Линейная алгебра

Овчинников Алексей Витальевич

Литература

1. С. Б. Кадомцев. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра.
3. Н. Ч. Крутицкая, А. В. Тихонравов, А. А. Шишкин. Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

1. Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.
$\mathbb{K}$ — любое из перечисленных множеств.
$\mathbb{K}_0$ — множество $\mathbb{K} \setminus 0$.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
$\mathbb{K}^n$ — множество столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}^{m\times n}$ — множество матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$ (m строк, n столбцов).

2. Числовое поле

Числовое поле (**ЧП**) — это множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.

Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\mathbb{K}$ — любое из перечисленных числовых полей.

3. Умножение матриц

Будем использовать нумерацию элементов матрицы с помощью верхних и нижних индексов; верхний индекс обозначает номер строки, нижний — номер столбца. Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Разбиение этой матрицы на столбцы имеет вид

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_m],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix}.$$

Разбиение этой матрицы на строки имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A^1 &= (a_1^1 \quad a_2^1 \quad \dots \quad a_m^1), \\ A^2 &= (a_1^2 \quad a_2^2 \quad \dots \quad a_m^2), \\ &\dots \\ A^n &= (a_1^n \quad a_2^n \quad \dots \quad a_m^n). \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицы $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$. Их произведение — это матрица $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\boxed{c_k^j = \sum_{l=1}^{m} a_l^j b_k^l, \qquad \begin{matrix} j = 1, \dots, n, \\ k = 1, \dots, p. \end{matrix}}$$

Рассмотрим разбиение матрицы C на столбцы:

$$C = [C_1 \quad \dots \quad C_p],$$

и обсудим строение k-го столбца:

$$C_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{m} a_l^1 b_k^l \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} a_l^n b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{m} \begin{pmatrix} a_l^1 \\ \vdots \\ a_l^n \end{pmatrix} b_k^l = \sum_{l=1}^{m} A_l b_k^l = A \cdot B_k.$$

Таким образом,

(1) *k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.*
(2) *k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.*

Задача. Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичное утверждение для строк матрицы AB.

4. Группа

Группа $(G, *)$ — это множество G, снабженное операцией

$$* : G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto a * b,$$

удовлетворяющей следующим требованиям:

(1) $\forall a, b, c \in G$: $(a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);
(2) $\exists e \in G\ \forall a \in G$: $e * a = a * e = a$ (существование нейтрального элемента);
(3) $\forall a \in G\ \exists a' \in G$: $a * a' = a' * a = e$ (существование обратного элемента). Обратный элемент обозначается a^{-1}.

5. Примеры групп

1. $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$. Здесь $e = 0$.
2. $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Здесь $e = 1$.
3. $(\mathbb{Q}_0, \cdot)$; $(\mathbb{R}_0, \cdot)$; $(\mathbb{C}_0, \cdot)$. Здесь $e = 1$.
4. $GL(n; \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$. Операция — умножение матриц, $e = \mathbf{I}$ (единичная матрица порядка n). (Проверьте!)

Вопрос. Что является обратным элементом?

5. $SL(n; \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det A = 1\}$. Операция — умножение матриц, $e = \mathbf{I}$ (единичная матрица порядка n). (Проверьте!)
6. $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Операция — умножение комплексных чисел, $e = 1$. (Проверьте!)

Вопрос. Что является обратным элементом?

7. $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$. Операция — умножение матриц. (Проверьте!)

Вопрос. Что является единичным элементом? Что является обратным элементом?

Задача. Рассмотрим множество G монотонных строго возрастающих числовых функций на отрезке $[1, -1]$ и введем на этом множестве операцию композиции функций:

$$\forall f, g \in G: \quad (f * g)(x) = f(g(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Покажите, что $(G, *)$ — группа. Что является нейтральным элементом этой группы? Что представляет собой обратный элемент?

6. Простейшие свойства групп

Теорема. *Пусть $(G, *)$ — группа.*

(1) *Нейтральный элемент в группе единствен.*
(2) *$\forall a \in G$ обратный элемент a^{-1} единствен.*
(3) *$\forall a \in G$ имеем $(a^{-1})^{-1} = a$.*
(4) *$\forall a, b, c \in G$: $a * b = a * c \Rightarrow b = c$; $\quad b * a = c * a \Rightarrow b = c$.*

Доказательство. 1. Допустим, что $\exists e' \neq e$ такой, что $\forall a \in G$: $e' * a = a = a * e'$. Положим $a = e$; тогда $e' * e = e$. С другой стороны, по определению e, $e' * e = e'$. Итак, $e' = e$.
2. Пусть $b = a^{-1}$. Допустим, что $\exists c$ такой, что $a * c = c * a = e$. Тогда

$$c = c * e = c * (a * b) = (c * a) * b = e * b = b.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

7. Абелевы группы

Группа $(G, *)$ называется *абелевой* (коммутативной), если

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

В случае абелевых групп групповая операция часто называется сложением и обозначается знаком $+$, обратный элемент для a называется противоположным и обозначается $-a$, а единичный элемент называется нулем и обозначается 0.

Вопрос. Какие из перечисленных выше групп являются абелевыми?

8. Подгруппы

Пусть $(G, *)$ — группа. Непустое подмножество $S \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall s \in S$: $s^{-1} \in S$;
(2) $\forall s, t \in S$: $st \in S$.

Обозначение:
$S \subset G$ — подмножество группы G;
$S \Subset G$ — подгруппа группы G.

Теорема. *Пусть $(G, *)$ — группа. Если $S \Subset G$, то S является группой относительно операции $*$.*

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

9. Примеры подгрупп

1. $(\mathbb{Z}, +) \Subset (\mathbb{Q}, +) \Subset (\mathbb{R}, +) \Subset (\mathbb{C}, +)$.
2. $U(1) \Subset (\mathbb{C}_0, \cdot)$.
3. $SL(n, \mathbb{K}) \Subset GL(n, \mathbb{K})$.
4. $SO(2) \Subset SL(2, \mathbb{R})$; $SO(2) \Subset GL(2, \mathbb{R})$.

10. Гомоморфизм групп

Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы. Отображение $f : G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если

$$f(a * b) = f(a) \star f(b) \quad \forall a, b \in G.$$

Множество всех гомоморфизмов групп $(G, *)$ и $(H, \star)$ обозначается $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Теорема. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп $(G, *)$ и $(H, \star)$. Тогда:*

(1) $f(e_G) = e_H$;
(2) $\forall g \in G : f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Доказательство.
1. Так как $e_G = e_G * e_G$, то имеем

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \star f(e_G).$$

Умножим обе части на $f(e_G)^{-1}$; получим

$$e_H = f(e_G) \star f(e_G)^{-1} = f(e_G) \star f(e_G) \star f(e_G)^{-1} = f(e_G).$$

2. Поскольку $g * g^{-1} = e_G = g^{-1} * g$, находим

$$f(g * g^{-1}) = f(e_G) = f(g^{-1} * g) \quad \Rightarrow$$
$$f(g) \star f(g^{-1}) = e_H = f(g^{-1}) \star f(g);$$

отсюда в силу единственности обратного элемента вытекает $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$. □

11. Примеры гомоморфизмов групп

1. $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $f = \exp$:

$$f(a * b) \equiv e^{a+b} = e^a \cdot e^b \equiv f(a) \star f(b).$$

2. $(G, *) = (\mathbb{C}_0, \cdot)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_0, \cdot)$, $f = |\cdot|$:

$$f(a * b) = |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \equiv f(a) \star f(b).$$

3. $(G, *) = GL(n; \mathbb{K})$, $(H, \star) = (\mathbb{K}_0, \cdot)$, $f = \det$:

$$f(a * b) \equiv \det(a \cdot b) = \det a \cdot \det b \equiv f(a) \star f(b).$$

12. Ядро и образ гомоморфизма

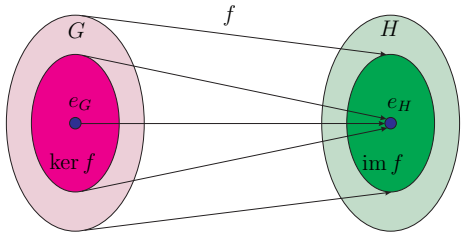
Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы, $f : G \to H$ — гомоморфизм.

Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество элементов группы G, образом которых является нейтральный элемент в H:

$$\ker f = \left\{ g \in G \;\middle|\; f(g) = e_H \right\}.$$

Образ $\mathrm{im}\, f$ гомоморфизма f — это множество элементов группы H, имеющих прообраз в группе G:

$$\mathrm{im}\, f = \left\{ h \in H \;\middle|\; \exists g \in G : h = f(g) \right\}.$$



Теорема. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп.*

$$\ker f \Subset G, \qquad \operatorname{im} f \Subset H.$$

Доказательство.

1. Проверим, что $\ker f \Subset G$. Имеем:

$$g_1 \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(g_1) = e_H,$$
$$g_2 \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(g_2) = e_H;$$

поэтому

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \star f(g_2) = e_H \quad \Longleftrightarrow \quad g_1 * g_2 \in \ker f.$$

2. Проверим, что $\operatorname{im} f \Subset H$. Имеем:

$$h_1 \in \operatorname{im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g_1 \in G : h_1 = f(g_1),$$
$$h_2 \in \operatorname{im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g_2 \in G : h_2 = f(g_2).$$

Получаем

$$h_1 \star h_2 = f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 * g_2) \in H,$$

что и требовалось. □

13. Примеры

Найдем ядро и образ каждого из рассмотренных выше гомоморфизмов.

1. $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $f = \exp$. Здесь $e_G = 0$, $e_H = 1$. Условие $f(g) = e_H$ принимает вид $e^g = 1$. Поскольку единственным решением уравнения $e^g = 1$ является число 0, имеем $\ker f = 0 = e_G$. Поскольку множество значений функции $g \mapsto e^g$ есть $\mathbb{R}_+$, имеем $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+ = H$.

2. $(G, *) = (\mathbb{C}_0, \cdot)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_0, \cdot)$, $f = |\cdot|$. Здесь $e_G = 1$, $e_H = 1$. Числа, удовлетворяющие условию $f(g) = e_H$, т.е. условию $|z| = 1$, имеют вид $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, поэтому $\ker f = U(1)$. Очевидно, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_0 = H$.

3. $(G, *) = GL(n; \mathbb{K})$, $(H, \star) = (\mathbb{K}_0, \cdot)$, $f = \det$. Здесь $e_G = \mathbf{I}$, $e_H = 1$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка n). Условие $f(g) = e_H$ записывается в виде $\det g = 1$, т.е. $\ker f = SL(n, \mathbb{K})$. Очевидно, $\operatorname{im} f = \mathbb{K}_0 = H$.

14. Изоморфизм групп

Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы. Гомоморфизм $f : G \to H$ называется *изоморфизмом*, если он взаимно однозначен.

Если существует изоморфизм группы $(G, *)$ на группу $(H, \star)$, то эти группы называются изоморфными; обозначение $(G, *) \simeq (H, \star)$ или $G \simeq H$.

Вопрос. Какие из приведенных гомоморфизмов являются изоморфизмами?

Задача. Доказать, что $U(1) \simeq SO(2)$, построив изоморфизм в явном виде.

Изоморфные группы обладают одинаковыми алгебраическими свойствами.

Отметим, что отношение изоморфности групп обладает следующими свойствами:

(1) $G \simeq G$;
(2) $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$;
(3) если $G \simeq H$ и $H \simeq K$, то $G \simeq K$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Гомоморфизм групп $f : G \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = e_G$ и $\operatorname{im} f = H$.*

Доказательство.

1. Пусть $f : G \to H$ — изоморфизм. Тогда e_H имеет единственный прообраз в G и

$$f^{-1}(e_H) = e_G = \ker f.$$

Кроме того, любой элемент $h \in H$ имеет прообраз, т.е. $\operatorname{im} f = H$.

2. Пусть $\ker f = e_G$ и $\operatorname{im} f = H$. Докажем, что гомоморфизм f взаимно однозначен. Ясно, что у любого $h \in H$ имеется прообраз в G.

Остается доказать, что

$$\forall g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2 : \quad f(g_1) \neq f(g_2).$$

Допустим противное, т.е.

$$\exists g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2 : \quad f(g_1) = f(g_2).$$

Имеем:

$$f(g_1 * g_2^{-1}) = f(g_1) \star f(g_2^{-1}) = f(g_1) \star f(g_2)^{-1} = f(g_2) \star f(g_2)^{-1} = e_H,$$

т.е. $g_1 * g_2^{-1} \in \ker f$. Поскольку $\ker f = e_G$, получаем $g_1 * g_2^{-1} = e_G$, т.е. $g_2 = g_1$, противоречие. □

Задача. Проиллюстрируйте теорему на примере изоморфизма $U(1) \simeq SO(2)$.

15. Линейное пространство

Линейное пространство (**ЛП**) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это абелева группа V, снабженная операцией умножения элементов группы на числа из поля $\mathbb{K}$ такой, что выполняются следующие требования:

(1) $\forall \mathbf{x} \in V$: $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;
(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta\mathbf{x})$.

Нейтральный элемент этой абелевой группы называется нулевым вектором и обозначается $\mathbf{0}$.

16. Второе определение ЛП

Линейное пространство (**ЛП**) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это множество V элементов $\mathbf{x}, bfy, \ldots$ произвольной природы (векторов), в котором введены две операции:

(A) сложение векторов

$$+ : V \times V \to V, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

(B) умножение вектора на число

$$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha\mathbf{x}$$

так, что выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность сложения);
(2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность сложения);
(3) $\exists \mathbf{0} \in V$ $\forall \mathbf{x} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (существование нулевого вектора);
(4) $\forall \mathbf{x} \in V$ $\exists \mathbf{x}' \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора);
(5) $\forall \mathbf{x} \in V$: $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(6) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;
(7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta\mathbf{x})$.

Задача. Доказать эквивалентность двух определений **ЛП**.

17. Примеры линейных пространств

1. $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$; $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

2. $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ — не **ЛП**. Объясните причину и приведите еще несколько аналогичных примеров.

3. Множества «геометрических векторов» на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 — **ЛП** над $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как **ЛП** над различными **ЧП** (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

5. $\mathbb{K}^{m\times n}$ можно рассматривать как **ЛП** над различными **ЧП** (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

6. Множества $C(X)$, $C^p(X)$, состоящие из всех непрерывных (p раз непрерывно дифференцируемых) на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функций, можно рассматривать как **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Операции:

$$\forall f, g \in C(X),\ \forall x \in X:$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\forall f \in C(X),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in X:$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

7. Множество $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K})$ всех полиномов степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + a_1 t^1 + \dots + a_n t^n,$$

где $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 0, \dots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех полиномов степени n? Ответ обоснуйте.

8. Множество $\mathrm{Trig}(n, \mathbb{K})$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех тригонометрических полиномов порядка n? Ответ обоснуйте.

9. Патологический пример. $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, операции заданы формулами:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V = \mathbb{R};$$
$$\alpha \odot \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\alpha, \quad \mathbf{x} \in V = \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Проверьте выполнение всех аксиом.

18. Пример **ЛП**: Сопряженное пространство

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**. *Линейным функционалом* (**ЛФ**) на **ЛП** V называется любая функция $\boldsymbol{\xi} : V \to \mathbb{K}$, обладающая следующими свойствами:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y})$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\boldsymbol{\xi}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$.

Иными словами, **ЛФ** — это гомоморфизм абелевой группы $(V, +)$ в абелеву группу $(\mathbb{K}, +)$, сохраняющий операцию умножения на числа из $\mathbb{K}$.

Множество всех **ЛФ** на **ЛП** V обозначается V^* и называется пространством, сопряженным к V.

Введем операции сложения **ЛФ** и умножения **ЛФ** на число:

$$\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in V^* : (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in V;$$
$$\forall \boldsymbol{\xi} \in V^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : (\alpha \boldsymbol{\xi})(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in V.$$

Нулевым вектором сопряженного пространства V^* является **ЛФ** $\boldsymbol{\theta}$ такой, что $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in V$.

Теорема. *Если V — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, то V^* также является **ЛП** над $\mathbb{K}$.*

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Задача. $V = \mathrm{Pol}(n, \mathbb{R})$. Для любого $\mathbf{x} = x(t) \in V$ положим

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \int_0^1 x(t)dt.$$

Докажите, что $\boldsymbol{\xi}$ — **ЛФ**.

19. Простейшие свойства **ЛП**

Теорема. *Пусть $V(\mathbb{K})$ — произвольное **ЛП**.*

(1) *Нулевой элемент $\mathbf{0}$ единствен.*
(2) *$\forall \mathbf{x} \in V$ противоположный элемент $\mathbf{x}'$ единствен.*
(3) *$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.*
(4) *$\forall \mathbf{x} \in V$: $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
(5) *$\forall \mathbf{x} \in V$ противоположный элемент $\mathbf{x}'$ равен $-1 \cdot \mathbf{x} \equiv -\mathbf{x}$.*

Доказательство. 1, 2, 3 следуют из аналогичной теоремы для групп.
4. $0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{x} = (0+1)\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} \Rightarrow 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
5. Положим $\mathbf{y} = (-1) \cdot \mathbf{x}$. Тогда

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow \mathbf{y}$ — противоположный для $\mathbf{x}$. □

20. Линейная комбинация

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$.

Линейная комбинация (**ЛК**) векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ с коэффициентами $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in \mathbb{K}$ — это выражение

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p \mathbf{x}_p \equiv \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k.$$

ЛК векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называется *тривиальной*, если все коэффициенты этой **ЛК** равны нулю, и *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Очевидно, тривиальная **ЛК** всегда равна нулевому вектору.

21. Линейная зависимость и независимость

Векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называются *линейно зависимыми* (**ЛЗ**), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому вектору.

Пример: Рассмотрим **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Элементы $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **ЛЗ**, так как существует нетривиальная **ЛК** этих векторов, равная $\mathbf{0}$:

$$-2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называются *линейно независимыми* (**ЛН**), если из равенства их **ЛК** нулевому вектору следует, что эта **ЛК** тривиальна.

Пример: Рассмотрим **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Векторы $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **ЛН**. Действительно,

$$\alpha^1 \mathbf{y}_1 + \alpha^2 \mathbf{y}_2 = \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Последний столбец может быть нулевым тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

22. Гомоморфизм и изоморфизм ЛП

Пусть $(V, \mathbb{K})$ (операции $+, \cdot$) и $(W, \mathbb{K})$ (операции $\oplus, \odot$) — два **ЛП** *над одним и тем же* ***ЧП*** $\mathbb{K}$.

Отображение $f : V \to W$ называется *гомоморфизмом*, если

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall x, y \in V,$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Множество всех гомоморфизмов **ЛП** V, W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Теорема. *Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм.*

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$: $f(-x) = -f(x)$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Изоморфизм **ЛП** V и W — это взаимно однозначный гомоморфизм. **ЛП** V и W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : V \to W$; в этом случае пишут $V \simeq W$.

Теорема. *Пусть $V \simeq W$, $f : V \to W$ — изоморфизм.*

(1) $\forall \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$: $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}_W$.
(2) *Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — **ЛН** векторы, то векторы $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ также **ЛН**.*
(3) *Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — **ЛЗ** векторы, причем нетривиальная **ЛК** этих векторов, равная $\mathbf{0}_V$, имеет коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, то векторы $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ также **ЛЗ**, причем нетривиальная **ЛК** этих векторов, равная $\mathbf{0}_W$, имеет те же коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$. Предположим, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$. Имеем:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W = 0 \cdot \mathbf{y} = 0 \cdot f(\mathbf{z}) = f(0 \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{0}_V).$$

Таким образом, в силу взаимной однозначности отображения f, получаем $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$; противоречие.

2. Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — **ЛН** векторы. Предположим, что векторы $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ **ЛЗ**, т.е. $\exists \beta^1, \ldots, \beta^p \in \mathbb{K}$, не все равные 0, такие, что

$$\beta^1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Имеем

$$\beta^1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0}_W = f(\beta^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta^p \mathbf{x}_p),$$

откуда

$$\beta^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_V,$$

т.е. векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ **ЛЗ**; противоречие.

