовая и групповая скорости, их соотношения. Расщепление волновых пакетов в диспергирующей среде.

В рамках модели Лоренца для зависимости восприимчивости $\chi(\omega)$ имеет вид:

$$\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - \epsilon = \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\Gamma\omega}, \text{ где}$$

$$\omega_p^2 = \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \text{ — плазменная частота.}$$

Для разреженных газов формулы резонансной частоты ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$) можно считать, что:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \text{ и } \omega \approx \omega_0$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i\Gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i\Gamma}$$

$$n(\omega) = \text{Re} \sqrt{\epsilon(\omega)} = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}$$

$$k(\omega) = \text{Im} \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}$$

$$a(\omega) = e^{-kz}$$

Если $\omega \ll \omega_0$, затухание мало, $\epsilon(\omega) - \epsilon \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$
 $n - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{A}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ — формула Коши

Если в среде присутствует несколько видов гармонических осцилляторов, то формула для $\epsilon(\omega)$ примет вид

$$\epsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_j \omega}$$

$f_j = \frac{N_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j}$ — сила j -го осциллятора

т.к. $v_{ph} = v/n$, то в среде с дисперсией $v_{gr} = \frac{v}{k'(\omega)}$, значит, при распространении импульса его формула может существенно искажаться.

Пусть распространяются две волны:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 z) \quad E_2 = E_0 \sin(\omega_2 t - k_2 z)$$

$\omega_1 \approx \omega_2, \quad k_1 \approx k_2$

Для незатухающей волны:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2 E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z\right) \sin(\omega_0 t - k_0 z)}{\text{среднему } \omega_0, \text{ групповая } v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}}$$

Строим график:

квадратичная амплитудный импульс: $E_0 = A_0(t) e^{-i\omega t}$

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int F_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad F_0 = \int E_0(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

Будем считать, что импульс нех: $F(\omega, z) = F_0 e^{-ikz}$

Если $\Delta\omega \ll \omega_0$: $k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2}|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2$ (1-член произвольная)

$$E = \frac{1}{2\pi} \int F e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int E_0(t') e^{-i\omega t'} e^{-ikz} e^{i\omega t} d\omega dt'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int E_0(t') e^{-i\omega t'} e^{-ik_0 z} e^{-i k'(\omega - \omega_0) z} e^{i\omega t} d\omega dt'$$

$$\int e^{-i\omega t'} e^{-ik'(\omega - \omega_0) z} e^{i\omega t} d\omega = \int e^{-i\omega(t' + k'z - t)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \delta(t' + k'z - t)$$

$$E(t, z) = \int E_0(t') e^{-ik_0 z} e^{+ik' \omega_0 z} \delta(t' + k'z - t) dt' = E_0(t - k'z) e^{-ik_0 z} e^{ik' \omega_0 z}$$

$$E(t, z) = A_0(t - k'z) e^{i\omega_0(t - k'z)} e^{-ik_0 z} e^{ik' \omega_0 z} = A_0(t - k'z) e^{i\omega_0 t - ik_0 z}$$

Поверхность постоянной фазы распространяется со скоростью $v = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k'} = \frac{v}{n}$

$$v = v \cdot k(\omega)$$

$$v = \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{dk} \cdot k(\omega)$$

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{v}{k}$$

$$v = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad \text{— формула Рэлея}$$

$$v_k = \omega / k$$

$$v_{dk} = d\omega / dk = \omega / k + \omega \frac{dn}{n} / \omega$$

$$\frac{v}{v_k} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad \text{или} \quad n = \frac{v}{v_k} = \frac{v}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = 1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}$$

В области аномальной дисперсии $n > v$, но из-за сильного поглощения и терять смысла.

Расширение волнового пакета

Пусть в диспергирующей среде распространяется световой импульс длительностью τ ,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Пусть импульс - совокупность двух волновых пакетов с групповыми скоростями,

заданными для граничных частот:

$$v_{g1} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_1} \quad v_{g2} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_2}$$

На расстоянии z разойдутся по времени

$$\Delta t = \frac{z}{v_{g1}} - \frac{z}{v_{g2}}$$

z - дисперсионная длина импульса, если

$$\Delta t = \tau$$

$$\tau = \frac{z}{v_{g1}} - \frac{z}{v_{g2}} = z \left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}} \right) = z \left(\frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_1} - \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_2} \right) =$$

$$= z \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \Big|_{\omega} \right) \Delta\omega = z \cdot k'' \frac{2\pi}{\tau}$$

$$z_g = \frac{\tau^2}{2\pi k''}$$

2.9. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. формулы Френеля, поляризация отраженнои и прошедшей волн. Угол Брюстера

М.к. свет - электромагнитная волна, но должны выполняться граничные условия:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\nu 1} = H_{\nu 2}$$

$$E = vH = v \frac{c}{n}$$

Величины магнитные свойства одинаковы $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

Нормальное падение:

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}$$

$$H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}}$$

$$n_1 (E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}) = n_2 E_{\text{пр}}$$

$$r = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Закон сохранения энергии:

$$S_{\text{пад}} = S_{\text{отр}} + S_{\text{пр}} \quad n_1 E^2 \sim n_1 \bar{H}$$

$$R = \frac{S_{\text{отр}}}{S_{\text{пад}}} = r^2, \quad T = \frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{пад}}} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \cdot t^2$$

