Овчинников Алексей Витальевич

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

http://matematika.phys.msu.ru/

Лекция 1
Системы координат
Представление линий и поверхностей

1. Об учебном плане

Лекции	36 ч.
Семинары	18 ч.
Самостоятельная работа	36 ч.
Всего	90 ч.

2. О содержании курса

(1) Элементарные представления о координатном методе.
(2) Векторная алгебра.
(3) Определители второго и третьего порядков.
(4) Прямые и плоскости.
(5) Кривые второго порядка.
(6) Поверхности второго порядка.
(7) Комплексные числа.
(8) Алгебра матриц.
(9) Теория систем линейных уравнений.
(10) Теория линейных пространств.
(11) Теория определителей.

3. Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
$\forall x$ — квантор всеобщности («для любых x»).
$\exists x$ — квантор существования («существует такой x, что...»).
$\exists! x$ — квантор единственности («существует единственный x, такой что...»).
$\Longrightarrow$ — импликация («следовательно»).
$\Longleftrightarrow$ — эквивалентность.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ — факториал натурального числа n.
Двойной факториал:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1),$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-2) \cdot (2n).$$

Суммы и произведения:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

4. О построении геометрии

Система аксиом Евклида—Гильберта.

Основные понятия: точка, прямая, плоскость.

Отношения между понятиями:

(1) инцидентность («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» и т. п.; 8 аксиом);

(2) порядок (понятие «лежать между»; 4 аксиомы);

(3) конгруэнтность (движение, равенство; 5 аксиом);

(4) параллельность (1 аксиома);

(5) непрерывность (2 аксиомы).

5. Системы координат

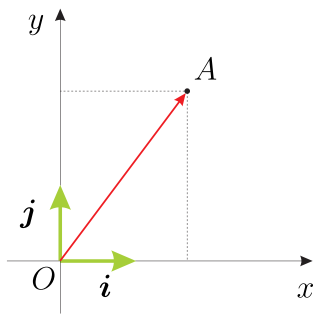
Система координат — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

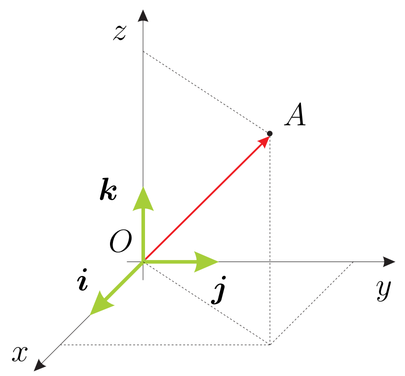
5.1. **Декартова прямоугольная система координат.**

O — начало координат, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные направляющие векторы координатных осей (орты); другое обозначение $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

$\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A. Другое обозначение координат x_1, x_2, x_3.



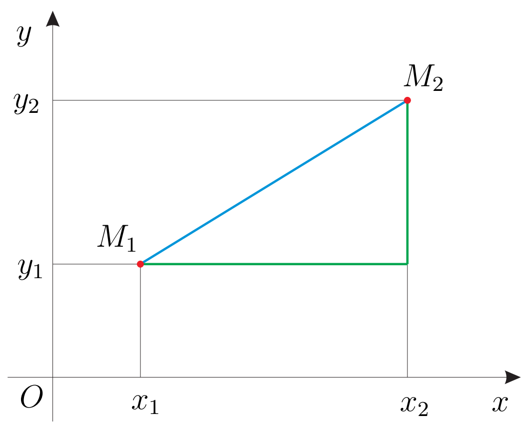


Расстояние между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на прямой:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

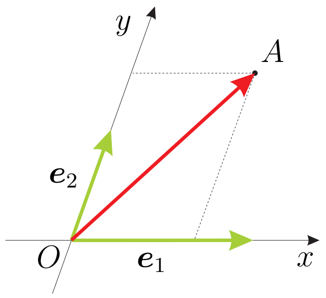
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

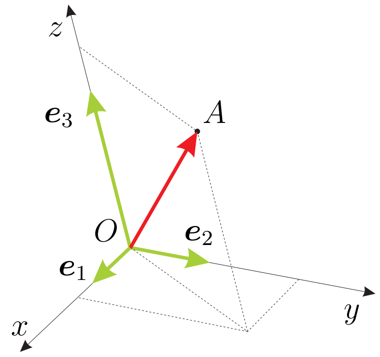


В пространственном случае аналогично: для точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5.2. **Декартова косоугольная система координат.**

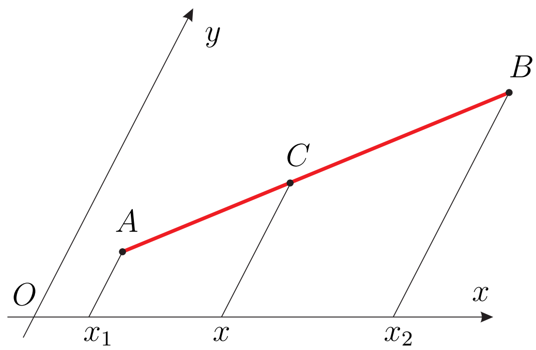




Углы между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ могут быть не прямыми, длины векторов могут быть $\neq 1$.

Пример.

Задача о делении отрезка в данном отношении. На плоскости даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$; координаты точек заданы относительно некоторой (косоугольной) декартовой системы координат. Найти координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении $|AC| : |BC| = m : n$.



Пользуясь теоремой Фалеса, запишем

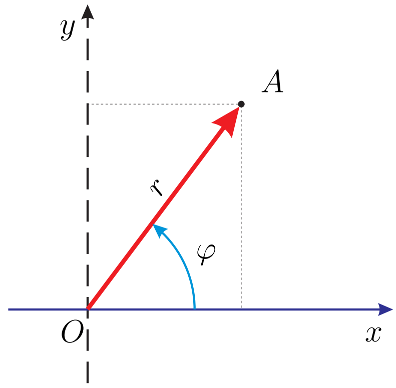
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m + n},$$

откуда

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}.$$

Аналогично находится ордината (и аппликата в пространственном случае) точки C.

5.3. **Полярная система координат на плоскости.**



(r, φ) — полярные координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

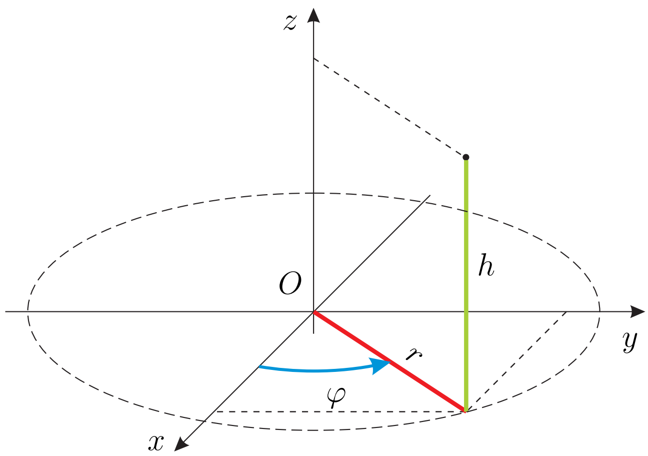
Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Удобно считать, что φ определено с точностью до добавления $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда пишем

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

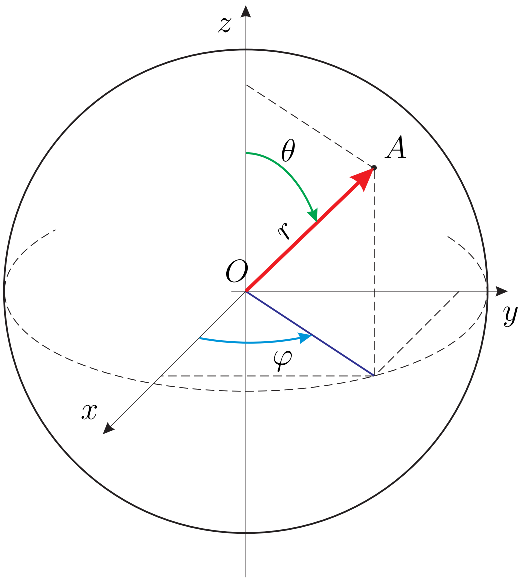
5.4. **Цилиндрическая система координат в пространстве.**



(r, φ, h) — цилиндрические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ h = z. \end{cases}$$

5.5. **Сферическая система координат в пространстве.**



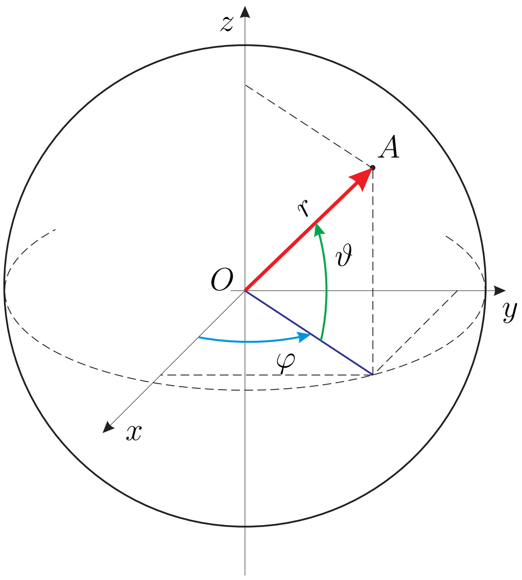
(r, θ, φ) — сферические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Географические координаты — вариант сферических.



(r, ϑ, φ) — географические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi \pmod{2\pi}.$$

6. Уравнения линий и поверхностей

Уравнение линии на плоскости — уравнение вида

$$F(x, y) = 0,$$

каждое решение (x, y) которого представляет собой координаты некоторой точки линии, причем для каждой точки линии найдется некоторое решение данного уравнения.

Уравнение поверхности в пространстве содержит 3 переменные:

$$G(x, y, z) = 0.$$

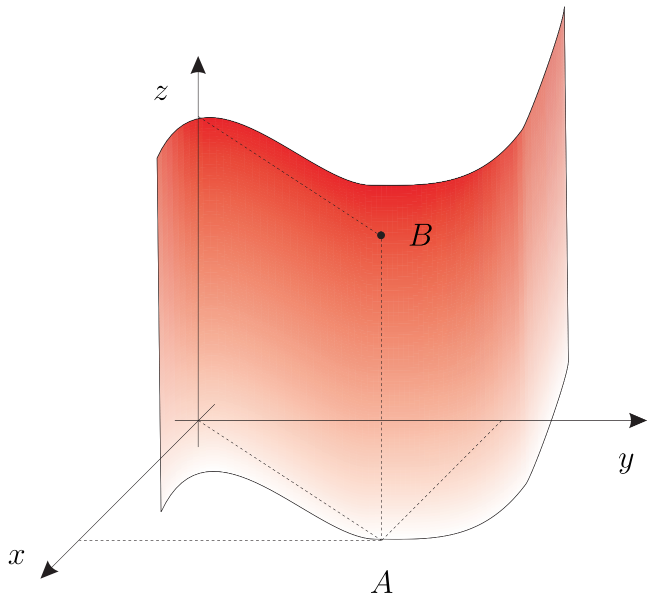
Вместо прямоугольных декартовых координат можно использовать любые другие.

Вместо уравнений можно рассматривать неравенства.

Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, описывается уравнением вида

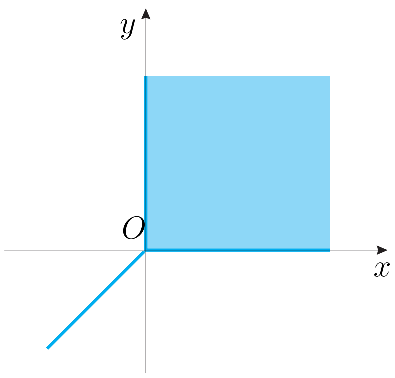
$$G(x, y) = 0.$$

Это же уравнение является одновременно уравнением направляющей.



Уравнение может описывать геометрический объект, не соответствующий интуитивному представлению о линии (поверхности):

$$x - |x| - y + |y| = 0.$$



6.1. **Уравнения прямых на плоскости.**

Уравнение прямой — линейное уравнение:

$$Ax + By = C.$$

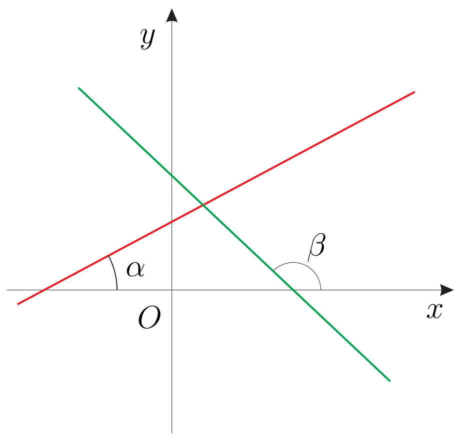
Уравнение можно умножить на любое ненулевое число.

1. Уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

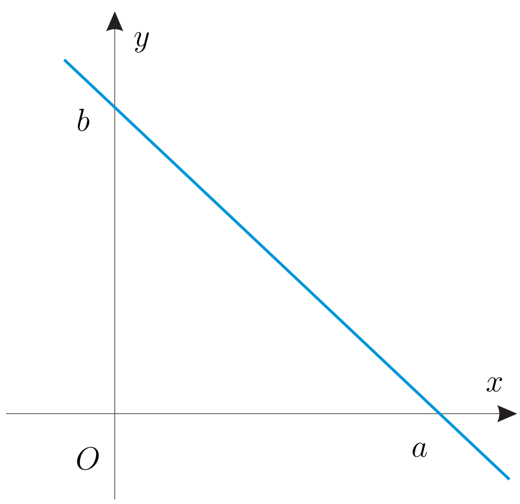
k — угловой коэффициент прямой:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$



2. Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

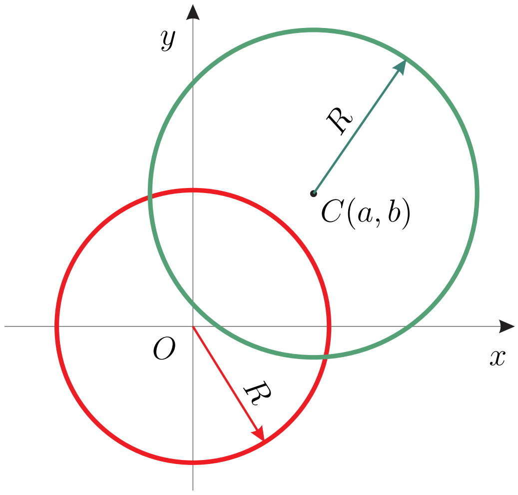


6.2. **Окружность.** Окружность радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

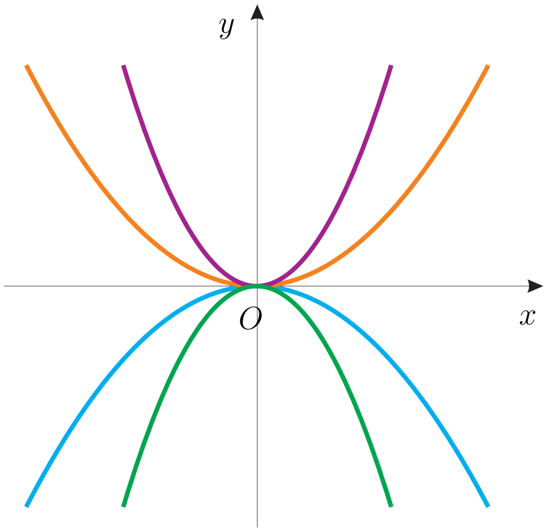
Окружность радиуса R с центром в точке $C(a, b)$:

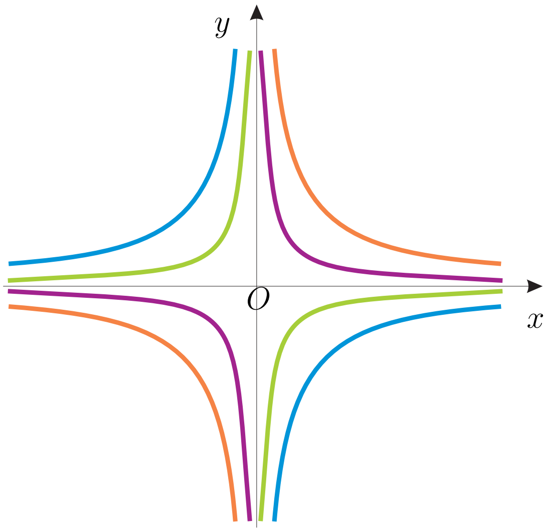
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



6.3. **Парабола и гипербола.**

$$y = ax^2, \qquad y = \frac{a}{x}.$$





7. Параметрические уравнения

7.1. **Параметрические уравнения линий.** Линия на плоскости может быть задана как множество точек, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Этот способ пригоден и для задания линий в пространстве:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

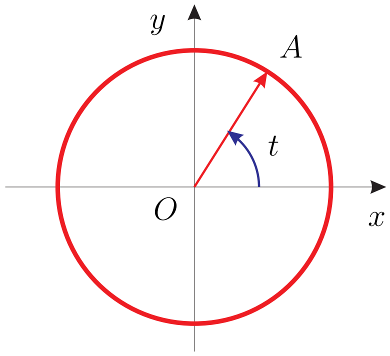
С точки зрения механики параметрические уравнения линии — это закон движения материальной точки, параметр t — время.

Пример.

Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Параметр t представляет собой угол между осью Ox и радиус-вектором точки окружности.



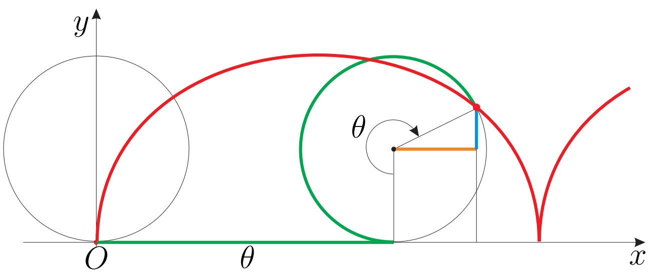
Пример.

Циклоида — это траектория точки обода катящегося по прямой колеса.

Радиус колеса R, параметр — угол θ поворота колеса.

Параметрические уравнения циклоиды

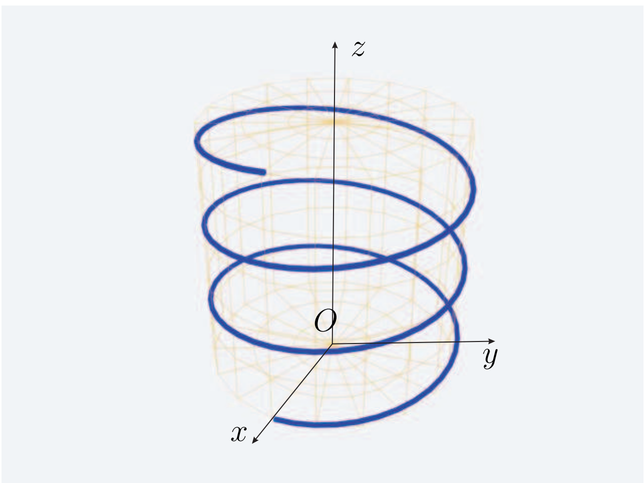
$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$



Пример.

Винтовая линия. Точка совершает два одновременных движения: равномерное вращение с угловой скоростью ω в плоскости Oxy по окружности радиуса R и равномерное поступательное движение вдоль оси Oz со скоростью c:

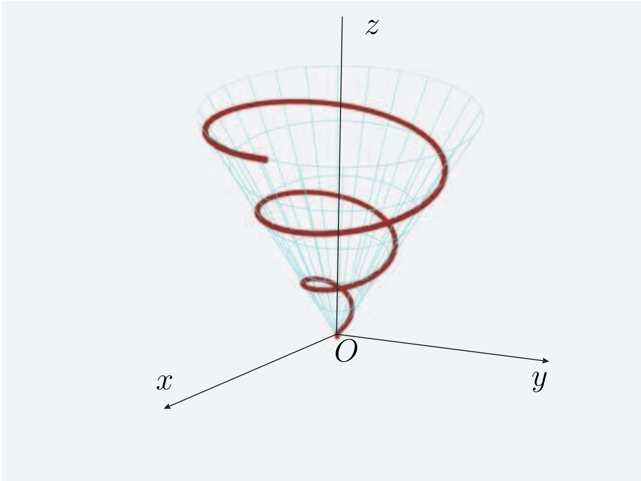
$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = ct.$$



Пример.

Коническая винтовая линия.

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t.$$



7.2. **Параметрическое задание поверхностей.** Поверхности задаются:

(1) уравнениями вида $F(x, y, z) = 0$;

(2) параметрическими уравнениями вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2;$$

параметры u, v — внутренние координаты поверхности;

(3) как графики функции двух переменных: $z = f(x, y)$.

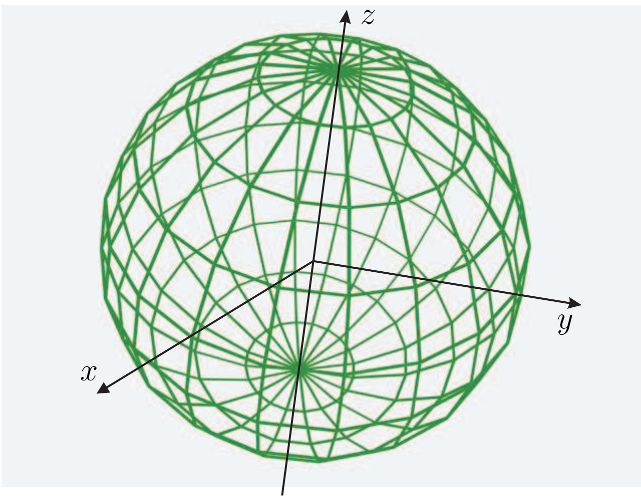
Пример.

Сфера радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = R \cos u \sin v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos v, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant u < 2\pi, \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi. \end{cases}$$



Представить сферу как график функции невозможно, но это удается сделать отдельно для нижней и верхней полусфер:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

8. Пересечения и проекции

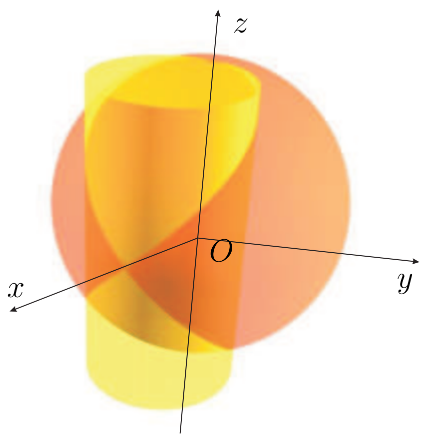
8.1. **Пересечения поверхностей.**

Линии (кривые) в пространстве можно задавать как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пример.

Кривая Вивиани — пересечение цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой лежит на поверхности цилиндра.



Получим уравнения кривой Вивиани.

Уравнения сферы и цилиндра:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2, \qquad (x - R)^2 + y^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Отсюда

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx.$$

Положим

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = 2Rx \iff r^2 = 2Rr\cos t \iff r = 2R\cos t.$$

Можно записать выражения для x и y:

$$x = r\cos t = 2R\cos^2 t = R(1 + \cos 2t),$$

$$y = r\sin t = 2R\sin t\cos t = R\sin 2t.$$

Параметр t изменяется в диапазоне

$$0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Теперь можно найти выражение для z:

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx = 4R^2\sin^2 t \iff z = \pm 2R\sin t.$$

Можно убрать $\pm$, если разрешить параметру t изменяться в диапазоне

$$0 \leqslant t < 2\pi.$$

Итак, окончательный результат:

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t, & 0 \leqslant t < 2\pi. \\ z = 2R\sin t, \end{cases}$$

8.2. **Проекции.** Проекцией точки $M(x, y, z)$ на координатную плоскость Oxy является точка $N(x, y)$. Таким образом, проектирование на координатную плоскость — это игнорирование одной из координат.

Если линия задана как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$, то уравнение ее проекции на плоскость Oxy получается исключением z из этих уравнений.

Пример.

Проекция кривой Вивиани на плоскость Oxy — это кривая с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получаем уравнение окружности

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

9. Разновидности теорем

Импликация — логическая связка, по своему применению приближенная к обороту речи «если… то…».

Импликация записывается как

$$\text{посылка} \Longrightarrow \text{следствие}.$$

Теорема — утверждение, устанавливаемое при помощи доказательства. В формулировке теоремы различают условие и заключение; структура теоремы представляет собой суждение-импликацию.

Пусть имеется импликация вида

$$A \Longrightarrow B;$$

здесь A — посылка, B — следствие.

Посылка A является условием, *достаточным* для выполнения следствия B. Если A истинно, то утверждение B заведомо верно.

Следствие B является условием, *необходимым* для истинности посылки A. Без выполнения B утверждение A не может быть истинным.

Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы последняя цифра в его десятичной записи не была 7:

$$\text{число делится на } 2 \Longrightarrow \underbrace{\text{последняя цифра не } 7}_{\text{необходимое условие делимости на } 2}$$

Это условие не является достаточным: число 23 не заканчивается на 7, но на 2 не делится. Необходимые условия содержат «лишние случаи».

Теорема, выражающая необходимое условие, называется *свойством*:

Если число делится на 2, то его последняя цифра не 7.

Для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы его последняя цифра была 0:

$$\underbrace{\text{последняя цифра } 0}_{\text{достаточное условие делимости на 2}} \Longrightarrow \text{число делится на } 2$$

Это условие не является необходимым: число 14 делится на 2, но его последняя цифра не 0. Достаточные условия содержат «не все случаи».

Теорема, выражающая достаточное условие, называется *признаком*:

Признаком (одним из признаков) делимости на 2 является тот фат, что последняя цифра числа — нуль.

Достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, т.е. охватывающими возможно большее число случаев, в которых интересующий нас факт всё ещё имеет место, а необходимые условия — возможно более узкими, т.е. охватывающими возможно меньше лишних случаев, в которых изучаемый факт уже не имеет места.

Пример утверждения, в которых необходимое условие совпадает с достаточным:

Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была четная.

Теорема, выражающая необходимое и достаточное условие, называется *критерием*.

Рассмотрим теорему

$$A \Longrightarrow B.$$

Обратная теорема — это утверждение

$$B \Longrightarrow A;$$

если исходная теорема верна, то обратная теорема может и не быть верной.

Теорема, обратная обратной, равносильна исходной.

Пример.

Исходная теорема:

$$\text{сумма цифр числа делится на } 3 \Longrightarrow \text{число делится на } 3.$$

Обратная теорема

$$\text{число делится на } 3 \Longrightarrow \text{сумма цифр числа делится на } 3$$

верна.

Если для теоремы верна и обратная теорема, то они могут быть объединены в критерий:

$$\text{число делится на } 3 \iff \text{сумма цифр числа делится на } 3$$

Пример.

Исходная теорема:

$$\text{в треугольнике один из углов прямой} \Longrightarrow \text{два других угла острые.}$$

Обратная теорема

$$\text{два угла в треугольнике острые} \Longrightarrow \text{третий угол прямой}$$

не верна.

Рассмотрим теорему

$$A \Longrightarrow B.$$

Противоположная теорема — это утверждение

$$\neg A \Longrightarrow \neg B$$

(знак $\neg$ означает отрицание).