3. Докажите самостоятельно.

□

Отметим, что отношение изоморфности **ЛП** обладает следующими свойствами:

(1) $V \simeq V$;
(2) $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$;
(3) если $V \simeq W$ и $W \simeq U$, то $V \simeq U$.

Задача. Докажите самостоятельно.

23. Линейная оболочка

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$.

Линейная оболочка (**ЛО**) векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — это множество всех **ЛК** этих векторов, т.е. множество

$$L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \Big\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k \;\Big|\; \alpha^k \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, p \Big\}.$$

Теорема.

(1) *Если среди векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ имеется нулевой вектор, то эти векторы **ЛЗ**.*
(2) *Если система векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q+1}, \ldots, \mathbf{x}_p$ содержит **ЛЗ** подсистему $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$, то вся система **ЛЗ**.*
(3) *Если векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ **ЛЗ**, то среди них имеется вектор, являющийся **ЛК** остальных векторов.*
(4) *Если $\mathbf{x} \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, то*
$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$
(5) *Если $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, то*
$$L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) \subset L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$

Доказательство.

1. Пусть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$; тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_p$$

— нетривиальная **ЛК**, равная нулевому вектору.

2. Если векторы $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_q$ **ЛЗ**, то это означает, что $\exists \alpha^1, \ldots, \alpha^q$, не все равные 0 и такие, что

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Тогда, очевидно, **ЛК**

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha^k \mathbf{x}_k + \sum_{k=q+1}^{p} 0 \cdot \mathbf{x}_k$$

нетривиальна и равна $\mathbf{0}$.

3. Так как векторы $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_p$ **ЛЗ**, то $\exists \alpha^1, \ldots, \alpha^p$, не все равные 0, такие, что

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha^p \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{x}_p = -\frac{\alpha^1}{\alpha^p} \mathbf{x}_1 - \cdots - \frac{\alpha^{p-1}}{\alpha^p} \mathbf{x}_{p-1},$$

что и требовалось.

4. Обозначим

$$L_1 = L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p), \quad L_2 = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$

Требуется доказать, что $L_1 = L_2$, т.е. что

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{и} \quad L_2 \subseteq L_1.$$

Первое вложение очевидно:

$$\mathbf{y} \in L_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^p \mathbf{x}_p =$$
$$= 0 \cdot \mathbf{x} + \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k \;\Rightarrow\; \mathbf{y} \in L_2.$$

Докажем второе. Имеем:

$$\mathbf{x} \in L_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \beta^1\mathbf{x}_1 + \dots + \beta^p\mathbf{x}_p,$$
$$\mathbf{y} \in L_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p\mathbf{x}_p =$$
$$= \alpha(\beta^1\mathbf{x}_1 + \dots + \beta^p\mathbf{x}_p) + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p\mathbf{x}_p =$$
$$= (\alpha\beta^1 + \alpha^1)\mathbf{x}_1 + \dots + (\alpha\beta^p + \alpha^p)\mathbf{x}_p$$
$$\Rightarrow\; \mathbf{y} \in L_1.$$

5. Докажите самостоятельно.

□

24. Размерность и базис ЛП

Размерность **ЛП** $V(\mathbb{K})$ — это целое неотрицательное число n, обладающее следующими свойствами:

(1) в V $\exists n$ **ЛН** векторов;
(2) любые $n+1$ векторов **ЛЗ**.

Обозначение: $n = \dim V$; пространство V называется n-мерным.

Если в **ЛП** V имеется как угодно много **ЛН** векторов, то V называется бесконечномерным, $\dim V = \infty$.

Базис **ЛП** $V(\mathbb{K})$ — это упорядоченный набор векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, обладающий следующими свойствами:

(1) векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ **ЛН**;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$ $\exists x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ такие, что

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x^k\mathbf{e}_k. \tag{1}$$

Числа $x^1, \dots, x^n$ называются координатами (компонентами) вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, а формула (1) — разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Правило суммирования Эйнштейна: Если в некотором одночлене индекс появляется ровно два раза, один раз вверху и один раз внизу, то считается, что по этому индексу производится суммирование; пределы изменения индекса либо указываются, либо ясны из контекста. Пример: запись $x^k\mathbf{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ эквивалентна сумме (1).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{p} x^k\mathbf{e}_k = \sum_{l=1}^{p} x^l\mathbf{e}_l,$$

имеем

$$x^k\mathbf{e}_k \equiv x^l\mathbf{e}_l, \quad k = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, p.$$

Суммирование с символом Кронекера.

Символ Кронекера — это обозначение элементов единичной матрицы:

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если } \; j = k, \\ 0, & \text{если } \; j \neq k. \end{cases}$$

Часто встречаются суммы вида $a_j\delta_k^j$, $b^k\delta_k^j$ и т. п. В развернутом виде первая из этих сумм имеет вид

$$a_1\delta_k^1 + a_2\delta_k^2 + \dots + a_k\delta_k^k + \dots + a_n\delta_k^n.$$

Из n слагаемых в этой сумме отлично от нуля лишь одно, а именно k-е, поэтому вся сумма равна a_k. Таким образом,

$$a_j\delta_k^j = a_k.$$

Теорема. *Разложение по базису единственно, т.е. $\forall \mathbf{x} \in V$ его координаты $x^1, \dots, x^n$ определены однозначно.*

Доказательство. Предположим, что вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ двумя способами:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n = y^1\mathbf{e}_1 + \dots + y^n\mathbf{e}_n.$$

Вычитая из первого разложения второе, получим

$$(x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + \dots + (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Так как базисные векторы **ЛН**, заключаем, что в последнем разложении все коэффициенты равны нулю, т.е. $x^k = y^k$, $k = 1, \dots, n$. □

Условимся записывать координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде столбца:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} \text{ в базисе } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n.$$

Теорема. *Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ **ЛП** $V(\mathbb{K})$ имеем*

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad \alpha\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Теорема. *Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ столбец его координат, является изоморфизмом **ЛП** V и $\mathbb{K}^n$, $V \simeq \mathbb{K}^n$.*

Теорема. *Все **ЛП** одной размерности над одним и тем же **ЧП** изоморфны.*

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача. Докажите, что если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в **ЛП** V, то $V = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Обратное утверждение неверно: если $V = L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$, то нельзя утверждать, что векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ образуют базис в V. Объясните почему.

Теорема. *__ЛП__ $V(\mathbb{K})$ является n-мерным тогда и только тогда, когда оно имеет базис, состоящий из n векторов.*

Доказательство. 1. Пусть $\dim V = n$. Тогда $\exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ — **ЛН**, но $\forall \mathbf{x} \in V$ векторы $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ — **ЛЗ**, т.е. $\exists \alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$; в противном случае получили бы

$$\alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

что возможно лишь при $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ (при этом $\alpha = 0$), противоречие. Таким образом,

$$\mathbf{x} = -\frac{\alpha^1}{\alpha}\mathbf{x}_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha}\mathbf{x}_n,$$

т.е. упорядоченный набор $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ является базисом в V.

2. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Докажем, что любые $n+1$ векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ в V **ЛЗ**. Разложим каждый из этих векторов по базису:

$$\mathbf{x}_1 = x_1^1\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 + \dots + x_1^n\mathbf{e}_n,$$
$$\dots$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = x_{n+1}^1\mathbf{e}_1 + x_{n+1}^2\mathbf{e}_2 + \dots + x_{n+1}^n\mathbf{e}_n.$$

Составим матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Это матрица размера $n \times (n+1)$ (n строк, $n+1$ столбцов), поэтому ее ранг

$$\operatorname{rk} X \le n.$$

Отсюда следует, что столбцы матрицы (их количество $n+1$) **ЛЗ**; следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ также **ЛЗ**. □

25. Примеры

1. $\dim \mathbb{K}(\mathbb{K}) = 1$; базис состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое ненулевое число из $\mathbb{K}$. Число 1 образует так называемый стандартный базис.

2. $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \infty$.

Задача. Объясните почему.

3. $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$; базис состоит из двух элементов, в качестве которых можно взять два любых ненулевых комплексных числа, сумма которых не равна нулю. Стандартный базис образуют числа $1, i$.

Задача. Докажите.

4. $\dim \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) = n$. Стандартный базис образуют столбцы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$. Стандартный базис состоит из столбцов

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

6. $\dim \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$. Стандартный базис состоит из mn матриц

$$\mathbf{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

где единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

7. $\dim \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = n+1$. Стандартный базис состоит из многочленов

$$\mathbf{e}_0 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = t, \quad \mathbf{e}_2 = t^2, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = t^n.$$

8. $\dim \operatorname{Trig}(n, \mathbb{K}) = 2n+1$. Стандартный базис состоит из тригонометрических многочленов

$$\mathbf{e}_0 = 1, \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_1 = \cos t, & \dots, & \mathbf{e}_n = \cos nt, \\ \mathbf{e}_{-1} = \sin t, & \dots, & \mathbf{e}_{-n} = \sin nt. \end{matrix}$$

26. Матрица гомоморфизма

Рассмотрим гомоморфизм $f : V \to W$, где $\dim V = m$, $\dim W = n$.

Выберем какие-либо базисы в этих **ЛП**: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ — базис в V, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — базис в V.

Найдем образы векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$:

$$f(\mathbf{e}_1), \quad \dots, \quad f(\mathbf{e}_m).$$

Эти векторы лежат в W и, следовательно, их можно разложить по базису $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= a_1^1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_1^n \mathbf{f}_n, \\ &\dots, \\ f(\mathbf{e}_m) &= a_m^1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_m^n \mathbf{f}_n. \end{aligned} \qquad f(\mathbf{e}_k) = a_k^l \mathbf{f}_l,$$

где $k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

называется *матрицей гомоморфизма f в паре базисов* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$.

Найдем теперь образ $\mathbf{y}$ произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Пусть

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}) = f(x^k \mathbf{e}_k) = x^k f(\mathbf{e}_k) = x^k a_k^l \mathbf{f}_l.$$

Таким образом, координаты вектора $\mathbf{y}$ равны

$$y^l = x^k a_k^l, \qquad \begin{matrix} k = 1, \dots, m, \\ l = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

В матричной форме:

$$Y = AX.$$

27. Ранг произведения матриц

Рассмотрим произведение двух матриц $C = AB$, где $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Поскольку столбцы матрицы C суть линейные комбинации столбцов матрицы A, получаем

$$\begin{gathered} L(C_1, \dots, C_p) \subset L(A_1, \dots, A_m) \quad \Rightarrow \\ \dim L(C_1, \dots, C_p) \le \dim L(A_1, \dots, A_m). \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} A.$$

Задача. Докажите самостоятельно неравенство

$$\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} B.$$

28. Сопряженный базис

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\dim V = n$, $V^*(\mathbb{K})$ — сопряженное **ЛП**. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Рассмотрим **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$, действующие по правилу

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = \delta^k_j.$$

Тогда $\forall \mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j \in V$ имеем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^k(x^j \mathbf{e}_j) = x^j \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = x^j \delta^k_j = x^k.$$

Теорема. $\dim V^* = n$. *Базис в V^* образуют **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$.*

Доказательство.

1. Проверим, что **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ **ЛН**. Пусть

$$\alpha_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \boldsymbol{\theta},$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — **ЛФ** такой, что $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in V$. Тогда

$$0 = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{e}_j) = (\alpha_k \boldsymbol{\varepsilon}^k)(\mathbf{e}_j) = \alpha_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = \alpha_k \delta^k_j = \alpha_j,$$

т.е. $\alpha_j = 0$.

2. Проверим, что любой **ЛФ** можно представить в виде **ЛК** функционалов $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$. Если $\boldsymbol{\xi} \in V^*$ и $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k \in V$, то

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(x^k \mathbf{e}_k) = x^k \boldsymbol{\xi}(\mathbf{e}_k) = \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x}) \xi_k,$$

где введено обозначение

$$\xi_k = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{e}_k).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

□

Базис $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ в сопряженном **ЛП** V^* называется сопряженным по отношению к базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в исходном **ЛП** V. Числа ξ_k называются координатами **ЛФ** $\boldsymbol{\xi}$ относительно сопряженного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$.

29. Линейное подпространство

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**. Подмножество $P \subset V$ называется *линейным подпространством* (**ЛПП**) пространства V, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$: $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in P$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \mathbf{x} \in P$.

В любом **ЛП** V имеются *тривиальные* **ЛПП**: $\{\mathbf{0}\}$ и V.

Обозначения:

- $P \subset V \iff P$ является подмножеством V;
- $P \Subset V \iff P$ является нетривиальным **ЛПП** V.

Теорема. *Пусть V — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$ и $P \Subset V$. Тогда P тоже является **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$.*

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Примеры ЛПП

1. $V_1 \Subset V_2 \Subset V_3$.
2. $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.

Задача. Найдите размерность и базис этих **ЛПП**.

3. Подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является **ЛПП** в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.

Задача. Найдите размерность и базис этого **ЛПП**.

4. В **ЛП** $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n линейными подпространствами являются следующие подмножества.

(1) Подмножество симметричных матриц

$$S\mathbb{K}^{n\times n} = \Big\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\Big|\; A^T = A \Big\}$$

(символ ^{T} означает транспонирование).

(2) Подмножество кососимметричных матриц

$$A\mathbb{K}^{n\times n} = \Big\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\Big|\; A^T = -A \Big\}.$$

(3) Подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом:

$$P = \Big\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\Big|\; \operatorname{tr} A = 0 \Big\}.$$

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных **ЛПП**.

Задача. Докажите, что $P \Subset A\mathbb{K}^{n\times n}$.

5. В **ЛП** $\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K})$ подпространствами являются множества

$$S\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \Big\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\Big|\; x(-t) = x(t) \Big\},$$

$$A\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \Big\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\Big|\; x(-t) = -x(t) \Big\},$$

состоящие из четных и нечетных многочленов.

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных **ЛПП**.

30. Пополнение базиса

Теорема. *Пусть*

$$P \Subset V, \quad \dim P = p < \dim V = n,$$

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ — *базис в P. Тогда $\exists \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \in V \setminus P$ такие, что*

$$\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_p, \ \mathbf{e}_{p+1}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n$$

— *базис в V.*

Доказательство. Так как $p < n$, то $\exists \mathbf{e}_{p+1} \in V$ такой, что векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}$ **ЛН**; при этом $\mathbf{e}_{p+1} \notin P$, так как в противном случае получили бы $\dim P > p$.

Если $p + 1 = n$, пополнение базиса завершено. Если $p + 1 < n$, продолжаем процесс. □

31. Пересечение и сумма ЛПП

Теорема. *Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cap Q \Subset V$.*

Доказательство. Проверим выполнение требований определения:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P \cap Q \iff \begin{cases} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} \in P \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in Q \end{cases} \iff \mathbf{x} + \mathbf{y} \in P \cap Q.$$

Второе условие проверяется аналогично. □

Замечание. Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cup Q$ не является, вообще говоря, **ЛПП**.

Задача. Приведите соответствующий пример.

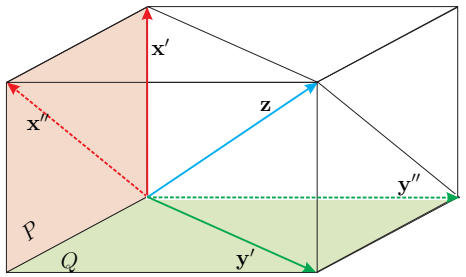
Суммой $P + Q$ **ЛПП** $P, Q \Subset V$ называется **ЛО** всевозможных векторов вида $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in Q$, т.е.

$$P + Q = \Big\{ \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \;\Big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \mathbf{x} \in P, \ \mathbf{y} \in Q \Big\}.$$

Таким образом, $\forall \mathbf{z} \in P + Q$: $\exists \mathbf{x} \in P$, $\exists \mathbf{y} \in Q$ такие, что $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Теорема. *Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P + Q \Subset V$.*

Задача. Докажите теорему.



$$\mathbf{z} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{y}''.$$

Теорема. *Пусть V — **ЛП**, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда*

$$\boxed{\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).} \tag{2}$$

Доказательство.
Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ — базис в $P \cap Q$, $\dim(P \cap Q) = r$;
$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p$ — его дополнение до базиса в P, $\dim P = r + p$;
$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q$ — его дополнение до базиса в Q, $\dim Q = r + q$.
Тогда все эти векторы образуют базис в $P + Q$ (объясните почему), и

$$\dim(P+Q) = r + p + q = (p+r) + (q+r) - r = \\ = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).$$

□

32. Прямая сумма ЛПП

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда для любого вектора $\mathbf{z} \in P + Q$ существуют такие $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in Q$, что $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Если же оно единственно, то сумма **ЛПП** называется *прямой суммой*; $P \oplus Q$.

Теорема. *Сумма **ЛПП** P и Q является прямой суммой тогда и только тогда, когда $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство.
1. Пусть $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Тогда базис в $P \cap Q$ пуст, и его дополнения до базисов в P и Q суть

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q,$$

где $p = \dim P$, $q = \dim Q$. Базис в $P+Q$ состоит из всех этих векторов, поэтому $\forall \mathbf{z} \in P+Q$ имеем

$$\mathbf{x} = \underbrace{x^1\mathbf{f}_1 + \dots + x^p\mathbf{f}_p}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{y^1\mathbf{g}_1 + \dots + y^q\mathbf{g}_q}_{=\mathbf{y}}.$$

Это разложение единственно (единственность разложения по базису) $\Rightarrow P + Q = P \oplus Q$.
2. Пусть $P + Q = P \oplus Q$. Докажем, что $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.
Предположим противное, т.е. допустим, что $\exists \mathbf{v} \in P \cap Q$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{v} \in P$, $\mathbf{v} \in Q$ и $\forall \mathbf{z} \in P \oplus Q$ имеем

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{v}}_{\in P} + \underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{v}}_{\in Q},$$

т.е. разложение вида $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ не единственно; противоречие. □

Задача. Докажите, что

$$\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{Pol}(n) = S\,\mathrm{Pol}(n) \oplus A\,\mathrm{Pol}(n).$$

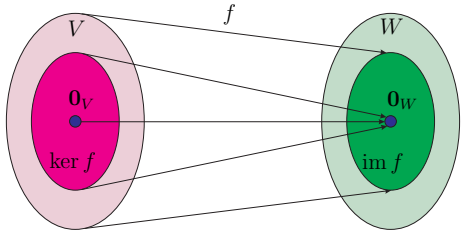
33. Ядро и образ гомоморфизма

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — два **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ — гомоморфизм.
Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество векторов из V

$$\ker f = \left\{ \mathbf{x} \in V \;\middle|\; f(x) = \mathbf{0}_W \right\}.$$

Образ $\mathrm{im}\, f$ гомоморфизма f — это множество векторов из W

$$\mathrm{im}\, f = \left\{ \mathbf{y} \in W \;\middle|\; \exists \mathbf{x} \in V : \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \right\}.$$



Теорема. *Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм **ЛП**.*

$$\ker f \Subset V, \qquad \mathrm{im}\, f \Subset W.$$

Доказательство. 1. Проверим, что $\ker f \Subset V$. Имеем:

$$\mathbf{x} \in \ker f \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W, \\ \mathbf{y} \in \ker f \iff f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_W;$$

поэтому

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_W \iff \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \ker f.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

Теорема. *Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм **ЛП**.*

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f = \dim V.} \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, $\dim \ker f = p$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ — базис в $\ker f$, $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ — его дополнение до базиса в V.
Имеем $f(\mathbf{e}_1) = \dots = f(\mathbf{e}_p) = \mathbf{0}_W$.
Докажем, что векторы $\mathbf{f}_{p+1} = f(\mathbf{e}_{p+1})$, …, $\mathbf{f}_n = f(\mathbf{e}_n)$ образуют базис в $\mathrm{im}\, f$.
Предположим, что эти векторы **ЛЗ**, т.е. $\exists \alpha^{p+1}, \dots, \alpha^n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}_W.$$

В таком случае

$$\mathbf{0}_W = \alpha^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{f}_n = \\ = \alpha^{p+1}f(\mathbf{e}_{p+1}) + \dots + \alpha^n f(\mathbf{e}_n) = \\ = f(\alpha^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n),$$

откуда следует, что

$$\alpha^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Таким образом, векторы $\mathbf{f}_{p+1} = f(\mathbf{e}_{p+1}), \dots, \mathbf{f}_n = f(\mathbf{e}_n)$ **ЛН**.