Для НН $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

Из ЗСЭ: $J_{\text{пад}} \cos \theta_1 = J_{\text{отр}} \cos \theta_1 + J_{\text{пр}} \cos \theta_2$

$$J_{\text{пад}} = J_{\text{отр}} + J_{\text{пр}} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

Общий случай: $\vec{E}_1(r, t) = E_1 e^{i(\omega t - k_1 r)}$

падает под углом θ_1 , азимут поляризации α_1

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^s + \vec{E}_1^p, \quad E_1^s = E_1 \sin \alpha_1, \quad E_1^p = E_1 \cos \alpha_1$$

Преломленная: $\vec{E}_2(r, t) = E_2 e^{i(\omega t - k_2 r)}$

Отраженная: $\vec{E}_3(r, t) = E_3 e^{i(\omega t - k_3 r)}$

вещу непрерывности E_{τ} и H_{ν} :

$$k_{1x} = k_{3x} = k_{2x}$$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_3$ - закон отражения

$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ - закон преломления
 При углах $\theta_1 > \theta_{кр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ имеет место ПВО



Формулы Френеля:

$$r_s = \frac{E_s^R}{E_s^I} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t_s = \frac{E_s^T}{E_s^I} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$r_p = \frac{E_p^R}{E_p^I} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

$$t_p = \frac{E_p^T}{E_p^I} = \frac{2n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

$$r_s = - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_s = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

При $\theta_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \theta_{кр}$ р-компонента не испытывает отражения.

$\theta_{кр}$ - угол Брюстера

Степень потерь в дБ при отражении света:

$$\Delta_2 = \frac{J_2^S - J_2^D}{J_2^S + J_2^D}$$

отраженного $\Delta_3 = \frac{J_3^S - J_3^P}{J_3^S + J_3^P}$

Для естественного света.

$$\Delta_2 = \frac{r_s^2 - r_p^2}{r_s^2 + r_p^2}$$

$$\Delta_3 = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2}$$

и формулы преобразования:

$$E_{11} - E_{31} = E_{21} \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \quad (1)$$

$$E_{11} + E_{31} = E_{21} \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} \quad (2)$$

$$1+2: \quad \tau_{11} = \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_3}{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_3}$$

$$\frac{1}{2}: \quad \tau_{11} = \frac{\tau_1 (\alpha_1 - \alpha_3)}{\tau_1 (\alpha_1 + \alpha_3)}$$

$$E_{12} + E_{32} = E_{22} \quad (1)$$

$$E_{12} - E_{32} = E_{22} \frac{\cos \alpha_3 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_3} \quad (2)$$

$$1+2: \quad \tau_{12} = \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_3}{\cos \alpha_3 \sin \alpha_1}$$

$$\frac{1}{2}: \quad \tau_{12} = - \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_3)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_3)}$$

30. Оптические явления на границе раздела изотр. диэлектриков явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

Так как свет представляет собой электромагнитную волну, то при переходе границы раздела должна выполняться граничные условия для электрической и магнитной компонент поля $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$
 $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$

И если магнитное поле перпендикулярно, то $n_1 E_1 = n_2 E_2$

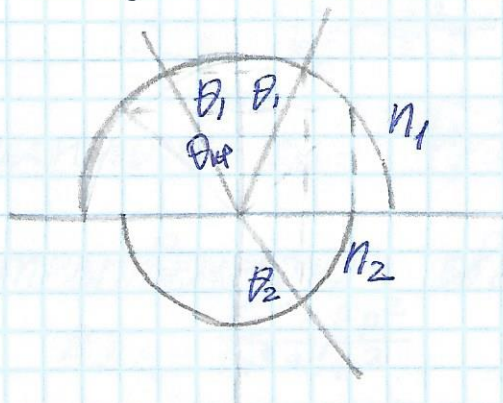
Так как мощность для падающей, отраженной и преломленной волны одна, то закон сохранения энергии выполняется для нормальных компонент вектора Умова - Поттинера.

$$S_{\text{пад}} = S_{\text{отр}} + S_{\text{пр}}$$

Из соотношения $I = \langle S \rangle$ следует:

$$I_{\text{пад}} \cos \theta_1 = I_{\text{отр}} \cos \theta_1 + I_{\text{пр}} \cos \theta_2$$

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + I_{\text{пр}} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$



Если свет падает из оптически более

плотной среды ($n_1 > n_2$), то при углах $\theta_1 \geq \theta_{кр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ имеет место полное внутреннее отражение (нет преломления волн)

Пусть волна интенсивностью I_0 (р-полюс) падает на границу воздух-диэлектрик под углом Брюстера.

$$\Gamma_p = 0 \Rightarrow J_{отр} = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow J_{пр} = J_{пад} \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{J_{пад}}{\tan \theta_1} = \frac{J_{пад}}{n}$$

то есть энергия проходит без потерь, а интенсивность уменьшается в n раз. Это связано с увеличением в n раз

поперечного сечения промежуточного луча. Если аналогичная волна будет падать под углом Брюстера из более

оптической плотности среды, то интенсивность возрастает в n раз.