Противоположная теорема равносильна обратной. Поэтому теорема, противоположная обратной:

$$\neg B \Longrightarrow \neg A,$$

равносильна исходной

$$A \Longrightarrow B.$$

Метод доказательства «от противного» заключается в том, что вместо исходной теоремы доказывается теорема, противоположная к обратной:

$$(\neg B \Longrightarrow \neg A) \iff (A \Longrightarrow B)\,.$$

10. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(-a;0)$ и $F_2(a;0)$ есть постоянная величина a^2.

Ответ. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

Задача 2. Из начала координат проведен луч, пересекающий данную окружность $(x-a)^2+y^2 = a^2$ $(a>0)$ в точке B. На луче по обе стороны от точки B отложены отрезки BM и BN одинаковой длины b. При вращении луча точки M и N описывают кривую, называемую улиткой Паскаля. Составить ее уравнение.

Ответ. $(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$.

Задача 3. Отрезок длины a движется так, что его концы все время находятся на координатных осях. Через концы отрезка проведены прямые, параллельные координатным осям, до их взаимного пересечения в точке P. Точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок. При движении отрезка точка M описывает кривую, называемую астроидой. Составить ее уравнение.

Ответ. $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$.

Лекция 2
Векторы
Определители второго и третьего порядка

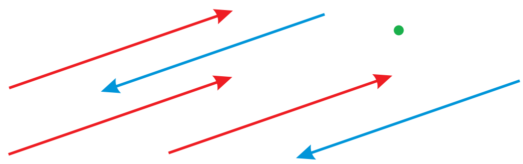
1. Векторы

Вектор — направленный отрезок.

Равные векторы: имеют одинаковые длины и совпадающие направления (параллельны и направлены в одну стороны)

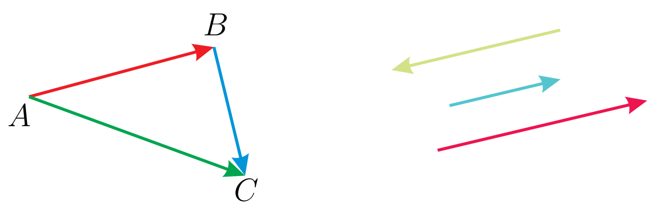
Противоположные векторы: имеют одинаковые длины и противоположные направления (параллельны и направлены в разные стороны).

Нулевой вектор: имеет нулевую длину, направление не определено, начало и конец совпадают.



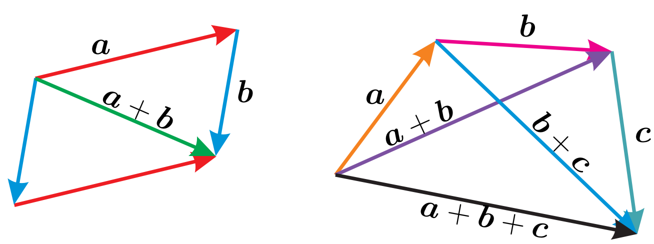
Операции над векторами: сложение и умножение на число.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$



Сложение векторов коммутативно и ассоциативно:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$



1.1. **Свойства операций над векторами.**

Теорема.

Сложение векторов и умножение векторов на числа обладают следующими свойствами:

(1) *коммутативность сложения*: $\forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a};$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c});$$

(3) *свойство нулевого вектора*: $\exists$ $\mathbf{0}$:

$$\forall \boldsymbol{a} : \boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a};$$

(4) *существование противоположного вектора*:

$$\forall \boldsymbol{a} \quad \exists \boldsymbol{a}' : \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\mathbf{0};$$

(5) *свойство единицы*: $\forall \boldsymbol{a}$:

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \alpha,\beta$

$$(\alpha\beta)\,\boldsymbol{a}=\alpha\,(\beta\boldsymbol{a})\,;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $\forall\alpha$

$$\alpha\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b};$$

(8) *дистрибутивность*-3: $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \alpha,\beta$

$$(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}.$$

1.2. **Коллинеарные и компланарные векторы.** Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Если коллинеарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими на одной прямой.

Векторы называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях. Если компланарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими в одной плоскости.

Теорема.

(1) *Для того, чтобы два вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α,β, не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

(2) *Для того, чтобы три вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α,β,γ не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

◀ 1. Пусть векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны; тогда один из них можно выразить через два остальных, например,

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}.$$

Мы можем положить

$$\alpha=1,\quad \beta=-x,\quad \gamma=-y.$$

2. Пусть в равенстве

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

один из коэффициентов отличен от нуля, например, $\alpha\neq0$. Тогда можно записать

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c},$$

и векторы оказываются компланарными. ►

Теорема.

(1) *Для того, чтобы два вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *были неколлинеарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

было возможно лишь при $\alpha = \beta = 0$.

(2) *Для того, чтобы три вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *были некомпланарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

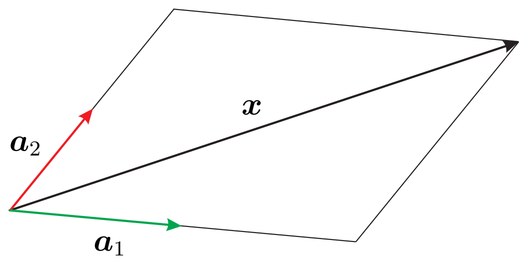
было возможно лишь при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.3. **Базис и координаты вектора.**

Базис на плоскости — упорядоченный набор двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Любой вектор на плоскости можно представить в виде комбинации

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2;$$

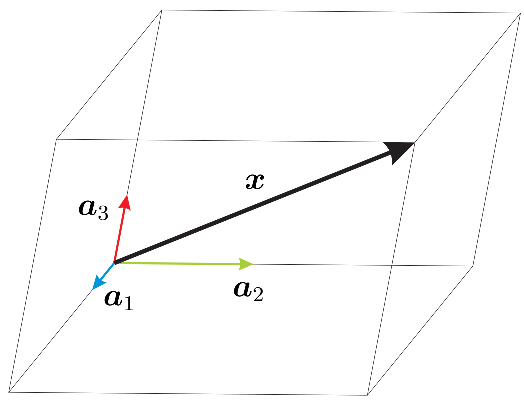
это соотношение называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, а числа x_1, x_2 — координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Координаты вектора записываем в виде столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.



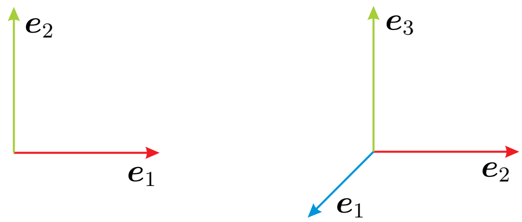
Базис в пространстве — упорядоченный набор трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Любой вектор пространства можно представить в виде комбинации

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + x_3 \boldsymbol{a}_3;$$

это соотношение называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, а числа x_1, x_2, x_3 — координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Координаты вектора записываем в виде столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.



В аналитической геометрии используются преимущественно ортонормированные базисы, т.е. базисы, состоящие из единичных попарно ортогональных векторов.



Теорема.

Разложение вектора по базису единственно, т.е. набор координат векторов в данном базисе определен однозначно.

◀ Предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ два различных набора координат:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + y_3\boldsymbol{a}_3.$$

Вычитая второе разложение из первого, получим

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{a}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{a}_1 + (x_3 - y_3)\boldsymbol{a}_3.$$

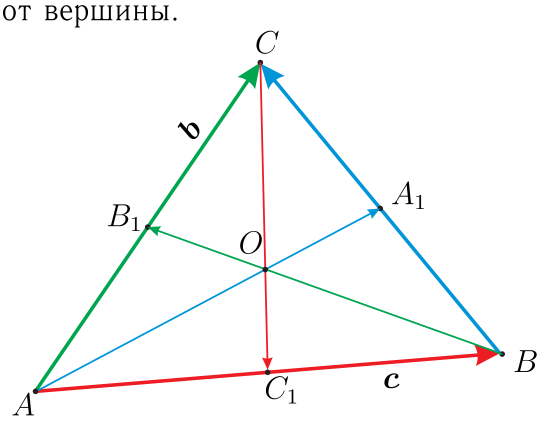
Так как векторы базиса некомпланарны, то это равенство возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е.

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3. \qquad ▶$$

Даже этих несложных средств достаточно для решения некоторых задач.

Пример.

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.



Рассмотрим базис на плоскости, образованный векторами $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$.

Имеем

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}; \qquad \overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \boldsymbol{c} + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

Рассмотрим точку O, делящую отрезок AA_1 в отношении $2:1$, считая от точки A; тогда

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{3}\boldsymbol{c}.$$

Найдем вектор $\overrightarrow{BO}$:

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\boldsymbol{c} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{3}\boldsymbol{c} = \frac{2}{3}\left(-\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1},$$

т.е. точка O делит медиану BB_1 в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

Аналогичное утверждение легко получить и для медианы CC_1.

2. Столбцы и операции над ними

2.1. Арифметическое пространство столбцов. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$, состоящее из упорядоченных наборов n вещественных чисел, которые будем записывать в виде столбцов:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нулевой столбец — столбец, все элементы которого нули; обозначается O.

Два столбца называются равными, если они состоят из одинакового числа элементов и попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах:

$$\text{для} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}: \qquad X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1, \ \ldots, \ x_n = y_n.$$

Определим операции сложения столбцов и умножения столбцов на вещественные числа:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Теорема.

Операции сложения столбцов и умножения столбцов на числа обладают следующими свойствами:

(1) *коммутативность сложения*: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$X + Y = Y + X;$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z);$$

(3) *свойство нулевого столбца*:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : X + O = X;$$

(4) *существование противоположного столбца*:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \exists X' \in \mathbb{R}^n : X + X' = O;$$

(5) *свойство единицы*: $\forall X \in \mathbb{R}^n$:

$$1 \cdot X = X;$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\beta)\, X = \alpha\, (\beta X)\, ;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\, (X + Y) = \alpha X + \alpha Y;$$

(8) *дистрибутивность*-2: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta)\, X = \alpha X + \beta X.$$

2.2. **Линейная комбинация, линейная оболочка.** Пусть даны столбцы $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Линейная комбинация — это выражение вида

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k.$$

Будем пользоваться сокращением ЛК.

ЛК называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу.

Линейная оболочка столбцов $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ — это множество

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \Big\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k \;\Big|\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Сокращение — ЛО.

2.3. **Линейная зависимость и независимость.** Тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу. Может ли быть равна нулевому столбцу нетривиальная ЛК, т.е. такая, в которой хотя бы один коэффициент ненулевой?

Пример.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 2X_1 - X_2 = O.$$

Столбцы $X_1, \ldots, X_n$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу.

Столбцы $X_1, \ldots, X_n$ называются линейно независимыми (ЛН), если равенство нулевому столбцу их ЛК возможно лишь в случае, если эта ЛК тривиальна.

Теорема.

(1) *Если в системе столбцов $X_1, \ldots, X_k$ имеется нулевой столбец, то эта система ЛЗ.*

(2) *Если система столбцов $X_1, \ldots, X_k$ ЛЗ, то один из этих столбцов можно представить в виде ЛК остальных.*

(3) *Если в системе столбцов $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_r$ столбцы $X_1, \ldots, X_k$ ЛЗ, то и вся система также ЛЗ.*

◀ 1. Пусть в системе столбцов $X_1, \dots, X_k$ один столбец нулевой, например, $X_k = O$. Нетривиальная ЛК

$$0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 1 \cdot X_k$$

равна, очевидно, нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ; тогда существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = O.$$

Для определенности будем считать, что $\alpha_k \neq 0$; тогда

$$X_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} X_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} X_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} X_{k-1},$$

что и требовалось.

3. Если подсистема $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ, то существует ЛК

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = O,$$

в которой имеется хотя бы один ненулевой коэффициент. Если теперь к этой ЛК добавить тривиальную ЛК столбцов $X_{k+1}, \dots, X_r$, то получится нетривиальная ЛК

$$\overbrace{\underbrace{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k}_{\text{нетривиальная ЛК}} + \underbrace{0 \cdot X_{k+1} + \dots 0 \cdot X_r}_{\text{тривиальная ЛК}}}^{\text{нетривиальная ЛК}} = O,$$

что и требовалось. ▶

2.4. **Векторы и столбцы.**

Пусть на плоскости (в пространстве) зафиксирован некоторый базис.

Тогда каждому вектору ставится единственным образом в соответствие столбец его координат.

Наоборот, если задан некоторый столбец, то существует единственный вектор, координаты которого совпадают с элементами этого столбца.

Таким образом, в случае, если базис зафиксирован, между векторами и столбцами существует взаимно однозначное соответствие

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow X.$$

Теорема.

Указанное соответствие обладает следующими свойствами: если $\boldsymbol{x} \leftrightarrow X$, $\boldsymbol{y} \leftrightarrow Y$, то

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow X + Y, \quad \alpha \boldsymbol{x} \leftrightarrow \alpha X.$$

Такое соответствие называется изоморфизмом.

3. Определитель второго порядка

3.1. **Система двух уравнений с двумя неизвестными.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, p, q — заданные числа, x, y — неизвестные. Решим систему методом исключения неизвестных.

Умножая первое уравнение на d, второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, найдем

$$-\begin{cases} ax + by = p & \times d \\ cx + dy = q & \times b \end{cases} \implies (ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, найдем

$$-\begin{cases} ax + by = p, & \times c \\ cx + dy = q, & \times a \end{cases} \implies (ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

3.2. **Определитель второго порядка.** Запишем коэффициенты системы в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

она называется основной матрицей системы.

Поставим в соответствие этой матрице число $ad - bc$; оно называется определителем (детерминантом) матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Такой определитель называется определителем второго порядка (по количеству его строк и столбцов); сокращенно det-2.

С помощью определителей формулы для решения системы могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_x}{\det A}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_y}{\det A}, \tag{2}$$

где матрица A_x (соответственно, A_y) получается из матрицы A заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец, состоящий из свободных членов уравнений. Полученные формулы называются формулами Крамера.

Теорема.

Определитель $\det A$ *обладает следующими свойствами*:

(1) *линейность*:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$$

(2) *кососимметричность*: det-2 *с одинаковыми столбцами равен нулю,*

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0;$$

(3) *нормировка*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Из этих основных свойств определителя можно вывести ряд новых свойств, полезных при вычислениях.

1. Кососимметричность-2: при перестановке столбцов det-2 меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

◄
$$\underbrace{\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0}$$

откуда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$ ►

2. Det-2 не изменится, если к любому из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число.

◄
$$\begin{vmatrix} a+\alpha b & b \\ c+\alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$ ►

3. Определитель не изменится, если его строки и столбцы поменять ролями:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-2 равноправны: любое утверждение, справедливое для столбцов, будет справедливым и для строк.

3.3. **Примеры.**

Пример.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2\cdot 12345 & 24695 - 2\cdot 12347 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345\cdot 1 - 12347\cdot 1 = -2.$$

3.4. **Критерий равенства нулю det-2.**

Теорема.

Det-2 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть det-2 равен нулю. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad ad = bc \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

2. Пусть столбцы det-2 ЛЗ; тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0. \qquad ▶$$

4. Определитель третьего порядка

4.1. **Определение.** Определитель третьего порядка (сокращенно det-3) должен состоять из трех строк и трех столбцов чисел; будем считать его функцией его столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |A, B, C|, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Det-3 должен обладать свойствами, аналогичными свойствам det-2:

(1) линейность по столбцам:

$$|A_1 + A_2, B, C| = |A_1, B, C| + |A_2, B, C|$$

$$|\alpha A, B, C| = \alpha\, |A, B, C|,$$

и аналогично для всех остальных столбцов;

(2) кососимметричность: определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю,

$$|A, A, C| = 0$$

и аналогично для других столбцов;

(3) нормировка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отметим свойство кососимметричность-2: при перестановке любых двух столбцов det-3 меняет знак.

$$\underbrace{|A+B,\ A+B,\ C|}_{=0} = |A,\ A+B,\ C| + |B,\ A+B,\ C| =$$

$$= \underbrace{|A, A, C|}_{=0} + |A, B, C| + |B, A, C| + \underbrace{|B, B, C|}_{=0},$$

откуда

$$|A, B, C| = -|B, A, C|.$$

Из кососимметричности и линейности получается также следующее свойство: det-3 не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную ЛК остальных столбцов.

$$|A+\beta B+\gamma C,\ B,\ C| = |A,\ B,\ C| + \beta\underbrace{|B,\ B,\ C|}_{=0} + \gamma\underbrace{|C,\ B,\ C|}_{=0}.$$

4.2. **Формулы Крамера.** Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=p_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=p_3. \end{cases}$$

Таблицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

называются основной и расширенной матрицами системы соответственно.

Введя столбцы

$$A=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{pmatrix},$$

систему можно записать в виде

$$Ax+By+Cz=P.$$

Пусть (x,y,z) — решение системы. Это означает, что столбец P является ЛК столбцов A,B,C с коэффициентами x,y,z:

$$P=Ax+By+Cz.$$

Рассмотрим det-3 $|P,B,C|$:

$$|P,B,C| = \left|\underbrace{Ax+By+Cz}_{=P},\ B,\ C\right| =$$

$$= |Ax,B,C| + |By,B,C| + |Cz,B,C| = x\,|A,B,C| + y\underbrace{|B,B,C|}_{=0} + z\underbrace{|C,B,C|}_{=0},$$

откуда, при условии $|A,B,C|\neq 0$, получаем

$$x=\frac{|P,B,C|}{|A,B,C|}=\frac{\det A_x}{\det A}.$$

Аналогично получаются формулы для y,z:

$$y=\frac{|A,P,C|}{|A,B,C|}=\frac{\det A_y}{\det A},\quad z=\frac{|A,B,P|}{|A,B,C|}=\frac{\det A_z}{\det A},$$

где определители $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ получены из определителя $\det A$ заменой соответствующего столбца на столбец правых частей системы.

Формулы Крамера дают решение в случае, когда определитель $|A,B,C|$ основной матрицы системы отличен от нуля, и при этом доказывают единственность этого решения. Если же $|A,B,C|=0$, то формулы Крамера неприменимы; в этом случае система может либо не иметь решений, либо иметь более одного решения.

4.3. **Разложение det-3 по первому столбцу.** Рассмотрим столбцы

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, любой столбец из трех элементов можно представить в виде ЛК этих трех столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3.$$

Преобразуем det-3:

$$|A,\ B,\ C| = |a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3,\ B,\ C| =$$
$$= a_1 \underline{|I_1,\ B,\ C|} + a_2 \underline{|I_2,\ B,\ C|} + a_3 \underline{|I_3,\ B,\ C|}.$$

Подчеркнутые det-3 называются алгебраическими дополнениями (АД) элементов a_1, a_2, a_3; обозначим их A_1, A_2, A_3. Очевидно, эти АД не зависят от элементов a_1, a_2, a_3.

Вычислим АД элемента a_1:

$$A_1 = |I_1, B, C| = |I_1, b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3, C| =$$

$$= b_1 \underbrace{|I_1, I_1, C|}_{=0} + b_2 \, |I_1, I_2, C| + b_3 \, |I_1, I_3, C| =$$

$$= b_2 \left| I_1, I_2, \underline{c_1 I_1 + c_2 I_2} + c_3 I_3 \right| + b_3 \left| I_1, I_3, \underline{c_1 I_1} + c_2 I_2 + \underline{c_3 I_3} \right| =$$

$$= b_2 c_3 \, |I_1, I_2, I_3| + b_3 c_2 \, |I_1, I_3, I_2| =$$

$$= b_2 c_3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + b_3 c_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} = b_2 c_3 - b_3 c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что АД элемента a_1 равно det-2, который получается, если из исходного det-3 вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент a_1.

Аналогичное вычисление АД элементов a_2 и a_3 дает:

$$A_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание на знак A_2.

Итак, получена формула разложения det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Det-2, фигурирующие в этой формуле, называются минорами этих элементов. Они представляют собой det-2, получающиеся из исходного det-3 вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоят элементы a_1, a_2, a_3 соответственно.

Аналогичные формулы могут быть получены и для разложения det-3 по элементам второго и третьего столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Анализ этих формул позволяет сделать следующий вывод: АД элемента равно минору этого элемента, взятому со знаком «+» или «−» согласно следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Итак, det-3 равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Рассмотрим сумму произведений элементов второго столбца на алгебраические дополнения элементов первого столбца:

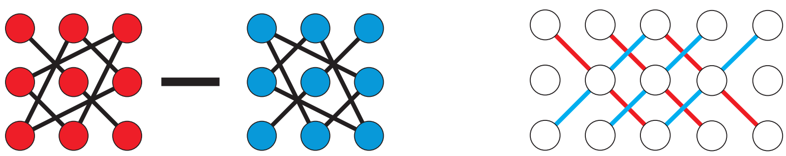
$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично и для других столбцов. Итак, сумма произведений элементов некоторого столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю.

4.4. **Полное разложение det-3.** Вычисляя АД, входящие в разложение det-3 по элементам какой-либо строки, получаем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Мнемонические правила для запоминания:



Сгруппируем иначе слагаемые в полном разложении det-3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1b_2c_3} + a_2b_3c_1 + \underline{\underline{a_3b_1c_2}} - \underline{a_1b_3c_2} - \underline{\underline{a_2b_1c_3}} - a_3b_2c_1 =$$

$$= a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1\left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1\left(a_2b_3 - a_3b_3\right) =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-3 равноправны: любое утверждение, сформулированное для столбцов, имеет аналог, справедливый для строк. В частности, можно производить разложение det-3 не только по элементам столбцов, но и по элементам строк.

4.5. **Примеры.**

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2, а к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 4, после чего разложим получившийся det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \xleftarrow{\;-2\;} \\ \xleftarrow{\;4\;} \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 13 & 13 \end{vmatrix} = 0 \cdot 13 - (-13) \cdot 7 = 91.$$

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 4y - z = 7, \\ -4x + 5y + z = 9. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера, для чего вычислим нужные det-3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 91$$

(см. пример выше).

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

для вычисления этого det-3 прибавим к первой строке утроенную вторую строку, а к третьей строке прибавим вторую строку, после чего разложим полученный det-3 по третьему столбцу:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 16 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 35 - 2 \cdot 16 & 14 - 2 \cdot 9 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 91.$$

При вычислении $\det A_y$ и $\det A_z$ будем из второй строки вычитать удвоенную первую строку, а к третьей строке прибавлять первую строку, умноженную на 4, как это делалось при вычислении $\det A$; после этого каждый из полученных det-3 разложим по элементам первого столбца:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 65 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 65 & 13 \end{vmatrix} = 182,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ 13 & 65 \end{vmatrix} = 273.$$

Решение системы:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{91}{91} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{182}{91} = 2, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{273}{91} = 3.$$

4.6. **Критерий равенства нулю det-3.**

Теорема.

Det-3 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть det-3 равен нулю. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Формулы Крамера к ней неприменимы, но она имеет очевидное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому решение системы не единственно, и она имеет какое-либо другое решение, в котором хотя бы одна из неизвестных отлична от нуля. Компоненты этого решения и являются коэффициентами нетривиальной линейной комбинации столбцов, равной нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы ЛЗ; тогда один из них можно представить в виде ЛК остальных, например, $C = \alpha A + \beta B$. Тогда

$$|A, B, C| = |A, B, C - \alpha A - \beta B| = |A, B, O| = 0. \qquad \blacktriangleright$$

5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найдите: (а) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $|AM| : |BM| = a : b$; (б) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $|AN| : |BN| = a : b$.

Ответ. (а) $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} \\ \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$; (б) $\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{b-a} \\ \dfrac{a}{a-b} \end{pmatrix}$.

Задача 2. Даны две различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты: (а) точки M, лежащей на отрезке AB и такой, что $|AM| : |BM| = a : b$; (б) точки N, лежащей на прямой AB вне отрезка AB и такой, что $|AN| : |BN| = a : b$.

Ответ. (а) $M = \begin{pmatrix} \dfrac{bx_1 + ax_2}{a+b} \\ \dfrac{by_1 + ay_2}{a+b} \\ \dfrac{bz_1 + az_2}{a+b} \end{pmatrix}$; (б) $N = \begin{pmatrix} \dfrac{bx_1 - ax_2}{b-a} \\ \dfrac{by_1 - ay_2}{b-a} \\ \dfrac{bz_1 - az_2}{b-a} \end{pmatrix}$.

Задача 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $|AM| : |BM| = m_1 : n_1$, $|AN| : |CN| = m_2 : n_2$, O — точка пересечения отрезков BN и CM. Найдите отношения $|BO| : |ON|$ и $|CO| : |OM|$. Решить задачу, используя методы векторной алгебры.

Ответ. $\dfrac{|BO|}{|ON|} = \dfrac{(m_2 + n_2)n_1}{m_1 n_2}$; $\dfrac{|CO|}{|OM|} = \dfrac{(m_1 + n_1)n_2}{m_2 n_1}$.

Задача 4. Используя методы векторной алгебры, докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины произвольного тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Задача 5. Используя методы векторной алгебры, докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Задача 6. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые EF и BC_1 параллельны. Найдите отношение $|EF| : |BC_1|$.

Ответ. $1 : 3$.

Задача 7. Докажите, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где по крайней мере одно из чисел c, d отлично от нуля, не зависит от значения x тогда и только тогда, когда $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = 0$.

Задача 8. Вычислите определители второго порядка:

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}; \qquad \text{(б)} \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix};$$

(в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; (г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$;

(д) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

Ответ. (а) 0; (б) $-2b^3$; (в) $\sin(\alpha-\beta)$; (г) 0; (д) 1.

Задача 9. Вычислите определители третьего порядка:

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix};$$

$$\text{(в)} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Ответ. (а) 0; (б) $(c-b)(a-c)(a-b)(a+b+c)$; (в) $(c-b)(a-c)(a-b)(ba+ca+cb)$; (г) $3acb-a^3-b^3-c^3$.

Задача 10. Не раскрывая определителей, докажите следующие тождества:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3++b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Лекция 3
Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

1. Преобразование базисов и ориентация

Пусть на плоскости заданы два произвольных базиса (условно назовем их старым и новым)

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2.$$

Векторы нового базиса можно выразить через векторы старого базиса:

$$\boldsymbol{f}_1 = c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}_2 = c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2.$$

Введем матрицы

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \quad F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2), \quad C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать

$$F = EC.$$

Матрица C называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$. Определитель матрицы перехода отличен от нуля в силу линейной независимости векторов базиса.

Базис $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ называется одноименным (разноименным) с базисом $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, если матрица перехода C от E к F имеет положительный (отрицательный) определитель. Если базис F является одноименным с базисом E, мы пишем $F \simeq E$.

Теорема.

Отношение одноименности базисов обладает следующими свойствами:

(1) $E \simeq E$;

(2) *если* $F \simeq E$, *то* $E \simeq F$;

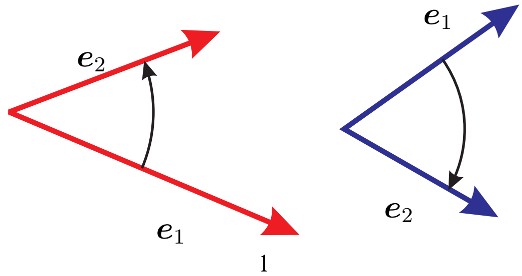
(3) *если* $E \simeq F$ *и* $F \simeq H$, *то* $E \simeq H$.

Множество всех базисов на плоскости разбивается на два класса следующим образом. Пусть E — некоторый базис. К одному классу относятся все базисы, одноименные с E (и при этом одноименные между собой), к другому — разноименные с E (и при этом одноименные между собой).