Далее, $\forall \mathbf{y} \in \operatorname{im} f\ \exists \mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Имеем:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^p\mathbf{e}_p + x^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + x^n\mathbf{e}_n,$$
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \underbrace{x^1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x^p f(\mathbf{e}_p)}_{=\mathbf{0}_W} + x^{p+1} f(\mathbf{e}_{p+1}) + \dots + x^n f(\mathbf{e}_n) =$$
$$= x^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + x^n\mathbf{f}_n,$$

т.е. любой вектор $\mathbf{y} \in W$ может быть разложен в **ЛК** векторов $\mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n$. Таким образом, векторы $\mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ образуют базис в $\operatorname{im} f$ и, следовательно, $\dim \operatorname{im} f = n - p$.

Итак,

$$\dim V = n = p + (n - p) = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

□

34. Матрицы и отображения

Рассмотрим **ЛП** $V = \mathbb{K}^m$ и $W = \mathbb{K}^n$. Элементы этих **ЛП** — столбцы с элементами из $\mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$; тогда любому столбцу $X \in \mathbb{K}^m$ можно поставить в соответствие столбец $Y \in \mathbb{K}^n$ по правилу

$$Y = AX.$$

Задача. Докажите, что отображение $\mathbf{A} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, заданное этой формулой, является гомоморфизмом **ЛП**.

Задача. Докажите, что $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^{n\times m}$.

Найдем образ $\operatorname{im}\mathbf{A}$ гомоморфизма $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{im}\mathbf{A} = \left\{ Y \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \exists X \in \mathbb{K}^m : Y = AX \right\}.$$

Столбец AX представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы A; поэтому

$$\operatorname{im}\mathbf{A} = L(A_1, \dots, A_m) \Subset \mathbb{K}^n,$$

т.е. *образ гомоморфизма* $\mathbf{A}$ *представляет собой линейную оболочку столбцов матрицы* A.

Базис в $\operatorname{im}\mathbf{A}$ образуют базисные столбцы матрицы A. Поэтому

$$\dim \operatorname{im}\mathbf{A} = \operatorname{rk} A.$$

Проблема. Как найти базисные столбцы матрицы?

Задача вычисления образа Y столбца X при гомоморфизме $\mathbf{A}$ решается легко с помощью формулы

$$Y = AX.$$

Поставим обратную задачу: найти прообраз X элемента Y. Для этого нужно найти решение X уравнения

$$AX = Y,$$

т.е. системы неоднородных линейных уравнений.

Проблема. Как решить систему неоднородных линейных уравнений?

Найдем ядро $\ker\mathbf{A}$ гомоморфизма $\mathbf{A}$. Оно состоит из всех столбцов $X \in \mathbb{K}^m$ таких, что

$$AX = \mathbf{0}_n,$$

где $\mathbf{0}_n \in \mathbb{K}^n$ — нулевой столбец. Таким образом, вычисление ядра гомоморфизма $\mathbf{A}$ сводится к решению системы однородных линейных уравнений.

Таким образом, *множество* $M = \ker\mathbf{A}$ *решений системы однородных линейных уравнений представляет собой* ***ЛПП*** *в* $\mathbb{K}^m$, *размерность которого равна*

$$\dim M = \dim\ker\mathbf{A} = \dim\mathbb{K}^m - \dim\operatorname{im}\mathbf{A} = m - \operatorname{rk} A.$$

Базис в $\ker\mathbf{A}$ называется *фундаментальной совокупностью решений* (**ФСР**) системы однородных линейных уравнений.

Проблема. Как решить систему однородных линейных уравнений? Как найти **ФСР**?

Рассмотрим отображение $\mathbf{B} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, соответствующее квадратной невырожденной матрице $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$Y = BX, \quad X \in \mathbb{K}^n, \quad Y \in \mathbb{K}^n.$$

Задача. Докажите, что отображение $\mathbf{B}$ является изоморфизмом.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Рассмотрим матрицу $C = BA \in \mathbb{K}^{n\times m}$. k-й столбец матрицы C представляет собой произведение матрицы B на k-й столбец матрицы A. Поэтому получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in GL(n, \mathbb{K})$.

(1) *Если столбцы матрицы* A ***ЛН***, *то столбцы матрицы* BA *также* ***ЛН***.
(2) *Если столбцы матрицы* A ***ЛЗ***, *то столбцы матрицы* BA *также* ***ЛЗ***, *причем с теми же коэффициентами.*

Таким образом, умножение матрицы A *слева на невырожденную матрицу* B *не нарушает линейных зависимостей между столбцами.*

Задача. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для строк матрицы.

Теорема. *Пусть* $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ — *невырожденная матрица. Тогда* $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times m}$

$$\operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} A.$$

Доказательство. Обозначим $C = BA$; так как $\det B \neq 0$, имеем $A = B^{-1}C$. Далее,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rk} C &= \operatorname{rk} BA \le \operatorname{rk} A, \\ \operatorname{rk} A &= \operatorname{rk} B^{-1}A \le \operatorname{rk} C \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} A.$$

□

35. Упрощенная форма матрицы.

Говорят, что матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ имеет *упрощенную форму*,

(1) некоторые r ($r \ge 0$) ее столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы $\mathbf{I}_n$,
(2) при $r < n$ последние $n - r$ строк нулевые.

Ранг упрощенной матрицы равен r, а ее базисными столбцами являются r столбцов, совпадающие по виду со столбцами единичной матрицы.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{pmatrix}$$

Любая матрица может быть приведена к упрощенной форме при помощи элементарных преобразований строк.

36. Элементарные преобразования строк матрицы

Элементарные преобразования строк матрицы (**ЭПС**) — это следующие преобразования:

(1) перестановка двух строк;
(2) умножение строки на ненулевое число;
(3) добавление к строке другой строки.

Обозначим символом $R(A)$ матрицу, полученную из $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ **ЭПС**, и символом $\mathbf{I}$ единичную матрицу $n \times n$.

Теорема.

$$R(A) = R(\mathbf{I}) \cdot A.$$

Доказательство. Проверим утверждение для простейших **ЭПС**.

Пусть R_1 — перестановка первой и второй строк, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_1(A) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_1(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_1(A).$$

Пусть R_2 — умножение первой строки на $\alpha \neq 0$. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_2(A) = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_2(A).$$

Пусть R_3 — прибавление к первой строке матрицы A ее второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_3(A) = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_3(A).$$

Теорема доказана. □

Задача. Докажите, что матрицы $R_1(\mathbf{I})$, $R_2(\mathbf{I})$ и $R_3(\mathbf{I})$ невырождены.

Теорема. *Пусть в матрице A выполнена серия **ЭПС**. Тогда полученная матрица равна произведению матрицы A слева на (невырожденную!) матрицу, полученную из единичной матрицы с помощью той же серии **ЭПС**.*

Доказательство. Докажем утверждение для серии из двух **ЭПС** R_1 и R_2:

$$R_1(R_2(A)) = R_1(\mathbf{I}) \cdot R_2(A) = R_1(\mathbf{I}) \cdot [R_2(\mathbf{I}) \cdot A] = \tag{4}$$

$$[R_1(\mathbf{I}) \cdot R_2(\mathbf{I})] \cdot A = R_1(R_2(\mathbf{I})) \cdot A. \tag{5}$$

□

Теорема. *Элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейные зависимости между ее столбцами. В частности,*

$$\operatorname{rk} R(A) = \operatorname{rk} A.$$

37. Пример приведения матрицы к упрощенной форме

Приведем к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этого нужно провести серию **ЭПС** так, чтобы некоторые из столбцов этой матрицы превратились в первые несколько столбцов единичной матрицы 3×3, а остальные линейно выражались бы через них.

Сначала проведем **ЭПС**, которое позволит получить единицу в первом столбце; для этого вычтем из третьей строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь один из элементов первого столбца равен 1; переместим эту единицу в первую строку; для этого поменяем местами третью строку с первой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обнуляем все элементы первого столбца, кроме выделенного элемента; для этого вычитаем из второй строки удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец полученной представляет собой первый столбец единичной матрицы 3×3.

Переходим ко второму столбцу. Ясно, что он не является **ЛК** предыдущих столбцов. Превратим его во второй столбец единичной матрицы 3×3. Единица уже имеется; переставим ее во вторую строку, для чего поменяем местами вторую строку с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнуляем все элементы второго столбца, кроме выделенного; для этого к первой строке прибавляем вторую, а из третьей вычитаем утроенную вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец полученной матрицы теперь представляет собой второй столбец единичной матрицы 3×3.

Переходим к третьему столбцу. Очевидно, он равен **ЛК** первого и второго столбцов с коэффициентами 2 и 3. Превратить его в третий столбец единичной матрицы не удастся.

Разделим третью строку на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переходим к четвертому столбцу. Единица на нужном месте уже имеется. Уничтожим все элементы четвертого столбца, кроме этой единицы; для этого из первой строки вычитаем удвоенную третью, а из второй — третью:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что пятый столбец полученной матрицы есть линейная комбинация первого, второго и четвертого с коэффициентами 1, 0, 2. Приведение матрицы к упрощенной форме завершено.

В полученной матрице базисными столбцами являются A_1, A_2 и A_4, а остальные столбцы линейно выражаются через базисные:

$$A_3 = 2A_1 + 3A_2, \quad A_5 = A_1 + 2A_4.$$

Проверим, что эти же линейные зависимости имеют место в исходной матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$2A_1 + 3A_2 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = A_3,$$

$$A_1 + 2A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = A_5.$$

38. Вычисление обратной матрицы

Пусть $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Вычислим A^{-1} с помощью следующего приема. Рассмотрим блочную матрицу

$$\tilde{A} = [A \mid \mathbf{I}]$$

и с помощью **ЭПС** превратим ее левый блок в единичную матрицу. Это эквивалентно умножению матрицы $\tilde{A}$ слева на невырожденную матрицу B такую, что $BA = \mathbf{I}$, т.е. $B = A^{-1}$. Но при этом правый блок также умножится слева на $B = A^{-1}$ и станет равным $A^{-1}\mathbf{I} = A^{-1}$.

Пример.

Вычислить обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим блочную матрицу $[A \mid \mathbf{I}]$ и проведем цепочку **ЭПС**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача. Объясните, что происходит в ситуации, когда левый блок матрицы $[A \mid \mathbf{I}]$ не удается превратить в единичную матрицу с помощью **ЭПС**.

39. Решение однородной системы

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x^3 + x^4 + 2x^5 = 0, \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 + 2x^5 = 0, \\ 3x^1 + 6x^3 + x^4 + 5x^5 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к упрощенному виду (см. выше):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеем $m = \dim V = 5$ (размерность пространства прообразов), $r = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 3$, поэтому размерность пространства решений равна $\dim \ker \mathbf{A} = 5 - 3 = 2$.

Переменные, соответствующие базисным столбцам матрицы, называются базисными, остальные переменные — свободными. В нашем примере базисными переменными являются x^1, x^2 и x^4, а свободными — x^3 и x^5. Теперь систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = -2x^5. \end{cases}$$

Положим $x^3 = 1$ и $x^5 = 0$, а затем $x^3 = 0$ и $x^5 = 1$; получим два столбца

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Они **ЛН** и образуют базис в $\ker \mathbf{A}$, т.е. являются **ФСР** исходной однородной системы.

Любое другое решение системы (т.е. вектор из $\ker \mathbf{A}$) имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2,$$

где c^1, c^2 — произвольные числа.

Матрица $\Phi = [X_1 \ X_2]$ называется *фундаментальной матрицей* (**ФМ**) системы однородных уравнений. С ее помощью общее решение системы записывается в виде

$$X = \Phi C, \quad C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

ФМ задает изоморфизм $\mathbf{\Phi} : \mathbb{K}^{m-r} \to \ker \mathbf{A}$.

40. Решение неоднородной системы

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x^3 + x^4 = 2, \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 = 2, \\ 3x^1 + 6x^3 + x^4 = 5. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

и приведем ее к упрощенному виду (см. выше):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Имеем $m = \dim V = 4$ (размерность пространства прообразов), $r = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 3$. Столбец свободных членов Y лежит в **ЛО** столбцов основной матрицы, $Y \in \operatorname{im} \mathbf{A}$, поэтому система совместна (ранг основной матрицы равен рангу расширенной; теорема Кронекера—Капелли).

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 + 1, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = 2. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму любого ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Частное решение X_0 находим, полагая $x^3 = 0$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ФСР однородной системы состоит из $\dim V - \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 4 - 3 = 1$ столбца, находится из усеченных уравнений

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = 0, \end{cases}$$

если положить $x^3 = 1$, и имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = X_0 + c^1 X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c^1 — произвольное число.

41. Составление однородной системы по заданной ФСР

Найти однородную систему уравнений, имеющую **ФСР**

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Произвольное решение X искомой системы является линейной комбинацией двух данных решений, поэтому столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}$$

должны быть **ЛЗ**, т.е. ее ранг должен равняться 2. Приведем эту матрицу к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & 0 & x^1+2x^3+x^5 \\ 0 & 0 & x^4+2x^5 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы ранг этой матрицы равнялся двум, необходимо и достаточно, чтобы последние три ее строки были нулевыми. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^4+2x^5=0, \\ x^2+3x^3=0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^2+3x^3=0, \\ x^4+2x^5=0. \end{cases}$$

Матрица последней системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

42. Типовые задачи

Задача 1. Найти образ гомоморфизма $f : V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах, и задача сводится к нахождению базисных столбцов матрицы A.

Задача 2. Найти ядро гомоморфизма $f : V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах, и задача сводится к решению однородной системы $AX = 0$.

Задача 3. Найти прообраз вектора $\mathbf{y}$ при гомоморфизме $f : V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах и столбец Y координат вектора $\mathbf{y}$, и задача сводится к решению неоднородной системы $AX = Y$.

Задача 4. Найти базис в **ЛО** векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$.

Решение. Выбираем базис в V и записываем матрицу A, столбцами которой являются столбцы координат данных векторов в этом базисе. Задача сводится к нахождению базисных столбцов матрицы A.

Задача 5. ЛПП $P \Subset V$ задано как **ЛО** векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$. Описать это **ЛПП** как ядро подходящего гомоморфизма.

Решение. Выбираем базис в P (см. задачу 4). Задача сводится к нахождению однородной системы, имеющей заданную **ФСР**.

Линейная алгебра–2
Тензоры
Билинейные и квадратичные функционалы

1. Преобразование базисов

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $\dim V = n$,
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — старый базис в V,
$\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис в V.

Так как $\mathbf{e}_{k'} \in V$ $\forall k' = 1', \dots, n'$, его можно разложить по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{e}_{k'} = c^1_{k'}\mathbf{e}_1 + \dots + c^n_{k'}\mathbf{e}_n$$

или, в обозначениях Эйнштейна

$$\boxed{\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'}\mathbf{e}_k, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, n, \\ k' = 1', \dots, n'. \end{matrix}} \tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \dots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \dots & c^n_{n'} \end{pmatrix} = (c^k_{k'})^n_{n'}$$

называется *матрицей перехода* (**МП**) от старого базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}$.
Столбцы матрицы перехода представляют собой столбцы координат векторов нового базиса относительно старого базиса.

Рассмотрим матрицу

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \dots & c^{n'}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{1'}_n & \dots & c^{n'}_n \end{pmatrix} = (c^{k'}_k)^{n'}_n,$$

обратную к матрице C. Умножим обе части (1) на $c^{k'}_j$ и просуммируем по k':

$$c^{k'}_j \mathbf{e}_{k'} = c^{k'}_j c^k_{k'} \mathbf{e}_k.$$

Так как $c^{k'}_j c^k_{k'} = \delta^k_j$, получаем

$$c^{k'}_j \mathbf{e}_{k'} = \delta^k_j \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$$

или, меняя индекс k' на j',

$$\boxed{\mathbf{e}_j = c^{j'}_j \mathbf{e}_{j'}, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n, \\ j' = 1', \dots, n'. \end{matrix}} \tag{2}$$

Эта формула выражает векторы старого базиса через векторы нового базиса.

Рассмотрим матрицы-строки

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ \dots, \ \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ \dots, \ \mathbf{e}_{n'}),$$

состоящие из векторов старого и нового базисов, соответственно. Тогда формулы преобразования базисов можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}C, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}'C^{-1}.$$

Задача. Докажите эти формулы.

2. Преобразование координат вектора

Пусть $\mathbf{x} \in V$. Найдем связь между координатами x^k этого вектора относительно старого базиса и его координатами $x^{k'}$ относительно нового базиса. Имеем:

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k = x^{k'} \mathbf{e}_{k'}. \tag{3}$$

Подставим сюда (1):

$$x^k \mathbf{e}_k = x^{k'} \mathbf{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \mathbf{e}_k.$$

В силу единственности разложения по базису имеем

$$\boxed{x^k = c^k_{k'} x^{k'}.} \tag{4}$$

Аналогично, подставляя в (3) соотношение (2), получим

$$\boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{5}$$

Рассмотрим столбцы координат вектора $\mathbf{x}$ относительно старого и нового базисов:

$$X_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (4), (5) можно записать в виде

$$X_{\mathbf{e}} = CX_{\mathbf{e}'}, \quad X_{\mathbf{e}'} = C^{-1}X_{\mathbf{e}}.$$

3. Преобразование сопряженного базиса

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{1'}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{n'}$ — базисы в V^*, сопряженные базисам $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}$, C — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$. Найдем матрицу перехода D от базиса $\boldsymbol{\varepsilon}$ к базису $\boldsymbol{\varepsilon}'$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{j'} = d^{j'}_j \boldsymbol{\varepsilon}^j.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta^{j'}_{k'} = \boldsymbol{\varepsilon}^{j'}(\mathbf{e}_{k'}) &= d^{j'}_j \boldsymbol{\varepsilon}^j(c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = \\ &= d^{j'}_j c^k_{k'} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_k)}_{=\delta^j_k} = \\ &= d^{j'}_j c^k_{k'} \delta^j_k = d^{j'}_k c^k_{k'} \ \Rightarrow \ d^{j'}_k = c^{j'}_k. \end{aligned}$$

Итак,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{j'} = c^{j'}_j \boldsymbol{\varepsilon}^j, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^j = c^j_{j'} \boldsymbol{\varepsilon}^{j'}. \tag{6}$$

Введем матрицы-столбцы

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{1'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{n'} \end{pmatrix},$$

состоящие из элементов старого и нового сопряженных базисов. Тогда

$$\mathcal{E}' = C^{-1}\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = C\mathcal{E}'.$$

Задача. Докажите.

4. Преобразование координат ЛФ

Пусть $\boldsymbol{\xi} \in V^*$. Разложим **ЛФ** $\boldsymbol{\xi}$ по старому и новому сопряженным базисам:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \xi_{k'} \boldsymbol{\varepsilon}^{k'}.$$

Координаты ξ^k и $\xi^{k'}$ связаны соотношениями

$$\xi_k = c_k^{k'} \xi_{k'}, \quad \xi_{k'} = c_{k'}^k \xi_k. \tag{7}$$

Задача. Докажите эти формулы.