Поиское внутреннее отражение.

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \sin \theta_1)^2}$$

при $\theta_1 > \theta_{кр}$: $n_1 \sin \theta_1 > n_2$

$$k_{2z} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2} = \pm i k''_{2z}$$

и уравнение преломленной волны имеет вид: $E_2 = E_2 e^{-k''_{2z} z} e^{i(\omega t - k_{1x} x)}$

(+ стороны, $E \neq \infty$)

При ПВО преломленная волна — плоская неоднородная волна, движущаясь вдоль оси x с фазовой скоростью

$$v_{2x} = \frac{\omega}{k_{1x}}$$

Амплитуда экспоненциально затухает

изгибная преломленность Δz в срезу с $n_2 < n_1$ соответствует уменьшению амплитуды в e раз:

$$\Delta z = \frac{1}{k_{z2}} = \frac{e}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}$$

При ПВО преломленная волна существует, но она проникает вглубь на очень маленькое расстояние, при этом энергии не теряется.

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \sin \theta_1)^2} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

тогда $r_s = \frac{a_1 - i a_2}{a_1 + i a_2} = e^{i \varphi_s}$

$r_p = \frac{b_1 - i b_2}{b_1 + i b_2} = e^{i \varphi_p}$, т.е. амплитуда

отраженной волны равна амплитуде падающей $|r_s| = |r_p| = 1$, однако между ними возникнет разность фаз:

$$\frac{\varphi_s}{2} = \frac{k_{z2}}{k_{z1}} = \frac{\sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_p}{2} = \frac{b_1}{b_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{n_1 \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_1}$$

Коэффициенты по энергии:

$$R = \frac{S_{r0}}{S_{i0}} = \frac{I_0}{I_0} = r^2$$

$$T = \frac{S_{t2}}{S_{i1}} = \frac{I_2 \cos \theta_2}{I_1 \cos \theta_1} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} = t^2$$

$$R + T = 1$$

31. Рассеяние света. Рассеяние малыми
частицами. Закон Рэлея. Микатрисса
рассеяния. неспривауиия рассеянного света.
коэффициент рассеяния. Рассеяние Ми.

Электрическое поле распространяющееся
в веществе волны раскачивает входы
в состав атомов и молекулы электроны,
которые становятся центрами вторичных
сферических волн. Поэтому распространение
света в веществе должно сопровождаться
рассеянием.

В однородной среде свет распространяется
только в одном направлении, не
испытывая рассеяния.

☑ Световая волна индуцирует у атомов
дипольные моменты, изменение которых
во времени приводит к излучению когерентных
вторичных волн одинаковой амплитуды.
Излучение вторичных волн дает одну приемную
волну, если все элементарные волны
строго одинаковы. - идеально однородная
среда.

Рассеяние света может быть обусловлено
неоднородностями среды. (Сферические волны
не касаются друг друга). Рассеяние происходит,
и когда частицы имеют размер меньше λ -
муптине среды.

Рассеянный под углом θ и первичному пучку свет имеет λ_0 . Зависимость $I(\theta)$ от направления θ графически изображается индикатриссой рассеяния $I(\theta) \propto 1 + \cos^2 \theta$

Пусть неоднородность создается одинаковыми сферическими частицами. $\rho(z) = \epsilon_0 \alpha$, $E(z)$, где $\alpha = \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} a^3$.

Поле излучения диполя задается соотношениями:

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} [\ddot{p}(z') \times e_r]$$

$$E = e [B \times e_r], \text{ где } \dot{p} = \frac{d^2 p}{dz^2}; e_r = \frac{r}{|r|}, z' = z - \frac{r}{c}$$

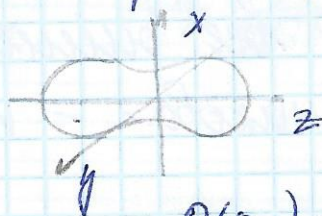
$$I = \frac{w^2 \alpha^2 / w}{4\pi r^2} (1 + \cos^2 \theta) I_0$$

Наша интенсивность проецируется доминирующей на шло частицу N .

Интенсивность рассеяния шутно срезот света $I \propto w^4 (1 + \cos^2 \theta)$ - закон Рэлея.

Если падающая волна, распространяющаяся вдоль оси Oz не поляризована, применим

$I_x = I_y$, то в рассеянном излучении будут присутствовать два "булька"



Степень поляризации:

$$P(\theta_z) = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \frac{1 - \cos^2 \theta_z}{1 + \cos^2 \theta_z} = \frac{\sin^2 \theta_z}{1 + \cos^2 \theta_z}$$

Кошественная характеристика - дифрф.

сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0} = \frac{I d\Omega}{I_0} = \frac{I r^2 d\Omega}{I_0}$$

Если n -концентрация рассеивателей, то интенсивность падающего пучка в результате рассеяния уменьшается по экспоненциальному закону: $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$, где $\alpha = N\sigma$

Упругое рассеяние - рассеяние без изменения частоты.

Рэлеевское рассеяние - упругое рассеяние на неоднородностях, размеры которых существенно меньше λ .