Каждый из двух классов одноименных базисов называется ориентацией плоскости. На плоскости существует ровно две ориентации, одна из которых называется положительной, а вторая — отрицательной.

Соглашение об ориентации.

Базис на плоскости $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ называется правым, если кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки.

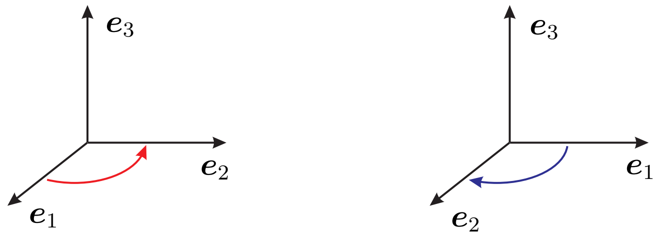


Аналогичные рассуждения можно провести и для базисов в пространстве. В пространстве также существует ровно две ориентации.

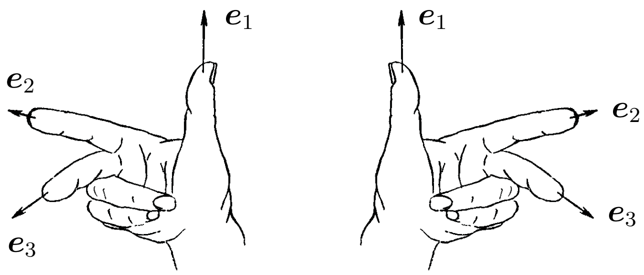
Базис в пространстве $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ называется правым, если выполнено одно из следующих условий:

(1) если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{e}_3$, то кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, осуществляется против часовой стрелки;

(2) векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ удовлетворяют правилу винта: если вращать винт в направлении поворота, переводящего (кратчайшим образом) вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_2$, то поступательное движение винта происходит в направлении вектора $\boldsymbol{e}_3$;



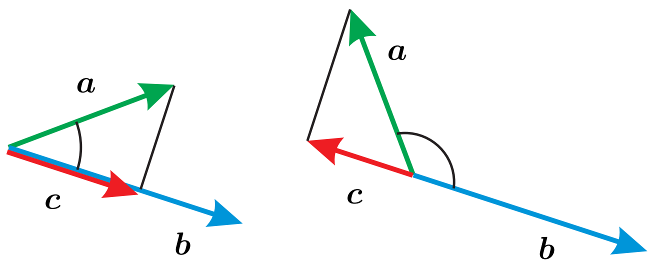
(3) векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ удовлетворяют правилу правой руки: их расположение совпадает с естественным положением большого, указательного и среднего пальцев правой руки.



2. Скалярное произведение векторов

2.1. **Определение.**

Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ — это вектор $\boldsymbol{c}$, коллинеарный $\boldsymbol{b}$, начало (конец) которого представляет собой ортогональную проекцию начала (конца) вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую, параллельную $\boldsymbol{b}$. Обозначение: $\boldsymbol{c} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$.



Величиной $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ проекции $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ называется ее длина, взятая со знаком «+», если векторы $\boldsymbol{c} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, и со знаком «−» в противном случае. Ясно, что

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Скалярное произведение (СП) двух векторов — это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Ясно, что СП равно

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}|.$$

Для СП используется также обозначение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Скалярный квадрат вектора:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Длина вектора может быть выражена через его скалярный квадрат:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Вычислим проекцию $\boldsymbol{c}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.

Вектор $\boldsymbol{c}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$, поэтому

$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{b}.$$

Кроме того,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}| = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}),$$

откуда

$$\alpha = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}.$$

Окончательный результат:

$$\boldsymbol{c} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} \boldsymbol{b}.$$

Величина этой проекции

$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}.$$

2.2. **Свойства скалярного произведения.**

Теорема.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

(1) *симметричность*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(2) *линейность*:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}), \qquad (\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b});$$

(3) *положительная определенность*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqslant 0, \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

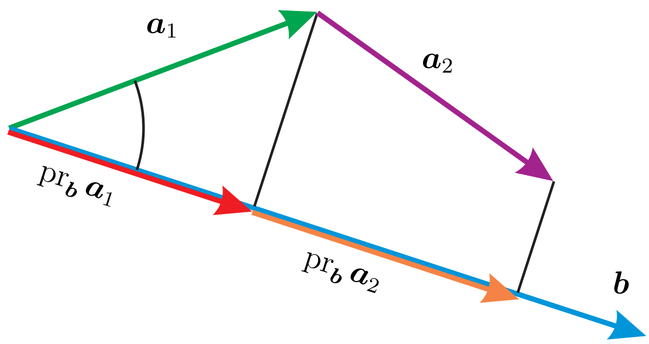
Отметим, что из линейности по первому аргументу и симметричности следует линейность по второму аргументу.

◀ Докажем, что $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$. Это следует из того факта, что

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_2,$$

а следовательно,

$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_2. \qquad ▶$$



2.3. **Вычисление СП в ортонормированном базисе.** Пусть в пространстве задан ОНБ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Попарные СП векторов этого базиса равны

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1,$$
$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0.$$

Символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Тогда можно записать

$$(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}.$$

Разложим векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3.$$

Вычислим СП:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= (a_1\boldsymbol{e}_1,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ (a_2\boldsymbol{e}_2,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ (a_3\boldsymbol{e}_3,\ b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= a_1b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}_{=1} + a_1b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + a_1b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)}_{=0} +$$

$$+ a_2b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_2b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}_{=1} + a_2b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}_{=0} +$$

$$+ a_3b_1\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_3b_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + a_3b_3\underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)}_{=1} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Итак, скалярное произведение векторов выражается через их координаты в ортонормированном базисе формулой

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Длина вектора равна
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$
Угол между векторами может быть найден по формуле
$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Пример.

Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a} = (1, 3, -2)^T$ на $\boldsymbol{b} = (3, -6, 2)^T$, величину этой проекции и угол между векторами.

Имеем:
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7,$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 1\cdot 3 + 3\cdot(-6) + (-2)\cdot 2 = -19,$$

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b} = \frac{-19}{49}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = -\frac{19}{7},$$
$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = -\frac{19}{7\sqrt{14}}.$$

3. Векторное произведение векторов

3.1. **Определение.**

Векторным произведением (ВП) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi$;

(2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

(3) векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку.

3.2. **Формула для вычисления векторного произведения.** Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ заданы координатами относительно некоторого ортонормированного базиса:
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$
Будем предполагать, что эти векторы ненулевые и неколлинеарные; в противном случае ВП равно нулевому вектору.

Найдем какой-либо ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$, перпендикулярный $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Условие перпендикулярности:
$$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{a} \quad\Longleftrightarrow\quad (\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}) = 0.$$

Таким образом, координаты p_1, p_2, p_3 вектора $\boldsymbol{p}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0, \\ b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, хотя бы одна из его координат отлична от нуля; предположим, что это p_3. Тогда, разделив оба уравнения системы на p_3 и обозначив

$$x_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad x_2 = \frac{p_1}{p_3},$$

получим систему

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3, \\ b_1x_1 + b_2x_2 = -b_3, \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, в качестве вектора $\boldsymbol{p}$ можно взять вектор

$$p_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{c}$ пропорционален вектору $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{p}$. Подберем α так чтобы $|\alpha\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$.

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\varphi = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2;$$

получили, что $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{p}|$. Таким образом, $\boldsymbol{c} = \pm\boldsymbol{p}$.

Для выяснения знака вычислим определитель матрицы перехода от исходного ОНБ к базису, состоящему из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$; этот det-3 состоит из координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Таким образом, тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеет ту же ориентацию, что и исходный ОНБ. Поэтому в случае правого ОНБ $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}$, а в случае левого ОНБ $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{p}$.

Итак, в случае правого ОНБ имеем

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что координаты вектора $\boldsymbol{c}$ равны алгебраическим дополнениям элементов первой строки det-3

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому можно формулу для вычисления ВП представить в виде

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в правом ОНБ,}$$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в левом ОНБ.}$$

Очевидно, эти формулы справедливы и для случаев, когда один (или оба) вектора нулевой и когда векторы коллинеарны (эти случаи в начале рассуждения были исключены из рассмотрения).

3.3. **Свойства векторного произведения.**

Теорема.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

(1) *кососимметричность*:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}];$$

(2) *линейность*:

$$[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}],$$

$$[\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Из линейности по первому аргументу и кососимметричности вытекает линейность и по второму аргументу.

◀ Докажите самостоятельно, используя свойства определителей. ▶

3.4. **Двойное векторное произведение.** Двойное векторное произведение — это $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ или $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]$.

Теорема.

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

◀ В фиксированном ОНБ векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеют координаты

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$:

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}. \qquad ▶$$

Теорема.
Имеет место тождество Якоби:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = \boldsymbol{0}.$$

◀ Складывая разложение

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

с аналогичными разложениями для $[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]]$, $[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$, получаем требуемое. ▶

4. Смешанное произведение

Смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — это число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]).$$

Другие обозначения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle.$$

Теорема.

Если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где знак «+» выбирается в случае правого базиса, а знак «−» в случае левого.

◀ Введем обозначение

$$\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 =$$

$$= \pm \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad ▶$$

Теорема.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

(1) *линейность*:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c});$$

(2) *циклическая симметрия*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(3)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}).$$

◀ Докажите самостоятельно, используя свойства скалярного и векторного произведений и свойства det-3. ▶

Теорема.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *линейно зависимы.*

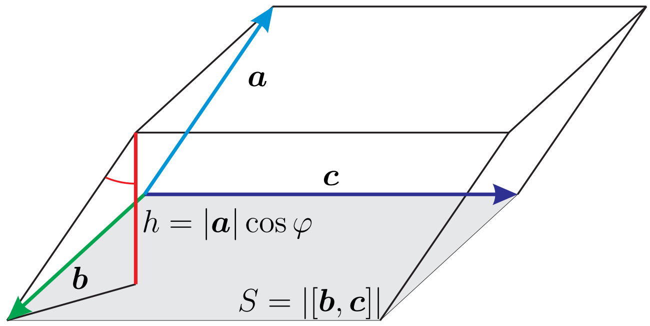
(2) *Векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *образуют правую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ *и левую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$.

◀ Докажите самостоятельно, используя выражение смешанного произведения через координаты векторов и то обстоятельство, что матрицу, составленную из координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, можно рассматривать как матрицу перехода от исходного ОНБ к базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (в случае, когда эти векторы линейно независимы). ▶

Теорема.

Величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «−» в противном случае.

◀ Докажите самостоятельно. ▶



5. Задачи

Пример.

Доказать тождество

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \underbrace{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]}_{\boldsymbol{x}}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}]) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]]) =$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}).$$

Пример.

Доказать тождество

$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

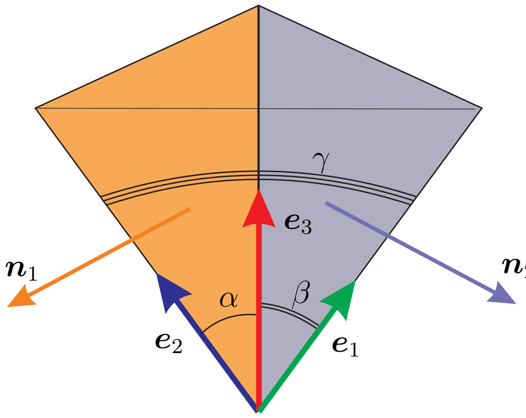
Решение.

$$[\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}_{\boldsymbol{x}}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = [\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) =$$

$$= \boldsymbol{c}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Пример.

Даны плоские углы α, β, γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.



Решение.

Направим единичные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вдоль ребер двугранного угла. Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярные граням, могут быть выражены как

$$\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], \quad \boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1].$$

Очевидно,

$$|\boldsymbol{n}_1| = \sin\alpha, \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sin\beta.$$

Угол между рассматриваемыми гранями равен углу между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = ([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\gamma \\ 1 & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma.$$

Поэтому косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Длины соседних сторон параллелограмма относятся как $m : n$, угол между этими сторонами равен α. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма.

Ответ. Острый угол $\arccos \dfrac{|m^2 - n^2|}{\sqrt{m^4 + n^4 - 2m^2n^2\cos 2\alpha}}$.

Задача 2. Докажите следующие тождества:

(а) $\|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$;

(б) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 + \|[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]\|^2 = \|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\|^2 \cdot \|\boldsymbol{c}\|^2$;

(в) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$;

(г) $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$.

Задача 3. (а) Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. (б) Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

Задача 4. Известно, что $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Найти длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и углы между ними.

Ответ. Либо все три вектора нулевые, либо образуют правый ортонормированный базис.

Задача 5. Три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отложены из одной точки. Найти объём (а) треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\boldsymbol{c}$; (б) тетраэдра, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Ответ. (а) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$; (б) $\frac{1}{6}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Задача 6. Даны ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ и число p. Найдите все решения уравнения $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=p$ и объясните их геометрический смысл в плоском и пространственном случаях.

Ответ. $\boldsymbol{x}=\dfrac{p}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y}$ — произвольный вектор, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$. При условии, что все векторы отложены из одной точки O, в плоском случае концы векторов $\boldsymbol{x}$ лежат на прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$; в пространственном случае концы векторов $\boldsymbol{x}$ лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$.

Задача 7. Даны ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выясните, при каком условии уравнение $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$ имеет решения, найдите все решения этого уравнения и объясните их геометрический смысл.

Ответ. Уравнение разрешимо при условии $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$. Частное решение $\boldsymbol{x}_0=\dfrac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$, Общее решение $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}$, где t — произвольное число. Множество концов векторов $\boldsymbol{x}$ является прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ (все векторы отложены из некоторой точки O); конец вектора $\boldsymbol{x}_0$ является проекцией точки O на эту прямую.

Задача 8. Даны неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и число p. Найдите все решения уравнения $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=p$ и объясните их геометрический смысл.

Ответ. Частное решение $\boldsymbol{x}_0=\dfrac{p}{\|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\|^2}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; общее решение $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$, где t,s — произвольные числа. Множество концов векторов $\boldsymbol{x}$ является плоскостью, параллельной векторам $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ (все векторы отложены из некоторой точки O); вектор $\boldsymbol{x}_0$ является проекцией точки O на эту плоскость.

Задача 9. Две тройки векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ называются взаимными, если $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j)=0$ при $i\neq j$ и $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i)=1$. Докажите, что для существования тройки $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$, взаимной к $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ были некомпланарны. Выразите векторы $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ через векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ образуют базис, то векторы взаимной тройки $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ образуют базис той же ориентации.

Ответ. $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)}$, $\boldsymbol{b}_2=\dfrac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1]}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)}$, $\boldsymbol{b}_3=\dfrac{[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)}$.

Задача 10. Решите систему векторных уравнений в пространстве: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=p$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=q$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})=r$, где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы, p,q,r — числа. Объясните геометрический смысл решения. [Указание. Воспользуйтесь взаимным базисом, описанным в задаче 9.]

Ответ. $\boldsymbol{x}=\dfrac{p[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+q[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]+r[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$ — радиус-вектор точки пересечения плоскостей, задаваемых уравнениями системы (см. задачу 6).

Лекция 4
Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости

Сначала получим разные виды уравнения прямой на плоскости в произвольной косоугольной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

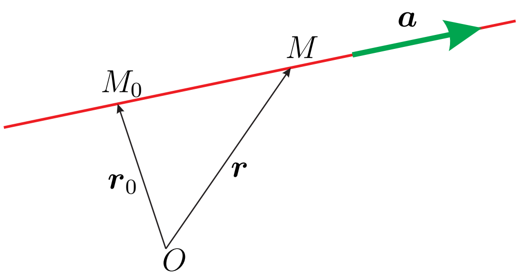
1.1. Параметрическое уравнение прямой на плоскости.

Рассмотрим прямую на плоскости, проходящую через точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$, называемую опорной точкой прямой, и параллельную вектору $\boldsymbol{a}$, называемому направляющим вектором этой прямой. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{a}, \quad t \in \mathbb{R},$$

откуда получаем векторное уравнение прямой:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.}$$



Записывая это уравнение в координатах, получим

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \end{cases}}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{a} = (l, m)$.

Исключив параметр t, получим

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.}$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой на плоскости. В знаменателях допускаются нули; в этом случае соотношение следует «перемножить крест-накрест», как пропорцию.

1.2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2) = M_2(x_2, y_2).$$

В качестве опорной точки можно выбрать любую из точек M_1 или M_2, а в качестве направляющего вектора — вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Уравнение в векторном параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

в каноническом виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

1.3. **Общее уравнение прямой.**

Из канонического уравнения

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

получаем

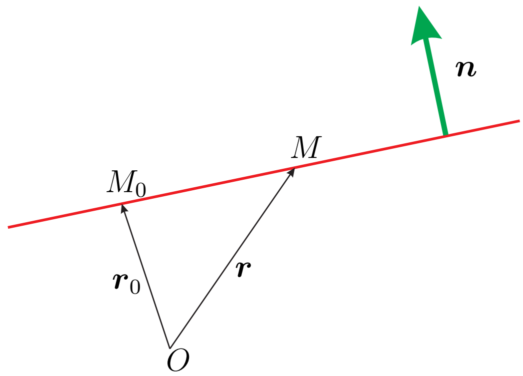
$$m(x-x_0)=l(y-y_0) \iff \boxed{Ax+By=D,}$$

где $A=m$, $B=-l$, $D=mx_0-ly_0$. Это уравнение называется общим уравнением прямой на плоскости в декартовой (косоугольной) системе координат.

1.4. **Нормальное уравнение прямой.** Пусть теперь система координат прямоугольная, причем базис ортонормированный.

Рассмотрим прямую на плоскости, проходящую через опорную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}$, называемому нормальным вектором этой прямой. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, т.е.

$$\boxed{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=0.}$$



Это уравнение называется нормальным уравнением прямой; его можно записать также в виде

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=0 \iff \boxed{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D,}$$

где $D=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})$.

В прямоугольных декартовых координатах нормальное уравнение принимает вид

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,}$$

где $\boldsymbol{r}=(x,y)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0)$, $\boldsymbol{n}=(A,B)$.

Это уравнение можно записать также в виде

$$\boxed{Ax+By=D;}$$

отличие этого уравнения от общего уравнения прямой в произвольной косоугольной системе координат заключается в том, что коэффициенты A, B здесь являются координатами вектора нормали прямой (в косоугольной системе координат это не так!).

1.5. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = D$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n}) - D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.}$$

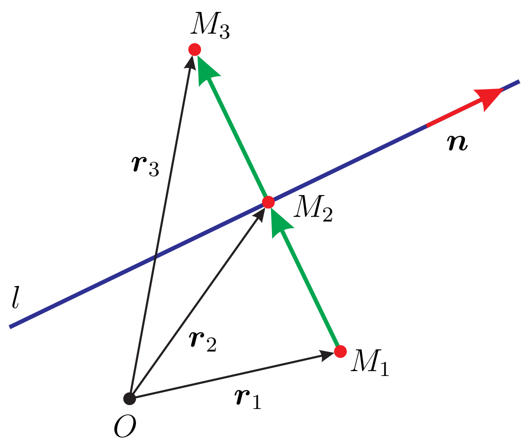
В координатной форме:

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 - D|}{\sqrt{A^2+B^2}};}$$

здесь (x_1, y_1) — координаты точки M_1, а прямая l задана уравнением $Ax + By = D$.

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$



◀ Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\boldsymbol{n}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{OM_2},\boldsymbol{n})}_{=D} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1},\boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})} = \lambda(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2$ проекции M_2 точки M_1 на прямую имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = d(M_1, M_2) = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \left\|\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}\right\| =$$

$$= \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\|\boldsymbol{n}\| = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой, имеем:

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} =$$

$$= \boldsymbol{r}_1 + 2\lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \qquad \blacktriangleright$$

2. Плоскость в пространстве

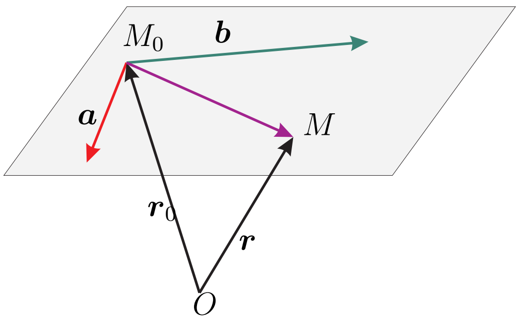
Сначала получим различные виды уравнения плоскости в произвольной косоугольной системе координат.

2.1. Уравнения плоскостей.

Рассмотрим плоскость π в пространстве, проходящую через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и параллельную двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, называемым направляющими векторами. Если $M(\boldsymbol{r})$ — произвольная точка плоскости π, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ компланарен векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, так что

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b},} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Это — векторное параметрическое уравнение плоскости.



В координатах это уравнение принимает вид системы

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta b_1, \\ y = y_0 + \alpha a_2 + \beta b_2, \\ z = z_0 + \alpha a_3 + \beta b_3, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Факт компланарности векторов $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ может быть выражен условием равенства нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.}$$

Обратите внимание, что здесь мы (пока!) не говорим о смешанном произведении векторов!

Раскрывая определитель по элементам первой строки и вводя сокращенные обозначения для коэффициентов получающегося уравнения, получим общее уравнение плоскости:

$$\boxed{Ax + By + Cz = D.}$$

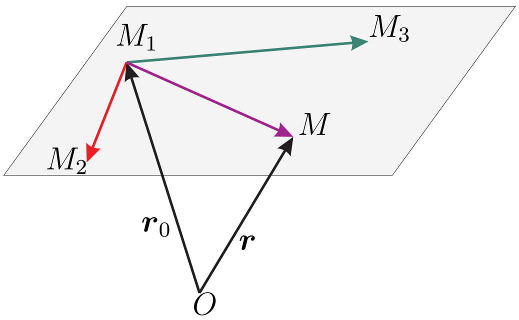
2.2. **Уравнение плоскости, проходящей через три точки.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2), \quad M_3(\boldsymbol{r}_3).$$

Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, так что

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$



2.3. **Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно заданному вектору.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{l} = (l, m, n)$. Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l}$ компланарны, так что

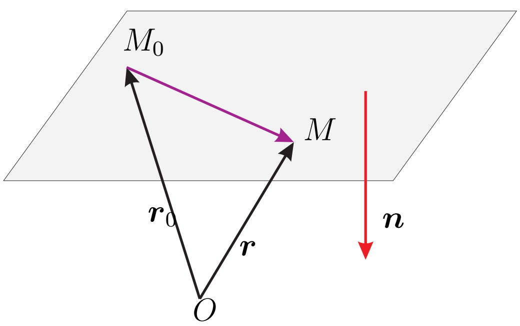
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.}$$

2.4. **Нормальное уравнение плоскости.**

Рассмотрим плоскость, проходящую через опорную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$. Для произвольной точки $M(\boldsymbol{r})$ этой плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, так что

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0} \iff \boxed{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D,}$$

где $D = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$. Вектор $\boldsymbol{n}$ называется нормальным вектором плоскости.



2.5. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и плоскость* π*, заданная уравнением* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

(1) *Ортогональная проекция* $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ *точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *на плоскость* π *выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$

(2) *Расстояние от точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *до плоскости* π *выражается формулой*

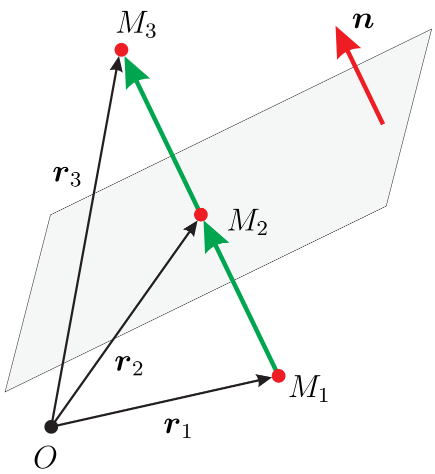
$$\boxed{d(M_1, \pi) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{\|\boldsymbol{n}\|}.}$$

В координатной форме расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* $\pi : Ax + By + Cz = D$ *выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

(3) *Точка* $M_3(\boldsymbol{r}_3)$*, симметричная точке* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *относительно плоскости* π*, выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.}$$



3. Прямая в пространстве

Как и прямая на плоскости, прямая в пространстве может быть задана векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой.

В косоугольной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ векторное параметрическое уравнение превращается в систему параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$.

Исключая параметр t из параметрических уравнений, получим каноническое уравнение прямой

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.}$$

Отметим, что это соотношение представляет собой не одно, а несколько (пару) уравнений. Нули в знаменателях допустимы; в соответствующем случае считаем, что в числителе также стоит нуль.

Прямая может быть задана как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных, например, общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2. \end{cases}$$

Понятие векторного произведения позволяет записать еще один тип уравненя прямой в пространстве.

Умножая векторное параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$$

векторно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] + t\,\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]}_{=\boldsymbol{0}}.$$

Обозначим $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]$; отметим, что $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$. Получим уравнение прямой в виде

$$\boxed{[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b},} \quad \text{где} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Обратное преобразование уравнения также нетрудно выполнить. Запишем уравнение прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

◀ Направляющий вектор прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ можно выбрать равным $\boldsymbol{a}$. Найдем такую опорную точку $\boldsymbol{r}_0$ прямой, что ее радиус-вектор ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$. Умножим соотношение $[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ векторно на $\boldsymbol{a}$:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\,\underbrace{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_0)}_{=0} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

откуда

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Получаем параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}. \quad ▶$$

3.1. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l выражается формулой*

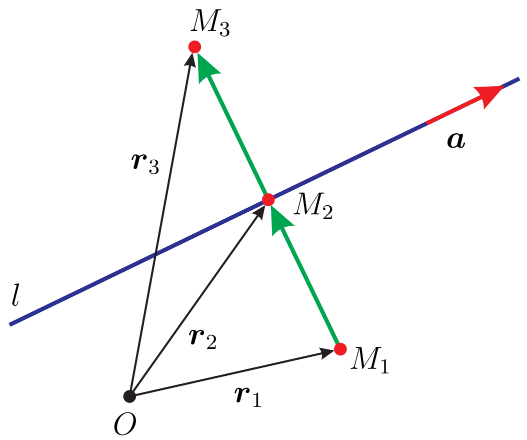
$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.}$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{d(M_1, l) = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.}$$

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.}$$



◀ Умножим обе части равенства

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a})}_{=0} = \underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})} =$$

$$= (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}),$$

откуда

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

— значение параметра, отвечающее точке $M_2 \in l$.