Введем матрицы-строки

$$\Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n), \quad \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = (\xi_{1'}, \ \ldots, \ \xi_{n'}).$$

Тогда формулы (7) можно переписать в виде

$$\Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} C^{-1}, \quad \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} C.$$

5. Градиент функции

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$. Зафиксировав базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$ и разложив вектор $\mathbf{x}$ по этому базису,

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k,$$

можно считать, что задана функция

$$y = f(x^1, \ldots, x^n)$$

n аргументов $x^1, \ldots, x^n$. *Градиентом* этой функции в точке $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = (\overset{\circ}{x}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{x}{}^n)$ называется «вектор»

$$\operatorname{grad} f(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_k.$$

Получим закон преобразования координат $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ этого «вектора» при замене базиса в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис в $\mathbb{R}^n$, связанный с исходным базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицей перехода $C = (c_{k'}^k)$:

$$\mathbf{e}_{k'} = c_{k'}^k \mathbf{e}_k.$$

Координаты точки $\mathbf{x}$ относительно старого и нового базисов связаны соотношением

$$x^{k'} = c_k^{k'} x^k,$$

в которое входят элементы $c_k^{k'}$ обратной матрицы перехода. Эквивалентная формула:

$$x^k = c_{k'}^k x^{k'}. \tag{8}$$

Вычислим компоненты градиента относительно нового базиса при помощи теоремы о производной сложной функции, считая старые координаты $x^1, \ldots, x^n$ функциями новых координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, заданными соотношением (8):

$$\frac{\partial f}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^n c_{k'}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Таким образом, компоненты градиента преобразуются не как компоненты вектора, а как компоненты линейного функционала.

6. Определение тензора

Пусть $V(\mathbb{R})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{R}$. Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в **ЛП** V называется геометрический объект, который в каждом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ **ЛП** V задается n^{p+q} координатами $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p$, $k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому базису $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A_{j_1' \ldots j_p'}^{k_1' \ldots k_q'} = \underbrace{c_{j_1'}^{j_1} \ \ldots \ c_{j_p'}^{j_p}}_{\text{МП}} \underbrace{c_{k_1}^{k_1'} \ \ldots \ c_{k_q}^{k_q'}}_{\text{ОМП}} A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q};$$

по всем повторяющимся индексам производится суммирование. Часто тензор отождествляют с набором его координат.

Примеры тензоров

1. Инвариант (скаляр) — тензор типа $(0, 0)$, имеющий одну (n^0) координату, не преобразующуюся при замене базиса.

2. Контравариантный тензор (тензор типа $(0, 1)$) имеет n координат, преобразующихся по закону

$$A^{k'} = c_k^{k'} \ A^k.$$

Это — набор координат вектора.

3. Ковариантный тензор (тензор типа $(1, 0)$, ковектор) имеет n координат, преобразующихся по закону

$$A_{k'} = c_{k'}^k \ A_k.$$

Это — набор координат линейного функционала.

7. Сложение тензоров и умножение на число

Пусть $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ и $B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ — тензоры типа (p, q). Их суммой называется объект $D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$, определяемый в каждом базисе набором n^{p+q} чисел

$$D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}.$$

Теорема. *Сумма двух тензоров типа (p, q) является тензором типа (p, q).*

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} D_{j_1' \ldots j_p'}^{k_1' \ldots k_q'} &= A_{j_1' \ldots j_p'}^{k_1' \ldots k_q'} + B_{j_1' \ldots j_p'}^{k_1' \ldots k_q'} = \\ &= c_{j_1'}^{j_1} \ \ldots \ c_{j_p'}^{j_p} \, c_{k_1}^{k_1'} \ \ldots \ c_{k_q}^{k_q'} \, A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + \\ &+ c_{j_1'}^{j_1} \ \ldots \ c_{j_p'}^{j_p} \, c_{k_1}^{k_1'} \ \ldots \ c_{k_q}^{k_q'} \, B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = \\ &= c_{j_1'}^{j_1} \ \ldots \ c_{j_p'}^{j_p} \, c_{k_1}^{k_1'} \ \ldots \ c_{k_q}^{k_q'} \left(A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} \right) = \\ &= c_{j_1'}^{j_1} \ \ldots \ c_{j_p'}^{j_p} \, c_{k_1}^{k_1'} \ \ldots \ c_{k_q}^{k_q'} \, D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}. \end{aligned}$$

□

Произведением тензора $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ типа (p, q) на число α называется объект, который в каждом базисе задается набором n^{p+q} чисел

$$F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = \alpha \cdot A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}.$$

Теорема. *Произведение тензора типа (p, q) на число является тензором типа (p, q).*

Задача. Докажите самостоятельно.

8. Произведение тензоров

Пусть $A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$ и $B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r}$ — тензоры типа (p,q) и (r,s) соответственно. Их произведением называется объект $D^{k_1\ldots k_q\ i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p\ l_1\ldots l_r}$, определяемый в каждом базисе набором $n^{p+q+r+s}$ чисел

$$D^{k_1\ldots k_q\ i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p\ l_1\ldots l_r} = A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \cdot B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r}.$$

Обозначение: $D = A \otimes B$.

Теорема. *Произведение двух тензоров типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r, q+s)$.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Пример. Рассмотрим произведение двух 1-контравариантных тензоров A^j и B^k. Рассмотрим произведения $D = A \otimes B$ и $F = B \otimes A$. Компоненты этих тензоров равны

$$D^{jk} = A^j \cdot B^k, \quad F^{jk} = B^j \cdot A^k;$$

эти компоненты удобно расположить в виде матриц

$$D = (D^{jk}) = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & \ldots \\ D^{21} & D^{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1B^1 & A^1B^2 & \ldots \\ A^2B^1 & A^2B^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$F = (F^{jk}) = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & \ldots \\ F^{21} & F^{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1A^1 & B^1A^2 & \ldots \\ B^2A^1 & B^2A^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрицы D и F не равны (в данном частном случае они являются взаимно транспонированными). Этот пример показывает, что, вообще говоря,

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

9. Свертка тензора

Пусть A — тензор типа (p,q), где $p \geq 1$, $q \geq 1$ (т.е. у тензора имеется хотя бы один нижний индекс и хотя бы один верхний индекс):

$$A^{k_1k_2\ldots k_q}_{j_1j_2\ldots j_p}.$$

Выберем у этого индекса один нижний и один верхний индекс (например, пусть это будут j_1 и k_1) и рассмотрим сумму компонент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2\ldots k_q}_{\alpha j_2\ldots j_p} = B^{k_2\ldots k_q}_{j_2\ldots j_p}.$$

Объект B называется *сверткой* тензора A по выбранной паре индексов.

Теорема. *Свертка тензора типа (p,q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A^l_{jk} типа $(2,1)$. Рассмотрим свертку $B_j = A^k_{jk}$ и получим закон преобразования для чисел B_j. Имеем:

$$B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \underline{\delta^{k'}_{l'}}\ c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ \underline{c^{l'}_l}\ A^l_{jk} =$$
$$= c^j_{j'}\ \underbrace{c^k_{k'}\ c^{k'}_l}_{=\delta^k_l}\ A^l_{jk} = c^j_{j'}\ \delta^k_l A^l_{jk} = c^j_{j'}\ A^k_{jk} = c^j_{j'}\ B_j.$$

□

Примеры. Рассмотрим тензор типа $(1,1)$: A^k_j. Его сверткой по (единственной имеющейся у него) паре индексов j, k является

$$B = A^1_1 + A^2_2 + \cdots + A^n_n = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_\alpha = A^j_j.$$

B — тензор типа $(0,0)$, т.е. инвариант; его единственная компонента не меняется при замене базиса.

Для тензора A^l_{jk} типа $(2,1)$ можно образовать две различные свертки:

$$B_j = A^1_{j1} + A^2_{j2} + \cdots + A^n_{jn} = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_{j\alpha} = A^k_{jk},$$

$$D_k = A^1_{1k} + A^2_{2k} + \cdots + A^n_{nk} = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_{\alpha k} = A^j_{jk}.$$

Оба тензора B_j, D_k являются 1-ковариантными.

Часто встречается операция свертки произведения двух тензоров по паре индексов, первый из которых принадлежит одному из перемножаемых тензоров, а второй — другому. Например, из тензоров A_{jk} и B^l можно образовать произведение $D = A \otimes B$ с компонентами $D^l_{jk} = A^l_{jk}$, а затем рассмотреть свертку

$$A_{jk}B^k.$$

Задача. Пусть X_j, Y_k — два 1-ковариантных тензора. Рассмотрим величины $A_{jk} = X_j + Y_k$. Образуют ли они тензор? Оценить ранг матрицы $A = (A_{jk})$.

10. Билинейный функционал

Пусть $V(\mathbb{R})$ — вещественное **ЛП**.

Билинейный функционал (**БФ**) на **ЛП** V — это функция $\mathbf{B} : V \times V \to \mathbb{R}$ пары векторных аргументов, обладающая следующими свойствами:

1) $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$:
$\mathbf{B}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$,
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{B}(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$:
$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$,
4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Введем операции сложения **БФ** и умножения **БФ** на число по правилам

$$(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$
$$(\alpha\mathbf{B})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Множество всех **БФ** на **ЛП** V является **ЛП**.*

Задача. Докажите.

11. Матрица билинейного функционала

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Разложим векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ по этому базису:

$$\mathbf{x} = x^j\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{y} = y^k\mathbf{e}_k,$$

и вычислим значение **БФ** на этой паре векторов:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(x^j\mathbf{e}_j, y^k\mathbf{e}_k) = x^jy^k\mathbf{B}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Введем обозначение

$$b_{jk} = \mathbf{B}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Матрица $B_e = (b_{jk})$ называется *матрицей* **БФ** $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Значение **БФ** $\mathbf{B}$ на паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_{jk} x^j y^k.$$

Таким образом, координатной записью билинейного функционала является однородный многочлен второй степени от переменных x^j, y^k, называемый *билинейной формой*.

Введя в рассмотрение столбцы координат:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

можно записать предыдущую формулу в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_e^T B_e Y_e.$$

Задача. Докажите.

12. **БФ** как тензор

Теорема. ***БФ*** *является тензором типа* $(2, 0)$.

Доказательство. Необходимо проверить, что элементы матрицы **БФ** преобразуются при переходе к новому базису по закону

$$\boxed{b_{j'k'} = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk},} \tag{9}$$

где $c^j_{j'}$ — элементы матрицы перехода:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \mathbf{e}_j.$$

Имеем:

$$b_{j'k'} = \mathbf{B}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = \mathbf{B}(c^j_{j'} \mathbf{e}_j,\ c^k_{k'} \mathbf{e}_k) =$$
$$= c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ \mathbf{B}(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ b_{jk}.$$

Проведем доказательство в матричной форме. Имеем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_e^T B_e Y_e = X_{e'}^T B_{e'} Y_{e'}.$$

Напомним, что столбцы координат вектора относительно нового и старого базисов связаны соотношениями

$$X_e = C X_{e'}, \quad X_{e'} = C^{-1} X_e.$$

Получаем:

$$X_{e'}^T B_{e'} Y_{e'} = X_e^T B_e Y_e =$$
$$= (C X_{e'})^T B_e (C Y_{e'}) = X_{e'}^T C^T B_e C Y'_e,$$

откуда

$$X_{e'}^T (C^T B_e C - B_{e'}) Y'_e = 0.$$

В левой части этого равенства стоит многочлен от $x^{j'}$, $y^{k'}$, тождественное обращение которого в нуль возможно лишь при условии, что все его коэффициенты равны нулю; отсюда получаем

$$\boxed{B_{e'} = C^T B_e C.} \tag{10}$$

□

Задача. Докажите эквивалентность формул (9) и (10).

Теорема. ***ЛП*** *всех* ***БФ*** *в* ***ЛП*** $V(\mathbb{R})$ *изоморфно* $\mathbb{R}^{n \times n}(\mathbb{R})$.

Задача. Докажите эту теорему и найдите размерность **ЛП** всех **БФ** на **ЛП** V.

13. Инварианты **БФ**

Теорема. *Пусть* B_e *— матрица* ***БФ*** $\mathbf{B}$ *в каком-либо базисе* ***ЛП*** V. *Ранг матрицы* B_e *и знак ее определителя не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами* ***БФ***.

Ранг матрицы **БФ** называется рангом **БФ**; обозначение $\operatorname{rk} \mathbf{B}$.

Доказательство. Имеем:

$$B_{e'} = C^T B_e C \quad \Rightarrow$$
$$B_e = (C^T)^{-1} B_{e'} C^{-1} = (C^{-1})^T B_{e'} C^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{matrix} \operatorname{rk} B_{e'} \le \operatorname{rk} B_e, \\ \operatorname{rk} B_e \le \operatorname{rk} B_{e'} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} B_e = \operatorname{rk} B_{e'}.$$

Далее,

$$\det B_{e'} = \det(C^T B_e C) = \det C^T \cdot \det B_e \cdot \det C =$$
$$= (\det C)^2 \cdot \det B_e,$$

откуда вытекает, что знаки $\det B_{e'}$ и $\det B_e$ совпадают. □

14. Симметричные и кососимметричные **БФ**

БФ $\mathbf{B}$ называется *симметричным*, если

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

и кососимметричным, если

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

Теорема. *Для того чтобы* ***БФ*** $\mathbf{B}$ *был симметричным (кососимметричным), необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-либо базисе была симметричной (кососимметричной). Если матрица* ***БФ*** *симметрична (кососимметрична) в каком-либо базисе, то она является таковой и в любом другом базисе.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть **БФ** симметричен. Имеем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T B Y = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = Y^T B X.$$

Поскольку $Y^T B X$ — число, $(Y^T B X)^T = Y^T B X$, так что

$$X^T B Y = Y^T B X = (Y^T B X)^T = X^T B^T Y$$
$$\Rightarrow \quad B = B^T.$$

2. Достаточность. Если матрица B **БФ** $\mathbf{B}$ симметрична, т.е. $B^T = B$, то имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T B Y = (X^T B Y)^T =$$
$$= Y^T B^T X = Y^T B X = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3. Пусть матрица B_e **БФ** $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}$ симметрична. В другом базисе имеем:

$$B_{e'} = C^T B_e C = C^T B_e^T C =$$
$$= C^T B_e^T (C^T)^T = (C^T B_e C)^T = B_{e'}^T.$$

□

Теорема. *Любой* ***БФ*** *можно единственным образом представить в виде суммы симметричного и кососимметричного* ***БФ***.

Доказательство. Запишем **БФ** $\mathbf{B}$ в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big).$$

Первое слагаемое представляет собой симметричный, а второе — кососимметричный **БФ**. Обозначим их

$$\mathbf{B}_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big),$$
$$\mathbf{B}_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big)$$

и назовем *симметричной* и *кососимметричной* частями данного **БФ** $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. □

Матрицы B_S, B_A **БФ** $\mathbf{B}_S$ и $\mathbf{B}_A$ получаются из матрицы B **БФ** $\mathbf{B}$ по формулам

$$B_S = \frac{1}{2}\Big(B + B^T\Big), \quad B_A = \frac{1}{2}\Big(B - B^T\Big)$$

или, эквивалентно,

$$\overset{S}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} + b_{kj}\Big), \quad \overset{A}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} - b_{kj}\Big).$$

Матрицы B_S, B_A, будучи матрицами **БФ**, образуют тензоры типа $(2,0)$. Говорят, что тензоры B_S, B_A получены из тензора B с помощью операций *симметрирования* и *альтернирования* соответственно. Обозначения:

$$\overset{S}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} + b_{kj}\Big) = b_{(jk)}$$
$$\overset{A}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} - b_{kj}\Big) = b_{[jk]}.$$

15. Квадратичные функционалы

Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — **БФ** в вещественном **ЛП** V. Положив $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим из **БФ** *квадратичный функционал* (**КФ**):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Если в **ЛП** V выбран базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, B — матрица **БФ** $\mathbf{B}$ относительно этого базиса, $x^1,\dots,x^n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса, то **КФ** записывается в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = X^T B X = b_{jk}x^j x^k;$$

координатная запись **КФ** называется *квадратичной формой*.

Пусть B_S, B_A — симметричная и косисимметричная части тензора B. Имеем:

$$X^T B X = X^T(B_S + B_A)X = X^T B_S X + X^T B_A X.$$

Матрица B_A кососимметрична, поэтому

$$X^T B_A X = (X^T B_A X)^T = X^T B_A^T X = -X^T B_A X,$$

откуда

$$2X^T B_A X = 0 \quad \Rightarrow \quad X^T B_A X = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{B}_S(\mathbf{x},\mathbf{x}) = X^T B X = X^T B_S X.$$

Матрицей квадратичной формы называется симметричная часть матрицы соответствующей билинейной формы. Таким образом, согласно определению, матрица квадратичной формы всегда симметрична.

Замечание. По каждому **БФ** можно единственным образом построить **КФ**; матрица этого **КФ** получается из матрицы **БФ** операцией симметрирования.

По каждому **КФ** можно единственным образом построить *симметричный* **БФ**; матрица этого **БФ** совпадает с матрицей **КФ**.

Ранг матрицы и знак определителя матрицы **КФ** не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами данного **КФ**.

16. Канонический вид квадратичной формы

Пусть $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ — **КФ** в **ЛП** V, $X^T Q_e X = q_{jk}x^j x^k$ — соответствующая квадратичная форма в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Базис $\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}$ пространства V называется *каноническим* для **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, если матрица $Q_{e'}$ **КФ** в этом базисе диагональна, причем на диагонали расположены числа 1, -1, 0. В каноническом базисе **КФ** представляет собой выражение вида

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{j'=1}^{n} \lambda_{j'}(x^{j'})^2, \qquad \lambda_{j'} = \pm 1, 0.$$

Квадратичную форму можно рассматривать как функцию переменных $x^1,\dots,x^n$ или $x^{1'},\dots,x^{n'}$. Переменные $x^{1'},\dots,x^{n'}$ и коэффициенты $\lambda_{j'}$ называются каноническими переменными и коэффициентами соответственно.

Теорема. *Для любого **КФ** в вещественном **ЛП** существует канонический базис. Иными словами, квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду посредством невырожденного преобразования координат.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем с помощью индукции по числу переменных квадратичной формы. Процесс построения канонического базиса, описанный в доказательстве, называется методом Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1. **База индукции:** При $n = 1$ квадратичная форма имеет вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = q_{11}(x^1)^2, \quad q_{11} \neq 0,$$

и приводится к каноническому виду преобразованием переменных

$$x^{1'} = \sqrt{|q_{11}|}x^1.$$

Канонический вид:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} q_{11} \cdot (x^{1'})^2.$$

Матрица перехода к каноническому базису имеет вид

$$C = (c^1_{1'}), \quad c^1_{1'} = \frac{1}{\sqrt{|q_{11}|}}.$$

Индуктивное предположение: Предположим, что квадратичная форма от $n-1$ переменных может быть приведена к каноническому виду. Матрица перехода к каноническому базису есть P; новые канонические переменные выражаются через старые с помощью матрицы P^{-1}. Отметим, что $\det P \neq 0$.

Шаг индукции: Докажем, что в таком случае форма от n переменных,

$$Q(x^1,\dots,x^n) = q_{jk}x^j x^k$$

также может быть приведена к каноническому виду.

Случай 1. Предположим, что $q_{11} \neq 0$. Сгруппируем все слагаемые, содержащие x^1:

$$Q(x^1,\dots,x^n) =$$
$$= q_{11}(x^1)^1 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n +$$
$$+ Q'(x_2,\dots,x_2).$$

Очевидно, $Q'(x_2,\dots,x_2)$ — квадратичная форма от $n-1$ переменных. Преобразуем выделенные слагаемые:

$$q_{11}(x^1)^1 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n =$$
$$= q_{11}\left((x^1)^1 + 2\frac{q_{12}}{q_{11}}x^1x^2 + \dots + 2\frac{q_{1n}}{q_{11}}x^1x^n\right).$$

Дополним слагаемые в скобках до полного квадрата слагаемыми

$$Q''(x^2,\dots,x^n) = \left(\frac{q_{12}}{q_{11}}x^2\right) + \dots + \left(\frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right) +$$
$$+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{q_{1j}}{q_{11}}\ x^j\ \frac{q_{1k}}{q_{11}}\ x^k;$$

эти слагаемые, очевидно, образуют квадратичную форму от $x^2,\dots,x^n$. В результате получим

$$Q(x^1,\dots,x^n) =$$
$$= q_{11}\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \dots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right)^2 -$$
$$-Q''(x^2,\dots,x^n) + Q'(x^2,\dots,x^n).$$

Ясно, что последние два слагаемые образуют квадратичную форму $Q^*(x^2,\dots,x^n)$ от $n-1$ переменных.