- $I(\theta) \sim \sin^2 \theta$ - для неполяризованного света
- $I(\theta_2) \sim 1 + \cos^2 \theta_2$ - для неполяризованного
- $I(\theta) \sim \omega^4$
- $R(\theta_2) = \frac{\sin^2 \theta_2}{1 + \cos^2 \theta_2}$ (любое небо)

Рассеяние Ми ($\lambda \sim d$)

Можно рассматривать как дифракцию плоской волны на одинаковых однородных сферах, распределенных в однородной среде и находящихся на расстоянии больше λ .

- рассеяние вперед больше
- в юстиции α возникает изрезанный инцидент
- частичная поляризация
- сложная зависимость от λ (туман)

32. Представление о молекулярном рэлиевском
 рассеянии в газах и жидкостях. Купрузове
 рассеяние: комбинационное и Магделъгалма-Бриллюэна.

Опыт показывает, что рассеяние света
 происходит не только в чистых средах, но
 и в тщательно очищенных от посторонних
 веществ или безупречных жидкостях и газах.

Физическая причина (Шоппуховский, 1908г)

Из-за хаотического характера теплового
 движения молекулы в среде возникают
 флуктуации плотности и, следовательно,
 флуктуации показателя преломления -
 молекулярное рассеяние.

Флуктуации плотности этообъекта
 особенно велики вблизи критической точки.
 В этой точке наблюдается интенсивное
 рассеяние - критическое опалесценение.

Полюсное рассеяние вторичных волн происходит
 тогда, когда разность оптических путей от разл.
 ΔV . Из-за флуктуаций N , равна
 амплитуде не будет. $E_i + \delta E_i$ - волна с ΔV :

$$I \sim \left(\sum_i \delta E_i \right)^2 = \sum_j \delta E_i \delta E_j = \sum_{i \neq j} \delta E_i \delta E_j + \sum_i (\delta E_i)^2$$

дополнительной дипольной момент: $\delta_0 \delta E \delta N_i$

$$I \sim (\delta N_i)^2$$

Для полюсного интенсивности получаем

$$I = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \frac{1}{9} (1 + \cos^2 \theta) N V I_0$$

Маленький газ рассеивает так, что интенсивность

Вторичных волн просто складываются,
несмотря на когерентность.

Изменение спектрального состава излучения
при рассеянии обусловлено зависимостью $\nu(\omega)$
При молекулярном рассеянии в спектре
рассеянного излучения наблюдаются добав.
линии - сателлиты. - комбинационное
рассеяние (Мандельштам, Ландсберг, Раман)
Происхождение сателлитов связано
с модуляциям рассеянного света низкоч.
колебаниями атомов

При колебаниях атомов когерентность
изменяется около среднего α_0 в такт
с колебаниями: $\alpha(t) = \alpha_0 + F \cos \omega t$

$P(t) = \alpha(t) E(t) = [\alpha_0 + F \cos \omega t] E_0 \cos \omega t$ - амплитудно-
модулированное колебание. Спектр колебания
состоит из колебаний несущей частоты ω
и колебаний с комбинационными частотами
 $\omega \pm \Omega$: („спектр рассеянного света несет то,
что молекула говорит о себе“)

При рассеянии на флуктуирующей плотности
в твердых телах и жидкостях также
происходит модуляция

Флуктуации плотности можно
рассматривать как фазовые дифр. решетки
Рассеянный свет наблюдается в результате
дифракции на пульсирующих решетках
и оказывается модулированным

Эта промежуточная точка проявляется
в виде катеностов.

$$\frac{D}{\omega} = 2\pi \frac{V}{c} \sin \frac{\theta}{2} - \text{расстояние}$$

Мандельштама - Бриллюэна

3.3. Представление о квантовой теории

излучения света атомами и молекулами

Постулата Бора. Спонтанное и вынужденное
переходы. Коэффициенты Эйнштейна, их взаимосвязь

Постулат Бора - гипотеза Планка +
модель атома Резерфорда.

1) Существуют стационарные состояния атомов, в которых они не излучают и не поглощают свет. В этих состояниях атомы обладают энергией, образующейся дискретно из значений - уровни энергии.

2) Излучение, испускаемое или поглощаемое атомом при переходе с уровня энергии W_n на уровень W_m , монохроматично с частотой ν_{mn} : $h\nu_{mn} = h\nu_{mp} = W_m - W_n$

Гипотеза Эйнштейна (1905) - электромагн.
излучение состоит из отдельных
корпускул - квантов.

квант света - фотон - наименьшая порция
света частота ν , обладающая энергией
 h импульсом: $E = h\nu = \hbar\omega$

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{n} = \hbar \vec{k}$$

Свет частоты ν излучается атомом,
распространяется в пространстве и
вступает во взаимодействие с
веществом в виде локализованной порции
света.

гипотеза о корпускулярных свойствах света
объясняет дифракцию, эффект Комптона.
Вороншировамась теория корпускулярно-волнового дуализма.

Теория излучения и поглощения Эйнштейна.
Будем считать, что у свободного атома
существует набор стационарных состояний.
Пусть атом находится в состоянии
 E_2 . Атом переходит из E_2 в E_1 мгновенно,
испускает квант энергии - спонтанное излучение,
число переходов dN_{21} за время dt :

$$dN_{21} = A_{21} N_2 dt, \text{ где}$$

A_{21} - коэффициент Эйнштейна для спонтанного
излучения.