Для проекции M_2 точки M_1 на прямую l имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + t_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Для точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой l, имеем

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + 2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$

$$= 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Найдем расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\| = \left\|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| = \left\|\frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| =$$

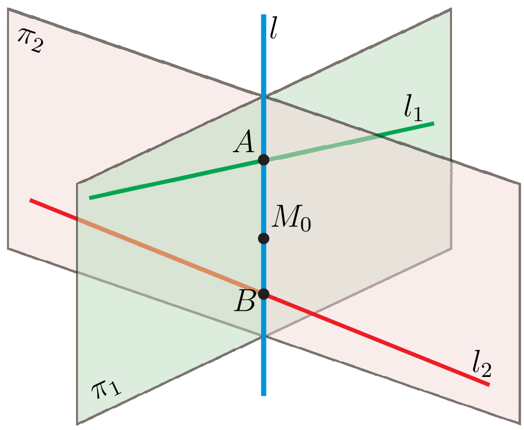
$$= \frac{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\| \cdot \sin\varphi}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|},$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$; здесь учтено, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$ ортогональны, т.е. $\sin\varphi = 1$. ▶

3.2. **Скрещивающиеся прямые.**

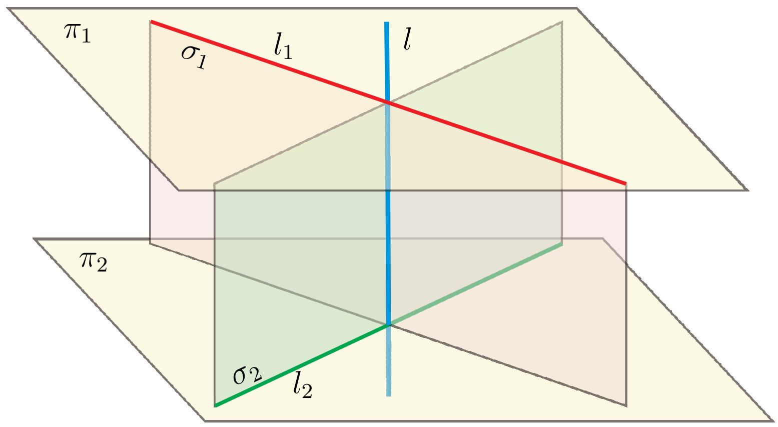
Составим уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_2) = 0. \end{cases}$



Составим уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ под прямыми углами (общего перпендикуляра к этим прямым).

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0. \end{cases}$



4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2.$$

Ответ. $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{a}_2\|}$.

Задача 2. Найти условие, при котором прямые на плоскости, заданные уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$, пересекаются (в единственной точке), и радиус-вектор точки пересечения этих прямых.

Ответ. $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 3. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2.$$

Ответ. $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)|}{\|\boldsymbol{n}_1\| \cdot \|\boldsymbol{n}_2\|}$.

Задача 4. Записать уравнение плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $(\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Задача 5. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$:

(1) пересекаются по прямой;
(2) параллельны, но не совпадают;
(3) совпадают.

Ответ. (1) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \boldsymbol{0}$; (2) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda\boldsymbol{n}_2$, то $D_1 \neq \lambda D_2$; (3) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda\boldsymbol{n}_2$, то $D_1 = \lambda D_2$.

Задача 6. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

Ответ. $\dfrac{|D_1 - D_2|}{\|\boldsymbol{n}\|}$.

Задача 7. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{\big\|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big\|}$.

Задача 8. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$

в виде $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ. $[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2$.

Задача 9. Записать уравнение прямой
$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$
в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$.

Ответ. $\boldsymbol{r} = \dfrac{[\boldsymbol{a}, D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}$.

Задача 10. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$:

(1) пересекаются (т.е. имеют одну общую точку);
(2) скрещиваются;
(3) параллельны, но не совпадают;
(4) совпадают.

Ответ. (1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$; (2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0$; (3) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0}$; (4) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}$.

Задача 11. Найти расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ. $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}] - \boldsymbol{b}\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 12. Найти расстояние между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ. $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 13. Найти расстояние между параллельными прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_2$.

Ответ. $\dfrac{\|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 14. Даны прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$. Найти необходимое и достаточное условие того, что:

(1) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку);
(2) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек);
(3) прямая лежит в плоскости.

Ответ. (1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$; (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) \neq D$; (3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = D$.

Задача 15. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 16. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + \dfrac{D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{n}$.

Задача 18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$.

Задача 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой.

Ответ. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$.

Задача 20. Составить уравнение проекции прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ при условии, что прямая не перпендикулярна плоскости.

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0. \end{cases}$

Задача 21. Составить уравнение прямой, пересекающей прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ под прямым углом и проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на данной прямой (перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую).

Ответ. $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0. \end{cases}$

Задача 22. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.

Задача 23. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$.

Ответ. $\dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.

Лекция 5
Парабола, эллипс, гипербола

1. Парабола

Парабола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (1) — каноническим уравнением параболы.

Теорема.

Парабола представляет собой множество точек, равноудаленных от данной прямой (директрисы параболы) и данной точки (фокуса параболы), не лежащей на директрисе.

◀ Пусть парабола задана уравнением (1) Имеем:

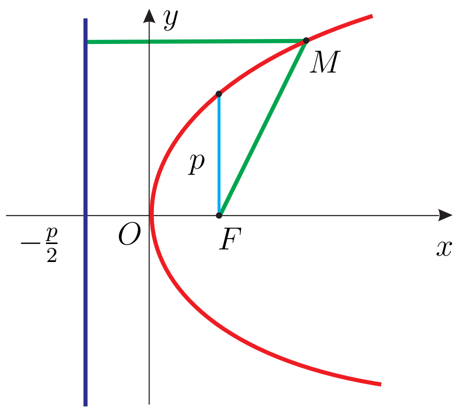
$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \iff \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка (x, y) параболы равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, которая является фокусом параболы, поскольку при $x = p/2$ имеем $y^2 = p^2$.

Обратно, рассмотрим прямую $x = -p/2$ и точку $F(p/2, 0)$. Точка $M(x, y)$ удалена от указанной прямой на расстояние $|x+p/2|$, а от точки F — на расстояние $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$. Условие равенства этих расстояний

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

после возведения в квадрат и несложных преобразований дает уравнение (1). ▶



Основные термины, связанные с параболой:

(1) ось Ox — ось параболы;
(2) фокальная хорда — отрезок с концами на параболе, проведенный через фокус перпендикулярно оси;
(3) p — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(4) $p/2$ — фокусное расстояние
(5) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;
(6) прямая $x = -p/2$ — директриса.

2. Эллипс

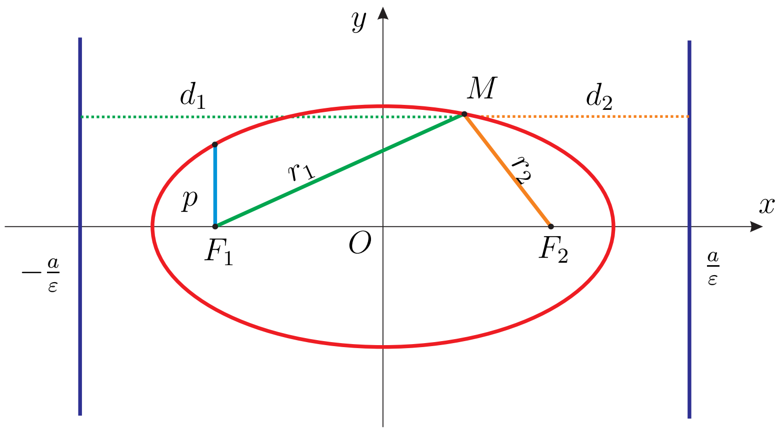
Эллипс — это линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (2) — каноническим уравнением эллипса.

Основные термины, связанные с эллипсом:

(1) a — большая полуось;
(2) b — малая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — большая (фокальная) ось;
(9) ось OY — малая ось;
(10) фокальная хорда — отрезок с концами на эллипсе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;
(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(12) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;
(13) точка $O(0, 0)$ — центр эллипса.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, сумма расстояний от которых до фокусов постоянна: $F_1M + F_2M = 2a$.

◀ Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ эллипса равны

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon x + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$, $\varepsilon < 1$, имеем $|\varepsilon x| < a$, так что

$$r_1 = a + \varepsilon x.$$

Аналогично находим

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой сумма $F_1M + F_2M$ постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε).

$\blacktriangleleft$ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ эллипса до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon\left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

3. Гипербола

Гипербола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (3) — каноническим уравнением гиперболы.

Выразим из уравнения гиперболы y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

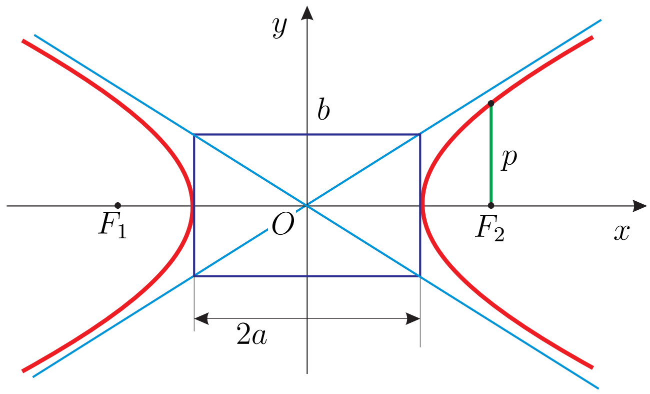
Имеем:

$$y = \pm b\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \pm b\frac{x}{a}\left(1-\frac{a^2}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b}{a}x+o(1).$$

Таким образом, прямые

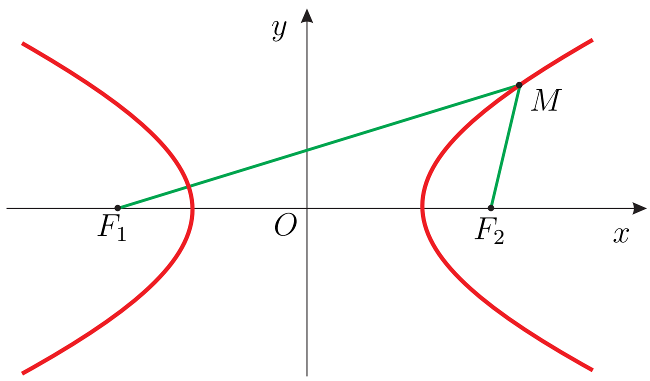
$$y = \pm\frac{b}{a}x \iff ay \pm bx = 0$$

являются асимптотами гиперболы.



Основные термины, связанные с гиперболой:

(1) a — вещественная полуось;
(2) b — мнимая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2+b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(9) ось OY — мнимая ось;
(10) фокальная хорда — отрезок с концами на гиперболе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;
(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(12) точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы;
(13) точка $O(0,0)$ — центр гиперболы;
(14) прямые $ay \pm bx = 0$ — асимптоты гиперболы.



Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов по абсолютной величине постоянна: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

◀ Рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Длины фокальных радиусов точки $M(x, y)$ равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x^2 + 2xc + c^2 - b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon a + x)^2.$$

Поскольку $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$, имеем

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|r_1 - r_2| = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой $|F_1M - F_2M| = 2a$, т.е.

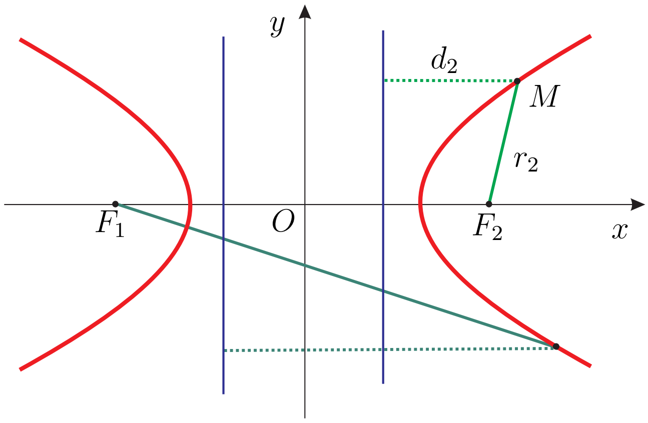
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad ▶$$

Теорема.

Директориальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε*).*



◀ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad ▶$$

Наряду с гиперболой, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

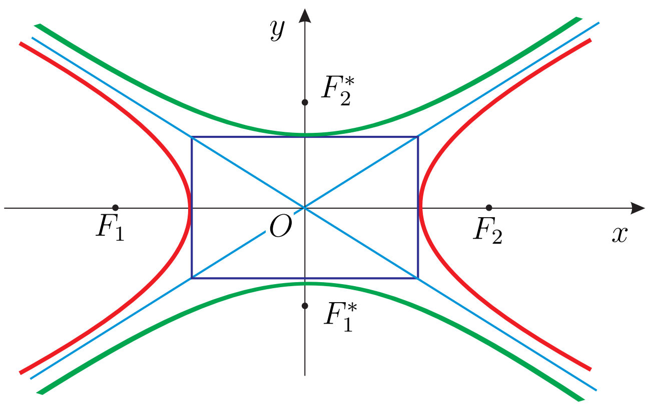
часто рассматривают гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

называемую сопряженной по отношению к исходной.

Умножая уравнение сопряженной гиперболы на -1, получим каноническое уравнение, в котором роли координатных осей поменялись:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



4. Касательные к параболе, эллипсу, гиперболе

Касательная к параболе — это прямая, непараллельная оси параболы, имеющая с параболой одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания параболы $y^2 = 2px$ и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad m \neq 0.$$

Имеем:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt) \iff y_0^2 + 2my_0t + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \iff$$

$$\iff m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно лишь при выполнении условия

$$my_0 - pl = 0 \iff l = m\frac{y_0}{p}.$$

Каноническое уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \iff y_0(y - y_0) = p(x - x_0) \iff y_0y - 2px_0 = px - px_0$$

и окончательно

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Касательная к эллипсу (гиперболе) — это прямая, имеющая с эллипсом (гиперболой) одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt.$$

Имеем:

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1,$$

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно при выполнении условия

$$\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2} = 0,$$

так что можно положить

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Каноническое уравнение касательной к эллипсу имеет вид

$$\frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \iff \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

откуда, учитывая соотношение $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, получаем

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке (x_0, y_0):

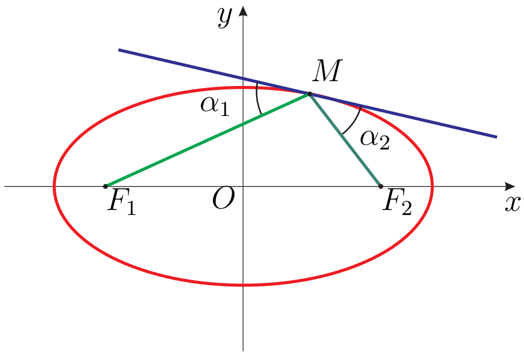
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

5. Оптические свойства конических сечений

Теорема.

Оптическое свойство эллипса: фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Физическая интерпретация: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то отраженный эллипсом луч попадет во второй фокус.



◀ Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M_0.

Расстояние F_1D_1 от фокуса $F_1(-c, 0)$ до касательной, имеющей уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

равно

$$F_1D_1 = \frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2} + \dfrac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

так что

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1D_1}{F_1M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

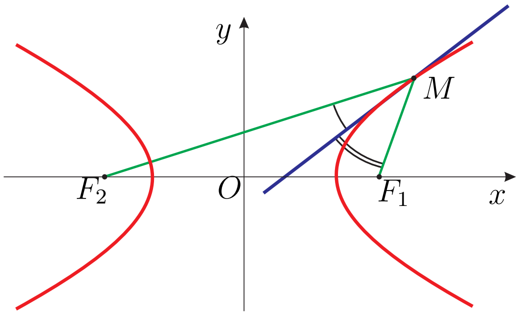
Аналогично получаем

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_2D_2}{F_2M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Таким образом, $\alpha_1 = \alpha_2$. ▶

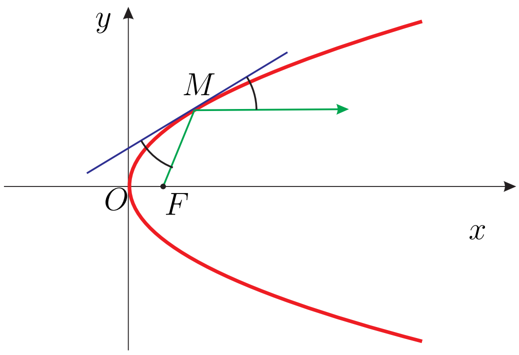
Теорема.

Оптическое свойство гиперболы: фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.



Теорема.

Оптическое свойство параболы: касательная к параболе в каждой точке M_0 составляет равные углы с фокальным радиусом точки M_0 и с осью параболы.



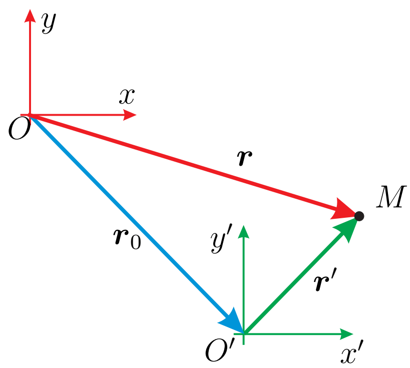
6. Уравнения параболы, эллипса, гиперболы, отнесенные к вершине

Рассмотрим две прямоугольные системы координат с попарно параллельными осями и различными началами: Oxy и $O'x'y'$. Введем обозначения:

$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M в Oxy,

$\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор точки M в $O'x'y'$,

$\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки O' в Oxy.



Очевидно,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'.$$

В координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Пусть $O'x'y'$ — каноническая система координат эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

Oxy — система координат, начало которой совпадает с левой вершиной эллипса; тогда

$$x = x' + a, \quad y = y'$$

и уравнение эллипса в системе Oxy имеет вид

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Преобразуем:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2},$$

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2;$$

поскольку

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

получаем

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

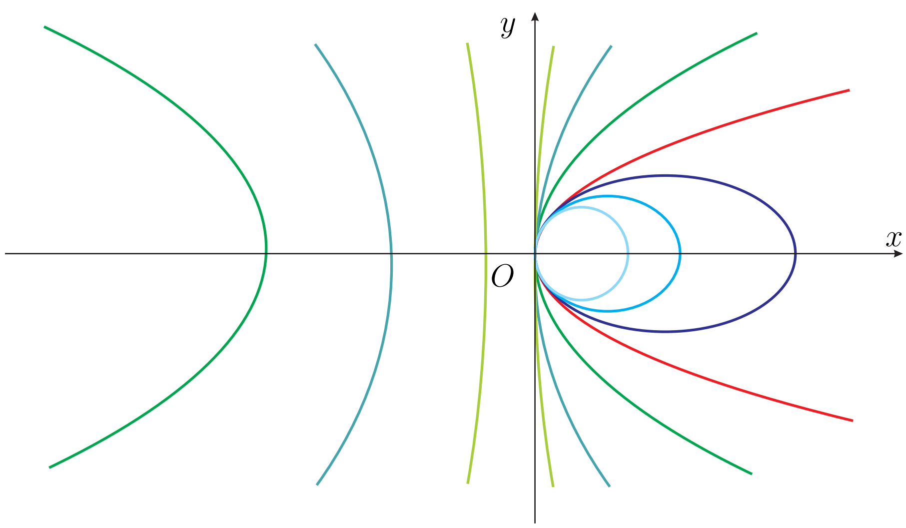
Аналогично, уравнение гиперболы в системе координат, начало которой находится в правой вершине гиперболы, имеет вид

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Таким образом, все три типа кривых задаются одним и тем же уравнением

$$\boxed{y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.}$$

При фиксированном p и изменяющемся $\varepsilon \in [0, +\infty)$ мы последовательно получаем:
при $\varepsilon = 0$ окружность;
при $\varepsilon \in (0, 1)$ эллипс;
при $\varepsilon = 1$ параболу;
при $\varepsilon \in (1, +\infty)$ гиперболу.



7. Полярные уравнения параболы, эллипса, гиперболы

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе.

Поместим полюс в фокус параболы. Имеем:

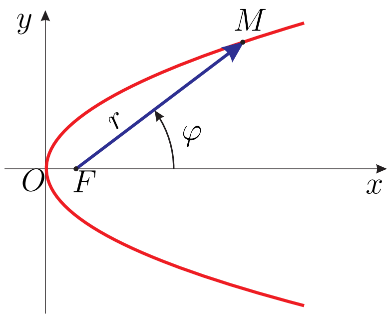
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(директориальное свойство параболы). Таким образом,

$$r\cos\varphi = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$



Поместим полюс в левый фокус эллипса. Имеем:

$$x + c = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

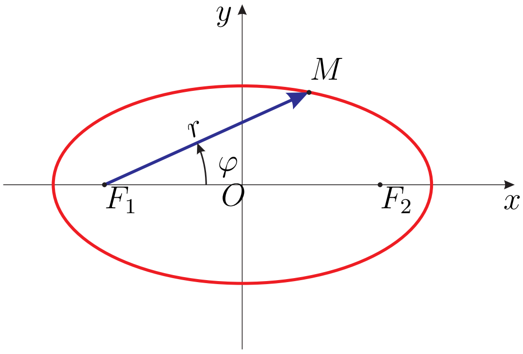
$$r = \varepsilon x + a$$

(выражение для левого фокального радиуса). Таким образом,

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1-\varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

так что

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$



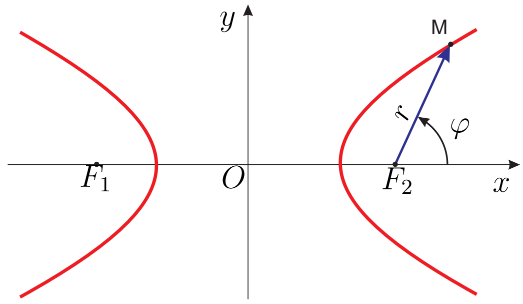
В случае гиперболы поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Имеем:

$$r = \varepsilon x - a, \quad x - c = r\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна ее ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением.



8. Парабола, эллипс и гипербола как конические сечения

Каждая из трех указанных линий является плоским сечением некоторого прямого кругового конуса.

Если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса, то в сечении получается парабола.

На чертеже:

π — секущая плоскость, параллельная одной из образующих конуса;

S — вершина конуса;

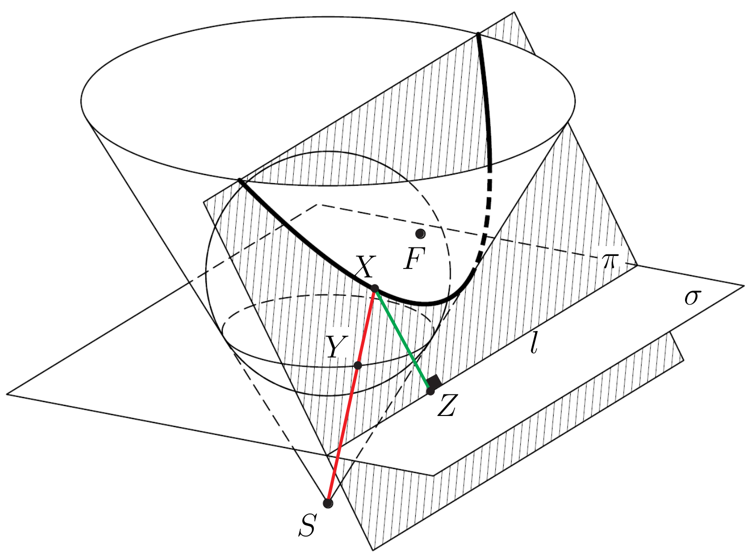
сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости σ, и секущей плоскости в точке F;

l — линия пересечения плоскостей π и σ;

X — произвольная точка сечения конуса плоскостью π;

Y — точка пересечения образующей SX с плоскостью σ;

Z — проекция точки X на прямую l.



$XF = XY$ как касательные к сфере. Точки Y и Z лежат в плоскости σ, угол между XY и σ равен углу между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси. Угол между XZ и σ равен углу между плоскостями π и σ. В силу выбора плоскости π эти углы равны, так что $XY = XZ$ как наклонные, образующие равные углы с плоскостью σ. Поэтому $XF = XZ$, и точка X лежит на параболе с фокусом F и директрисой l.

Если секущая плоскость π пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси, то в сечении получается эллипс.

На чертеже:

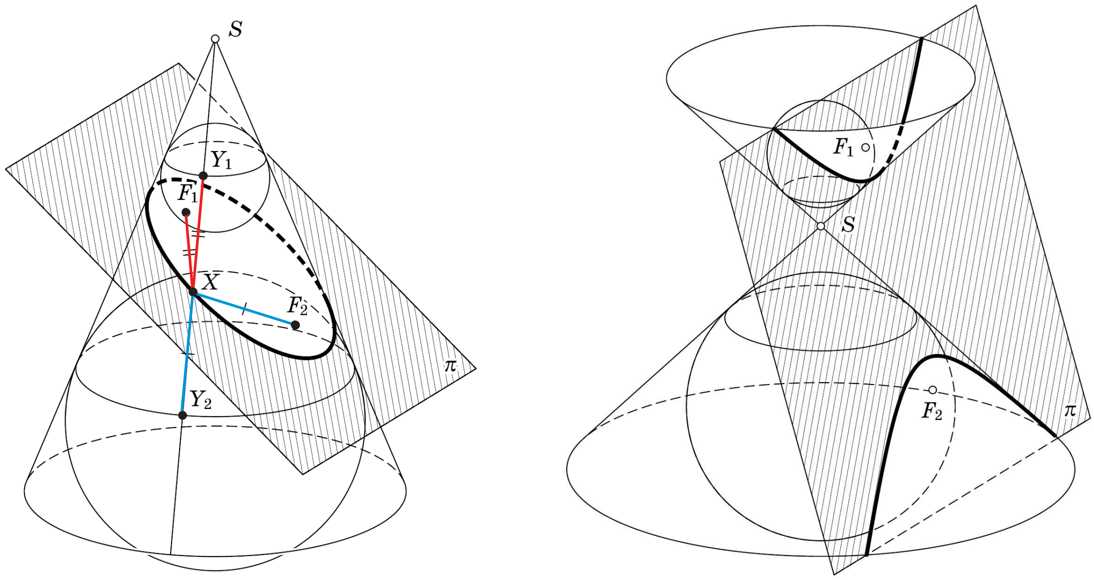
π — секущая плоскость, пересекающая все образующие конуса;

S — вершина конуса;

две сферы касаются конуса по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях σ_1 и σ_2 (на чертеже не изображены), и секущей плоскости π в точках F_1 и F_2;

X — произвольная точка сечения конуса плоскостью π;

Y_1, Y_2 — точки пересечения образующей SX с плоскостями σ_1 и σ_2.



Имеем $XF_1 = XY_1$, $XF_2 = XY_2$ (равенство касательных к сфере), так что $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2 = \mathrm{const}$, т.е. точка X лежит на эллипсе с фокусами F_1 и F_2.

Отметим, что прямые l_1 и l_2, получающиеся при пересечении плоскостей σ_1 и σ_2 плоскостью π, являются директрисами эллипса [докажите самостоятельно].

Если секущая плоскость π параллельна двум образующим конуса, то в сечении образуется гипербола.

9. Кривые второго порядка

Парабола, эллипс и гипербола задаются уравнениями второй степени. Общий вид многочлена второй степени от двух переменных

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Кривые второго порядка — это линии на плоскости, задаваемые уравнениями вида

$$f(x, y) = 0.$$

Парабола, эллипс и гипербола — примеры кривых второго порядка.

Теорема.

Уравнение кривой второго порядка может быть преобразовано посредством замены координат, состоящей из сдвига начала координат и поворота координатных осей, к одной из следующих девяти канонических форм.

I. Эллиптический тип

I.1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

I.2. Точка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

I.3. Пустое множество

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

II. Гиперболический тип

II.1. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

II.2. Пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

III. Параболический тип

III.1. Парабола

$$y^2 = 2px.$$

III.2. Пара параллельных прямых

$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0.$$

III.3. Пустое множество

$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0.$$

III.4. Пара совпадающих прямых

$$y^2 = 0.$$

10. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

Ответ. $\max AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $\min AB = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 2. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).

Ответ. $\sqrt{2}$.

Задача 3. Доказать, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная. Выразить эту величину через полуоси гиперболы.