Введем новую переменную $x^{1'}$:

$$x^{1'} = \sqrt{|q_{11}|}\cdot\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \dots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right);$$

тогда

$$Q(x^2,\dots,x^n) = \operatorname{sign} q_{11}\cdot(x^{1'})^2 + Q^*(x^2,\dots,x^n).$$

Согласно предположению индукции, форма Q^* может быть приведена к каноническому виду; если P — матрица перехода к каноническому базису для формы Q^*, $x^{2'},\dots,x^{n'}$ — канонические переменные для Q^*, то можно записать

$$\begin{pmatrix} x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix} = P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{12}}{q_{11}} & \dots & \frac{q_{1n}}{q_{11}} \\ 0 & & & \\ 0 & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода к каноническим переменным для формы Q. Вычислим ее определитель, используя разложение по первому столбцу:

$$\det C^{-1} = 1\cdot\det P^{-1} \neq 0.$$

Таким образом, матрица перехода к каноническому базису может быть получена обращением найденной матрицы C^{-1}.

Случай 2. Если в исходной форме $q_{11}=0$, но $q_{12}\neq 0$, сделаем предварительно преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования слагаемое $q_{12}x^1x^2$ превратится в

$$q_{12}x^1x^2 = q_{12}(x^{1'}+x^{2'})(x^{1'}-x^{2'}) =$$
$$= q_{12}(x^{1'})2 - q_{12}(x^{2'})^2,$$

т.е. в форме появляется слагаемое $q_{12}(x^{1'})$, и можно воспользоваться алгоритмом, описанным для случая 1. Очевидно, предварительное преобразование невырождено.

Задача. Найдите определитель матрицы предварительного преобразования и обратную матрицу.

Теорема доказана. □

17. Пример

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$Q(X,Y,Z) = Y^2 + Z^2 + XY + XZ + 2YZ.$$

Матрица этой формы в исходном базисе

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в форме отсутствует x^2, проведем преобразование к промежуточному базису

$$\begin{aligned} X &= x+y, \\ Y &= x-y, \\ Z &= z. \end{aligned} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В промежуточном базисе форма примет вид

$$Q(x,y,z) = (x-y)^2 + z^2 + (x+y)(x-y) +$$
$$+(x+y)z + 2(x-y)z =$$
$$= \underline{2x^2} - \underline{2xy} + \underline{3xz} + z^2 - yz.$$

Выделенные слагаемые (и только они) содержат переменные x; достраиваем полный квадрат:

$$Q(x,y,z) = 2\Big(x^2 + 2x\Big(-\frac{1}{2}y\Big) + 2x\Big(\frac{3}{4}y\Big) +$$
$$+\frac{1}{4}y^2 + \frac{9}{16}z^2 + 2\Big(-\frac{1}{2}y\Big)\Big(\frac{3}{4}z\Big)\Big) -$$
$$-\frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{8}z^2 + \frac{3}{2}yz - yz + z^2 =$$
$$= 2\left(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)^2 - \underline{\frac{1}{2}y^2} + \underline{\frac{1}{2}yz} - \frac{1}{8}z^2.$$

Выделенные слагаемые (и только они) содержат y; достраиваем полный квадрат:

$$Q(x,y,z) = 2\left(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}yz - \frac{1}{8}z^2 =$$
$$= 2\left(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y^2 + 2y\Big(-\frac{1}{2}z\Big) + \frac{1}{4}z^2\right) +$$
$$+\frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{8}z^2.$$

Теперь форма принимает вид

$$Q(x,y,z) = 2\left(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2.$$

Введем новые переменные

$$\xi = \sqrt{2}\Big(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\Big),$$
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(y - \frac{1}{2}z\Big),$$
$$\zeta = \frac{3}{4}z,$$

в которых форма примет вид

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 - \eta^2.$$

Матрица перехода к новым координатам

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

является обратной по отношению к матрице перехода от промежуточного базиса к каноническому;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к каноническому

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$Q_{e'} = C^T Q_e C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Канонический вид **БФ**

Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — **БФ** в **ЛП** V, $X^T Q_e Y = q_{jk} x^j y^k$ — соответствующая билинейная форма в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Базис $\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}$ пространства V называется *каноническим* для **БФ** $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если матрица $B_{e'}$ **КФ** в этом базисе диагональна, причем на диагонали расположены числа 1, −1, 0. В каноническом базисе **КФ** представляет собой выражение вида

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j'=1}^{n} \lambda_{j'} x^{j'} y^{j'}, \qquad \lambda_{j'} = \pm 1, 0.$$

В отличие от квадратичных форм, билинейная форма не всегда может быть приведена к каноническому виду.

Задача. Докажите, что билинейную форму $x^1 y^2$ в $\mathbb{R}^2$ невозможно привести к каноническому виду.

Теорема. *Для любого симметричного **БФ** в вещественном **ЛП** всегда существует канонический базис, т.е. симметричная билинейная форма может быть приведена к каноническому виду посредством невырожденного преобразования координат.*

Задача. Докажите самостоятельно.

19. Закон инерции квадратичных форм

Канонический базис для данной квадратичной формы, очевидно, не единствен. Однако количества положительных, отрицательных и нулевых канонических коэффициентов являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от способа приведения формы к каноническому виду.

Теорема. *Пусть $r = \operatorname{rk} Q$ — ранг матрицы **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Тогда среди канонических коэффициентов этого **КФ** ровно r ненулевых и $n - r$ нулевых ($n = \dim V$).*

Задача. Докажите самостоятельно.

Таким образом, канонический вид **КФ** таков:

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \lambda_1 (x^1)^2 + \dots + \lambda_r (x^r)^2.$$

Теорема. *Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — два канонических базиса для **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, в которых этот **КФ** записывается в виде квадратичных форм*

$$Q(x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^r)^2,$$
$$Q(y^1, \dots, y^n) = (y^1)^2 + \dots + (y^q)^2 - (y^{q+1})^2 - \dots - (y^r)^2.$$

Тогда $p = q$.

Доказательство. Рассмотрим в **ЛП** V подпространства

$$P = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p), \quad Q = L(\mathbf{f}_{q+1}, \dots, \mathbf{f}_n).$$

Ясно, что $\forall \mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 > 0.$$

Аналогично, $\forall \mathbf{y} \in Q$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{y}) = -(y^{q+1})^2 - \dots - (y^r)^2 \leq 0.$$

Поэтому $P \cap Q = \mathbf{0}$. Можем записать

$$\dim P + \dim Q = \dim(P + Q) \leq \dim V = n,$$
$$p + (n - q) \leq n \quad \Rightarrow \quad p \leq q.$$

Аналогично доказывается, что $q \leq p$. Следовательно, $p = q$. □

Число положительных (отрицательных) канонических коэффициентов **КФ** называется положительным (отрицательным) индексом инерции этого **КФ**.

Теорема. *Сумма положительного и отрицательного индексов инерции **КФ** равна рангу этого **КФ**.*

Задача. Докажите самостоятельно.

20. Знакоопределенные **КФ**

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ (и соответствующая квадратичная форма) называется *положительно определенным* (**ПО**), если

$$\forall \mathbf{x} \in V, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0.$$

Пример: $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *отрицательно определенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) < 0.$$

Пример: $Q(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *неопределенным*, если

$$\exists \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) < 0.$$

Пример: $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *положительно полуопределенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = 0.$$

Пример: $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 \equiv (x^1 - x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *отрицательно полуопределенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \leq 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = 0.$$

Матрица Q называется **ПО**, если она является матрицей **ПО КФ** $\mathbf{Q}$ в некотором базисе.

Теорема. ***КФ*** *является* ***ПО*** *тогда и только тогда, когда его ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства: $r = p = n$.*

Доказательство. Если $p = r = n$, то в каноническом базисе

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

так что $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, причем $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 = \cdots = x^n = 0$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пусть $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ функционал $\mathbf{Q}$ выражается формой вида

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = Q'(x^1, \ldots, x^{n-1}) + \lambda_n (x^n)^2,$$

где $\lambda_n \leq 0$. Тогда $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \leq 0$, т.е. **КФ** $\mathbf{Q}$ не является **ПО**. □

21. Критерий Сильвестра

Главным минором порядка k матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и столбцов.

Теорема. *Матрица Q является* ***ПО*** *тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad , \ldots, \quad \det Q > 0.$$

Доказательство. Воспользумся методом математической индукции. Для матрицы размера 1×1 утверждение очевидно:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = q_{11}(x^1)^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q_{11} > 0.$$

1. Необходимость.

Индуктивное предположение: Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ **ПО** $\Rightarrow$ все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции: Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ **ПО**. Докажем, что все ее главные миноры положительны. Рассмотрим **ПО** квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j;$$

все ее главные миноры до порядка k включительно положительны по предположению индукции. Но и $\det Q > 0$, так как в каноническом базисе он равен 1 и является инвариантом.

2. Достаточность.

Индуктивное предположение: Все главные миноры матрицы $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ положительны $\Rightarrow$ матрица Q **ПО**.

Шаг индукции: Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j.$$

По предположению индукции, эта форма **ПО** для векторов из **ЛПП** $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, поэтому ее положительный индекс инерции не меньше k. Если он равен k, то в каноническом (а значит, и в любом) базисе $\det Q \leq 1$; противоречие. Следовательно, положительный индекс инерции матрицы Q равен $k + 1$. □

Линейная алгебра–3
Линейные операторы

1. Линейные операторы

Линейный оператор (**ЛО**) — это гомоморфизм **ЛП**, т.е. отображение $\mathbf{A} : V \to W$, где V, W — **ЛП** над одним и тем же **ЧП**, удовлетворяющее следующему условию:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{A}(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Нас будет интересовать случай, когда $W = V$, т.е. когда пространство образов **ЛО** совпадает с пространством прообразов. В этом случае гомоморфизмы **ЛП** называются эндоморфизмами.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над произвольным **ЧП**, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в V, $\mathbf{x} \in V$. Разложив вектор $\mathbf{x}$ по базису, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x^j\mathbf{e}_j) = x^j\mathbf{A}(\mathbf{e}_j).$$

Таким образом, чтобы вычислить образ произвольного вектора при действии **ЛО**, достаточно знать лишь образы $\mathbf{f}_j = \mathbf{A}(\mathbf{e}_j)$ базисных векторов. Разложим каждый из векторов $\mathbf{f}_j$ по базису $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{f}_j \equiv \mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = a_j^k\mathbf{e}_k.$$

Возникающая квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_a^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_a^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_a^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$$

называется матрицей **ЛО** в выбранном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Столбцы матрицы **ЛО** представляют собой столбцы координат образов векторов базиса относительно этого базиса.

Таким образом,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = x^j\mathbf{f}_j = x^j a_j^k\mathbf{e}_k,$$

т.е. координаты вектора $\mathbf{y}$ выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$ по формуле

$$y^k = a_j^k x^j$$

или, в матричной форме,

$$Y_e = A_e X_e.$$

2. **ЛО** как тензор

Теорема. *__ЛО__ представляет собой 1-ковариантный, 1-контравариантный тензор.*

Доказательство. Для доказательства нужно вывести закон преобразования матрицы **ЛО** при переходе к новому базису. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — старый базис, $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис, связанные матрицей перехода C:

$$\mathbf{e}_{j'} = c_{j'}^j\mathbf{e}_j.$$

Имеем:

$$\mathbf{f}_{j'} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j'}) = a_{j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'}.$$

Подставим сюда выражения векторов нового базиса через векторы старого:

$$\mathbf{f}_{j'} = a_{j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'} = a_{j'}^{k'}c_{k'}^k\mathbf{e}_k.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{f}_{j'} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j'}) = \mathbf{A}(c_{j'}^j\mathbf{e}_j) = c_{j'}^j\mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = c_{j'}^j\mathbf{f}_j.$$

Подставим сюда выражение

$$\mathbf{f}_j = a_j^k\mathbf{e}_k.$$

Таким образом, приравнивая полученные выражения, находим:

$$\mathbf{f}_{j'} = a_{j'}^{k'}c_{k'}^k\mathbf{e}_k = c_{j'}^j a_j^k\mathbf{e}_k.$$

В силу единственности разложения по базису получаем

$$a_{j'}^{k'}c_{k'}^k = c_{j'}^j a_j^k.$$

Это соотношение можно записать в матричной форме:

$$CA_{e'} = A_e C.$$

Умножая обе части слева на матрицу C^{-1}, получаем искомое соотношение

$$A_{e'} = C^{-1}A_e C.$$

В тензорных обозначениях эта формула имеет вид

$$a_{j'}^{k'} = c_{j'}^j c_k^{k'} a_j^k.$$

□

Задача. Проведите доказательство полностью в тензорных обозначениях, не обращаясь к матричной форме записи.

3. Линейное пространство линейных операторов

Определим сумму **ЛО** и произведение **ЛО** на число по формулам

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$
$$(\alpha\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

для любого $\mathbf{x} \in V$.

Теорема. *Сумма __ЛО__ и произведение __ЛО__ на число также являются __ЛО__.*

Теорема. *Если A_e, B_e — матрицы __ЛО__ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то матрицы __ЛО__ $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\alpha\mathbf{A}$ равны $A_e + B_e$, αA_e, соответственно.*

Нулевым оператором называется оператор $\mathbf{O}$, действующий по правилу

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Теорема. *Множество всех __ЛО__, действующих в __ЛП__ $V(\mathbb{K})$ ($n = \dim V$), является __ЛП__, изоморфным $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$.*

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Множество всех **ЛО**, действующих в **ЛП** V, обозначается $\operatorname{End} V$. Таким образом,

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2 = n^2,$$
$$\operatorname{End} V \cong \mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K}).$$

4. Произведение **ЛО**. Алгебра **ЛО**

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — **ЛО**, действующие в **ЛП** V. Произведением этих **ЛО** называется отображение, заданное формулой

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Теорема. *Произведение __ЛО__ также является __ЛО__.*

Доказательство.

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y})) = \mathbf{AB}(\mathbf{x}) + \mathbf{AB}(\mathbf{y}),$$
$$(\mathbf{AB})(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}(x)) = \alpha\mathbf{AB}(\mathbf{x}).$$

□

Теорема. *Если A_e, B_e — матрицы* ***ЛО*** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *то матрица* ***ЛО*** $\mathbf{AB}$ *равна* A_eB_e.

Задача. Докажите самостоятельно.

Алгеброй $\mathcal{A}$ над **ЧП** $\mathbb{K}$ называется **ЛП** $V(\mathbb{K})$, снабженное операцией

$$\bullet : V \times V \to V,$$

называемой умножением векторов, ставящей в соответствие каждой упорядоченной паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ их произведение — вектор $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, и обладающей следующими свойствами:

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \beta\mathbf{y} \cdot \mathbf{z},$$
$$\mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \beta\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}),$$

и коммутативной, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Примеры алгебр

1. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел, рассматриваемое как **ЛП** над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и снабженное обычной операцией умножения комплексных чисел, образует ассоциативную и коммутативную алгебру размерности 2 над **ЧП** $\mathbb{R}$.
2. Множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из **ЧП** $\mathbb{K}$ образует ассоциативную, но не коммутативную алгебру размерности n^2 над $\mathbb{K}$.
3. Множество всех многочленов с коэффициентами из **ЧП** $\mathbb{K}$ образует бесконечномерную алгебру над $\mathbb{K}$.

Две алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются изоморфными, если существует отображение $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, являющееся изоморфизмом линейных пространств и обладающее свойством

$$\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$.

Пример. Алгебра $\mathbb{C}$ комплексных чисел (как алгебра над $\mathbb{R}$) изоморфна алгебре вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Действительно, отображение

$$\phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

взаимно однозначно и

$$\begin{aligned} \phi((a+ib)(c+id)) &= \phi((ac-bd) + i(ad+bc)) = \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \\ &= \phi(a+ib)\phi(c+id). \end{aligned}$$

Теорема. *Множество* $\operatorname{End} V$ *всех* ***ЛО****, действующих в* ***ЛП*** $V(\mathbb{K})$, $\dim V = n$, *является алгеброй над* ***ЧП*** $\mathbb{K}$, *изоморфной алгебре* $\mathbb{K}^{n \times n}(\mathbb{K})$.

Задача. Докажите самостоятельно. [Указание: изоморфизм алгебр ставит в соответствие каждому **ЛО** его матрицу в некотором фиксированном базисе.]

5. Алгебры Ли

Алгебра $\mathcal{L}$ называется алгеброй Ли, если она антикоммутативна, т.е.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L},$$

и для любых ее элементов выполнено тождество Якоби:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Задача. Докажите, что из тождества $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ вытекает тождество $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L})$.

Задача. Докажите, что **ЛП** геометрических векторов в пространстве, снабженное операцией векторного умножения векторов, образует алгебру Ли $\mathfrak{V}$ над **ЧП** $\mathbb{R}$.

Любую ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ можно превратить в алгебру Ли, введя новую операцию умножения по правилу

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Действительно, $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x}$. Тождество Якоби легко проверяется:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} + \\ &+ \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ЛП квадратных матриц порядка n с элементами из **ЧП** $\mathbb{K}$, снабженное операцией коммутирования матриц

$$[A, B] = AB - BA,$$

образует алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Задача. Докажите, что множество всех кососимметричных матриц порядка n образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Задача. Докажите, что $\mathfrak{V} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Указание: изоморфизм задается соответствием

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ядро и образ ЛО

Пусть $\mathbf{A} : V \to V$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** V.

Ядро $\ker \mathbf{A}$ **ЛО** $\mathbf{A}$ — это

$$\ker \mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x} \in V \;\middle|\; \mathbf{A}(x) = \mathbf{0} \right\}.$$

Образ $\operatorname{im} \mathbf{A}$ **ЛО** $\mathbf{A}$ —

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = \left\{ \mathbf{y} \in V \;\middle|\; \mathbf{x} \in V : \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right\}.$$

Ядро и образ **ЛО** являются **ЛПП** в **ЛП** V, причем

$$\dim \ker \mathbf{A} + \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = \dim V.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

Замечание. Предыдущее равенство не означает, что $V = \ker \mathbf{A} \oplus \operatorname{im} \mathbf{A}$.

Задача. Найдите ядро и образ **ЛО** $\mathbf{A}$, действующего в **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ и имеющего в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что для этого оператора $\ker \mathbf{A} = \operatorname{im} \mathbf{A}$.

7. Инварианты ЛО

Теорема. *Ранг матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$ не зависит от выбора базиса и равен* $\dim \operatorname{im} \mathbf{A}$. *Рангом **ЛО** $\mathbf{A}$ называется число* $\operatorname{rk} \mathbf{A} = \dim \operatorname{im} \mathbf{A}$.

Теорема. *Определитель и след матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$ не зависят от выбора базиса и называются определителем* $\det \mathbf{A}$ *и следом* $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ ***ЛО*** $\mathbf{A}$.

Задача. Докажите самостоятельно.

8. Единичный и обратный операторы

Единичный (тождественный) оператор $\mathbf{I}$ действует по правилу

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Задача. Докажите, что единичный оператор является линейным и что его в любом базисе его матрица равна единичной матрице.

ЛО $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратным по отношению к **ЛО** $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Теорема. ***ЛО*** $\mathbf{A}$ *имеет обратный тогда и только тогда, когда* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *Матрица обратного оператора* $\mathbf{A}^{-1}$ *является обратной по отношению к матрице оператора* $\mathbf{A}$ *(в одном и том же базисе).*

Задача. Докажите самостоятельно.

9. Автоморфизмы ЛП

Каждое **ЛП** изоморфно самому себе. Изоморфизм **ЛП** на себя называется автоморфизмом этого **ЛП**.