Если нет процессов возбуждения то
 $N_2(t) = N_{20} e^{-A_{21} t} = N_{20} e^{-t/\tau}$, где $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ -
время жизни

спонтанное излучение некогерентно.
При наличии внешнего излучения атом
может перейти из основного состояния
в возбужденное, поглотив квант света.

$$dN_{12} = B_{12} N_1 M_0 dt \quad \text{И-спектр. плотность}$$

B_{12} - коэффициент Эйнштейна для
поглощения излучения.

Если система атомов находится
в термодинамическом равновесии с излучением,
то число переходов в излучении и число

переходов с помощью действия быть равна
Значит, существует вынужденное излучение.

$$dN_{21} = B_{21} N_2 U_{\omega} dt$$

B_{21} - коэффициент Эйнштейна для вынужд.
излучения

$$dN_{21} = N_2 (A_{21} + B_{21} U_{\omega}) dt$$

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)} = e^{-\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} - \text{Болцман}$$

при $h\nu \ll kT$ можно пренебречь спонтанным
излучением, $N_1 = N_2 \Rightarrow B_{21} = B_{12}$

$$dN_{12} = B_{12} N_1 U_{\omega} dt = dN_{21} = N_2 (A_{21} + B_{21} U_{\omega}) dt$$

$$B_{21} N_2 e^{\frac{h\nu}{kT}} U_{\omega} = N_2 (A_{21} + B_{21} U_{\omega})$$

$$U_{\omega} = \frac{A_{21} / B_{21}}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

из формулы Планка $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{h\nu^3}{\pi^2 c^3}$

в отсутствие вынужденного излучения

$$U_{\omega} = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow U_{\omega} = \frac{h\nu^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Вынужденное излучение поперечно с исходным
которое вызвало его появление. (Дирак, 1927)

34. Резонансное усиление света при инверсной заселенности. Коэффициент усиления.
Методы создания инверсной заселенности

Для получения усиления излучения лазера необходимо добится, чтобы вынужденное излучение преобладало над

1. спонтанным излучением. Для этого необходимо создать в активной среде лазера высокую плотность излучения N_2 на частоте излучения лазера. Это достигается путем помещения активной среды в оптический резонатор, состоящий из двух параллельно установленных зеркал. Одно из них - зеркало $R \approx 99\%$, второе - полупрозрачное - $R \approx 50-97\%$.

2. Помощением. Для этого необходимо создать инверсию населенности уровней энергии $N_2 \geq N_1$. Для этого используют механизм накачки:

оптическое излучение
электрический разряд
электрический ток
химические реакции

преводит атомы в возбужденное состояние

$$dN = dN_{21} - dN_{12} = (N_2 B_{21} - N_1 B_{12}) h \nu dt =$$

$$= (N_2 - N_1) B h \nu dt$$

$$I = N \cdot e$$

$$h \nu = \frac{W}{\Delta W} \quad (\Delta W \ll W)$$

$$dW = dN h \nu$$

$$dI = dW \cdot e = dN h \nu \cdot e$$

$$dI = (N_2 - N_1) B_{12} \cdot h \nu h \nu e dt = (N_2 - N_1) B_{12} \frac{W}{\Delta W} h \nu e dt =$$

$$= \frac{h \nu}{e \Delta W} (N_2 - N_1) B_{12} I dz$$

Отсюда $I(z) = I_0 \cdot e^{B_1 z}$ - закон Бугера

$$B_1 = \frac{h \nu}{e \Delta W} (N_2 - N_1) B_{12}$$

Если длина активного элемента L , то коэффициент усиления

$$k = \frac{I/L}{I_0} = e^{B_1 L}$$

При $B_1 > 0$ - неограниченная усиленность - $k > 1$
 в законе Бугера отрицательный коэффициент поглощения.

Увеличение падающего луча происходит за счет того, что при $N_2 > N_1$ переход с возбужденными испусканием фотонов происходит чаще, чем переход с помощью еи.

т.е. возникающие при возбужденном излучении фотоны одновременно с фотонами, возбужденными испусканием, когерентное свечение луча сохраняется.

Усилитель можно превратить в генератор,
поменяв β активную среду в резонатор.
Происходит самовозбуждение системы
и многократное усиление.

35. Лазер-устройство и принцип работы.

Амплитудное и фазовое условие генерации.
Основные типы лазеров. Свойства лазерного излучения.

Лазер работает следующим образом. Методом накачки, воздействуя на активное вещество, создается инверсная населенность. Возникает спонтанное излучение во все стороны. Большая

часть этого излучения попадает в резонатор (два параллельно расположенных зеркала. Одно из них - зеркало имеет высокий коэффициент отражения (99%) второе - полупрозрачное (50-97%).

Излучение, распространяющееся строго вдоль оси резонатора в результате многократного отражения от зеркал порождает вынужденное излучение, которое когерентно усиливается при прохождении через среду с инверсной населенностью.