Ответ. $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Задача 4. Доказать, что для данной гиперболы площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах, есть величина постоянная. Выразить эту величину через полуоси гиперболы.

Ответ. $ab/2$.

Задача 5. Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности. Выразить радиус этой окружности через длину действительной полуоси гиперболы.

Ответ. a.

Задача 6. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

Задача 7. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь. Выразить эту площадь через полуоси гиперболы.

Ответ. ab.

Задача 8. Доказать, что касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны.

Задача 9. Составить уравнение семейств эллипсов с общими директрисами $x = \pm d$ и общим центром в начале координат.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(d^2-a^2)/d^2} = 1,\ 0 < a < |d|$.

Задача 10. Составить уравнение семейства гипербол с общими фокусами $(\pm c, 0)$.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1,\ 0 < a < |c|$.

Задача 11. Составить уравнение семейства гипербол с общими асимптотами $y = \pm kx$.

Ответ. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{k^2a^2} = 1$.

Задача 12. Составить уравнение семейства парабол, имеющих общий фокус $(0,0)$ и симметричных относительно оси Ox.

Ответ. $y^2 = p^2 + 2px,\ p \neq 0$.

Задача 13. Составить уравнение семейства парабол, имеющих общую директрису $x = 0$ и симметричных относительно оси Ox.

Ответ. $y^2 = -p^2 + 2px,\ p \neq 0$.

Лекция 6
Поверхности второго порядка

Пространственным аналогом кривых второго порядка являются поверхности второго порядка, имеющие уравнение вида

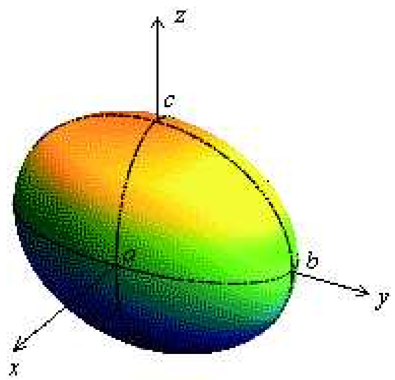
$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — многочлен второй степени от x, y, z. Опишем возможные типы поверхностей второго порядка.

1. Список поверхностей второго порядка

Эллиптический тип

1 Эллипсоид



В прямоугольной декартовой системе координат эллипсоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ является линия

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \end{cases}$$

т.е.

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, плоскость $z = h$ при $|h| > c$ не пересекает эллипсоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с эллипсоидом (это точка $(0, 0, c)$ при $h = c$ и точка $(0, 0, -c)$ при $h = -c$), а при $|h| < c$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, которые максимальны (и равны a и b соответственно) при $h = 0$ и монотонно уменьшаются до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до c.

Аналогично анализируются сечения эллипсоида плоскостями $x = h$ и $y = h$; все такие сечения представляют собой эллипсы.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, начало координат — его центром симметрии. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке $O(0, 0, 0)$, с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

2 Мнимый эллипсоид

Уравнение мнимого эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность не имеет ни одной вещественной точки.

3 Мнимый конус.

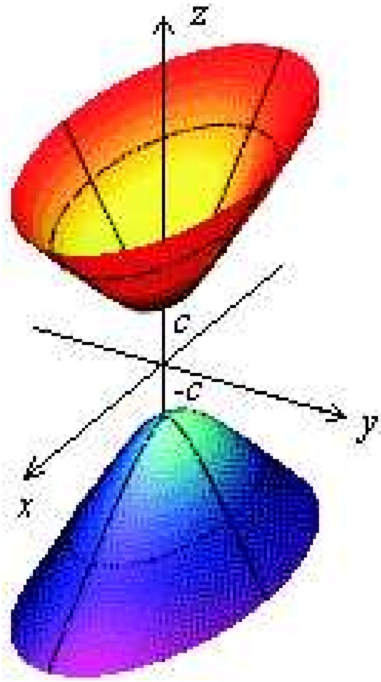
Уравнение мнимого конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность имеет единственную вещественную точку $O(0, 0, 0)$.

Гиперболический тип

4 Двуполостный гиперболоид



Уравнение двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

или

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперболоидом ($(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$) и при $|h| > c$ пересекает гиперболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от c до $+\infty$.

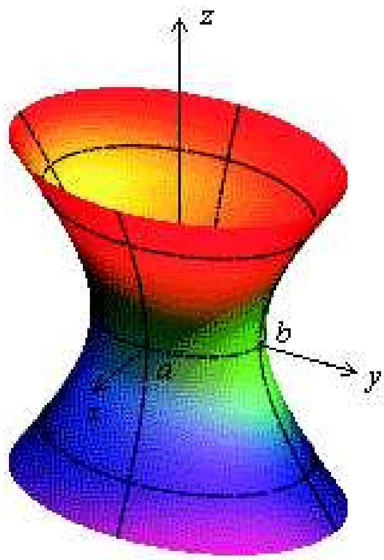
Каждая плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид по гиперболе

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно возрастают (от c и a соответственно) до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z \geqslant c$ и $z \leqslant -c$.

5 Однополостный гиперболоид



Уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Каждая плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают от a и b соответственно до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получающийся при $h = 0$, называется горловым эллипсом гиперболоида.

Плоскость $y = h$ при $|h| < b$ пересекает гиперболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно убывают от a и c соответственно до 0, когда $|h|$ возрастает от 0 до b. При $|h| = b$ сечением является пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

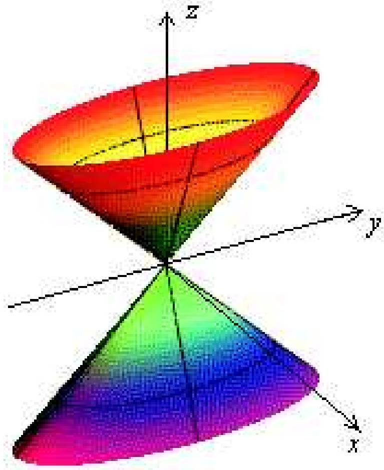
При $|h| > b$ сечение представляет собой гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от b до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии.

6 Конус



Уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса, начало координат — его центром симметрии.

Коническая поверхность — это поверхность, образованная прямыми (прямолинейными образующими), проходящими через одну точку, называемую вершиной конуса. Направляющая конической поверхности — это произвольная расположенная на ней линия, обладающая тем свойством, что любая прямолинейная образующая пересекает ее в одной и только одной точке.

Сечение конуса плоскостью $z = h$, $h \neq 0$, представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1,$$

полуоси которого пропорциональны $|h|$. Прямая, проходящая через центры этих эллипсов, называется осью конуса. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными оси, можем получить окружность.

Сечение конуса плоскостью $z = 0$ состоит из одной точки $O(0,0,0)$.

Сечение конуса плоскостью $y = h$, $h \neq 0$, является гиперболой

$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1,$$

полуоси которой пропорциональны $|h|$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$. Таким образом, в качестве направляющей конуса может быть выбрана гипербола.

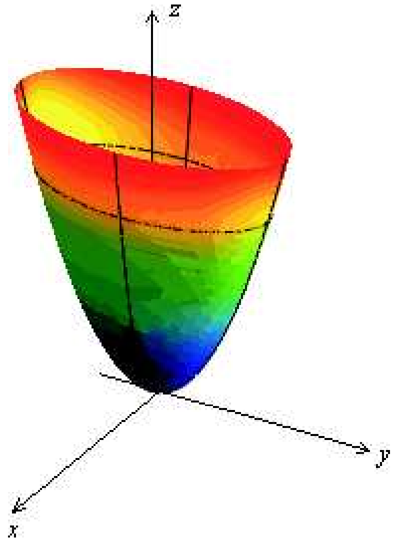
Сечение конуса плоскостью $y = 0$ представляет собой пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Парабола также может быть получена как плоское сечение конуса (см. задачу 2 для самостоятельной работы).

Параболический тип

7 Эллиптический параболоид



Уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид, при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $O(0, 0, 0)$, при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу

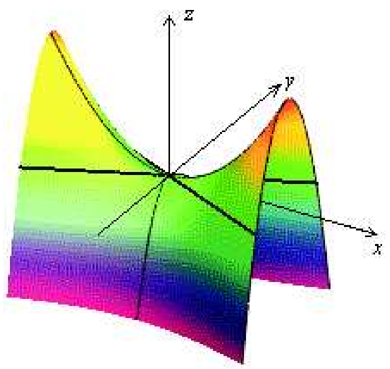
$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают вместе с h от 0 до $+\infty$.

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2, с вершинами в точках $(0, h, h^2/2b^2)$ и $(h, 0, h^2/2a^2)$ и ветвями, направленными вверх.

Координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида, других плоскостей симметрии и центра симметрии у него нет.

8 Гиперболический параболоид



Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{-2hb^2} - \frac{x^2}{-2ha^2} = 1;$$

действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oy, а мнимая — оси Ox. Плоскость $z = h$ при $h > 0$ пересекает параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1;$$

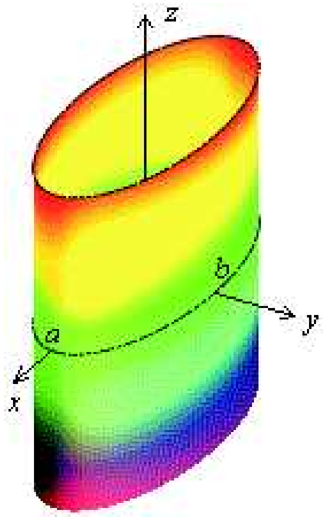
действительная ось этой гиперболы параллельна оси Ox, а мнимая — оси Oy. Плоскость $z = 0$ пересекает параболоид по паре прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2 и с вершинами в точках $\left(0, h, -\dfrac{h^2}{2b^2}\right)$ и $\left(h, 0, \dfrac{h^2}{2b^2}\right)$; ветви первой параболы направлены вверх, второй — вниз. Вершины парабол, высекаемых плоскостями $y = h$, лежат на параболе, высекаемой плоскостью $x = 0$, а вершины парабол, высекаемых плоскостями $x = h$, — на параболе, высекаемой плоскостью $y = 0$.

Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида; других плоскостей симметрии нет.

9 Эллиптический цилиндр



Уравнение эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является эллипс, образующие параллельны оси Oz.

10 Мнимый эллиптический цилиндр

Уравнение мнимого эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Эта поверхность не содержит ни одной вещественной точки.

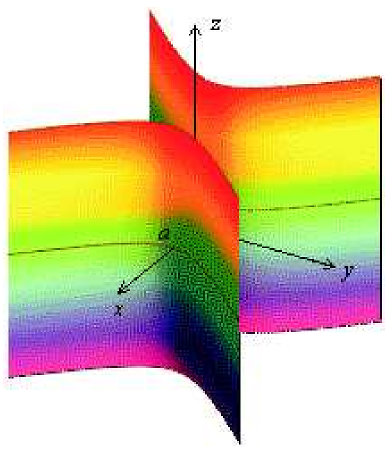
11 Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Вещественные точки этой поверхности заполняют прямую (ось Oz).

12 Гиперболический цилиндр



Уравнение гиперболического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является гипербола, образующие параллельны оси Oz.

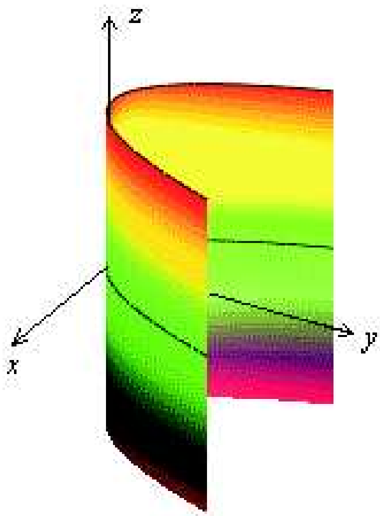
13 Пара пересекающихся плоскостей

Уравнение пары пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

14 Параболический цилиндр



Уравнение гиперболического цилиндра

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Направляющей является парабола, образующие параллельны оси Oz.

15 Пара параллельных плоскостей

Уравнение пары параллельных плоскостей

$$y^2 = a^2,$$

где $a > 0$.

16 Пара мнимых параллельных плоскостей

Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей

$$y^2 = -a^2,$$

где $a > 0$.

17 Пара совпадающих плоскостей

Уравнение пары совпадающих плоскостей

$$y^2 = 0.$$

2. Линейчатые поверхности

Поверхность называется l-кратно линейчатой поверхностью, если через каждую ее точку проходит ровно l различных прямых, называемых прямолинейными образующими.

Примеры.

1. Все цилиндры являются 1-линейчатыми поверхностями.

2. Конус является 1-линейчатой поверхностью, все прямолинейные образующие которой проходят через одну точку — вершину конуса.

Однополостный гиперболоид

Теорема.

Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка, лежащая на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{2}$$

Для краткости введем обозначения

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{c},$$
$$X_0 = \frac{x_0}{a}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{b}, \quad Z_0 = \frac{z_0}{c},$$
$$L = \frac{l}{a}, \quad M = \frac{m}{b}, \quad N = \frac{n}{c}.$$

Уравнение гиперболоида (1) в новых обозначениях

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1 \iff X^2 + Y^2 = 1 + Z^2, \tag{3}$$

а уравнение прямой (2) —

$$X = X_0 + Lt, \quad Y = Y_0 + Mt, \quad Z = Z_0 + Nt. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$(X_0 + Lt)^2 + (Y_0 + Mt)^2 - (Z_0 + Nt)^2 = 1 \iff$$
$$\iff \underbrace{(X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2)}_{=1} + 2t(X_0L + Y_0M - Z_0N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 1$$
$$\iff 2t(X_0L + Y_0M - Z_0N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 0.$$

Это уравнение выполняется тождественно (т. прямая (4) целиком лежит на гиперболоиде (3)) тогда и только тогда, когда

$$X_0L + Y_0M - Z_0N = 0, \quad L^2 + M^2 - N^2 = 0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой может быть выбран с точностью до произвольного ненулевого множителя, положим $n = c$, тогда $N = 1$, и получим

$$X_0L + Y_0M = Z_0, \quad L^2 + M^2 = 1.$$

Второе уравнение допускает параметризацию

$$L = \cos\varphi, \quad M = \sin\varphi,$$

после чего первое уравнение примет вид

$$X_0\cos\varphi+Y_0\sin\varphi=Z_0 \iff \sqrt{X_0^2+Y_0^2}\left(\underbrace{\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}}_{=\cos\theta}\cos\varphi+\underbrace{\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}}_{=\sin\theta}\sin\varphi\right)=Z_0 \iff$$

$$\iff \cos(\varphi-\theta)=\frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}=\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}};$$

последняя дробь строго меньше единицы по модулю, поэтому тригонометрическое уравнение имеет ровно 2 решения на $[0,2\pi)$:

$$\varphi-\theta=\pm\arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}} \iff \varphi=\theta\pm\arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}.$$

Пусть

$$\beta=\arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}\in[0,\pi] \quad\Rightarrow\quad \cos\beta=\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}},\quad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\cos(\theta\pm\beta)=\cos\theta\cos\beta\mp\sin\theta\sin\beta\\&=\frac{X}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}\mp\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}}=\frac{X_0Z_0\mp Y_0}{1+Z_0^2},\\ \sin\varphi&=\sin(\theta\pm\beta)=\sin\theta\cos\beta\pm\cos\theta\sin\beta\\&=\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}\pm\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}}=\frac{Y_0Z_0\pm X_0}{1+Z_0^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, имеем два решения

$$L_\varepsilon=\cos\varphi=\frac{X_0Z_0-\varepsilon Y_0}{1+Z_0^2},\quad M_\varepsilon=\sin\varphi=\frac{Y_0Z_0+\varepsilon X_0}{1+Z_0^2},\qquad \varepsilon=\pm1.$$

Каждое из возможных значений ε определяет направляющий вектор.

Итак, через точку (X_0,Y_0,Z_0) гиперболоида (3) проходят ровно две прямые, целиком лежащие на гиперболоиде:

$$X=X_0+\frac{X_0Z_0-\varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}t,\quad Y=Y_0+\frac{Y_0Z_0+\varepsilon X_0}{1+Z_0^2}t,\quad Z=Z_0+t,\qquad \varepsilon=\pm1.$$

Эти прямые пересекаются с плоскостью $z=0$ ($Z=0$) в точках (X_1,Y_1,Z_1), (X_{-1},Y_{-1},Z_{-1}), отвечающих значению параметра $t_0=-Z_0$:

$$\begin{aligned}X_\varepsilon&=X_0-\frac{X_0Z_0-\varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}Z_0=\frac{X_0+\varepsilon Y_0Z_0}{1+Z_0^2}=\varepsilon\frac{Y_0Z_0+\varepsilon X_0}{1+Z_0^2}=\varepsilon M_\varepsilon,\\ Y_\varepsilon&=Y_0-\frac{Y_0Z_0+\varepsilon X_0}{1+Z_0^2}Z_0=\frac{Y_0-\varepsilon X_0Z_0}{1+Z_0^2}=-\varepsilon\frac{X_0Z_0-\varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}=-\varepsilon L_\varepsilon,\\ Z_\varepsilon&=0,\qquad \varepsilon=\pm1.\end{aligned}$$

Ясно, что эти две точки лежат на горловом эллипсе гиперболоида. Теперь можно записать уравнения прямолинейных образующих в виде

$$X = X_\varepsilon - \varepsilon Y_\varepsilon t, \quad Y = Y_\varepsilon + \varepsilon X_\varepsilon t, \quad Z = t.$$

Обратно, пусть (X_*, Y_*) — точка горлового эллипса однополостного гиперболоида (3), т.е.

$$X_*^2 + Y_*^2 = 1.$$

Рассмотрим две прямых

$$X = X_* - \varepsilon Y_* t, \quad Y = Y_* + \varepsilon X_* t, \quad Z = t, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Поскольку

$$\begin{gathered} X^2 + Y^2 - Z^2 = (X_* - \varepsilon Y_* t)^2 + (Y_* + \varepsilon X_* t)^2 - t^2 = \\ = \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2)}_{=1} + 2t(X_\varepsilon Y_\varepsilon - X_\varepsilon Y_\varepsilon) + t^2 \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2 - 1)}_{=0} = 1, \end{gathered}$$

обе эти прямые целиком лежат на гиперболоиде.

Итак, через любую точку гиперболоида проходит ровно две прямолинейные образующие, одна из которых отвечает значению $\varepsilon = 1$, а другая — значению $\varepsilon = -1$. Все прямолинейные образующие разбиваются на два семейства; к одному семейству относятся образующие, отвечающие $\varepsilon = 1$, к другому — отвечающие $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим две образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) горлового эллипса:

$$\begin{cases} X = X_1 - \varepsilon_1 Y_1 t, \\ Y = Y_1 + \varepsilon_1 X_1 t, \\ Z = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = X_2 - \varepsilon_2 Y_2 t, \\ Y = Y_2 + \varepsilon_2 X_2 t, \\ Z = t. \end{cases}$$

Выясним вопрос о взаимном расположении этих прямых. Рассмотрим определитель

$$\begin{gathered} D = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 & 1 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 & 0 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix}. \end{gathered}$$

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$; тогда $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \varepsilon \varepsilon_1$ и далее

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon \varepsilon_1 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon \varepsilon_1 X_2 \end{vmatrix} = \\ = \varepsilon_1 \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon Y_2 - Y_1 & X_1 - \varepsilon X_2 \end{vmatrix} = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)(\varepsilon X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(\varepsilon Y_2 - Y_1) \Big]. \end{gathered}$$

Если $\varepsilon = 1$, т.е. образующие принадлежат к одному семейству, то

$$D = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)(X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(Y_2 - Y_1) \Big] = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \Big] \neq 0,$$

т.е. рассматриваемые две прямые скрещиваются. Если $\varepsilon = -1$, т.е. образующие принадлежат к разным семействам, то

$$D = -\varepsilon_1\Big[(X_2 - X_1)(-X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(-Y_2 - Y_1)\Big] = -\varepsilon_1\Big[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\Big] =$$

$$= \varepsilon_1[\underline{X_2^2} - X_1^2 + \underline{Y_2^2} - Y_1^2] = 0,$$

т.е. рассматриваемые две прямые лежат в одной плоскости.

Рассмотрим три попарно различные одноименные прямолинейные образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) горлового эллипса. Рассмотрим определитель, составленный из координат направляющих векторов указанных прямых:

$$\begin{vmatrix} -Y_1 & X_1 & 1 \\ -Y_2 & X_2 & 1 \\ -Y_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) не лежат на одной прямой. Таким образом, рассматриваемые три прямолинейные образующие не компланарны.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида обладают следующими свойствами:

1. *Через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*

2. *Каждая образующая пересекает горловой эллипс гиперболоида.*

3. *Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.*

4. *Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, лежат в одной плоскости.*

При решении задач более удобен иной метод нахождения прямолинейных образующих. Запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (α, β) для первой системы и (γ, δ) для второй. Определители этих систем равны нулю; например, для первой системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} & -\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) - \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) = 0.$$

Таким образом, каждая из систем обладает нетривиальным решением; обозначим эти решения через (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) соответственно. Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \delta_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \gamma_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (x, y, z). Точка (x_0, y_0, z_0) является решением каждой из систем, и при этом каждая из систем определяет прямую, проходящую через указанную точку. Поскольку при перемножении уравнений каждой из систем получается уравнение гиперболоида, любое решение (x, y, z) каждой из систем представляет точку, лежащую на гиперболоиде. Таким образом, обе прямых, представляемых данными системами, целиком лежат на гиперболоиде.

Гиперболический параболоид

Теорема.

Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{5}$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{6}$$

Для краткости введем обозначения

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = z,$$

$$X_0 = \frac{x_0}{a}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{b}, \quad Z_0 = z_0,$$

$$L = \frac{l}{a}, \quad M = \frac{m}{b}, \quad N = n.$$

Уравнения параболоида (7) и прямой (6) в новых обозначениях имеют вид

$$X^2 - Y^2 = 2Z, \qquad \begin{cases} X = X_0 + Lt, \\ Y = Y_0 + Mt, \\ Z = Z_0 + Nt. \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в уравнение параболоида,получим

$$(X_0 + Lt)^2 - (Y_0 + Mt)^2 = 2(Z_0 + Nt) \iff$$

$$\iff \underbrace{(X_0^2 - Y_0^2)}_{=2Z_0} + 2t(X_0 L - Y_0 M) + t^2(L^2 - M^2) = 2Z_0 + 2Nt \iff$$

$$\iff 2t(X_0 L - Y_0 M) + t^2(L^2 - M^2) = 2Nt.$$

Это уравнение выполняется тождественно, т.е. прямая целиком лежит на параболоиде, тогда и только тогда, когда

$$X_0 L - Y_0 M = N, \quad L^2 - M^2 = 0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой определен лишь с точностью до ненулевого множителя, положим $L = 1$; тогда $M = \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, $N = X_0 - \varepsilon Y_0$. Итак, через точку (X_0, Y_0, Z_0) параболоида проходят ровно две прямых

$$\begin{cases} X = X_0 + t, \\ Y = Y_0 + \varepsilon t, \\ Z = Z_0 + (X_0 - \varepsilon Y_0)t, \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Выясним взаимное расположение двух одноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ 1 & 1 & X_1 - Y_1 \\ 1 & 1 & X_2 - Y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= X_2^2 - 2Y_2X_2 - 2X_2X_1 + 2Y_1X_2 + 2Y_2X_1 + X_1^2 - 2Y_1X_1 + Y_2^2 - 2Y_1Y_2 + Y_1^2 =$$
$$= (X_2 - Y_2 - X_1 + Y_1)^2 \neq 0;$$

таким образом, эти образующие скрещиваются.

Выясним взаимное расположение двух разноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ 1 & 1 & X_1 - Y_1 \\ 1 & -1 & X_2 + Y_2 \end{vmatrix} = X_2^2 - Y_2^2 - 2Z_2 - \left(X_1^2 - Y_1^2 - 2Z_1\right) = 0;$$

таким образом, эти образующие лежат в одной плоскости. Поскольку при этом направляющие векторы $(1, 1, X_1 - Y_1)$ и $(1, -1, X_2 + Y_2)$ этих образующих неколлинеарны, рассматриваемые образующие пересекаются.

Наконец, направляющие векторы всех образующих одного семейства имеют вид $(1, \varepsilon, X_0 - \varepsilon Y_0)$ параллельны плоскости $X - \varepsilon Y = 0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают следующими свойствами:

1. *Через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*

2. *Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.*

3. *Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, пересекаются.*

4. *Все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.*

Имеется другой метод нахождения уравнений прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Запишем уравнение параболоида (7) в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z. \tag{7}$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=\beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=2\alpha z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=\delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=2\gamma z_0. \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю (проверьте!). поэтому каждая из систем нетривиально разрешима; пусть (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) — их решения. Рассмотрим теперь системы

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\beta_0, \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\alpha z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=\delta_0, \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2\gamma_0 z; \end{cases}$$

каждая из них определяет прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) параболоида. Перемножая уравнения каждой из систем, обнаруживаем, что любое решение системы является также и решением уравнения (7), т.е. прямая целиком лежит на параболоиде.

3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

(а) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(б) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$;

(в) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$;

(г) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$;

(д) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$;

(е) $\lambda x^2 + y^2 = z$;

(ж) $\lambda(x^2 + y^2) = z$; (з) $x^2 + y^2 = \lambda$; (и) $x^2 - y^2 = \lambda$;

Ответ. (а) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид;

(б) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей (прямая), при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(в) при $\lambda > 0$ однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(г) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(д) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара совпадающих плоскостей, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид;

(е) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид;

(ж) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость (уравнение первой степени!);

(з) при $\lambda > 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей (прямая), при $\lambda < 0$ мнимый эллиптический цилиндр (пустое множество);

(и) при $\lambda \neq 0$ гиперболический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара пересекающихся плоскостей.

Задача 2. Докажите, что сечение конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ плоскостью $az - cx = h$, $h \neq 0$, является параболой.

Задача 3. Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 4. Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 5. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 6. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ спроектированы на плоскость Oxz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 7. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 8. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $3x^2+4y^2+5z^2 = 36$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

Ответ. $x^2 - z^2 = 0$ ($|x| \leqslant 3/\sqrt{2}$); $y^2 + 2z^2 = 9$; $2x^2 + y^2 = 9$. Сечение представляет собой пару окружностей, лежащих в плоскостях $x = \pm z$.

Задача 9. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2+2y^2+3z^2 = 4$ и $3x^2 + 5y^2 + 6^2 = 10$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

Ответ. $x^2 + y^2 = 2$; $y^2 + 3z^2 = 2$; $3z^2 - x^2 = 0$ ($|x| \leqslant \sqrt{2}$). Сечение представляет собой пару эллипсов, лежащих в плоскостях $x = \pm\sqrt{3}z$.

Задача 10. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2+y^2-z^2 = 1$ и $x^2 - y^2 = 2z$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия? Найдите ее параметрические уравнения.

Ответ. $x \pm y \pm \sqrt{2} = 0$; $z \pm x\sqrt{2} + 1 = 0$; $z \pm y\sqrt{2} - 1 = 0$. Сечение состоит из четырех прямых $x = t$, $y = \pm(t + \sqrt{2})$, $z = -1 - t\sqrt{2}$ и $x = t$, $y = \pm(t - \sqrt{2})$, $z = -1 + t\sqrt{2}$.

Задача 11. Изобразите поверхность $x^2 - y^2 = 1$ и найдите уравнение семейства ее прямолинейных образующих.