Теорема. *Все автоморфизмы данного **ЛП*** $V(\mathbb{K})$, $\dim V = n$, *образуют группу* $\operatorname{Aut} V$ *(группу автоморфизмов этого **ЛП**), причем*

$$\operatorname{Aut} V \cong GL(n, \mathbb{K}).$$

Доказательство. Каждый автоморфизм представляет собой невырожденный **ЛО**, действующий в **ЛП** V (почему?), а композиция автоморфизмов — произведение соответствующих операторов. Множество всех невырожденных операторов образует группу относительно операции умножения (единичный элемент — тождественный оператор; проверьте аксиомы). Изоморфизм этой группы на группу $GL(n, \mathbb{K})$ невырожденных матриц ставит в соответствие каждому оператору его матрицу в некотором базисе. □

10. Проекторы

Из соотношения

$$\dim \ker \mathbf{A} + \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = \dim V$$

следует, что равенство

$$\ker \mathbf{A} \oplus \operatorname{im} \mathbf{A} = V$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\ker \mathbf{A} \cap \operatorname{im} \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим важный класс операторов, для которых это соотношение выполнено.

Проектор $\mathbf{P}$ — это **ЛО**, удовлетворяющий условию $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Теорема. *Для любого проектора* $\mathbf{P}$ *имеем*

$$V = \ker \mathbf{P} \oplus \operatorname{im} \mathbf{P}.$$

Доказательство. Если $\mathbf{P}$ — проектор и $\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) \in \operatorname{im} \mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^2(\mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{x} \in \operatorname{im} \mathbf{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Поэтому если $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{P} \cap \operatorname{im} \mathbf{P}$, то $\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е. $\ker \mathbf{P} \cap \operatorname{im} \mathbf{P} = \mathbf{0}$ и

$$V = \ker \mathbf{P} \oplus \operatorname{im} \mathbf{P}.$$

Из этой формулы следует, что каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно единственным образом представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \operatorname{im} \mathbf{P}, \quad \mathbf{z} \in \ker \mathbf{P}.$$

Так как

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \operatorname{im} \mathbf{P},$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x})) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \ker \mathbf{P},$$

то разложение

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in \operatorname{im} \mathbf{P}} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}))}_{\in \ker \mathbf{P}}$$

имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ и в силу единственности

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Таким образом, любой проектор $\mathbf{P} \in \operatorname{End} V$ задает разложение **ЛП** V в прямую сумму **ЛПП** $\ker \mathbf{P}$ и $\operatorname{im} \mathbf{P}$. □

Обратное утверждение также верно.

Теорема. *Для каждого разложения*

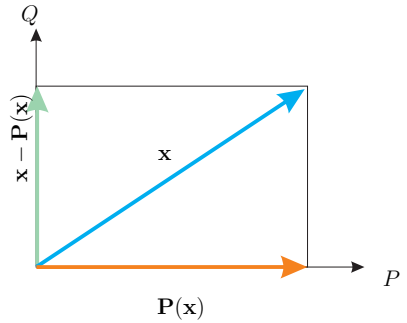
$$V = P \oplus Q$$

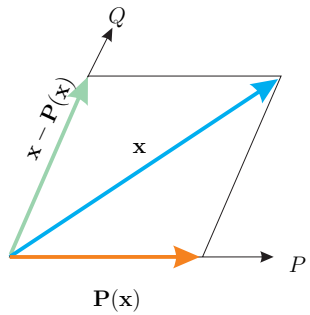
ЛП V *в прямую сумму **ЛПП*** *существует единственный проектор* $\mathbf{P}$ *такой, что*

$$P = \operatorname{im} \mathbf{P}, \quad Q = \ker \mathbf{P}.$$

Оператор $\mathbf{P}$ *называется проектором на **ЛПП*** P *вдоль **ЛПП*** Q.

Задача. Докажите самостоятельно.





11. Инвариантные подпространства ЛО

Пусть $\mathbf{A}$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** V. **ЛПП** P называется инвариантным подпространством (**ИПП**) оператора $\mathbf{A}$, если

$$\forall \mathbf{x} \in P: \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in P.$$

Любой **ЛО** обладает тривиальными **ИПП** $\mathbf{0}$ и V.

Пусть P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$. Линейный оператор

$$\mathbf{A}|_P : P \to P, \mathbf{A}|_P(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

называется ограничением **ЛО** $\mathbf{A}$ на **ИПП** P. Также говорят, что **ЛО** $\mathbf{A}|_P$ индуцирован линейным оператором $\mathbf{A}$ на **ИПП** P.

Теорема. *Ядро и образ **ЛО** являются его **ИПП**.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Если $V = P \oplus Q$, где P, Q — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, то в некотором базисе матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} B & O_1 \\ O_2 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $\mathbf{A}|_P : P \to P$, где C — матрица оператора $\mathbf{A}|_Q : Q \to Q$, а матрицы O_1, O_2 нулевые.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ — базис **ИПП** P, $\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис **ИПП** Q; тогда все векторы

$$\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_p, \ \mathbf{e}_{p+1}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n$$

образуют базис в V.

Рассмотрим матрицу оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе. Для всех $j \le p$ имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_j^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p),$$

откуда $a_j^k = 0$ при $k > p$, $j \le p$. Полагая $b_j^k = a_j^k$ при $j, k \le p$, получим матрицу B оператора $\mathbf{A}_P$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ пространства P.

Задача. Завершите доказательство самостоятельно. □

Теорема. *Пусть $V = P \oplus Q$, где P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, а Q не является **ИПП**. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n$ — базис в V такой, что векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ образуют базис в P. Тогда матрица A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ O & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $\mathbf{A}_P$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$.

Задача. Докажите самостоятельно.

12. Собственные подпространства

Простейшими **ИПП** являются одномерные **ИПП**.

Вектор $\mathbf{x}$ называется собственным вектором (**СВ**) **ЛО** $\mathbf{A}$, если он образует базис в некотором одномерном **ИПП**.

Другими словами, вектор $\mathbf{x}$ называется **СВ**, если $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ и существует такое $\lambda \in \mathbb{K}$, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x};$$

при этом λ называется собственным значением (**СЗ**) оператора $\mathbf{A}$. Говорят также, что **СВ** $\mathbf{x}$ принадлежит **СЗ** λ.

Множество всех **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$ называется спектром этого **ЛО**.

Множество всех **СВ**, принадлежащих **СЗ** λ, дополненное нулевым вектором, является **ИПП**.

Задача. Докажите.

Это **ИПП** называется собственным подпространством (**СПП**), отвечающим **СЗ** λ, и обозначается P_λ.

Размерность $p_\lambda = \dim P_\lambda$ называется геометрической кратностью **СЗ** λ.

Для любого **СВ** $\mathbf{x}$, принадлежащего **СЗ** λ, его линейная оболочка целиком лежит в P_λ. Обратно, каждое одномерное подпространство пространства P_λ инвариантно, и поэтому пространство P_λ разлагается в прямую сумму одномерных **ИПП**. Чтобы получить такое разложение, достаточно выбрать в P_λ произвольный базис.

Теорема. *Если λ — **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$, то*

$$P_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}),$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор.

Доказательство. Равенство $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ эквивалентно равенству $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. □

Таким образом, число $\lambda \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда является **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$, когда оператор $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ имеет ненулевое ядро, т.е. вырожден:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ является многочленом степени n от λ, не зависящим от выбора базиса.

Задача. Докажите. Указание:

$$C^{-1}AC - \lambda I = C^{-1}(A - \lambda I)C,$$

где I — единичная матрица.

Многочлен

$$f_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

называется характеристическим многочленом (**ХМ**) **ЛО** $\mathbf{A}$, а его корни — характеристическими числами (**ХЧ**) **ЛО** $\mathbf{A}$.

Теорема. *Коэффициенты **ХМ** данного **ЛО** являются инвариантами этого **ЛО**.*

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$ (с учетом кратности). Имеют место равенства*

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \ldots \lambda_n, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Пусть $\mathbf{A}$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** $V(\mathbb{K})$ над **ЧП** $\mathbb{K}$. Любое **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$ является его **ХЧ**. Любое **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$, принадлежащее **ЧП** $\mathbb{K}$, является **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Алгебраической кратностью n_λ **СЗ** λ называется его кратность как корня **ХМ**.

Теорема. *Алгебраическая кратность n_{λ_0} **СЗ** λ_0 не меньше его геометрической кратности p_{λ_0}:*

$$p_{\lambda_0} \le n_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Пусть $p = p_{\lambda_0}$ и пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — такой базис в V, что $P_{\lambda_0} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$. В этом базисе матрица **ЛО** $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} B & * \\ O & C \end{pmatrix},$$

и поэтому

$$f_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\det(C - \lambda I).$$

Но B является матрицей оператора $\mathbf{A}|_{P_{\lambda_0}} = \lambda_0 I$, и потому $\det(B - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p$. Таким образом, многочлен $f_{\mathbf{A}}(\lambda)$ делится на $(\lambda_0 - \lambda)^p$ и, значит, $p \le n_{\lambda_0}$. □

Практический способ нахождения **СПП** основывается на этой теореме и равенстве $P_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$. Сначала, решая уравнение $f_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, находим все его корни, лежащие в $\mathbb{K}$ (они будут в точности **СЗ**), а затем для каждого такого корня λ_0 находим подпространство P_{λ_0}, решая однородную линейную систему с матрицей $A - \lambda_0 I$.

В вещественном **ЛП** четной размерности **ЛО** может не иметь ни одного **СЗ**; в нечетномерном **ЛП** у любого **ЛО** имеется хотя бы одно **СЗ**.

В вещественном **ЛП** все **ХЧ ЛО** либо вещественны, либо появляются сопряженными парами, т.е. если $\lambda \in \mathbb{C}$ — **ХЧ**, то $\bar{\lambda}$ — также **ХЧ**.

Теорема. *В вещественном **ЛП** $V(\mathbb{R})$ каждой паре комплексно сопряженных **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$ отвечает двумерное **ИПП** оператора $\mathbf{A}$, не являющееся **СПП**.*

Доказательство. Пусть $\lambda + i\mu$ — **ХЧ ЛО A**, где $\mu \neq 0$ (отметим, что тогда $\lambda - i\mu$ — тоже **ХЧ**). Рассмотрим произвольный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в **ЛП** V, A — матрица **ЛО A** в этом базисе.

Поскольку

$$\det\Big(A - (l + i\mu)I\Big) = 0,$$

однородная система уравнений

$$AZ = (\lambda + i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}),$$

имеет нетривиальное решение

$$Z = X + iY, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R}).$$

Имеем:

$$A(X + iY) = (\lambda + i\mu)(X + iY) \quad \Longleftrightarrow$$
$$AX + iAY = \lambda X - \mu Y + i(\lambda Y + \mu X),$$

откуда

$$AX = \lambda X - \mu Y, \quad AY = \lambda Y + \mu X.$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, имеющие координаты X, Y в выбранном базисе. Ясно, что линейная оболочка $P = L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является **ИПП ЛО A**. Докажем, что **ЛПП** двумерно, т.е. векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (и столбцы X, Y) линейно независимы.

1. Сначала докажем, что $Y \neq \mathbf{0}$. Предположим противное, т.е. $Y = 0$. Тогда

$$AX = \lambda X, \quad \mathbf{0} = \mu X$$

и, поскольку $X \neq \mathbf{0}$, получаем $\mu = 0$, что противоречит условию.

2. Предположим, что столбцы X, Y линейно зависимы. Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и получаем

$$\alpha AY = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad AY = \lambda Y + \alpha\mu Y.$$

Исключая AY, находим $\mu + \mu\alpha^2 = 0$, что невозможно, так как $\mu \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Теорема. ***СВ ЛО**, принадлежащие различным **СЗ**, линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по количеству **СВ**. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что теорема верна для k **СВ**, и докажем, что она верна и для $k + 1$ **СВ**.

Рассмотрим **ЛК СВ** $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}$ и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha^1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Докажем, что все $\alpha_j = 0$. Имеем:

$$\mathbf{A}(\alpha^1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) =$$
$$= \alpha^1\mathbf{A}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha^k\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) + \alpha^{k+1}\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1}) =$$
$$= \alpha^1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^k\lambda_k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Вычтем из этого равенства $(*)$, умноженное на λ_{k+1}:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_1 + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, так как все λ_j попарно различны и $\lambda_j - \lambda_{k+1} \neq 0$. Тогда из $(*)$ получаем, что $\alpha_{k+1} = 0$. □

Теорема. *Для того чтобы матрица **ЛО** в некотором базисе была диагональна, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из **СВ** этого **ЛО**; при этом диагональные элементы матрицы являются **СЗ**.*

Задача. Докажите самостоятельно. Указание: в базисе, состоящем из **СВ**, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = \lambda_k\mathbf{e}_k$.

Линейная алгебра–4
Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидово пространство

Евклидово пространство (**ЕП**) $\mathbb{E}$ — это вещественное **ЛП**, в котором зафиксирована симметричная положительно определенная билинейная форма $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Значение **БФ** на паре векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ называется скалярным произведением (**СП**) этих векторов и обозначается $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, т.е.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Очевидно, **СП** обладает следующими свойствами:
1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$;
2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{E}$: $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\mathbf{z})$;
3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
4) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$.

Если в **ЕП** $\mathbb{E}$ выбран некоторый базис $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, то **СП** векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ выражается через их координаты по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{jk}x^j y^k = X_e^T G_e Y_e,$$

где $G_e = (g_{jk})$ — симметричная положительно определенная матрица, называемая матрицей Грама или метрическим тензором. Метрический тензор является дважды ковариантным.

Элементы матрицы Грама представляют собой **СП** векторов базиса:

$$g_{jk} = (\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j) = g_{kj}.$$

При переходе к новому базису (с помощью матрицы перехода C) матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и матрица любой билинейной формы:

$$G_{e'} = C^T G_e C, \quad g_{j'k'} = c^j_{j'} c^k_{k'} g_{jk}.$$

Поскольку $\det G_e \neq 0$, матрица G_e обратима; обратная матрица G_e^{-1} называется контравариантным метрическим тензором. Элементы матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{jk}. Имеет место соотношение

$$g_{jk}g^{kl} = \delta^l_j.$$

В любом вещественном **ЛП** имеется бесконечно много симметричных положительно определенных **БФ**; поэтому каждое вещественное **ЛП** может быть сделано евклидовым пространством бесконечным числом способов.

Теорема. *Неравенство Коши—Буняковского:*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}: \quad (\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Доказательство. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем:

$$(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$f(\alpha) = \alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \geq 0.$$

Для того чтобы квадратный трехчлен $f(\alpha)$ принимал только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leq 0.$$

□

2. Примеры **ЕП**

1. **ЛП** $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ становится **ЕП**, если для векторов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

определить **СП** по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x^j y^j = X^T Y,$$

где X, Y — столбцы, представляющие данные векторы (или, эквивалентно, столбцы координат векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ относительно стандартного базиса).

2. В $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ можно определить **СП** формулой

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X^T G Y,$$

где G — произвольная симметричная положительно определенная матрица.

3. В $\mathbb{R}^{n\times m}(\mathbb{R})$ можно ввести **СП** по формуле

$$(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T Y).$$

Задача. Докажите.

4. В $\mathrm{Pol}(n,\mathbb{R})$ можно ввести **СП** векторов

$$\mathbf{x} = x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$
$$\mathbf{y} = y(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$$

по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^n a_j b_j.$$

5. В $\mathrm{Pol}(n,\mathbb{R})$ можно определить **СП** иначе:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_\alpha^\beta x(t)y(t)dt.$$

Задача. Докажите.

3. Длины и углы в **ЕП**

Длиной вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ называется число

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} \geq 0.$$

Теорема. *Имеют место соотношения:*
1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *причем* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.
3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$: $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(неравенство треугольника)*.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно.

2. Имеем:

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = \sqrt{(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x})} = \sqrt{\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x})} = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

3. Имеем:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \\ \le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \\ \le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = \\ = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2,\end{aligned}$$

откуда $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. □

Угол между ненулевыми векторами $\mathbf{x},\mathbf{y}$ — это число φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, определяемый из уравнения

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

4. Унитарное пространство

Унитарное пространство (**УП**) $\mathbb{U}$ — это комплексное **ЛП** со скалярным произведением. Однако в комплексном **ЛП** не удается ввести скалярное произведение с помощью симметричной билинейной формы. Действительно, в этом случае аксиомы скалярного произведения оказываются противоречивыми:

$$\begin{aligned}0 \le (i\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = i(\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = \\ = i(i\mathbf{x},\mathbf{x}) = i^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -(\mathbf{x},\mathbf{x}),\end{aligned}$$

т.е. $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \le 0$.

Скалярное произведение в унитарном пространстве $\mathbb{U}$ можно определить как функцию $\mathbf{G}: V\times V \to \mathbb{C}$, $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$, обладающую следующими свойствами:
1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$;
2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{U}$: $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$;
3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$: $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
4) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{U}$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$: $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$.

Функция $\mathbf{G}$ не является линейной по второму аргументу:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \overline{(\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{z},\mathbf{x})} = \\ = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}+\overline{(\mathbf{z},\mathbf{x})} = (\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}),\end{aligned}$$

однако

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) = \overline{(\alpha\mathbf{y},\mathbf{x})} = \overline{\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \\ = \bar\alpha\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \bar\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Функцию $\mathbf{G}$ называют полуторалинейным функционалом (линейным по первому и полулинейным по второму аргументу).

Если в **УП** выбран некоторый базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, то выражение **СП** через координаты векторов имеет вид

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x^j\mathbf{e}_j, y^k\mathbf{e}_k) = x^j\bar y^k g_{jk},$$

где $g_{jk} = (\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$ — матрица Грама (метрический тензор). В матричных обозначениях

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X_e^T G_e \bar Y_e.$$

Закон преобразования метрического тензора при переходе к новому базису усложняется по сравнению с вещественным случаем:

$$\begin{aligned}g_{j'k'} = (\mathbf{e}_{j'},\mathbf{e}_{k'}) = (c^j_{j'}\mathbf{e}_j,\ c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = \\ = c^j_{j'}\ \bar c^k_{k'}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\ \bar c^k_{k'} g_{jk}.\end{aligned}$$

В матричных обозначениях

$$G_{e'} = C^T G_e \bar C.$$

Теорема. *Неравенство Коши—Буняковского:*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U} : |(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \le (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Доказательство. При $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ неравенство очевидно. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$ таких, что $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ne 0$, и любого $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем:

$$\begin{aligned}0 \le (\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ = \alpha(\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ = \alpha\bar\alpha(\mathbf{x},\mathbf{x})+\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+\bar\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \\ = |\alpha|^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+\bar\alpha\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}+(\mathbf{y},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Это неравенство должно выполняться для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, в том числе для $\alpha = t\dfrac{\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}$, где $t \in \mathbb{R}$. Получаем

$$\begin{aligned}\frac{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2}t^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) + t\frac{\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \\ + t\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})} + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \ge 0,\end{aligned}$$

т.е.

$$f(t) = (\mathbf{x},\mathbf{x})t^2 + 2|(\mathbf{x},\mathbf{y})|t + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \ge 0$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Это возможно лишь при условии неположительности дискриминанта квадратного трехчлена $f(t)$:

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 - (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \le 0.$$

□

В **УП** понятие длины векторов и свойства этого понятия формулируются и доказываются так же, как и в случае **ЕП**. Понятие угла между векторами **УП** не вводится.

Задача. Используя примеры **ЕП**, приведенные в § **??**, в качестве образцов, постройте аналогичные примеры **УП**.

5. Ортогональные векторы

Векторы $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ (или $\in \mathbb{U}$) называются ортогональными ($\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$), если $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

Пусть $P \Subset \mathbb{E}$ — **ЛПП** в **ЕП** $\mathbb{E}$ (в **УП** $\mathbb{U}$). Вектор $\mathbf{x}$ называется ортогональным подпространству $P \Subset \mathbb{E}$ ($P \Subset \mathbb{U}$), если он ортогонален любому вектору из P:

$$\mathbf{x}\perp P \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{x}\perp\mathbf{y}\ \forall \mathbf{y} \in P.$$

Обозначение: $\mathbf{x}\perp P$.