Условие возникновения стационарной генерации

Преобразование спонтанного излучения:

$$dN = dN_{21} - dN_{12} = (N_2 B_{21} - N_1 B_{12}) \hbar \omega dt = (N_2 - N_1) B \hbar \omega dt, \text{ где } B = B_{12} = B_{21}.$$

$$J = N \cdot c$$

$$\hbar \omega = \frac{h}{\Delta \omega} \Rightarrow dN = dN \cdot \hbar \omega$$

$$dJ = dN \cdot c = dN \cdot \hbar \omega \cdot c$$

$$dJ = (N_2 - N_1) B_{12} \cdot \hbar \omega \cdot c \cdot dt =$$

$$-(N_2 - N_1) B_{12} \cdot \frac{1}{\Delta \omega} \hbar \omega \cdot e^{-\frac{\Delta \omega}{e}} = \frac{\hbar \omega}{c \Delta \omega} (N_2 - N_1) B_{12} J \Delta \omega$$

$$J = J_0 e^{-\frac{\Delta \omega}{e}}, \text{ где } B_{12} = \frac{\hbar \omega}{c \Delta \omega} (N_2 - N_1) B_{12}$$

Если длина резонатора l , то коэффициент усиления k за один проход равен $k = \frac{J/L}{J_0} = e^{-\frac{\Delta \omega l}{e}}$

При инверсии населенности $\Delta > 0$ коэффициент усиления $k > 1$. Если коэф. отражения зеркал R_1 и R_2 , то амплитудное условие генерации лазера имеет вид $k^2 R_1 R_2 \geq 1$

Фазовое условие генерации:

$$k = n \frac{\Delta}{2}$$

$\Delta n = n \Delta \nu$, где Δn - модов

$\Delta \nu$ - межмодовый интервал

Режим синхронизации мод. Если в какой-то момент времени фаза всех мод одинакова, то в результате усиления амплитуд получает значительную избыточную интенсивность $J \ll N J_0$.

Принцип работы лазера основан на трех фундаментальных целях.

1. использование вынужденного излучения
2. поддержание неравновесных систем
3. положительная обратная связь

Типы лазеров:

по рабочему телу активной среды:

- газовое
- на парах металлов
- твердотельное
- полупроводниковое
- лазер на свободных электронах

по источнику накачки:

разрядное, химические реакции, импульсное
лампой, пучки электронов
по длине волны

Высокая оптическая однородность активной среды
позволяет получить излучение с очень высокой
степенью когерентности.

Лазеры исключительно пригодны к концентрации
энергии: в пространстве - узкая спектральная линия
во времени - сверхкороткие импульсы
в пространстве - маленькая расходимость
пучка

36. Многоуровневые системы. Явления и характеристики и основные закономерности

Спектры газоб и паров состоят из отдельных
линий (линейчатые спектры). Излучение
и поглощение возникает при переходе
электронов с одного уровня на другой.

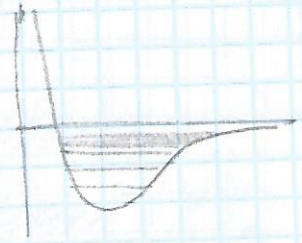
Для молекулы спектры линейчатого. Кроме
электронных, существуют
колебательные и вращательные переходы.
Энергии электронных переходов обычно больше
энергии колебательных и вращательных,
поэтому в системе энергетических уровней
между электронными распадаются
линии колебательных и вращат. уровней.

Колебательное состояние:

линии возникают из-за температуры.
Уменьшаются за счет взаимодействия
со светом. Используются моделью
гармонического осциллятора:

$$E_k = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \Delta n = \pm 1.$$

Колебательными состояниями
соответствует одна спектральная линия.



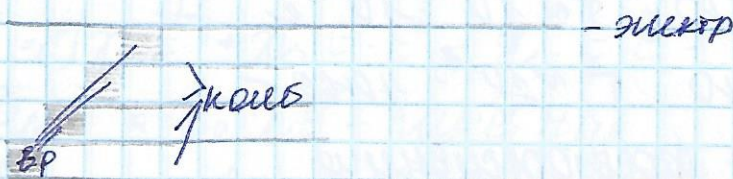
Вращательное состояние:

модель жесткого ротатора $E = \frac{L^2}{2I}$

Уровни $E = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2J}$

Общая энергия комбинационно-вращательного
вибрации: $E = \frac{\hbar^2 \nu(l+1/2)}{2J} + (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$.

Комбинационная энергия больше вращательной.
Таким образом, спектр молекулы обусловлен
уровневой структурой.



Люминесценция - явление, представляющее
собой избыток над тепловыми излучением
тепла и происходящее в течение
времени, существенно превосходящего период
световых колебаний. (вв. энергии, световое раз)

Люминесценция возникает при любой
температуре - холодное свечение.

При люминесценции происходит ряд
промежуточных процессов перехода.

При воздействии внешнего излучения
атомы переходят в возбужденное состояние.
Затем они могут безызлучательно перейти
на другой уровень и только после этого
излучить квант.

Как правило, осуществляется переход
на более низкие уровни, а спектр свинут
в область более низких частот - стоксова
люминесценция.

Большая вероятность получения атомом энергии от соседних атомов, ω - антистоксова люминесценция
- правило Стокса - Лешеля.