Ответ. $\alpha(x - y) = \beta$, $\beta(x + y) = \alpha$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Задача 12. Изобразите поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и найдите уравнение семейства ее прямолинейных образующих.

Ответ. $\alpha(z - y) = \beta x$, $\beta(z + y) = \alpha x$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Задача 13. Найдите прямолинейные образующие поверхности $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающиеся в точке $M(2, 0, 1)$.

Ответ. $x = t$, $y = 2t - 4$, $z = t - 1$; $x = t$, $y = 4 - 2t$, $z = t - 1$.

Задача 14. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ по паре прямых.

Ответ. $3x + y - 2z - 2 = 0$.

Задача 15. Найдите уравнение плоскости, пересекающей однополостный гиперболоид $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ по паре прямых, проходящих через точку $M(6, -3, 2)$.

Ответ. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Задача 16. Даны гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ и плоскость $x + y + z = 1$. Найдите уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых. Найдите уравнения прямых и угол между ними.

Ответ. Плоскость $x+y+z=0$; прямые $x=t-2$, $y=t$, $z=2-2t$ и $x=t$, $y=-t$, $z=0$. Угол $\pi/2$.

Задача 17. Две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида вращения $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $z = h$. Найдите угол между ними.

Ответ. $\arccos\dfrac{h^2}{h^2+1}$.

Задача 18. Найдите множество точек поверхности, в которых пересекаются ее взаимно ортогональные прямолинейные образующие: (а) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; (б) $x^2 - y^2 = 2z$; (в) $x^2 - 4y^2 = 2z$.

Ответ. (а) окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$; (б) пара прямых $y \pm x = 0$, $z=0$; (в) гипербола $4x^2 - 16y^2 + 3 = 0$, $z = -3/8$.

Лекция 7
Комплексные числа
Многочлены

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает конечные множества и связанные с ними операции.

Пусть N — конечное множество, состоящее из n элементов; число n называется мощностью множества N, $\operatorname{card} N = n$.

$x \in N$ — x является элементом множества N.

$x \notin N$ — x не является элементом множества N.

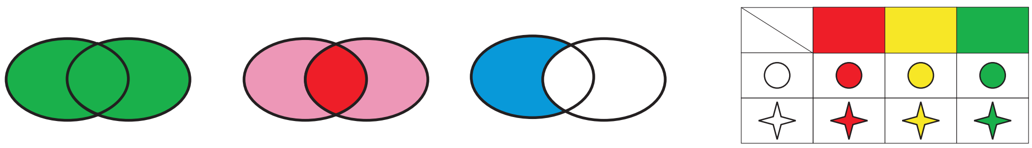
$N \subset M$ — множество N является подмножеством множества M, т.е.

$$\forall x \in N \Longrightarrow x \in M.$$

$\varnothing$ — пустое множество; $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Основные операции над множествами:

(1) объединение $N \cup M = \{x : x \in N \text{ или } x \in M\}$,
(2) пересечение $N \cap M = \{x : x \in N \text{ и } x \in M\}$,
(3) разность $N \setminus M = \{x : x \in N \text{ и } x \notin M\}$,
(4) декартово произведение $N \times M = \{(x, y) : x \in N,\ x \in M\}$.



1.1. **Принцип произведения.**

$$\operatorname{card}(N \times M) = (\operatorname{card} N) \cdot (\operatorname{card} M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр:

$$\underbrace{\quad A \quad}_{9 \text{ способов}} \quad \underbrace{\quad B \quad}_{9 \text{ способов}} \quad \underbrace{\quad C \quad}_{8 \text{ способов}}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

1.2. **Принцип суммы.** Если N и M — непересекающиеся конечные множества, $N \cap M = \varnothing$, то

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M.$$

В случае непустого пересечения

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M - \operatorname{card}(N \cap M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, содержащих хотя бы две одинаковые цифры.

Всего имеется 900 трехзначных чисел. Каждое из них либо имеет одинаковые цифры, либо нет. Поэтому чисел, содержащих одинаковые цифры, имеется

$$900 - 648 = 252.$$

1.3. **Упорядоченная выборка без повторений: размещения.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов с учетом порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Количество различных выборок равно

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частности, количество различных перестановок множества N

$$P_n = n!.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать старосту и профорга?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

1.4. **Неупорядоченная выборка без повторений: сочетания.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов без учета порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Обозначим количество всех таких выборок C_n^k.

Выборка объема k может быть упорядочена $k!$ способами. Согласно принципу произведения

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами; другое обозначение:

$$\binom{n}{k} = C_n^k.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать двух дежурных?

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

1.5. **Свойства биномиальных коэффициентов.**

$$1. \qquad C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

$$2. \qquad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ сомножителей}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ сомножителей}}}.$$

$$3. \qquad C_n^{n-k} = C_n^k.$$

◀ $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$. ▶

$$4. \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\begin{aligned} ◀ \quad C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(n-k)+n!(k+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \quad ▶ \end{aligned}$$

1.6. **Треугольник Паскаля.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|ccccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
n=2 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
n=3 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
n=4 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
n=5 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
n=6 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
n=7 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
n=8 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

1.7. **Бином Ньютона.**

Теорема.

$$
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =
$$
$$
= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \qquad (1)
$$

◄ Доказательство проведем методом индукции.

База индукции:

$$
(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.
$$

Предположение индукции состоит в том, что формула (1) справедлива при некотором значении n. Наша задача — пользуясь формулой (1), вывести ее справедливость для показателя степени $n+1$.

$$
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =
$$

$$
= a\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =
$$

$$
= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1} =
$$

$$
= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k}_{\substack{k=p+1,\\ k=1\ldots n,\\ p=0\ldots n-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}}_{k=p} + b^{n+1} =
$$

$$
= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1}\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + b^{n+1} =
$$

$$
= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{\left(C_n^{p+1} + C_n^p\right)}_{=C_{n+1}^{p+1}}\ a^{n-p}\ b^{p+1} + b^{n+1} =
$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p+1}\ a^{(n+1)-(p+1)}\ b^{p+1}}_{\substack{k=p+1,\\ p=0...n-1,\\ k=1...n}} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k}\ a^{(n+1)-k}\ b^{k} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\ a^{(n+1)-k}\ b^{k}. \qquad \blacktriangleright$$

1.8. **Дальнейшие свойства биномиальных коэффициентов.** Взяв в формуле (1) $a = b = 1$, получим

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ 1^{n-k}\ 1^k,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Аналогично, взяв $a = 1$, $b = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

2. Комплексные числа

2.1. **Числовое поле.** Числовое поле — множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.

Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Нетривиальный пример: числа вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, образуют числовое поле:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{\left(c + d\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2},$$

причем знаменатель $\neq 0$, а все коэффициенты $\in \mathbb{Q}$.

2.2. **Многочлены.** Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле.

Одночлен (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — выражение вида ax^k, где $a \in \mathbb{K}$ — коэффициент одночлена, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — степень одночлена; $\deg(ax^k) = k$.

Многочлен степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — сумма одночленов:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$.

Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Можно рассматривать одночлены и многочлены от нескольких переменных.

Значение многочлена $f(x)$ можно вычислять как при $x \in \mathbb{K}$, так и при $x \notin \mathbb{K}$.

Корень многочлена $f(x)$ — значение x, при котором $f(x) = 0$.

Алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ — это такое поле, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $x \in \mathbb{K}$.

Поле $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым:

$$(x^2 - 2) \in \mathbb{Q}[x], \qquad x^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Решение проблемы — введение иррациональных чисел.

Поле $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым: многочлен $x^2 + 1$ корней не имеет.

Формальное решение проблемы — ввести «новое число» i, обладающее свойством $\boxed{i^2 = -1}$; тогда

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm i.$$

Пример.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Имеем:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 = (-1) \cdot 4, \quad \sqrt{D} = 2i, \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Теорема Виета также справедлива:

$$x_1 + x_2 = (-2 - i) + (-2 + i) = -4,$$
$$x_1 x_2 = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 - i^2 = 5.$$

Отметим, что мы рассматривали уравнение с вещественными коэффициентами.

Числа вида $a + bi$ называются комплексными числами.

2.3. **Определение комплексных чисел.**

Комплексное число z — упорядоченная пара вещественных чисел (x, y):

$$z = (x, y).$$

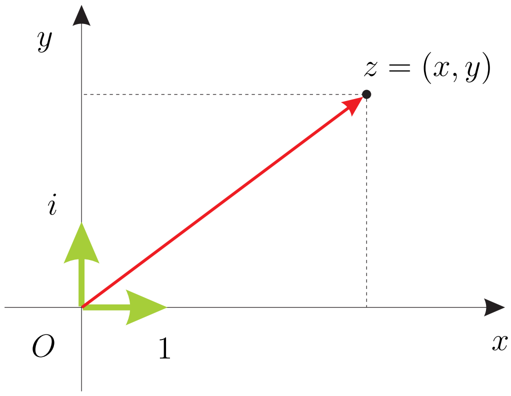
$x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z.

$y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z.

Равенство комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{aligned} \right\}$$

Комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить точкой координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации плоскостью комплексных чисел, ось Ox — вещественной осью, ось Oy — мнимой осью.



Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$:

(a) сложение:

$$z := z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2);$$

(b) умножение:

$$z := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Свойства арифметических операций:

1.	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	(коммутативность сложения);
2.	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	(ассоциативность сложения);
3.	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	(коммутативность умножения);
4.	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	(ассоциативность умножения);
5.	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	(дистрибутивность).

Для чисел вида $z = (x, 0)$ имеем:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2,\ 0),$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0,\ x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 x_2, 0).$$

Такие комплексные числа при арифметических операциях ведут себя как вещественные числа. Поэтому можно отождествить комплексное число $z = (x, 0)$ с вещественным числом x и считать множество вещественных чисел подмножеством множества комплексных чисел.

Рассмотрим мнимые числа, $z = (0, y)$. Имеем:

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2).$$

Произведение вещественного и мнимого числа:

$$x \cdot (0, y) = (x, 0) \cdot (0, y) = (x \cdot 0 - 0 \cdot y,\ x \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, xy);$$

поэтому можно считать, что мнимое число есть произведение вещественного числа и мнимой единицы:

$$(0, y) = y \cdot (0, 1).$$

Произведение двух мнимых чисел:

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (0 \cdot 0 - y_1 \cdot y_2,\ 0 \cdot y_2 + y_1 \cdot 0) = (-y_1 y_2, 0).$$

Отсюда вытекает, что квадрат мнимой единицы представляет собой вещественное число, равное -1:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Мнимую единицу обозначим символом i:

$$i=(0,1).$$

Тогда для любого $z=(x,y)$ имеем

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot(0,1)=x+iy.$$

Это — алгебраическая форма записи комплексного числа.

2.4. **Сопряжение.** Пусть $z=x+iy$.

Сопряженное к z число: $\bar z=x-iy$.

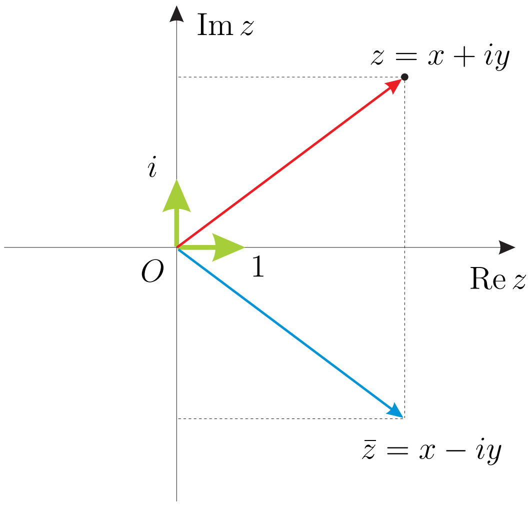
Свойства операции сопряжения:

1. $\bar{\bar z}=z$;
2. $\overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2$;
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar z_1\cdot\bar z_2$;
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar z_1}{\bar z_2}$.

Легко получить следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar z}{2},\quad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar z}{2i}.$$

Число $\bar z$, сопряженное к z, геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси.



2.5. **Вычитание и деление.** Пусть $z_1=(x_1,y_1)=x_1+iy_1$ и $z_2=(x_2,y_2)=x_2+iy_2$.

Разность $z=z_1-z_2$ определяется как решение уравнения $z+z_2=z_1$.

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),$$

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Частное $z=z_1/z_2$ определяется решение уравнения $z\cdot z_2=z_1$.

Для вычисления частного заметим, что

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\in\mathbb{R}.$$

Теперь запишем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, деление возможно на любое ненулевое комплексное число.

Пример.

$$(3 + 4i)(7 - 2i) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2i + 4i \cdot 7 - 4i \cdot 2i = 29 + 22i,$$

$$\frac{29 + 22i}{7 - 2i} = \frac{(29 + 22i)(7 + 2i)}{(7 - 2i)(7 + 2i)} =$$

$$= \frac{29 \cdot 7 + 29 \cdot 2i + 22i \cdot 7 + 22i \cdot 2i}{7^2 - (2i)^2} = \frac{159 + 212i}{53} = 3 + 4i.$$

В множестве комплексных чисел выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число. Таким образом, множество комплексных чисел является полем, которое обозначается $\mathbb{C}$.

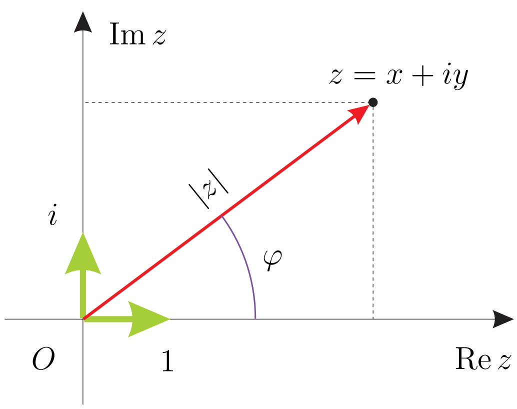
3. Формула Эйлера

3.1. **Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.** Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и полярными координатами (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Число r называется модулем числа z, φ — аргументом:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$



Аргумент определен неоднозначно (с точностью до слагаемого $2\pi n$), поэтому различают

(1) главное значение аргумента $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$;

(2) (многозначный) аргумент $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; используются также записи

$$\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это — тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Перемножим два числа:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Big) =$$
$$= r_1r\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big).$$

Таким образом,

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

3.2. **Формула Эйлера.** Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Она обладает свойством

$$f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2).$$

Эта функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

это — формула Эйлера.

Средствами анализа можно доказать, что функция $f(\varphi)$ действительно является показательной функцией.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = re^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из формулы Эйлера получаем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

складывая/вычитая эти равенства, находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

3.3. **Возведение в степень.** Тригонометрическая и показательная формы записи полезны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула доказана при $n\in\mathbb{N}$, но легко убедиться, что она справедлива и при $n\in\mathbb{Z}$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

получаем

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^{-n} = \left(\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right)^n = r^{-n}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n =$$
$$= r^{-n}(\cos n\varphi - \sin n\varphi) = r^{-n}\big(\cos(-n\varphi) + \sin(-n\varphi)\big).$$

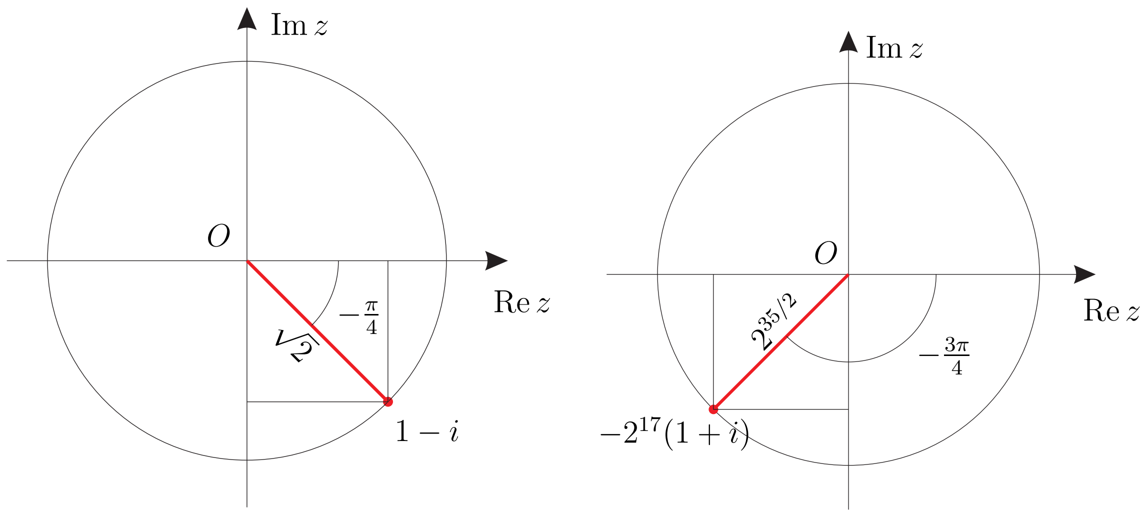
Те же выкладки в показательной форме намного короче:

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}} = e^{-i\varphi}, \qquad \left(re^{i\varphi}\right)^{-n} = r^{-n}\left(e^{-i\varphi}\right)^n = r^{-n}e^{-in\varphi}.$$

Пример.
Вычислим $(1-i)^{35}$.
Представим число $1-i$ в тригонометрической (показательной) форме:

$$\mathrm{Re}(1-i) = 1, \quad \mathrm{Im}(1-i) = -1, \quad |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

здесь мы выбрали диапазон значений $\arg z$ в виде $(-\pi, \pi]$.



Имеем:

$$(1-i)^{35} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{35}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\left(8+\frac{3}{4}\right)} =$$
$$= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{3}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{17}(1+i).$$

3.4. **Формула Муавра.** При $r = 1$ получаем формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула Муавра полезна при тригонометрических преобразованиях.
Пример.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$
$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$
$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Пример.
Преобразуем в произведения следующие суммы:

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt,$$
$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

Запишем

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} \cos kt + i\sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sum_{k=0}^{n} (\cos kt + i\sin kt) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} =$$
$$= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)/2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)/2i} = e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

В полученных выражениях отделим вещественную и мнимую части:

$$C = \mathrm{Re}\; e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}, \qquad S = \mathrm{Im}\; e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Пример.
Выразим $\cos^5 t$ через кратные углы.

$$\cos^5 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{5it} + 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} + 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} + e^{-5it}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} + 5\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + 10\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t.$$

3.5. **Извлечение корней.** Число w называется корнем n-й степени из числа z, если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

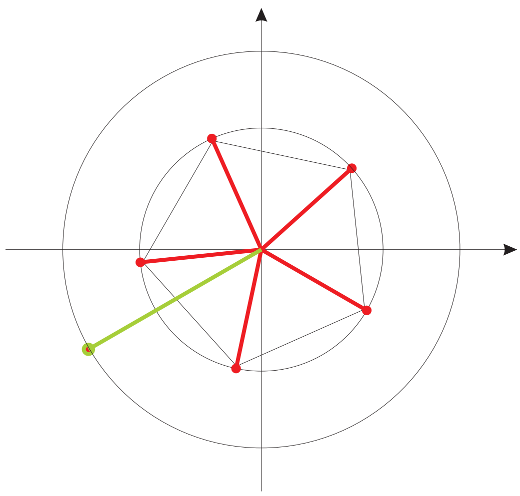
$$w = Re^{i\Phi}, \qquad z = re^{i\varphi}.$$

Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ.

$$\left(Re^{i\Phi}\right)^n = re^{i\varphi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

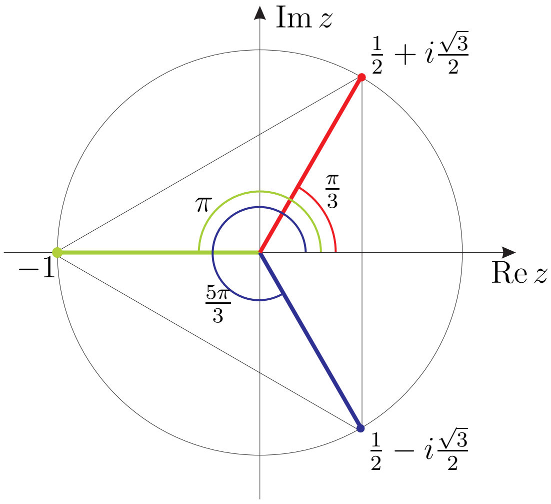
Таким образом, получается не один, а множество корней, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$.



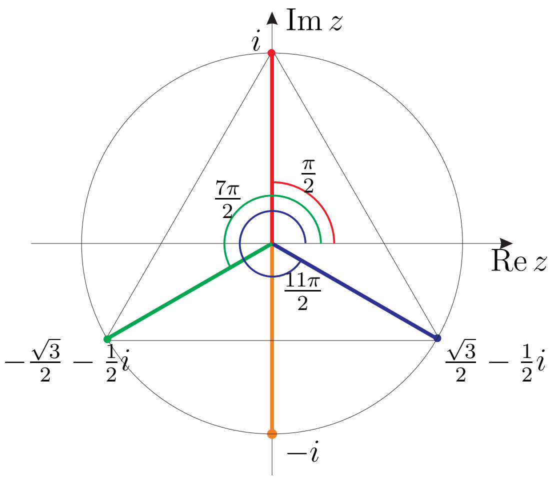
Пример.
$\sqrt[3]{-1}$.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}} = \begin{cases} e^{i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k = 0, \\ e^{i\pi} & = -1, & k = 1, \\ e^{5i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k = 2. \end{cases}$$



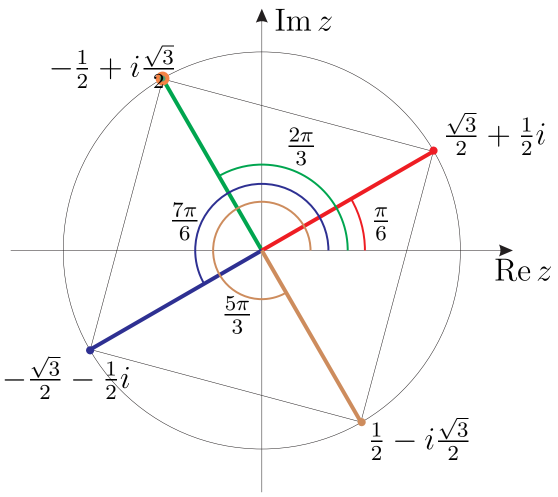
Пример.
$\sqrt[3]{-i}$.

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{3i\pi/2}} = e^{i\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}} = e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{6}} = \begin{cases} e^{i\pi/2} & = i, & k=0, \\ e^{7i\pi/6} & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, & k=1, \\ e^{11i\pi/6} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, & k=2. \end{cases}$$



Пример.
$\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{e^{2i\pi/3}}$.

$$\sqrt[4]{e^{2i\pi/3}} = e^{i\frac{2\pi/3+2\pi k}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)} = \begin{cases} e^{i\pi/6} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i, & k=0, \\ e^{2i\pi/3} & = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k=1, \\ e^{7i\pi/6} & = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}i, & k=2, \\ e^{5i\pi/3} & = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\sqrt{3}, & k=3. \end{cases}$$



3.6. **Гиперболические функции.** Ранее мы получили соотношения

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Определим гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} x = \cos x,$$
$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Все соотношения для гиперболических функций могут быть получены из соответствующих соотношений для тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i} \sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \operatorname{ch}^2 x - (i \sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{1}{i}(\sin ix + \sin iy) = \frac{1}{i} \cdot 2 \sin \frac{i(x+y)}{2} \cos \frac{i(x-y)}{2} =$$
$$= \frac{2}{i} \cdot i \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

4. Многочлены

4.1. **Деление многочленов.**

$$Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad A(x) = B(x)Q(x).$$

Будем обозначать степень многочлена нижним индексом: запись $A_n(x)$ означает, что $A(x)$ — многочлен степени n. Тогда

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x).$$

Деление многочленов осуществляется алгоритмом «деления уголком».

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 13x + 3 & x^2 + 3x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^5 + 6x^4 - 2x^3} & 2x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-2x^4 - 2x^3 + 11x^2 \\
\underline{-2x^4 - 6x^3 + 2x^2} \\
4x^3 + 9x^2 - 13x \\
\underline{4x^3 + 12x^2 - 4x} \\
-3x^2 - 9x + 3 \\
\underline{-3x^2 - 9x + 3} \\
0
\end{array}
$$

4.2. **Деление с остатком.** Деление многочленов нацело выполнимо не всегда, однако всегда возможно «деление с остатком».

Пусть требуется разделить многочлен $A_n(x)$ на многочлен $B_m(x)$. Формула деления с остатком имеет вид

$$A_n(x) = \underbrace{B_m(x)}_{\text{делитель}} \cdot \underbrace{Q_{n-m}(x)}_{\text{частное}} + \underbrace{R_k(x)}_{\text{остаток}}, \quad 0 \leqslant k < m.$$

Отметим, что степень остатка строго меньше степени делителя.

Если делить многочлен $A_n(x)$ на многочлен первой степени $B_1(x) = x - c$, то остаток будет многочленом нулевой степени, т.е. числом:

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Теорема.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $A_n(x)$ на $x - c$ равен $A_n(c)$.

◀ По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Подставляя сюда $x = c$, получим

$$A_n(c) = \underbrace{(c - c)B_{n-1}(c)}_{=0} + R \quad \Longleftrightarrow \quad R = A_n(c). \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Многочлен $A_n(x)$ делится на $x - c$ без остатка тогда и только тогда, когда c — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$.

◀ 1. Пусть $A_n(x)$ делится без остатка на $x - c$, т.е.

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Подставляя сюда $x = c$, получаем $A_n(c) = 0$.

2. Пусть $A_n(c) = 0$. Разделим $A_n(x)$ на $x - c$. По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R, \quad \text{где} \quad R = A_n(c) = 0. \qquad \blacktriangleright$$

4.3. **Кратные корни многочлена.** Если $x = c$ — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$, то многочлен $A_n(x)$ может быть записан в виде

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Если число c не является корнем многочлена $B_{n-1}(x)$, то говорят, что $x = c$ — простой корень многочлена $A_n(x)$.

В противном случае можно записать

$$A_n(x) = (x-c)^p B_{n-p}(x),$$

где многочлен $B_{n-p}(x)$ не имеет число c своим корнем. В этом случае говорят, что число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$.

Теорема.

Если число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$, то оно является корнем кратности $p-1$ производной $A'_n(x)$.

◀ Согласно условию имеем

$$A_n(x) = (x-c)^p B_{n-p}(x), \quad \text{где} \quad B_{n-p}(c) \neq 0.$$

Продифференцируем многочлен $A_n(x)$:

$$A'_n(x) = p(x-c)^{p-1} B_{n-p}(x) + (x-c)^p B'_{n-p}(x) =$$

$$= (x-c)^{p-1}\Big[pB_{n-p}(x) + (x-c)B'_{n-p}(x)\Big] = (x-c)^{p-1}\tilde{B}_{n-p}(x).$$

Очевидно, $A'_n(c) = 0$, но при этом

$$\tilde{B}_{n-p}(c) = p\underbrace{B_{n-p}(c)}_{\neq 0} + (c-c)B'_{n-p}(c) \neq 0. \qquad ▶$$

4.4. **Основная теорема алгебры.**

Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Эквивалентная формулировка: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Легко доказать, что каждый многочлен степени n в поле $\mathbb{C}$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Действительно, рассмотрим многочлен $A_n(z)$. Согласно основной теореме алгебры он имеет корень $z = c_1$ и может быть представлен в виде

$$A_n(z) = (z-c_1)B_{n-1}(z).$$

Многочлен $B_{n-1}(x)$ также имеет корень $x = c_2$, так что

$$A_n(z) = (z-c_1)(z-c_2)D_{n-2}(z).$$

Продолжая процедуру, получаем, что многочлен $A_n(z)$ допускает разложение вида

$$A_n(z) = a(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_n),$$

причем среди корней $c_1, \ldots, c_n$ могут быть и совпадающие.