Теорема. *1)* $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2) Если $\mathbf{x} \in P$ *и* $\mathbf{x}\perp P$, *то* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3) Если $\mathbf{y}\perp\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{y}\perp\mathbf{x}_k$, *то* $\mathbf{y}\perp L(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k)$.
4) Если $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$, *то* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$ *(теорема Пифагора).*
5) Если ненулевые векторы $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_p$ *попарно ортогональны, т.е.* $\mathbf{x}_j\perp\mathbf{x}_k$, $j \ne k$, *то они линейно независимы.*

Доказательство. 1), 2), 3), 4) — докажите самостоятельно.

4. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$, равную нулевому вектору:

$$\alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^s\mathbf{x}_s + \dots + \alpha^p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно это равенство на вектор $\mathbf{x}_s$, получаем $\alpha^s = 0$, что и требовалось. □

6. Ортогональные проекторы

Пусть P — **ЛПП** в **ЕП** $\mathbb{E}$ (или в $\mathbb{U}$). Вектор $\mathbf{y}$ называется ортогональной проекцией (**ОП**) вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ на **ЛПП** P, если $\mathbf{y} \in P$ и $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp P$.

Теорема. *Пусть $P \Subset \mathbb{E}$ ($P \Subset \mathbb{U}$). Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$) его **ОП** единственна.*

Замечание. Вопрос о существовании **ОП** будет исследован позже.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ — две различные **ОП** данного вектора $\mathbf{x}$ на **ЛПП** P, т.е.

$$\mathbf{y}_1 \in P, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y}_1 \perp P,$$
$$\mathbf{y}_2 \in P, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y}_2 \perp P.$$

Тогда, очевидно, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in P$ и

$$\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2)}_{\perp P}\underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}_{\perp P} \perp P,$$

так что $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$, противоречие. □

Определим оператор $\mathbf{P}$, ставящий в соответствие каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$) его ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на **ЛПП** P:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Задача. Докажите, что этот оператор линейный.

Теорема. $\mathbf{P}$ — *проектор, т.е.* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{im}\mathbf{P} = P$. Рассмотрим векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$), $\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \in P = \operatorname{im}\mathbf{P}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{P}^2(\mathbf{x})$. По определению,

$$\mathbf{z} \in P, \quad \mathbf{y} - \mathbf{z} \perp P.$$

Так как $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$, то $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in P$ и поэтому $\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Таким образом,

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{P}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x},$$

т.е. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. □

Таким образом, **ЕП** $\mathbb{E}$ (**УП** $\mathbb{U}$) разлагается в прямую сумму ядра и образа оператора $\mathbf{P}$:

$$\mathbb{E} = \operatorname{im}\mathbf{P} \oplus \ker\mathbf{P}.$$

Ядро оператора $\mathbf{P}$ называется ортогональным дополнением (**ОД**) **ЛПП** $P = \operatorname{im}\mathbf{P}$ и обозначается $P^\perp$. Таким образом, для любого **ЛПП** $P \Subset \mathbb{E}$ имеем

$$\mathbb{E} = P \oplus P^\perp.$$

Теорема. *Ортогональное дополнение $P^\perp$ представляет собой множество всех векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$, каждый из которых ортогонален подпространству P:*

$$P^\perp = \Big\{\mathbf{y} \in \mathbb{E} : \mathbf{y} \perp P\Big\}.$$

*$P^\perp$ также является **ЛПП** в $\mathbb{E}$, причем*

$$\dim P^\perp = \dim\mathbb{E} - \dim P.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\mathbf{P}$ — оператора оптогонального проектирования на **ЛПП** P; тогда

$$\mathbf{y} \in P^\perp \iff \mathbf{y} \in \ker\mathbf{P} \iff \mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$
$$\iff \mathbf{z} \in P,\ \mathbf{y} - \mathbf{z} \perp P \iff \mathbf{y} \perp P.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

Если $P \Subset \mathbb{E}$, то $P^\perp \Subset \mathbb{E}$, $\mathbb{E} = P \oplus P^\perp$, и для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ имеется единственное разложение

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{y}}_{\in P} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\in P^\perp} = \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in P} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in P^\perp}.$$

Эта формула доказывает существование ортогональной проекции $\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$ любого вектора $\mathbf{x}$ на любое **ЛПП** P.

7. Ортонормированные базисы

Базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в **ЕП** (**УП**) называется ортонормированным (**ОНБ**), если векторы этого базиса попарно ортогональны:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}.$$

Очевидно, $\|\mathbf{e}_j\| = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Матрица Грама ортонормированного базиса является единичной матрицей. Выражение **СП** через координаты векторов относительно **ОНБ** имеет вид

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x^j y^j$$

в **ЕП** и

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x^j \bar{y}^j$$

в **УП**.

Существование **ОНБ** в **ЕП** не вызывает сомнений: каждая симметричная положительно определенная билинейная форма обладает каноническим базисом, который и является **ОНБ**. В **УП** существование **ОНБ** нуждается в доказательстве.

Пусть $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$ (в **УП** $\mathbb{U}$). Построим **ОНБ** в $\mathbb{E}$ ($\mathbb{U}$), используя следующий алгоритм (процесс ортогонализации Грама—Шмидта).

Положим

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|}; \quad \|\mathbf{e}_1\| = 1.$$

Построим вектор

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 - \operatorname{pr}_{L(\mathbf{e}_1)}\mathbf{f}_2,$$

где символом pr_P обозначен ортогональный проектор на подпространство P. Положим

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|};$$

Очевидно,

$$\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{e}_1, \quad \|\mathbf{g}_2\| = 1.$$

Считая, что векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ уже найдены, продолжим процесс. Построим вектор

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{f}_k - \operatorname{pr}_{L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})}\mathbf{f}_k,$$

который, очевидно, ортогонален подпространству $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$, и положим

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\|\mathbf{g}_k\|}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_{k-1},\ \|\mathbf{e}_k\| = 1.$$

Получим формулу для вычисления $\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in\mathbb{E}$ при условии, что векторы $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ попарно ортогональны. Согласно определению,

$$\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}\in L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k),$$
$$\mathbf{x}-\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}\perp L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k).$$

Таким образом,

$$\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}=\alpha^1\mathbf{e}_1+\dots+\alpha^k\mathbf{e}_k;$$

найдем коэффициенты этой линейной комбинации. Для любого вектора $\mathbf{e}_j$, $1\le j\le k$, имеем

$$\Big(\mathbf{x}-(\alpha^1\mathbf{e}_1+\dots+\alpha^k\mathbf{e}_k),\ \mathbf{e}_j\Big)=0,$$

откуда

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)-\sum_{s=1}^{k}\alpha^s(\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_j)=0.$$

В силу попарной ортогональности векторов $\mathbf{e}_j$ в сумме остается лишь одно ненулевое слагаемое, в котором $s=j$, т.е.

$$\alpha^j=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)}{(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_j)}.$$

Если векторы $\mathbf{e}_j$ нормированы (т.е. $\|\mathbf{e}_j\|=1$), то знаменатель в этой формуле обращается в 1, и мы получаем

$$\alpha^j=(\mathbf{x},\mathbf{e}_j).$$

Замечание. Обратите внимание на положение индексов!

Задача. Для каждого из примеров **ЕП** (и аналогичных примеров **УП**) выясните, является ли стандартный базис ортонормированным.

Задача. Какой базис является ортонормированным в пространстве $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(\mathbf{x},\mathbf{y})=X^TGY$, где G — симметричная положительно определенная матрица?

8. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств

Два **ЕП** $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ называются изоморфными, $\mathbb{E}_1\cong\mathbb{E}_2$, если существует отображение $f:\mathbb{E}_1\to\mathbb{E}_2$, являющееся изоморфизмом **ЛП** и удовлетворяющее условию

$$(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=(\mathbf{x},\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}_1.$$

Отображение f называется изоморфизмом **ЕП**.

Аналогично вводится понятие изоморфизма **УП**.

Теорема. *Любые два **ЕП** одинаковой размерности изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ — **ОНБ** в $\mathbb{E}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_n$ — **ОНБ** в $\mathbb{E}_2$. Определим линейное отображение $f:\mathbb{E}_1\to\mathbb{E}_2$ правилом $f(\mathbf{e}_j)=\tilde{\mathbf{e}}_j$, $j=1,\dots,n$. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}_1$ имеем:

$$\mathbf{x}=x^j\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{y}=y^k\mathbf{e}_k,\quad (\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n}x^jy^j.$$

Так как

$$f(\mathbf{x})=f(x^j\mathbf{e}_j)=x^jf(\mathbf{e}_j)=x^j\tilde{\mathbf{e}}_j,\quad f(\mathbf{y})=y^k\tilde{\mathbf{e}}_k,$$

получаем

$$(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\sum_{j=1}^{n}x^jy^j,$$

т.е. f — изоморфизм. □

Задача. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для **УП**.

9. Автоморфизмы **ЕП** и **УП**. Изометрические операторы

Автоморфизм **ЕП** (**УП**) — это изоморфизм **ЕП** (**УП**) на себя, т.е. линейный оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}\ (\in\mathbb{U}).$$

Иначе автоморфизмы **ЕП** называются изометрическими операторами. Изометрический оператор в **ЕП** называется ортогональным оператором, а в **УП** — унитарным оператором.

Теорема. *Изометрический оператор в **ЕП** (**УП**) невырожден и следовательно обратим.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ — изометрический оператор и $\mathbf{x}\in\ker\mathbf{A}$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Тогда

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})\neq 0,\quad (\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})=(\mathbf{0},\mathbf{0})=0,$$

противоречие. Таким образом, $\ker\mathbf{A}=\mathbf{0}$, т.е. $\mathrm{rk}\,\mathbf{A}=\dim\mathrm{im}\,\mathbf{A}=n\Rightarrow\det\mathbf{A}\neq 0$. □

Теорема. *Все автоморфизмы данного **ЕП** $\mathbb{E}$ (**УП** $\mathbb{U}$) образуют группу $\mathrm{Aut}\,\mathbb{E}$ ($\mathrm{Aut}\,\mathbb{U}$) относительно операции композиции автоморфизмлв (умножения линейных операторов).*

Задача. Докажите самостоятельно.

Изучим структуру изометрических операторов.

Теорема. *1) Матрица A ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в произвольном базисе удовлетворяет соотношению*

$$A^TGA=G,$$

где G — матрица Грама этого базиса.

*2) Матрица A ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в **ОНБ** удовлетворяет соотношению*

$$A^TA=I,$$

где I — единичная матрица.

3) Матрица A унитарного оператора $\mathbf{A}$ в произвольном базисе удовлетворяет соотношению

$$A^TG\bar{A}=G,$$

где G — матрица Грама этого базиса.

*4) Матрица A унитарного оператора $\mathbf{A}$ в **ОНБ** удовлетворяет соотношению*

$$A^T\bar{A}=I,$$

где I — единичная матрица.

5) Определитель матрицы изометрического оператора удовлетворяет соотношению $|\det\mathbf{A}|=1$.

6) Все собственные значения изометрического оператора по модулю равны 1.

Доказательство. 1) В произвольном базисе имеем

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=X^TGY,\quad (\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y})=(AX)^TG(AY),$$

так что

$$X^TGY=X^TA^TGAY\quad\Rightarrow\quad G=A^TGA.$$

6) Пусть $\mathbf{x}$ — **СВ** изометрического оператора $\mathbf{A}$, принадлежащий **СЗ** λ. Имеем:

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})=(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x})=|\lambda|^2(\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

откуда $|\lambda|^2=1\Rightarrow|\lambda|=1$.

Остальные утверждения докажите самостоятельно. □

10. Ортогональная группа

Если в **ЕП** зафиксирован некоторый **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то каждому ортогональному оператору $\mathbf{A}$ ставится в соответствие его матрица A в этом базисе. Как известно, матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^T A = I.$$

Матрицы, удовлетворяющие данному условию, называются ортогональными матрицами.

Таким образом, матрица ортогонального оператора в **ОНБ** является ортогональной матрицей. Матрица ортогонального оператора в произвольном базисе, вообще говоря, ортогональной не является.

Теорема. *Ортогональные матрицы обладают следующими свойствами:*
1) $AA^T = I$;
2) $\det A = \pm 1$;
3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} a_{jp} = \delta_{kp}$;
4) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} a_{pj} = \delta_{kp}$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Все ортогональные матрицы порядка n образуют группу $O(n)$, являющуюся подгруппой в $GL(n, \mathbb{R})$. Группа автоморфизмов n-мерного **ЕП** $\mathbb{E}_n$ изоморфна группе $O(n)$:*

$$\operatorname{Aut} \mathbb{E}_n \cong O(n).$$

Задача. Докажите самостоятельно.

В группе $O(n)$ имеется подгруппа, состоящая из ортогональных матриц с определителем, равным 1; эта подгруппа обозначается $SO(n)$. Группы $SO(2)$, $SO(3)$ — группы вращений двумерного и трехмерного пространств.

Задача. Найдите общий вид матрицы $A \in O(2)$. Найдите общий вид матрицы $A \in SO(2)$.

11. Унитарная группа

Если в **УП** зафиксирован некоторый **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то каждому унитарному оператору $\mathbf{A}$ ставится в соответствие его матрица A в этом базисе. Как известно, матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^T \bar{A} = I.$$

Матрицы, удовлетворяющие данному условию, называются унитарными матрицами.

Таким образом, матрица унитарного оператора в **ОНБ** является унитарной матрицей. Матрица унитарного оператора в произвольном базисе, вообще говоря, унитарной не является.

Теорема. *Унитарные матрицы обладают следующими свойствами:*
1) $A\bar{A}^T = I$;
2) $|\det A| = 1$;
3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \bar{a}_{jp} = \delta_{kp}$;
4) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \bar{a}_{pj} = \delta_{kp}$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Все унитарные матрицы порядка n образуют группу $U(n)$, являющуюся подгруппой в $GL(n, \mathbb{C})$. Группа автоморфизмов n-мерного **УП** $\mathbb{U}_n$ изоморфна группе $U(n)$:*

$$\operatorname{Aut} \mathbb{U}_n \cong U(n).$$

Задача. Докажите самостоятельно.

В группе $U(n)$ имеется подгруппа, состоящая из ортогональных матриц в определителем, равным 1; эта подгруппа обозначается $SU(n)$.

Задача. Найдите общий вид матрицы $A \in U(2)$. Найдите общий вид матрицы $A \in SU(2)$.

12. Взаимные базисы

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$, g_{jk} — метрический тензор. Рассмотрим векторы

$$\mathbf{e}^j = g^{jk} \mathbf{e}_k,$$

где g^{jk} — контравариантный метрический тензор. Векторы $\mathbf{e}^j$ образуют базис в $\mathbb{E}$ (почему?); этот базис называется взаимным по отношению к исходному базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Задача. Докажите, что взаимный базис совпадает с исходным тогда и только тогда, когда исходный базис ортонормирован.

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ — базис, сопряженный к к исходному базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, т.е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_l) = \delta^j_l.$$

Рассмотрим **СП** векторов $\mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}_l$:

$$(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_l) = (g^{jk} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = g^{jk} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) =$$
$$= g^{jk} g_{kl} = \delta^j_l = \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_l).$$

Таким образом, для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}^j, \mathbf{x}) = x^j.$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Евклидово пространство изоморфно своему сопряженному пространству, причем изоморфизм задается правилом*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j \leftrightarrow \mathbf{e}^j.$$

*Иными словами, для любого линейного функционала $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^*$ в **ЕП** существует вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ такой, что*

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

13. Ковариантные и контравариантные координаты

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$, $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ — взаимный базис. Координаты x^j произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ в базисе $\mathbf{e}_j$ называются его контравариантными координатами, а координаты x_k $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}^k$ называются его ковариантными координатами:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{x} = x_k \mathbf{e}^k.$$

Получим выражения для контравариантных и ковариантных координат вектора $\mathbf{x}$.

Умножая обе части первого из приведенных разложений скалярно на $\mathbf{e}^k$, находим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = (x^j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = x^j (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = x^j \delta^k_j = x^k.$$

Аналогично, умножая обе части второго из приведенных разложений скалярно на $\mathbf{e}_j$, находим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = (x_k \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j) = x_k (\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j) = x_k \delta^k_j = x_j.$$

Полученные формулы называются формулами Гиббса.

Найдем связь между контравариантными и ковариантными координатами вектора $\mathbf{x}$. Имеем:

$$x^k = (\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = (\mathbf{x}, g^{kj} \mathbf{e}_j) = g^{kj} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = g^{kj} x_j.$$

Аналогично получаем

$$x_j = g_{jk} x^k.$$

Если исходный базис ортонормированный, то $g_{jk} = \delta_{jk}$, и ковариантные координаты вектора совпадают с его контравариантными координатами.

Задача. Постройте для унитарных пространств теорию, аналогичную изложенной в данном параграфе.

14. Подъем и опускание индекса

Пусть $A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{k_1 k_2 \dots k_p}$ — тензор типа (p, q), заданный в **ЕП** $\mathbb{E}$, g_{lm} — метрический тензор. Операция свертки

$$B^{j_2 \dots j_q}_{k k_1 \dots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \dots j_q}_{k_1 \dots k_p}$$

называется операцией опускания индекса у тензора A.

Тензоры A и B принято обозначать одной буквой, т.е.

$$A^{j_2 \dots j_q}_{k k_1 \dots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \dots j_q}_{k_1 \dots k_p}.$$

Аналогично определяется операция подъема индекса:

$$A^{j j_1 \dots j_q}_{k_2 \dots k_p} = g^{j k_1} A^{j_1 \dots j_q}_{k_1 \dots k_p}.$$

Тензорный индекс можно поднимать и опускать не обязательно на первое место, например, можно рассматривать тензор

$$A^{j_2 \dots j_q}_{k_1 \ k k_2 \dots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \dots j_q}_{k_1 \dots k_p}.$$

Ковариантные координаты вектора получаются из контравариантных опусканием индекса; контравариантные координаты вектора получаются из ковариантных подъемом индекса.

Рассмотрим произвольный линейный оператор $\mathbf{A}$ в **ЕП** $\mathbb{E}$; ему отвечает тензор a^j_k типа $(1, 1)$ — матрица этого оператора в произвольно выбранном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Опустим индекс у этого тензора:

$$a_{lk} = g_{lj} a^j_k.$$

Полученному 2-ковариантному тензору a_{lk} отвечает некоторая билинейная форма $\mathbf{B}$ в $\mathbb{E}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{lk} x^l y^k = g_{lj} a^j_k x^l y^k = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пространство билинейных форм, заданных на* ***ЕП*** $\mathbb{E}$*, изоморфно пространству линейных операторов на этом* ***ЕП****, причем изоморфизм задается формулой*

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

Матрица билинейной формы получается из матрицы оператора опусканием индекса. Матрица оператора получается из матрицы билинейной формы подъемом индекса.

Задача. Какой линейный оператор получится, если поднять индекс у метрического тензора?

Линейная алгебра–5
Операторы в евклидовых и унитарных пространствах

1. Сопряженный оператор

Пусть $\mathbb{U}$ — **УП**, $\mathbf{A}$ — **ЛО** в $\mathbb{U}$. Оператор $\mathbf{A}^*$ называется сопряженным по отношению к **ЛО** $\mathbf{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Теорема. *Сопряженный оператор* $\mathbf{A}^*$ *обладает следующими свойствами:*
1) $\mathbf{A}^*$ — *линейный оператор;*
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$*;*
3) $(\alpha\mathbf{A})^* = \bar{\alpha}\mathbf{A}^*$*;*
4) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$*;*
5) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

Доказательство. 1) Докажем, что $\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}, \quad \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}.$$

Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{U}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z})).$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{z}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z})) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}),$$

т.е.