тушение - уменьшение люминесценции при увеличении вероятности возбуждения переходов по сравнению с излучательными

По длительности различают

флуоресценцию $\tau \sim 10^{-8} - 10^{-9}$ с

фосфоресценцию $\tau \sim 10^{-8} - 4$ часа

и спонтанная фосфоресценция

По видам возбуждения

- фотолюминесценция

- химическая люминесценция

- катодная люминесценция

- электро, био, термо...

Принцип Франка - Кондона - часть электронной

энергии должна расходоваться на увеличение колебаний

Постоянный спектр - спектр постоянный при давлении

Правило зеркальной симметрии Левинна -

спектр излучения и поглощения - взаимное

зеркальное отражение

Соотношение Степанова

$$\frac{I}{\sigma} = \frac{D}{T} D^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

мощность / полная нормировка

Эффект Шпоковского - квазиинвариант спектра

Эффект Вавилова - Черенкова : свечение, вызываемое

движением заряженно частицы $v > v_{ф}$

и квантовой выдох: $\varphi = \frac{N_1}{N_p}$ Вавилов: $\varphi = \varphi/2$

$$V = \frac{N_1 E_1}{N_p E_p} = \varphi \frac{v_1}{v_p}$$

32. Неширокие оптические явления. Среды с квадратичной нелинейностью. Генерация гармоник и оптическое детектирование

При распространении света в однородной изотропной среде $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$. Но такое уравнение справедливо при $E < E_{ог}$

В лазерных лучах $E \approx 10^8 - 10^9 \frac{В}{м}$.

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\chi_1 \vec{E} + \chi_2 E \cdot \vec{E} + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots) = \vec{P}_{лин} + \vec{P}_{нлин}$$

или $\vec{P}_{лин} = \epsilon_0 \chi_1 \vec{E}$ - линейная

$\vec{P}_{нлин} = \epsilon_0 (\chi_2 E \vec{E} + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots)$ - нелинейная

т.к. $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$

Одним из способов решения - метод возмущений.

приближений: $\vec{P}_{нлин} = 0, \Rightarrow E^{(0)} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k r)$

$$\vec{P}_{нлин} = \epsilon_0 (\chi_2 E^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} + \chi_3 E^{(0)2} \cdot \vec{E}^{(0)} + \dots) -$$

неоднородное уравнение.

Квадратичная нелинейность $\chi_2 \neq 0$.

$$\vec{P}_{нлин} = \epsilon_0 \chi_2 E \cdot \vec{E}$$

$$\vec{P}_{нлин} = \epsilon_0 \chi_2 E_0 \cdot \vec{E}_0 \cos^2(\omega t - k r) =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_2 E_0 \cdot \vec{E}_0 \cdot (1 + \cos 2(\omega t - k r))$$

Первое слагаемое не зависит от времени, что означает возникновение в такой среде статической поляризованности, т.е. постоянного однородного электрического поля. - оптическое детектирование.

(Позволяет получить информацию в форме сигнала)



второе маятниковое дает решение в виде волны на удвоенной частоте 2ω , т.е.

в квадратичной нелинейной среде распространяются и первая и вторая гармоники. По мере распространения амплитуда второй гармоники периодически изменяется, то понижая, то отдавая энергию первой гармонике.

II Если подобраны анизотропные кристаллы, у которых показатели преломления обеих гармоник были одинаковы

$$n(\omega) = n(2\omega) - \text{фазовый миз пространств. синхронизм.}$$

Пошло основных и кратных частот превращается суммарная и разностная частоты.

$$P = \epsilon_0 \epsilon E^2 \sim (\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)) \\ \cos^2(\omega_1 t - k_1 z) + 2\cos(\omega_1 t - k_1 z)\cos(\omega_2 t - k_2 z) + \cos^2(\omega_2 t - k_2 z) \\ \sim \cos((\omega_2 - \omega_1) t - (k_2 - k_1) z) + \cos((\omega_2 + \omega_1) t - (k_2 + k_1) z)$$

38. Немонотонные оптические среды. Среда с кубической немонотонностью. Самофокусировка бегущих пучков и генерация гармоник.

При распространении света возникают

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

в интенсивных лазерных пучках $E \approx 10^8 - 10^{10} \text{ В/м}$.

тогда $P = \epsilon_0 (\chi E + \chi_2 E \cdot E + \chi_3 E^2 \cdot E + \dots) = \overline{P_{\text{лин}}} + \overline{P_{\text{ген}}}$

где $\overline{P_{\text{лин}}} = \epsilon_0 \chi E$

$$\overline{P_{\text{ген}}} = \epsilon_0 (\chi_2 E E + \chi_3 E^2 \cdot E + \dots)$$

$$\Delta E = \frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\epsilon = 1 + \chi:$$

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\chi}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

1. $E^{(0)} = E_0 \cos(\omega t - k r)$

2. $\overline{P_{\text{ген}}} = \epsilon_0 (\chi_2 E^{(0)} \cdot E^{(0)} + \chi_3 E^{(0)2} \cdot E^{(0)} + \dots)$

Кубическая немонотонность $\chi_2 = 0, \chi_3 \neq 0$.

$$P = \overline{P_{\text{лин}}} + \overline{P_{\text{ген}}} = \epsilon_0 (\chi E + \chi_3 E^2 E)$$

$$\epsilon = 1 + \chi + \chi_3 E^2$$

$$n \sim \sqrt{\epsilon}$$

$$n = \sqrt{1 + \chi + \chi_3 E^2} = n_0 + n_2 E^2$$

Если $n_2 > 0$, то в области высокой напряженности поле показателя преломления выше, что приведет к фокусировке пучка.