4.5. **Многочлены с вещественными коэффициентами.**

Многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

Теорема.

Пусть $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$A(\bar{z}) = \overline{A(z)}.$$

◀ Пусть

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

Так как коэффициенты вещественны, то

$$\bar a_0 = a_0, \quad \bar a_1 = a_1, \quad \dots, \quad \bar a_n = a_n.$$

Поэтому

$$\overline{A(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} =$$
$$= \bar a_0 \bar z^n + \bar a_1 \bar z^{n-1} + \dots + \bar a_{n-1} \bar z + \bar a_n =$$
$$= a_0 \bar z^n + a_1 \bar z^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar z + a_n = A(\bar z). \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Если $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $z = c$ — его корень, то сопряженное число $\bar z$ также является корнем многочлена $A(z)$.

$\blacktriangleleft$ $A(\bar c) = \overline{A(c)} = \bar 0 = 0$ $\blacktriangleright$

Таким образом, у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряженными парами.

Пусть c, $\bar c$ — пара сопряженных корней (с ненулевыми мнимыми частями). В разложение многочлена на множители входит произведение

$$(z - c)(z - \bar c) = z^2 - (c + \bar c)z + c\bar c = z^2 - 2(\operatorname{Re} c)z + |c|^2,$$

являющееся квадратным трехчленом; отметим, что дискриминант этого трехчлена отрицателен:

$$D = 4(\operatorname{Re} c)^2 - 4|c|^2 < 0, \quad \text{так как} \quad |c|^2 = (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 > (\operatorname{Re} c)^2.$$

Такие квадратные трехчлены называются неприводимыми.

Таким образом, каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных множителей и неприводимых квадратных трехчленов:

$$A(x) = a(x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_s)^{\alpha_s} (x + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x + p_r x + q_r)^{\beta_r}.$$

5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти суммы:

(a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$;

(b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$.

[Указание: Рассмотреть $(1+i)^n$.]

Ответ. (a) $2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$; (b) $2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}$.

Задача 2. Найти суммы:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \cos kx$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sin kx$.

Ответ. (a) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x$; (b) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x$.

Задача 3. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен $x^2 + mx - 1$?

Ответ. $q = m$ и $p = -q^2 - 1$.

Задача 4. Разложить на множители многочлен $x^{2n} - 2x^n + 2$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\sqrt[2n]{2}x\cos\dfrac{8k+1}{4n}\pi + \sqrt[n]{2}\right)$.

Задача 5. Разложить на множители многочлен $x^{2n} + x^n + 1$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{3k+1}{3n}2\pi + 1\right)$.

Лекция 8
Матрицы. Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса

1. Матрицы

1.1. **Основные определения.**

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольная таблица из чисел (элементов матрицы), состоящая из m строк и n столбцов.

Нумерация элементов матрицы:

(1) верхний индекс — номер строки, нижний индекс — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix};$$

(2) первый индекс — номер строки, а второй — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенные обозначения:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = (a_j^i)_n^m, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}.$$

Множество всех матриц размера $m \times n$, элементы которых принадлежат множеству X, обозначается $X^{m\times n}$. Для нас наиболее интересен случай, когда X — некоторое числовое поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Специальные виды матриц.

- Нулевая матрица: все элементы равны нулю; обозначение O.
- Квадратная матрица: количество строк равно количеству столбцов); порядок квадратной матрицы — это количество ее строк (столбцов). Следом квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов:

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n.$$

- Диагональная матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i \neq j$,

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^3_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-1}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^n_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a^1_1, \ldots, a^n_n).$$

- Верхнетреугольная (правая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i > j$,

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Нижнетреугольная (левая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i < j$,

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются равными, $A = B$, если

(1) их размеры равны:

$$A = (a^i_j)^m_n, \quad B = (b^i_j)^m_n;$$

(2) элементы, стоящие на соответственных местах, равны между собой:

$$a^i_j = b^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

1.2. **Линейные операции и их свойства.**

Сумма матриц $A = (a^i_j)^m_n$ и $B = (b^i_j)^m_n$ одинакового размера $m \times n$:

$$C = A + B \quad \Longleftrightarrow \quad c^i_j = a^i_j + b^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Произведение матрицы $A = (a^i_j)^m_n$ на число α:

$$D = \alpha A \quad \Longleftrightarrow \quad d^i_j = \alpha a^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Теорема. *Операции над матрицами обладают следующими свойствами.*

(1) *коммутативность сложения*: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$A + B = B + A;$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

(3) *свойство нулевой матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$A + O = A,$$
где $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$;

(4) *существование противоположной матрицы*:
$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists A' \in \mathbb{K}^{m\times n} : A + A' = O;$$

(5) *свойство единицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$1 \cdot A = A;$$

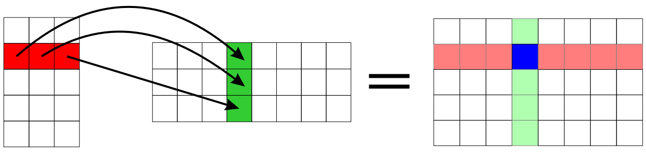
(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

(8) *дистрибутивность*-2: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

1.3. **Умножение матриц.**

Произведение матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times s}$ и $B \in \mathbb{K}^{s\times n}$ — матрица $C = AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле
$$c^i_j = \sum_{k=1}^{s} a^i_k b^k_j.$$
Перемножить матрицы можно лишь в том случае, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй.



Пример.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{не существует;}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix};$$

здесь
$$AB \neq BA.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $AB = BA$.

Единичная матрица — диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Элементы единичной матрицы обозначаются

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ^i_j называется символом Кронекера.

Обозначения: I, E; если нужно указать размер — I_n, E_n.

Теорема. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами*:

(1) *ассоциативность умножения*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B \in \mathbb{K}^{s\times p}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{p\times n}$
$$A(BC) = (AB)C;$$

(2) *дистрибутивность*-1: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B, C \in \mathbb{K}^{s\times n}$
$$A(B + C) = AB + AC;$$

(3) *дистрибутивность*-2: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{s\times n}$
$$(A + B)C = AC + BC;$$

(4) *свойство единичной матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$I_m A = A I_n = A.$$

◀ Докажем соотношение
$$\underbrace{A(\overbrace{B\ C}^{D})}_{X} = \underbrace{(\overbrace{A\ B}^{F})C}_{Y}.$$

Пусть
$$A = (a^i_j)^m_s, \quad B = (b^j_k)^s_p, \quad C = (c^k_l)^p_n.$$

Рассмотрим произведение
$$D = BC = (d^j_l)^s_n, \quad d^j_l = \sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l.$$

Далее,
$$X = AD = (x^i_l)^m_n,$$

$$x^i_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ d^j_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j \left(\sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l \right) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{p} a^i_j\ b^j_k\ c^k_l.$$

Произведения в правой части равенства:
$$F = AB = (f^i_k)^m_p, \quad f^i_k = \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ b^j_k,$$

$$Y = FC = (y^i_l)^m_n,$$

$$y^i_l = \sum_{k=1}^{p} f^i_k\ c^k_l = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{s} a^i_j\ b^j_k \right)\ c^k_l = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ b^j_k\ c^k_l.$$

Ясно, что $x^i_l = y^i_l$, так как выражения этих величин отличаются лишь порядком суммирования. ►

1.4. **Структура произведения матриц.** Рассмотрим матрицы

$$A = (a^j_l)^m_p \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad B = (b^l_k)^p_n \in \mathbb{K}^{p\times n},$$

Наша задача — описать структуру столбцов матрицы $C = AB$.

Представим матрицу A в виде совокупности столбцов

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_p],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_p = \begin{pmatrix} a^1_p \\ a^2_p \\ \vdots \\ a^m_p \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ является матрица $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c^j_k = \sum_{l=1}^{p} a^j_l\ b^l_k, \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, m, \\ k = 1, \ldots, n. \end{matrix}$$

Представим матрицу C в виде совокупности столбцов:

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \ldots \quad C_n].$$

Обсудим строение k-го столбца:

$$C_k = \begin{pmatrix} c^1_k \\ \vdots \\ c^m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p} a^1_l\ b^l_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a^m_l\ b^l_k \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a^1_l \\ \vdots \\ a^m_l \end{pmatrix} b^l_k = \sum_{l=1}^{p} A_l\ b^l_k = A \cdot B_k.$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

(1) k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.

(2) k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

1.5. **Транспонирование.** Дана матрица $A = (a^i_j)^m_n \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Матрица

$$B = (b^j_i)^n_m \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad b^j_i = a^i_j,$$

называется транспонированной для A. Обозначения:

$$B = A^T = A^{\mathrm{tr}} = {}^{\mathrm{tr}}A.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Операция транспонирования обладает следующими свойствами*:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

◀ Докажите самостоятельно. ▶

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$.

Матрица A называется кососимметричной, если $A = -A^T$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множества всех симметричных и кососимметричных матриц порядка n обозначаются

$$S\mathbb{K}^{n\times n}, \quad A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Теорема. *Любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц*:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\textit{симм.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\textit{кососимм.}}.$$

Отметим, что такое представление единственно.

1.6. **Определитель произведения матриц.** В этом разделе матрицы A, B имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если A, B — матрицы второго или третьего порядка, то*

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

1. Доказательство для det-2.

$$\det(AB) = \det[AB_1, AB_2] = \det\left[A\left(b^1_1 I_1 + b^2_1 I_2\right),\ A\left(b^1_2 I_1 + b^2_2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 \det\left[AI_1,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] + b_1^2 \det\left[AI_2,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_1\right]}_{=0} + b_1^1 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_2\right]}_{=\det A} + b_1^2 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_1\right]}_{=-\det A} + b_1^2 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_2\right]}_{=0} =$$

$$= \det A\left(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1\right) = \det A \cdot \det B.$$

2. Доказательство для det-3. Прежде всего запишем формулу полного разложения det-3:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1\ b_2^2\ b_3^3 + b_1^2\ b_2^3\ b_3^1 + b_1^3\ b_2^1\ b_3^2 - b_1^1\ b_2^3\ b_3^2 - b_1^2\ b_2^1\ b_3^3 - b_1^3\ b_2^2\ b_3^1.$$

Структура этой формулы такова: в каждом слагаемом нижние индексы следуют в естественном порядке $1, 2, 3$, а верхние образуют некоторую перестановку чисел $1, 2, 3$; всего слагаемых 6, по числу возможных перестановок из 3 элементов, $3! = 6$.

Слагаемое входит в формулу со знаком «$+$», если последовательность верхних индексов в нем получена из последовательности $1, 2, 3$ четным числом перестановок соседних элементов, и со знаком «$-$» в противном случае:

$$\begin{array}{ccccc} & & 123 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 213 & & & & 132 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 231 & & & & 312 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 321 & & \end{array}$$

Для определителя произведения матриц имеем:

$$\det(AB) = \det\left[AB_1,\ AB_2,\ AB_3\right] = \det\left[\underbrace{A\left(\sum_{i=1}^{3} b_1^i I_i\right)}_{B_1},\ \underbrace{A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right)}_{B_2},\ \underbrace{A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)}_{B_3}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_1^i \det\left[AI_i,\ A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right),\ A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)\right] = \cdots =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k \det\left[AI_i,\ AI_j,\ AI_k\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k\ \det\left[A_i,\ A_j,\ A_k\right].$$

В этой сумме $3^3 = 27$ слагаемых, но большинство из них равно нулю, так как содержат в качестве множителя det-3 вида $\det[A_i, A_j, A_k]$ с одинаковыми столбцами. Далее, если все столбцы A_i, A_j, A_k различны, то

$$\det[A_i, A_j, A_k] = \pm \det A,$$

где знак «$+$» или «$-$» зависит от того, четным или нечетным числом перестановок столбцов получен $\det[A_i, A_j, A_k]$ из $\det[A_1, A_2, A_3] = \det A$.

Поэтому, продолжая выкладку, получаем

$$\det(AB) = \det A \cdot \left(b_1^1 b_2^2 b_3^3 + b_1^2 b_2^3 b_3^1 + b_1^3 b_2^1 b_3^2 - b_1^1 b_2^3 b_3^2 - b_1^2 b_2^1 b_3^3 - b_1^3 b_2^2 b_3^1\right) = \det A \cdot \det B.$$

1.7. **Обратная матрица.** Понятие обратной матрицы определено только для квадратных матриц.

Дана матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Матрица $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется обратной к матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Матрица A в этом случае называется обратимой.

Уже на примере матрицы 1×1 ясно, что обратная матрица существует не для любой матрицы: матрица (0) необратима.

Теорема. *Если для матрицы A существует обратная A^{-1}, то она единственна.*

◀ Предположим, что матрица A имеет две различные обратные матрицы B и C, т.е.

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

Имеем:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

т.е. $B = C$. ▶

Теорема. *Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, что эквивалентно условию линейной независимости столбцов (строк) матрицы A.*

Замечание. Сейчас нас интересует вопрос о существовании обратных матриц для матриц порядка 2 и 3. Всюду далее в доказательстве считаем, что $n = 3$. На самом деле теорема вместе с доказательством справедлива для матрицы A любого порядка.

◀ 1. Предположим, что существует A^{-1}. Имеем

$$A^{-1}A = I \quad \Longrightarrow \quad \det(A^{-1}A) = \det I \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \det A^{-1} \cdot \det A = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

2. Пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} = (A_j^k)_n^n;$$

она называется присоединенной к матрице A. Вычислим произведение $C = A \cdot B^T$:

$$c_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i A_k^j = \begin{cases} \det A \neq 0, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица

$$\frac{1}{\det A} B^T$$

является обратной для A. Эта формула позволяет вычислить обратную матрицу A^{-1}. ▶

Пример. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Алгебраические дополнения элементов
$$\text{АД}(a) = d, \quad \text{АД}(b) = -c, \quad \text{АД}(c) = -b, \quad \text{АД}(d) = a,$$
присоединенная матрица
$$B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$
так что обратная матрица равна
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:
$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$
Сокращенно — СЛУ.

Введем основную и расширенную матрицы системы:
$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = [A_1, A_2, \dots, A_n],$$
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = [A, B], \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$
Систему можно записать в матричном виде
$$AX = B,$$
а также в виде
$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B.$$

Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ (столбец $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$) называется решением СЛУ, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получаем верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получаем верное матричное равенство).

СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Две совместные СЛУ называются эквивалентными, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные СЛУ содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным.

Следующие преобразования СЛУ переводят ее в эквивалентную СЛУ:

(1) перестановка двух уравнений местами;
(2) умножение любого уравнения СЛУ на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любому уравнению СЛУ другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования СЛУ называются элементарными (ЭП).

Иногда к элементарным преобразованиям причисляют

(4) удаление из СЛУ уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0.$$

2.1. **Однородные системы.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если столбец правых частей нулевой:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = 0. \end{cases}$$

ОСЛУ всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$ образуют ее решение, называемое тривиальным. Может ли ОСЛУ иметь нетривиальное решение?

Теорема. *ОСЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы ЛЗ.*

◀ 1. Пусть ОСЛУ имеет нетривиальное решение $x^1, \dots, x^n$; это означает, что

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один коэффициент $x^k \neq 0$; это и означает ЛЗ столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2. Пусть столбцы основной матрицы ОСЛУ ЛЗ, т.е.

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один из коэффициентов $x^k \neq 0$. Этот набор коэффициентов и образует нетривиальное решение ОСЛУ. ▶

Теорема. *Если X_1, X_2 — два решения ОСЛУ $AX = 0$, то любая их ЛК также является решением этой ОСЛУ.*

◀ Пусть c^1, c^2 — произвольные числа. Имеем:

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O \quad \Longrightarrow \quad c^1 AX_1 + c^2 AX_2 = A(c^1 X_1 + c^2 X_2) = 0,$$

т.е. ЛК $c^1 X_1 + c^2 X_2$ является решением ОСЛУ. ▶

Фундаментальная совокупность решений (ФСР) ОСЛУ — это такой упорядоченный набор линейно независимых решений $X_1, X_2, \dots, X_s$, что любое решение ОСЛУ можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \cdots + c^s X_s,$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные числа.

Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы ФСР, называется фундаментальной матрицей (ФМ) ОСЛУ:

$$\Phi = [X_1, X_2, \ldots, X_s].$$

Общее решение ОСЛУ выражается через ФМ по формуле

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}.$$

2.2. **Неоднородные системы.** Система $AX = B$ называется неоднородной (НСЛУ), если $B \neq O$. Часто НСЛУ $AX = B$ рассматривают вместе с ОСЛУ $AX = O$.

Теорема. *Если X_1, X_2 — решения НСЛУ $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение ОСЛУ $AX = O$.*

◀ Пусть $AX_1 = B$, $AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O. \qquad \blacktriangleright$$

Таким образом, любое решение НСЛУ можно представить в виде суммы некоторого частного решения НСЛУ и какого-либо решения ОСЛУ:

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

2.3. **Системы упрощенного вида.** Неизвестная x^k называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.

Система называется системой упрощенного вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В этом случае в каждом уравнении имеется неизвестная, входящая только в это уравнение, а число базисных неизвестных равно числу уравнений в системе.

Пример. Рассмотрим ОСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \qquad + 3x^3 \qquad + x^5 = 0, \\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение ОСЛУ. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной ОСЛУ.

Неизвестные, не являющиеся базисными, называются свободными; в общем решении системы они могут принимать произвольные значения.

Положив $x^3=c^1$, $x^5=c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1-c^2\\ -4c^1-2c^2\\ c^1\\ -c^2\\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1\overbrace{\begin{pmatrix} -3\\ -4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2\overbrace{\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 0\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Каждый из столбцов X_1, X_2, образующих ФСР ОСЛУ, можно получить, придавая одной из свободных неизвестных значение 1, а остальным — значение 0. ФСР, полученная таким образом, называется нормальной ФСР (НФСР). Фундаментальная матрица, составленная из столбцов НФСР, называется нормальной фундаментальной матрицей (НФМ).

Пример. Рассмотрим НСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \qquad + 3x^3 \qquad + x^5 = 1,\\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 2,\\ \qquad\qquad\qquad x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 1-3x^3-x^5,\\ x^2 = 2-4x^3-2x^5,\\ x^4 = 3-x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение системы. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной системы.

Положив $x^3=c^1$, $x^5=c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3c^1-c^2\\ 2-4c^1-2c^2\\ c^1\\ 3-c^2\\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 3\\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1\overbrace{\begin{pmatrix} -3\\ -4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2\overbrace{\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 0\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Здесь ЧРНС отвечает нулевым значениям свободных переменных (такое ЧРНС называется базисным), а столбцы X_1, X_2 представляют собой НФСР ОСЛУ.

Итак, если СЛУ имеет упрощенный вид, то ее общее решение немедленно выписывается. Чтобы решить СЛУ произвольного вида, нужно с помощью элементарных преобразований привести ее к упрощенному виду.

Теорема. *Если в ОСЛУ число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.*

◀ Если число неизвестных больше числа уравнений, то найдется свободная неизвестная, которая может принимать любые значения. ▶

2.4. **Алгоритм Гаусса.** Вместо преобразований СЛУ удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой СЛУ; при этом ЭП СЛУ соответствуют ЭП строк расширенной матрицы:

(1) перестановка двух строк местами;
(2) умножение любой строки на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;
(4) [удаление из матрицы нулевых строк.]

Говорят, что матрица имеет упрощенный вид, если она является расширенной матрицей СЛУ упрощенного вида. Матрица упрощенного вида имеет следующую структуру:

(1) некоторые ее столбцы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы отвечают базисным неизвестным СЛУ и также называются базисными;
(2) каждый из остальных столбцов является ЛК предыдущих базисных столбцов.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c c|c|c}
1 & * & 0 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Опишем один шаг алгоритма Гаусса, который позволяет произвольную матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ привести к упрощенному виду.

ШАГ № k.

(1) Среди строк с номерами $k, \dots, m$ выбираем одну из строк с наименьшим количеством нулей, считая от начала строки; эту строку назовем разрешающей строкой (РС), а ее первый ненулевой элемент — разрешающим элементом (РЭ).
(2) Переставляем РС на k-е место.
(3) Разделим РС на РЭ; в полученной строке на месте РЭ будет стоять 1.
(4) Вычитаем из каждой строки матрицы РС, умноженную на элемент обрабатываемой строки, который стоит в одном столбце с РЭ. После этого столбец, содержащий РЭ, будет представлять собой k-й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли РС или когда РС выбрать не удается.

Пример. Привести к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В качестве РС можно взять 2 или 4 строку; возьмем 2. РЭ $= 2$, делим РС на 2 и переставляем на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожению подлежат все элементы первого столбца, кроме РЭ; такой элемент один — это 3. Выполняем ЭП: к 4-й строке добавляем 1-ю, умноженную на (-3):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС можно взять 2-ю, 3-ю или 4-ю. Возьмем 3-ю, переставим ее на второе место и разделим на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно уничтожить все элементы 2-го столбца, кроме РЭ. Выполняем ЭП:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ * \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС можно взять только 4-ю строку. Умножаем ее на (-2) и переставляем на 3-е место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кроме РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве РС: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена.

Можно избежать появления дробей при выполнении ЭП, если сделать дополнительные ЭП.

Шаг 1. Вычтем из 4-й строки 2-ю (цель — получить 1 в одной из строк и выбрать эту строку в качестве РС):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первый элемент 4-й строки равен 1; эту строку берем в качестве РС, тогда РЭ = 1. Поменяем местами 1-ю и 4-ю строки:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 1-го столбца, кроме РЭ; такой элемент один, это 2 во второй строке.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС берем 2-ю строку; РЭ = 1. Уничтожаем все элементы 2-го столбца, кроме РЭ; это -1 и -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС берем 3-ю строку, РЭ = 1, который стоит в 4-м столбце. Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кромее РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить ОСЛУ

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} & - & 2x^2 & + & 6x^3 & + & 2x^4 & + & 8x^5 & - & 2x^6 & = & 0 \\ 2x^1 & + & x^2 & + & x^3 & & & & & + & x^6 & = & 0 \\ & - & x^2 & + & 3x^3 & + & x^4 & + & 4x^5 & - & x^6 & = & 0 \\ 3x^1 & + & x^2 & + & 3x^3 & & & + & x^5 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Основная матрица этой ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица была приведена к упрощенному виду в предыдущем примере:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные переменные этой ОСЛУ — x^1, x^2, x^4, свободные переменные — x^3, x^5, x^6. Получим НФСР ОСЛУ. Взяв $x^3 = 1$, $x^5 = x^6 = 0$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -2, \\ x^2 = 3, \\ x^3 = 1, \\ x^4 = 0, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^6 = 0$, $x^5 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = 2, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 1, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^5 = 0$, $x^6 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = 1, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 1. \end{cases}$$

Итак, НФСР ОСЛУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3,$$

где c^1, c^2, c^3 — произвольные числа.

НФМ ОСЛУ имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛУ можно записать в виде

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

2.5. **Восстановление ОСЛУ по известной ФСР.** Даны ЛН столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad X_r = \begin{pmatrix} x_r^1 \\ x_r^2 \\ \vdots \\ x_r^n \end{pmatrix},$$

количество r которых меньше их размерности n ($r < n$). Составить ОСЛУ, состоящую из наименьшего числа уравнений, для которой данные столбцы образуют ФСР.

Поскольку размерность пространства столбцов равна n, а размерность пространства решений искомой системы равна r, минимальное количество уравнений в системе равно $n - r$.

Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_r, X] = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_r^1 & x^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_r^2 & x^2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_r^n & x^n \end{pmatrix},$$

последний столбец которой $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$ состоит из неизвестных будущей ОСЛУ. Если этот столбец удовлетворяет искомой ОСЛУ, то он является ЛК столбцов $X_1, \ldots, X_r$.

Приведем матрицу $\mathfrak{X}$ к упрощенному виду с помощью ЭП строк:

$$\left(\begin{array}{c c} \overbrace{\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}}}^{r\ \text{столбцов}} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} & \boxed{\boxed{\begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array}}} \end{array}\right) \quad \left.\vphantom{\begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \end{array}}\right\} r\ \text{строк}$$

Первые r столбцов ЛН, последний является их ЛК; это возможно лишь в случае, когда элементы, стоящие в последнем столбце и последних $n-r$ строках, равны нулю. Приравнивая их к нулю, получаем искомую ОСЛУ.

Пример. Найти однородную систему уравнений, имеющую ФСР

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Произвольное решение X искомой системы является линейной комбинацией двух данных решений, поэтому столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}$$

должны быть ЛЗ. Приведем эту матрицу к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & 0 & x^1+2x^3+x^5 \\ 0 & 0 & x^4+2x^5 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы эта матрица имела два ЛН столбца, необходимо и достаточно, чтобы последние три ее строки были нулевыми. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^4+2x^5=0, \\ x^2+3x^3=0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^2+3x^3=0, \\ x^4+2x^5=0. \end{cases}$$

Матрица последней системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6. **Элементарные преобразования и умножение матриц.** ЭП строк матрицы тесно связаны с операцией умножения матриц.

Теорема. *Пусть R — ЭП типа* (1), (2) *или* (3) *строк матрицы A. Тогда*

$$R(A) = R(I) \cdot A.$$

Здесь $R(A)$ — матрица, полученная из A с помощью ЭП R, I — единичная матрица.

◀ Проверим утверждение для простейших ЭПС.

Пусть R_1 — перестановка первой и второй строк, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_1(A) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_1(\boldsymbol{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_1(A).$$

Пусть R_2 — умножение первой строки на $\alpha \neq 0$. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_2(A) = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\boldsymbol{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_2(A).$$

Пусть R_3 — прибавление к первой строке матрицы A ее второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_3(A) = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_3(\boldsymbol{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_3(A).$$

Пусть в матрице A выполнена серия ЭПС. Для простоты рассмотрим серию из двух ЭПС R_1 и R_2. Имеем:

$$R_1(R_2(A)) = R_1(\boldsymbol{I}) \cdot R_2(A) = R_1(\boldsymbol{I}) \cdot [R_2(\boldsymbol{I}) \cdot A] = [R_1(\boldsymbol{I}) \cdot R_2(\boldsymbol{I})] \cdot A = R_1(R_2(\boldsymbol{I})) \cdot A.$$

Теорема доказана. ▶

Элементарные преобразования типов (1)–(3) обратимы, т.е. если матрица C может быть получена из матрицы B каким-либо ЭП, то и матрица B может быть получена из матрицы C некоторым ЭП преобразованием.