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}.$$

Далее, для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y})).$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \bar{\alpha}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}),$$

т.е.

$$\mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}.$$

Линейность сопряженного оператора доказана.

2) Докажем, что $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$. Для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ имеем:

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}^*\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{B}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*)\mathbf{y}).$$

Таким образом,

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*)\mathbf{y}),$$

т.е.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*.$$

3) Равенство $(\alpha\mathbf{A})^* = \bar{\alpha}\mathbf{A}^*$ доказывается аналогично:

$$((\alpha\mathbf{A})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \bar{\alpha}\mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

4) Докажем равенство $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$. Имеем:

$$((\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, (\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*)\mathbf{y}).$$

5) Докажите самостоятельно. □

Понятие сопряженного оператора в евклидовом пространстве вводится аналогично.

Задача. Сформулируйте и самостоятельно докажите теорему о свойствах сопряженного оператора для случая евклидова пространства.

2. Примеры сопряженных операторов

1. Сопряженные операторы для нулевого и единичного операторов совпадают с этими операторами.

Задача. Докажите самостоятельно.

2. В трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов линейный оператор определен равенством

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}],$$

где $[,]$ — векторное произведение, $\mathbf{a}$ — некоторый фиксированный вектор. Найдем сопряженный оператор для $\mathbf{A}$. Для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = (\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Здесь символом $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ обозначено смешанное произведение трех векторов. Таким образом,

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = [\mathbf{y}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{y}] = -\mathbf{A}\mathbf{y} \iff \mathbf{A}^* = -\mathbf{A}.$$

3. Матрица сопряженного оператора

Пусть $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ — произвольный базис **УП** $\mathbb{U}$, в котором задан **ЛО** $\mathbf{A}$, A_f — матрица этого **ЛО** в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, G_f — матрица Грама базиса $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Найдем матрицу A_f^* сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе.

Пусть X_f, Y_f — столбцы координат векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Тогда столбцы координат векторов $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$ суть $A_f X_f$ и $A_f^* Y_f$ соответственно. Напомним, что скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выражается через координаты этих векторов по формуле

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_f^T G_f \bar{Y}_f,$$

где G_f — матрица Грама. Теперь определяющее соотношение сопряженного оператора

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$$

записывается в виде

$$(A_f X_f)^T G_f \bar{Y}_f = X_f^T G_f \overline{A_f^* Y_f}$$

или, эквивалентно,

$$X_f^T A_f^T G_f \bar{Y}_f = X_f^T G_f \bar{A}_f^* \bar{Y}_f.$$

Поскольку равенство должно выполняться для любых столбцов X_f, Y_f, получаем

$$A_f^T G_f = G_f \bar{A}_f^*.$$

Выразим отсюда матрицу A_f^*:

$$A_f^* = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f}.$$

Это и есть интересующее нас выражение для матрицы сопряженного оператора.

Формула для матрицы сопряженного в случае евклидова пространства выводится аналогично и имеет вид

$$A_f^* = G_f^{-1} A_f^T G_f.$$

В случае ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, когда матрица Грама G_e представляет собой единичную матрицу, выражения для матрицы A_e^* сопряженного оператора упрощаются; для унитарного пространства имеем

$$A_e^* = \bar{A}_e^T,$$

для евклидова пространства

$$A_e^* = A_e^T.$$

Отметим, что операция транспонирования матрицы с последующим комплексным сопряжением называется операцией эрмитова сопряжения.

Матрица A, удовлетворяющая условию

$$A = \bar{A}^T,$$

называется эрмитовой. Таким образом, эрмитова матрица — это матрица, не изменяющаяся при операции эрмитова сопряжения.

Задача. Докажите, что матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Задача. Докажите, что собственные значения операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ совпадают.

Рассмотрим формулу, выражающую матрицу сопряженного оператора в евклидовом пространстве, т.е. формулу

$$A_f^* = G_f^{-1} A_f^T G_f,$$

с тензорной точки зрения. Записав эту формулу в виде

$$\overset{*}{a}{}_l^k = g^{ki} a_i^j g_{lj} = g^{ki} g_{lj} a_i^j$$

(проверьте!), видим, что тензор, соответствующий сопряженному к $\mathbf{A}$ оператору, получается из тензора, соответствующего оператору $\mathbf{A}$, подъемом нижнего и опусканием верхнего индексов.

4. Самосопряженный оператор

Оператор $\mathbf{A}$, действующий в **ЕП** (в **УП**), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*,$$

или, иными словами, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выполняется соотношение

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay}).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве, называются эрмитовыми, а в евклидовом пространстве — симметричными.

Теорема. *Для того чтобы оператор* $\mathbf{A}$ *был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в произвольном базисе удовлетворяла соотношению*

$$A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f}$$

в случае унитарного пространства или соотношению

$$A_f = G_f^{-1} A_f^T G_f$$

в случае евклидова пространства.

Доказательство очевидным образом вытекает из формул, связывающих матрицы оператора $\mathbf{A}$ и сопряженного оператора $\mathbf{A}$, полученных в предыдущем параграфе.

Преобразуем полученные формулы. Имеем:

$$A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f} \iff$$
$$\bar{A}_f = G_f^{-1} A_f^T G_f \iff G_f \bar{A}_f = A_f^T G_f.$$

Матрица Грама удовлетворяет условию $G_f = \bar{G}_f^T$ (почему?); следовательно,

$$G_f\bar{A}_f = A_f^T G_f \iff G_f\bar{A}_f = A_f^T\bar{G}_f^T = (\bar{G}_f A_f)^T \iff$$
$$G_f\bar{A}_f = \overline{(G_f\bar{A}_f)^T}.$$

Таким образом, для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_f\bar{A}_f$ была эрмитовой.

В случае евклидова пространства аналогичный результат формулируется следующим образом: для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_f A_f$ была симметричной.

Если базис ортонормированный, то получаем следующее:

(1) для того чтобы оператор в унитарном пространстве был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была эрмитовой: $A_e = \bar{A}_e^T$;

(2) для того чтобы оператор в евклидовом пространстве был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была симметричной: $A_e = A_e^T$.

Выше была доказана теорема об изоморфности линейных пространств билинейных форм и линейных операторов в данном евклидовом пространстве. Именно, было установлено, что каждой билинейной форме $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в евклидовом пространстве отвечает линейный оператор $\mathbf{A}$ такой, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}).$$

При этом тензор, соответствующий **БФ**, получается из тензора, соответствующего **ЛО**, с помощью операции опускания индекса:

$$b_{jk} = g_{jl}a_k^l;$$

в матричных обозначениях

$$B_f = G_f A_f.$$

Таким образом, получаем, что симметричным (самосопряженным) операторам отвечают при таком сопоставлении симметричные билинейные формы.

5. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

Теорема. *Все **ХЧ** самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. 1. Эрмитов оператор. Любое **ХЧ** λ эрмитова оператора $\mathbf{A}$ является его **СЗ** (почему?), так что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — соответствующий **СВ**. Умножим это равенство скалярно на $\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Поскольку оператор $\mathbf{A}$ эрмитов, имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Таким образом,

$$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x})$$

и, так как $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \neq 0$ (почему?), получаем $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Симметричный оператор. Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора $\mathbf{A}$ в каком-либо ортонормированном базисе; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ в унитарном пространстве, имеющий в некотором ортонормированном базисе этого унитарного пространства матрицу A_e. Так как матрица A_e симметрична и все ее элементы вещественны, то она эрмитова. Поэтому соответствующий оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ также эрмитов и все его **ХЧ** вещественны. Остается заметить, что характеристические многочлены операторов $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ совпадают, а значит, совпадают и их характеристические числа. □

Из доказанной теоремы следует, что все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Теорема. *Симметричный оператор имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень λ_0. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень веществен и, стало быть, является собственным значением оператора $\mathbf{A}$. В таком случае оператор $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}$ вырожден, т.е. $\det(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}) = 0$, и его ядро представляет собой собственное подпространство оператора $\mathbf{A}$, принадлежащее собственному значению λ_0. □

Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — **СЗ**, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ — соответствующие **СВ** самосопряженного оператора $\mathbf{A}$. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Имеем:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

Умножим первое из данных выражений скалярно на $\mathbf{x}_2$, а второе — на $\mathbf{x}_1$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (\lambda_1\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),$$
$$(\mathbf{x}_1,\mathbf{A}\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1,\lambda_2\mathbf{x}_2) = \bar{\lambda}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2).$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{A}\mathbf{x}_2), \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2$$

и вычитая второе из полученных равенств из первого, находим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = 0.$$

Поскольку по условию $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, отсюда следует, что $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = 0$, что и требовалось. □

Теорема. *Ортогональное дополнение любого инвариантного подпространства самосопряженного оператора также является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, т.е. $\forall \mathbf{x} \in P$ имеем $\mathbf{A}\mathbf{x} \in P$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{y} \in P^{\perp}$; требуется доказать, что $\mathbf{A}\mathbf{y} \in P^{\perp}$. Для вектора $\mathbf{y}$ справедливо равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in P$. Далее, $\forall \mathbf{x} \in P$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \in P$, поэтому $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Имеем

$$0 = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}),$$

т.е. вектор $\mathbf{A}\mathbf{y}$ ортогонален любому вектору $\mathbf{x} \in P$; иными словами, $\mathbf{A}\mathbf{y} \in P^{\perp}$, что и требовалось. □

Теорема. *Для того чтобы оператор* $\mathbf{A}$ *в* ***ЕП*** $\mathbb{E}$ *(в* ***УП*** $\mathbb{U}$*) был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в* $\mathbb{E}$ *(в* $\mathbb{U}$*) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть в $\mathbb{E}$ (в $\mathbb{U}$) существует **ОНБ** из **СВ** оператора $\mathbf{A}$. В этом базисе матрица оператора диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — **СЗ** данного оператора, и, стало быть, симметрична и эрмитова. Однако оператор, имеющий в **ОНБ** симметричную (эрмитову) матрицу, является самосопряженным.

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном пространстве имеется по крайней мере один **СВ** и, следовательно, одномерное собственное подпространство P. Ортогональное дополнение $P^{\perp}$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно доказанной выше теореме, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$. Ограничение оператора $\mathbf{A}$ на инвариантное подпространство $P^{\perp}$ представляет собой самосопряженный оператор в $P^{\perp}$, который обладает собственным вектором, лежащим в $P^{\perp}$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора $\mathbf{A}$. Нормируя их, получим **ОНБ**, состоящий из **СВ** оператора $\mathbf{A}$. □

6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Рассмотрим самосопряженный оператора $\mathbf{A}$ в **ЕП** $\mathbb{E}$ (или в **УП** $\mathbb{U}$). Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — **ОНБ** в пространстве, состоящий из **СВ** оператора $\mathbf{A}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — **СЗ** оператора $\mathbf{A}$.

Взяв произвольный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, разложим его по базису $\mathbf{e}$ и найдем его образ при действии оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x^j \mathbf{e}_j) = x^j \mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \mathbf{e}_j;$$

мы воспользовались тем фактом, что $\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j$. Обратите внимание, что в последней сумме мы вынуждены отказаться от использования правила суммирования Эйнштейна, так как индекс суммирования j встречается в общем члене суммы три раза.

Выражение $x^j \mathbf{e}_j$ (нет суммирования) представляет собой ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x}$ на одномерное собственное подпространство оператора $\mathbf{A}$, порожденное собственным вектором $\mathbf{e}_j$; обозначив оператор ортогонального проектирования через $\mathbf{P}_j$, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j(\mathbf{x})$$

или

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j.$$

Таким образом, самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ представлен в виде линейной комбинации ортогональных проекторов $\mathbf{P}_j$ на одномерные собственные подпространства, порожденные попарно ортогональными собственными векторами оператора $\mathbf{A}$, причем коэффициентами этой линейной комбинации являются собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Вопрос. Чему равен ранг оператора $\mathbf{P}_j$?

Каждый из проекторов $\mathbf{P}_j$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_j^2 = \mathbf{P}_j;$$

кроме того, в силу попарной ортогональности собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, имеем соотношение

$$\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k = \mathbf{O}.$$

Пользуясь этими соотношениями, вычислим квадрат оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{P}_k\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k \mathbf{P}_j \mathbf{P}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \mathbf{P}_j.$$

При помощи индукции легко показать, что для любого целого числа s имеет место соотношение

$$\mathbf{A}^s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s \mathbf{P}_j.$$

Назовем самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны. В этом случае можно определить понятие квадратного корня $\sqrt{\mathbf{A}}$ из оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}} \iff \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}.$$

Выражение для оператора $\sqrt{\mathbf{A}}$ имеет вид

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\mathbf{P}_j.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

7. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = a_{jk}x^j x^k;$$

можно считать, что она представляет собой координатную запись некоторого квадратичного функционала $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Известно, что квадратичная форма может быть быть приведена к каноническому виду невырожденным преобразованием переменных (например, с помощью метода Лагранжа). Однако можно привести квадратичную форму к «почти каноническому», диагональному виду с помощью ортогонального преобразования.

Матрица A данной квадратичной формы симметрична, поэтому ее можно рассматривать как матрицу A_e симметричного оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом пространстве относительно некоторого **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Кроме того, известно, что из собственных векторов симметричного оператора можно составить **ОНБ** $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Очевидно, матрица перехода C от **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к **ОНБ** $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ортогональна (объясните!). В базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ матрица A_f оператора $\mathbf{A}$ диагональна и имеет вид $A_f = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — **СЗ** оператора $\mathbf{A}$. Матрица же исходной квадратичной формы в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ определяется выражением

$$C^T A C = C^{-1} A_e C = A_f,$$

поскольку матрица C ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$. Таким образом, в новых переменных y^j, связанных с первоначальными переменными x^j ортогональной матрицей перехода C, квадратичная форма принимает вид

$$Q(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2;$$

формулы преобразования координат при этом имеют вид

$$X = CY,$$

где C — ортогональная матрица.

8. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду

Теорема. *Пусть $A(x^1, \ldots, x^n)$, $B(x^1, \ldots, x^n)$ — две квадратичные формы, причем форма $B(x^1, \ldots, x^n)$ положительно определена. Существует невырожденное преобразование переменных, приводящее форму B к каноническому виду, а форму A — к диагональному.*

Доказательство. 1. Будем считать, что данные квадратичные формы представляют собой координатные записи квадратичных функционалов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в вещественном линейном пространстве V относительно некоторого базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (в дальнейшем для краткости будем писать «базис $\mathbf{e}$»). Поскольку квадратичный функционал $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ положительно определен, можно считать, что соответствующий симметричный билинейный функционал $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задает в пространстве V скалярное произведение; в этом случае матрица B_e представляет собой матрицу Грама базиса $\mathbf{e}$.

2. Рассмотрим базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ (кратко — «базис $\mathbf{f}$»), ортонормированный относительно введенного скалярного произведения. Этот базис можно построить, например, приводя квадратичную форму $B(x^1, \ldots, x^n)$ к каноническому виду методом Лагранжа или используя процесс ортогонализации. Обозначим матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ через C. Матрицы квадратичных форм $A(x^1, \ldots, x^n)$ и $B(x^1, \ldots, x^n)$ в базисе $\mathbf{f}$ имеют вид

$$B_f = C^T B_e C = I, \quad A_f = C^T A_e C; \tag{1}$$

разумеется, обе они симметричны (объясните почему).

3. Матрица A_f симметрична, базис $\mathbf{f}$ — ортонормированный, поэтому можно считать, что A_f — матрица некоторого самосопряженного (симметричного) оператора $\mathbf{A}$. Рассмотрим ортонормированный базис $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$. В этом базисе матрица A_g оператора $\mathbf{A}$ диагональна, $A_g = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $\mathbf{A}$. Матрица D перехода от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{g}$ ортогональна (объясните почему!), $D^{-1} = D^T$. Вычислим матрицы квадратичных функционалов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{g}$:

$$A_g = D^T A_f D = D^{-1} A_f D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$
$$B_g = D^T B_f D = D^{-1} I D = I.$$

Таким образом, в базисе $\mathbf{g}$ матрица функционала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ диагональна, а матрица функционала $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ — единичная. Таким образом, доказано существование базиса, в котором оба квадратичных функционала имеют диагональный вид:

$$A(y^1,\dots,y^n)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(y^j)^2,$$

$$B(y^1,\dots,y^n)=\sum_{j=1}^{n}(y^j)^2.$$

Здесь через y^j обозначены координаты, соответствующие базису $\mathbf{g}$.

4. Разработаем алгоритм построения такого базиса. Коэффициенты λ_j определяются как корни характеристического уравнения

$$\det(A_f-\lambda I)=0.$$

Учитывая соотношения (1), получаем:

$$0=\det(A_f-\lambda I)=\det(C^TA_eC-\lambda C^TB_eC)=(\det C)^2\det(A_e-\lambda B_e).$$

Таким образом, коэффициенты λ_j определяются как корни «характеристического многочлена» $\det(A_e-\lambda B_e)$; этот многочлен называют иногда λ-многочленом матриц A_e и B_e.

Далее, столбец координат $X_{f,j}$ каждого собственного вектора $\mathbf{g}_j$ оператора $\mathbf{A}$ относительно базиса $\mathbf{f}$ определяется как нетривиальное решение однородной линейной системы

$$(A_f-\lambda_jI)X_{f,j}=0,$$

где λ_j — соответствующее собственное значение. Учитывая соотношения (1), можем записать

$$(C^TA_eC-\lambda_jC^TB_eC)X_{f,j}=0,$$
$$C^T(A_e-\lambda B_e)CX_{f,j}=0.$$

Умножая последнее уравнение слева на матрицу $(C^T)^{-1}$ и учитывая, что столбец $CX_{f,j}$ представляет собой столбец собственного вектора $\mathbf{g}_j$ оператора $\mathbf{A}$ относительно базиса $\mathbf{e}$, получаем

$$(A_e-\lambda_jB_e)X_{e,j}=0.$$

Столбцы $X_{e,j}$ представляют собой координаты векторов общего для обеих форм диагонализирующего базиса относительно исходного базиса, т.е. матрица, составленная из этих столбцов, является матрицей искомого преобразования переменных.

Таким образом, процедура одновременного приведения двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена, состоит в следующем:

(1) выясняем, какая из двух форм положительно определена; пусть B — матрица положительно определенной формы, A — матрица другой формы;
(2) решая уравнение $\det(A-\lambda B)=0$, находим коэффициенты формы A в новом (диагонализирующем) базисе;
(3) решая для каждого найденного λ линейную систему $(A-\lambda B)X=0$, находим столбцы матрицы P перехода от исходного базиса к диагонализирующему; формулы преобразования переменных при этом имеют вид

$$\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}.$$

5. Доказательство существенно укорачивается, если пользоваться тензорным языком. Пусть a_{jk}, b_{jk} — симметричные 2-ковариантные тензоры, представляющие данные квадратичные (или, эквивалентно, симметричные билинейные) формы, причем матрица $B=(b_{jk})$ положительно определена. Будем считать тензор b_{jk} метрическим тензором евклидова пространства. Согласно известной теореме, каждой билинейной форме соответствует линейный оператор, матрица которого получается из матрицы формы с помощью операции подъема индекса. Так как данные билинейные формы симметричны, им отвечают самосопряженные операторы с матрицами

$$b^{jl}a_{lk}=a^j_k,\quad b^{jl}b_{lk}=\delta^j_k,$$

где b^{jl} — контравариантный метрический тензор (матрица (b^{jl}) является обратной для матрицы (b_{jl})). Оба указанных оператора (обратите внимание, что второй из них — единичный) имеют диагональные матрицы в базисе, состоящем из собственных векторов оператора a^j_k, координаты которых находятся из уравнений

$$\det(a^j_k-\lambda\delta^j_k)=0,\quad (a^j_k-\lambda\delta^j_k)x^k=0.$$

Опуская в приведенных уравнениях индекс j с помощью метрического тензора b_{jl}, получаем

$$\det(a_{kl}-\lambda b_{kl})=0,\quad (a_{kl}-\lambda b_{kl})x^k=0,$$

что и требовалось.

□