Существует эффект дефокусировки, когда на оси пучка происходит награв, вещество расширяется и

показатель преломления падает.

генерация третьего гармоника:

$$P_3(z) \approx \chi^3 E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) = \\ = \chi^3 E_0^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t - kz) + \frac{1}{4} \cos(3(\omega t - kz)) \right)$$

Часть генерации третьего гармоника
появляется в результате генерации
2 гармоника и суммарно.

// самофокусировка:

на длине вол $\Delta \varphi = \frac{\omega}{c} n_2 A_0^2 L_{eff}$

прочие $(\omega/c) n_0 A^2 / 2L_{eff} - \Delta \varphi$

$$L_{eff} = a \sqrt{\frac{n_0}{2\Delta n}} \quad | a - \text{радиус пучка}$$

29. Геометрическая оптика. Кардинальные элементы оптической системы. Построение изображения мнимого.

Многие оптические явления изучаются особенно в рамках геометрической оптики, в которой распространение света описывается в помощью светового луча - линии, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения энергии.

Основные законы геом. оптики:

1. Закон прямолинейного распространения света
2. Закон отражения: падающий, отраженный лучи и нормаль к отражающей поверхности лежат в одной плоскости. Угол падения θ_1 равен углу отражения θ_2 .
3. Закон преломления света: Луч падающий, преломленный и нормаль лежат в одной плоскости.
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$
4. Закон независимого распространения световых лучей: лучи не мешают друг на друга и распространяются независимо.

Преломление света на сферической границе раздела.

Пусть сф. поверхность, радиус которой $bc = R$, разделяет среды с n_1 и n_2 .

В паракардинальной приближении координата источника и изображения связана соотношением:

$$n_1 \left(\frac{1}{x_{S_1}} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{x_{S_2}} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$



Величина $\varphi = \frac{n_2 - n_1}{R}$ - оптическая сила преломляющей пов-сти.

Если $\varphi > 0$, то луч, параллельный OO попадает в задний фокус, луч, прох. чрез F_1 , параллелен OO .

$$\begin{aligned} x_{S_2} = \infty &\Rightarrow f_1 = x_{F_1} = \frac{-R}{n-1} \\ x_{S_1} = 0 &\Rightarrow f_2 = x_{F_2} = \frac{nR}{n-1} \end{aligned} \quad n = \frac{n_2}{n_1} - \text{ОПП}$$
$$f_2 = -n f_1$$

Плоскости, перпендикулярные OO и пересекающиеся в S точках S_1 и S_2 - сопряженные а F_1 и F_2 - фокальные

$$\frac{f_2}{x_{S_2}} + \frac{f_1}{x_{S_1}} = 1$$

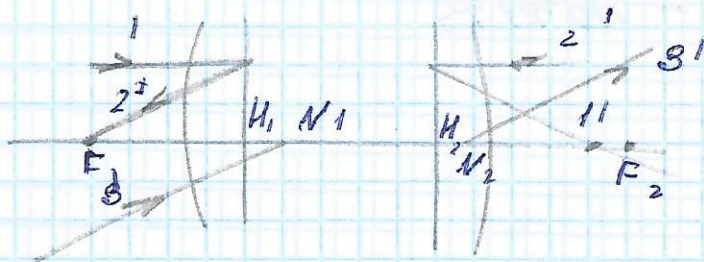
$$(x_{S_1} - f_1) \cdot (x_{S_2} - f_2) = f_1 f_2$$

сферическое зеркало.

Если $n_2 = -n_1$, получим формулу сферич. зеркала $\frac{1}{x_{s_2}} + \frac{1}{x_{s_1}} = \frac{2}{R}$ $x_F = f = \frac{R}{2}$.

Центрированная оптическая система.

Кардинальные элементы - главные (H_1 и H_2) и фокальные (F_1 и F_2) плоскости, которые перпендикулярны $\Gamma O O'$ и пересекаются в ней в главных точках и фокусах, узловых точках.



$$\frac{n_2}{x_{s_2}} - \frac{n_1}{x_{s_1}} = \varphi, \text{ где } \varphi = \frac{n_2}{x_{F_2'}} = -\frac{n_1}{x_{F_1}}. \text{ Отсюда}$$

$$x_{H_1} = x_{F_1} + x_{F_2'}$$

$$x_{H_2'} = x_{F_2'} + x_{F_1}$$

Если $x_{F_1} = -x_{F_2'}$, то точки H_1 и H_2 совпадают с соответствующими F_1 и F_2 .

1. Точка пересечения 1 и 1' лежит в H_2 .

2 и 2' - в H_1 .

2. $F_1 H_1 = f_2$ фокусное расстояние
 $F_2 H_2 = f_1$

3. Если луч идет из узла N_2 , то он выйдет из узла N_1 в напр. параллельном падающему лучу

$$F_1 N_1 = f_2$$
$$F_2 N_2 = f_1$$

4. Если $n = \text{const}$, то $N_1 = H_1$, $N_2 = H_2$.