2.7. **Вычисление обратной матрицы.** Превратим матрицу B с помощью последовательности ЭП строк в единичную матрицу. Поскольку выполнение каждого ЭП эквивалентно умножению B слева на некоторую матрицу, видим, что

$$A_s A_{s-1} \dots A_2 A_1 \cdot B = I.$$

Но это означает, что

$$A_s A_{s-1} \dots A_2 A_1 = B^{-1}.$$

Если те же самые ЭП провести над единичной матрицей, то результатом окажется матрица B^{-1}. На практике это выполняется следующим образом:

$$(B \mid I) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}).$$

Если вместо единичной матрицы взять некоторую матрицу D (причем не обязательно квадратную), то результатом будет

$$(B \mid D) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}D).$$

Можно сформулировать аналогичную процедуру для ЭП столбцов:

$$\left(\frac{B}{I}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{B^{-1}}\right).$$

Если вместо I взять матрицу D (не обязательно квадратную), то

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

На практике выполнять ЭП столбцов неудобно, поэтому для вычисления матрицы DB^{-1} предпочтительнее пользоваться следующим алгоритмом:

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{транспонирование}}$$

$$(B^T \mid D^T) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid (B^T)^{-1}D^T) = (I \mid (B^{-1})^T D^T)$$

$$\xrightarrow{\text{транспонирование}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T.$$

Докажите это соотношение самостоятельно.

Пример.

Вычислить обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим блочную матрицу $[A \mid \boldsymbol{I}]$ и проведем цепочку ЭП строк:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам k-й строки матрицы A. [Указание: ср. п. 1.4.]

Задача 2. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна произведению k-й строки матрицы A на матрицу B. [Указание: ср. п. 1.4.]

Задача 3. Доказать соотношение $(AB)^T = B^T A^T$.

Задача 4. Матрица A такова, что $A^2 + A + E = 0$. Доказать, что матрица A обратима и выразить A^{-1} через A.

Задача 5. Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{m-1}$.

Задача 6. Пусть $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$.

Задача 7. Доказать, что если A — обратимая симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

Задача 8. Доказать, что если A — обратимая кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

Задача 9. Пусть A, B — симметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 10. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 11. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

Задача 12. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 13. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 14. Пусть X, Y — столбцы решений систем уравнений $AX = P$, $AY = Q$ соответственно, α, β — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет столбец $Z = \alpha X + \beta Y$?

Задача 15. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если столбцы матрицы B линейно независимы, то столбцы матрицы C также линейно независимы.

Задача 16. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если между какими-либо столбцами матрицы B имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_k B_k = 0,$$

то соответствующие столбцы матрицы C связаны такой же линейной зависимостью:

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k = 0.$$

Лекция 9
Линейные пространства

1. Линейное пространство

1.1. **Определение.**

Линейное пространство (ЛП) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это множество V элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ произвольной природы (векторов), в котором введены две операции:

(A) сложение векторов $+ : V \times V \to V, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$,

(B) умножение вектора на число $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha \boldsymbol{x}$,

причем выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (коммутативность сложения);
(2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$: $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (ассоциативность сложения);
(3) $\exists \mathbf{0} \in V\ \forall \boldsymbol{x} \in V$: $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ (существование нулевого вектора);
(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V\ \exists x' \in V$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора);
(5) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
(6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\beta \boldsymbol{x})$;
(7) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$: $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$ (дистрибутивность-1)
(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{x}$ (дистрибутивность-2).

Запись $V(\mathbb{K})$ означает, что рассматривается ЛП V над ЧП $\mathbb{K}$.

1.2. **Примеры линейных пространств.**

1. $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$; $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

2. $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ — не ЛП. Объясните причину и приведите несколько аналогичных примеров.

3. Множества «геометрических векторов» на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 — ЛП над $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

5. $\mathbb{K}^{m \times n}$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

6. Множества $C(X)$, $C^p(X)$, состоящие из всех непрерывных (p раз непрерывно дифференцируемых) на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$ функций, можно рассматривать как ЛП над ЧП $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Операции:

$$\forall f, g \in C(X),\ \forall x \in X: \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\forall f \in C(X),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in X: \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

7. Множество $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K})$ всех полиномов степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n,$$

где $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 0, \ldots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех полиномов степени n? Ответ обоснуйте.

8. Множество $\mathrm{Trig}(n, \mathbb{K})$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех тригонометрических полиномов порядка n? Ответ обоснуйте.

9. $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, операции заданы формулами:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V = \mathbb{R};$$

$$\alpha \odot \boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^{\alpha}, \quad \boldsymbol{x} \in V = \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Проверьте выполнение всех аксиом ЛП.

Этот пример показывает, что операции сложения элементов ЛП и умножения элемента ЛП на число могуь быть совершенно «не похожими» на «обычные» сложение и умножение.

1.3. **Простейшие свойства ЛП.**

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — произвольное ЛП.

(1) *Нулевой элемент $\mathbf{0} \in V$ единствен.*

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ *противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ единствен.*

(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$: $\quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(5) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ *противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ равен* $-1 \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

◀ (1) Допустим, что $\exists \mathbf{0}' \neq \mathbf{0}$ такой, что $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $\mathbf{0}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Положим $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; тогда $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. С другой стороны, по определению $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Итак, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два различных противоположных элемента для $\boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'' + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'.$$

(3) Прибавим к обеим частям равенства $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ единственный противоположный элемент $\boldsymbol{z}'$ для элемента $\boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{y} + \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

(4) $\quad 0 \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{x} = (0 + 1)\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(5) Положим $\boldsymbol{y} = (-1) \cdot \boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{y}$ — противоположный для $\boldsymbol{x}$. ▶

1.4. **Линейная комбинация.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная комбинация (ЛК) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^p \in \mathbb{K}$ — это выражение

$$\alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p \equiv \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k.$$

ЛК векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называется тривиальной, если все коэффициенты этой ЛК равны нулю, и нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Очевидно, тривиальная ЛК всегда равна нулевому вектору.

1.5. **Линейная зависимость и независимость.**

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому вектору.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Элементы $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ЛЗ, так как существует нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}$:

$$-2 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно независимыми (ЛН), если из равенства их ЛК нулевому вектору следует, что эта ЛК тривиальна.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Векторы $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ЛН. Действительно,

$$\alpha^1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha^2 \boldsymbol{y}_2 = \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Последний столбец может быть нулевым тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

1.6. **Линейная оболочка.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная оболочка (ЛО) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — это множество всех ЛК этих векторов, т.е. множество

$$L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \left\{ \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\middle|\; \alpha^k \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, p \right\}.$$

Теорема.

(1) *Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ имеется нулевой вектор, то эти векторы ЛЗ.*

(2) *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_q$, $\boldsymbol{x}_{q+1}$, …, $\boldsymbol{x}_p$ содержит ЛЗ подсистему $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_q$, то вся система ЛЗ.*

(3) *Если векторы $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_p$ ЛЗ, то среди них имеется вектор, являющийся ЛК остальных векторов.*

(4) *Если $\boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$, то*

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p).$$

◀ Пункты (1)–(3) докажите самостоятельно (см. аналогичную теорему для столбцов).

(4) Обозначим

$$L_1 = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p), \quad L_2 = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p).$$

Требуется доказать, что $L_1 = L_2$, т.е. что

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{и} \quad L_2 \subseteq L_1.$$

Первое вложение очевидно:

$$\boldsymbol{y} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p = 0 \cdot \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} \in L_2.$$

Докажем второе вложение. Имеем:

$$\boldsymbol{x} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \beta^p \boldsymbol{x}_p,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} \in L_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p = \\
= \alpha(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \beta^p \boldsymbol{x}_p) + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p = \\
= (\alpha\beta^1 + \alpha^1)\boldsymbol{x}_1 + \dots + (\alpha\beta^p + \alpha^p)\boldsymbol{x}_p \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} \in L_1.
\end{aligned}$$ ▶

1.7. **Размерность и базис ЛП.**

Размерность ЛП $V(\mathbb{K})$ — это целое неотрицательное число n, обладающее следующими свойствами:

(1) в V $\exists n$ ЛН векторов;

(2) любые $n+1$ векторов ЛЗ.

Обозначение: $n = \dim V$; пространство V называется n-мерным.

Если в ЛП V имеется как угодно много ЛН векторов, то V называется бесконечномерным, $\dim V = \infty$.

Базис ЛП $V(\mathbb{K})$ — это упорядоченный набор векторов $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, обладающий следующими свойствами:

(1) векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ ЛН;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ $\exists x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + x^n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x^k \boldsymbol{e}_k. \tag{1}$$

Числа $x^1, \dots, x^n$ называются координатами (компонентами) вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, а формула (1) — разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Правило суммирования Эйнштейна: Если в некотором одночлене индекс появляется ровно два раза, один раз вверху и один раз внизу, то считается, что по этому индексу производится суммирование; пределы изменения индекса либо указываются, либо ясны из контекста. Пример: запись $x^k \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ эквивалентна сумме (1).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{p} x^k \boldsymbol{e}_k = \sum_{l=1}^{p} x^l \boldsymbol{e}_l,$$

имеем

$$x^k \boldsymbol{e}_k \equiv x^l \boldsymbol{e}_l, \quad k = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, p.$$

Суммирование с символом Кронекера.

Символ Кронекера — это обозначение элементов единичной матрицы:

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если } \; j = k, \\ 0, & \text{если } \; j \neq k. \end{cases}$$

Часто встречаются суммы вида $a_j\delta_k^j$, $b^k\delta_k^j$ и т. п. В развернутом виде первая из этих сумм имеет вид

$$a_1\delta_k^1 + a_2\delta_k^2 + \dots + a_k\delta_k^k + \dots + a_n\delta_k^n.$$

Из n слагаемых в этой сумме отлично от нуля лишь одно, а именно k-е, поэтому вся сумма равна a_k. Таким образом,

$$a_j\delta_k^j = a_k.$$

Теорема.

Разложение по базису единственно, т.е. $\forall \boldsymbol{x} \in V$ его координаты $x^1, \dots, x^n$ определены однозначно.

Условимся записывать координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ в виде столбца:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \ \leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \text{ в базисе } \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n.$$

Теорема.

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейного пространства $V(\mathbb{K})$ имеем

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad \alpha\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Теорема.

ЛП $V(\mathbb{K})$ является n-мерным тогда и только тогда, когда оно имеет базис, состоящий из n векторов.

◀ 1. Пусть $\dim V = n$. Тогда $\exists \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛН, но $\forall \boldsymbol{x} \in V$ векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛЗ, т.е. $\exists \alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha\boldsymbol{x} + \alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$; в противном случае получили бы

$$\alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

что возможно лишь при $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ (при этом $\alpha = 0$), противоречие. Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha^1}{\alpha}\boldsymbol{x}_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha}\boldsymbol{x}_n,$$

т.е. упорядоченный набор $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ является базисом в V.

2. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Докажем, что любые $n+1$ векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ в V ЛЗ. Разложим каждый из этих векторов по базису:

$$\boldsymbol{x}_1 = x_1^1\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_1^n\boldsymbol{e}_n,$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = x_{n+1}^1\boldsymbol{e}_1 + x_{n+1}^2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_{n+1}^n\boldsymbol{e}_n.$$

Составим матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

и рассмотрим ОСЛУ с этой матрицей в качестве основной матрицы. Поскольку число неизвестных в рассматриваемой ОСЛУ больше числа неизвестных, то она имеет нетривиальное решение, т.е. столбцы матрицы X линейно зависимы. ►

1.8. **Примеры.**

1. $\dim \mathbb{K}(\mathbb{K}) = 1$; базис состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое ненулевое число из $\mathbb{K}$. Число 1 образует так называемый стандартный базис.

2. $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \infty$.

Задача. Объясните почему.

3. $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$; базис состоит из двух элементов, в качестве которых можно взять два любых ненулевых комплексных числа, сумма которых не равна нулю. Стандартный базис образуют числа $1, i$.

Задача. Докажите.

4. $\dim \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) = n$. Стандартный базис образуют столбцы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$. Стандартный базис состоит из столбцов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

6. $\dim \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$. Стандартный базис состоит из mn матриц

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

где единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

7. $\dim \mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) = n + 1$. Стандартный базис состоит из многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 = t, \quad \boldsymbol{e}_2 = t^2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = t^n.$$

8. $\dim \mathrm{Trig}(n, \mathbb{K}) = 2n + 1$. Стандартный базис состоит из тригонометрических многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 = \cos t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_n = \cos nt, \\ \boldsymbol{e}_{-1} = \sin t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{-n} = \sin nt. \end{matrix}$$

2. Гомоморфизм и изоморфизм ЛП

Пусть $(V, \mathbb{K})$ (операции $+, \cdot$) и $(W, \mathbb{K})$ (операции $\oplus, \odot$) — два ЛП над одним и тем же ЧП $\mathbb{K}$.

Отображение $f : V \to W$ называется гомоморфизмом, если

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall x, y \in V,$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Множество всех гомоморфизмов ЛП V, W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм.

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $f(-x) = -f(x)$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Изоморфизм ЛП V и W — это взаимно однозначный гомоморфизм. ЛП V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : V \to W$; в этом случае пишут $V \simeq W$.

Теорема.

Пусть $V \simeq W$, $f : V \to W$ — изоморфизм.

(1) $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$: $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_W$.

(2) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛН.*

(3) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛЗ векторы, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_V$, имеет коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛЗ, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_W$, имеет те же коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$.*

◀ (1) Пусть $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$. Предположим, что $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$. Имеем:

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W = 0 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \cdot f(\boldsymbol{z}) = f(0 \cdot \boldsymbol{z}) = f(\mathbf{0}_V).$$

Таким образом, в силу взаимной однозначности отображения f, получаем $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_V$; противоречие.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы. Предположим, что векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ ЛЗ, т.е. $\exists \beta^1, \ldots, \beta^p \in \mathbb{K}$, не все равные 0, такие, что

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Имеем

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W = f(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p),$$

откуда

$$\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \beta^p \boldsymbol{x}_p = \mathbf{0}_V,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ ЛЗ; противоречие.

(3) Докажите самостоятельно. ▶

Отметим, что отношение изоморфности ЛП обладает следующими свойствами:

(1) $V \simeq V$;
(2) $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$;
(3) если $V \simeq W$ и $W \simeq U$, то $V \simeq U$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in V$ столбец его координат, является изоморфизмом ЛП V и $\mathbb{K}^n$, $V \simeq \mathbb{K}^n$.

Теорема.

Все ЛП одной размерности над одним и тем же ЧП изоморфны.

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача. Докажите, что если $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в ЛП V, то $V = L(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$. Обратное утверждение неверно: если $V = L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p)$, то нельзя утверждать, что векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ образуют базис в V. Объясните почему.

3. Линейное подпространство

3.1. **Определение.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП. Подмножество $P \subset V$ называется *линейным подпространством* (ЛПП) пространства V, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P$;
(2) $\forall \boldsymbol{x} \in P$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \boldsymbol{x} \in P$.

В любом ЛП V имеются тривиальные ЛПП: $\{\mathbf{0}\}$ и V.

Обозначения:

- $P \subset V \iff P$ является подмножеством V;
- $P \Subset V \iff P$ является нетривиальным ЛПП V.

Теорема.

Пусть V — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$ и $P \Subset V$. Тогда P тоже является ЛП над ЧП $\mathbb{K}$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

3.2. **Примеры ЛПП.**

1. $V_1 \Subset V_2 \Subset V_3$.

2. $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.

Задача. Найдите размерность и базис этих ЛПП.

3. Подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является ЛПП в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.

Задача. Найдите размерность и базис этого ЛПП.

4. В ЛП $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n линейными подпространствами являются следующие подмножества.

(1) Подмножество симметричных матриц

$$S\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = A\right\}.$$

(2) Подмножество кососимметричных матриц

$$A\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = -A\right\}.$$

(3) Подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом:

$$P = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; \operatorname{tr} A = 0\right\}.$$

Замечание: след $\operatorname{tr} A$ квадратной матрицы A — это сумма ее диагональных элементов.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

5. В ЛП $\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K})$ подпространствами являются множества

$$S\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = x(t)\right\},$$
$$A\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = -x(t)\right\},$$

состоящие из четных и нечетных многочленов.

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

6. Рассмотрим ОСЛУ

$$AX = O,$$

где $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{K}^n$, $O \in \mathbb{K}^m$. Известно, что для любых решений X_1, X_2 столбец $c^1X_1 + c^2X_2$ также является решением. Это означает, что множество всех решений ОСЛУ представляет собой ЛПП в $\mathbb{K}^n$. ФСР ОСЛУ представляет собой базис этого ЛПП.

7. Любая ЛО является ЛПП.

Теорема.

Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$. *Тогда* $L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$.

◀ Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \alpha^1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p\boldsymbol{x}_p,$$
$$\boldsymbol{y} = \beta^1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p\boldsymbol{x}_p.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha^1 + \beta^1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha^p + \beta^p)\boldsymbol{x}_p,$$

т.е. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$. Завершите доказательство самостоятельно. ▶

3.3. Пополнение базиса.

Теорема.

Пусть

$$P \Subset V, \quad \dim P = p < \dim V = n,$$

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ — *базис в* P. *Тогда* $\exists \boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in V \setminus P$ *такие, что*

$$\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_p,\ \boldsymbol{e}_{p+1},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$$

— *базис в* V.

◀ Так как $p < n$, то $\exists \boldsymbol{e}_{p+1} \in V$ такой, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}$ ЛН; при этом $\boldsymbol{e}_{p+1} \notin P$, так как в противном случае получили бы $\dim P > p$.

Если $p + 1 = n$, пополнение базиса завершено. Если $p + 1 < n$, продолжаем процесс. ▶

3.4. **Пересечение и сумма ЛПП.**

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cap Q \Subset V$.

◀ Проверим выполнение требований определения:

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \cap Q \iff \begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in Q \end{cases} \iff \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \cap Q.$$

Второе условие проверяется аналогично. ▶

Замечание. Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cup Q$ не является, вообще говоря, ЛПП.

Задача. Приведите соответствующий пример.

Суммой $P + Q$ ЛПП $P, Q \Subset V$ называется ЛО всевозможных векторов вида $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, т.е.

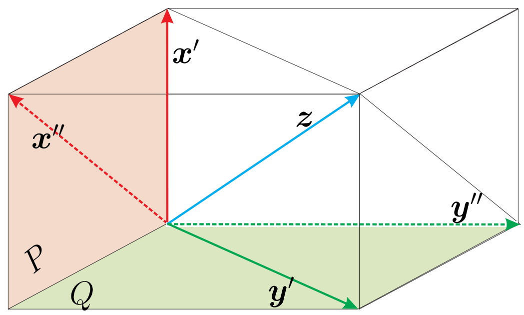
$$P + Q = \left\{ \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; \boldsymbol{x} \in P, \; \boldsymbol{y} \in Q \right\}.$$

Таким образом, $\forall \boldsymbol{z} \in P + Q$: $\exists \boldsymbol{x} \in P$, $\exists \boldsymbol{y} \in Q$ такие, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P + Q \Subset V$.

Задача. Докажите теорему.



$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{y}''.$$

Теорема.

Пусть V — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда

$$\boxed{\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).} \tag{2}$$

◀ Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — базис в $P \cap Q$, $\dim(P \cap Q) = r$;
$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$ — его дополнение до базиса в P, $\dim P = r + p$;
$\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q$ — его дополнение до базиса в Q, $\dim Q = r + q$.

Тогда все эти векторы образуют базис в $P + Q$ (объясните почему), и

$$\dim(P + Q) = r + p + q = (p + r) + (q + r) - r = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q). \qquad ▶$$

3.5. **Прямая сумма ЛПП.**

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{z} \in P+Q$ существуют такие $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Если же оно единственно, то сумма ЛПП называется прямой суммой; $P \oplus Q$.

Теорема.

Сумма ЛПП P и Q является прямой суммой тогда и только тогда, когда $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

◀ 1. Пусть $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Тогда базиса в $P \cap Q$ не существует, а базисы в P и Q суть

$$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \qquad \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q,$$

где $p = \dim P$, $q = \dim Q$. Базис в $P+Q$ состоит из всех этих векторов, поэтому $\forall \boldsymbol{z} \in P+Q$ имеем

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{x^1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + x^p \boldsymbol{f}_p}_{=\boldsymbol{x}} + \underbrace{y^1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + y^q \boldsymbol{g}_q}_{=\boldsymbol{y}}.$$

Это разложение единственно (единственность разложения по базису) $\Rightarrow P+Q = P \oplus Q$.

2. Пусть $P + Q = P \oplus Q$. Докажем, что $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

Предположим противное, т.е. допустим, что $\exists \boldsymbol{v} \in P \cap Q$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\boldsymbol{v} \in P$, $\boldsymbol{v} \in Q$ и $\forall \boldsymbol{z} \in P \oplus Q$ имеем

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}}_{\in P} + \underbrace{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}}_{\in Q},$$

т.е. разложение вида $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ не единственно; противоречие. ▶

Задача. Докажите, что

$$\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{Pol}(n) = S\,\mathrm{Pol}(n) \oplus A\,\mathrm{Pol}(n).$$

3.6. **Ядро и образ гомоморфизма.**

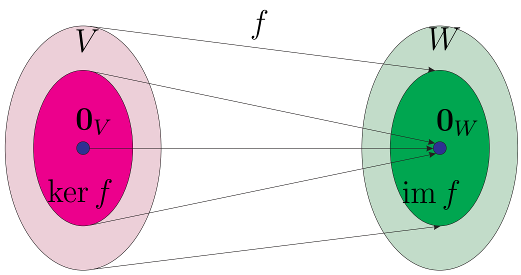
Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — два ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ — гомоморфизм.

Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество векторов из V

$$\ker f = \Big\{ \boldsymbol{x} \in V \;\Big|\; f(x) = \mathbf{0}_W \Big\}.$$

Образ $\operatorname{im} f$ гомоморфизма f — это множество векторов из W

$$\operatorname{im} f = \Big\{ \boldsymbol{y} \in W \;\Big|\; \exists \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \Big\}.$$



Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм ЛП. Тогда

$$\ker f \Subset V, \qquad \operatorname{im} f \Subset W.$$

◀ 1. Проверим, что $\ker f \Subset V$. Имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \ker f \quad &\iff \quad f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W, \\ \boldsymbol{y} \in \ker f \quad &\iff \quad f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W; \end{aligned}$$

поэтому

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W \quad \iff \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \ker f.$$

Завершите доказательство самостоятельно. ▶

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм ЛП.

$$\boxed{\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim V.} \tag{3}$$

◀ Пусть $\dim V = n$, $\dim\ker f = p$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ — базис в $\ker f$, $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — его дополнение до базиса в V.

Имеем $f(\boldsymbol{e}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{e}_p) = \mathbf{0}_W$.

Докажем, что векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ образуют базис в $\operatorname{im} f$.

Предположим, что эти векторы ЛЗ, т.е. $\exists \alpha^{p+1}, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \mathbf{0}_W.$$

В таком случае

$$\mathbf{0}_W = \alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \alpha^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha^n f(\boldsymbol{e}_n) = f(\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n),$$

откуда следует, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ ЛН.

Далее, $\forall \boldsymbol{y} \in \operatorname{im} f$ $\exists \boldsymbol{x} \in V$ такой, что $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^p\boldsymbol{e}_p + x^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= \underbrace{x^1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x^p f(\boldsymbol{e}_p)}_{=\mathbf{0}_W} + x^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + x^n f(\boldsymbol{e}_n) = \\ &= x^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + x^n \boldsymbol{f}_n, \end{aligned}$$

т.е. любой вектор $\boldsymbol{y} \in W$ может быть разложен в ЛК векторов $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ образуют базис в $\operatorname{im} f$ и, следовательно, $\dim\operatorname{im} f = n - p$.

Итак,

$$\dim V = n = p + (n-p) = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f. \qquad ▶$$

3.7. **Ядро и образ матрицы.**

Соотношение

$$AX = Y, \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad X \in \mathbb{K}^n, \quad Y \in \mathbb{K}^m,$$

можно рассматривать как отображение

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto Y,$$

задаваемое матрицей A. Очевидно, это отображение является гомоморфизмом ЛП $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$.

Тогда задача решения ОСЛУ

$$AX = O$$

эквивалентна нахождению ядра $\ker A$ этого гомоморфизма, которое называют также ядром матрицы A.

Образ указанного гомоморфизма называют образом матрицы A. Так как столбец $Y = AX$ представляет собой ЛК столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам столбца X, ясно, что образ матрицы есть не что иное, как линейная оболочка ее столбцов.

4. Ранг матрицы

4.1. **Линейная оболочка строк матрицы.**

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее строк не меняется.

◀ Пусть матрица B получена из матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ с помощью ЭП строк. Это означает, что каждая строка матрицы B является некоторой ЛК строк матрицы A, так что

$$L(B^1, \ldots, B^m) \Subset L(A^1, \ldots, A^m).$$

Поскольку ЭП строк обратимы, то

$$L(A^1, \ldots, A^m) \Subset L(B^1, \ldots, B^m).$$

Таким образом,

$$L(A^1, \ldots, A^m) = L(B^1, \ldots, B^m) \iff$$

$$\iff \dim L(A^1, \ldots, A^m) = \dim L(B^1, \ldots, B^m). \qquad \blacktriangleright$$

4.2. **Линейная оболочка столбцов матрицы.**

Линейная оболочка столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — это образ гомоморфизма

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto AX.$$

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее столбцов не меняется.

◀ Рассмотрим ОСЛУ с матрицей $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$AX = O$$

Множество ее решений — это ядро $\ker A$ матрицы A. Поскольку при ЭП строк СЛУ переходит в эквивалентную СЛУ, для любой матрицы B, полученной из A такими ЭП, имеем

$$\ker B = \ker A.$$

Поэтому

$$\dim \operatorname{im} B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker A = \dim \operatorname{im} A.$$

▶

Теорема.

Для любой матрицы A размерность ЛО ее строк равна размерности ЛО ее столбцов.

◀ Приведем матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ к упрощенному виду с помощью ЭП строк; размерности ЛО строк и столбцов полученной матрицы B равны размерностям соответствующих ЛО для матрицы A. В матрице B сделаем ЭП типа (4), т.е. удалим из нее нулевые строки; получим матрицу $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$, где $r \leqslant m$.

Рассматривая ОСЛУ с матрицей C, видим, что в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. Поэтому строки матрицы C ЛН. Таким образом, размерность ЛО строк матрицы C равна количеству базисных неизвестных и равно количеству уравнений r.

Количество свободных неизвестных в системе равно $n-r$, поэтому ФСР ОСЛУ состоит из $n-r$ столбцов, т.е. размерность пространства решений ОСЛУ, равная размерности ядра матрицы, также равна $n-r$. Размерность же ЛО столбцов, равная размерности образа матрицы, равна $n-(n-r)=r$. ▶

Ранг матрицы — это размерность ЛО ее строк (столбцов). Обозначение: $\operatorname{rk} A$.

4.3. **Ранг произведения матриц.**

Теорема.

$$\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} A, \qquad \operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} B.$$

◀ Поскольку столбцы матрицы AB суть линейные комбинации столбцов матрицы A, получаем

$$L(C_1,\dots,C_p) \Subset L(A_1,\dots,A_m) \quad \Rightarrow \quad \dim L(C_1,\dots,C_p) \leqslant \dim L(A_1,\dots,A_m). \qquad ▶$$

4.4. **Теорема Кронекера—Капелли.**

Теорема.

Система линейных уравнений

$$AX = B$$

совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|B].$$

◀ Совместность системы

$$AX = B \iff A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B$$

означает, что

$$B \in L(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

т.е.

$$L(A_1, A_2, \dots, A_n) = L(B, A_1, A_2, \dots, A_n),$$

так что размерности этих линейных оболочек совпадают. ▶

5. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 2. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $S\mathbb{K}^{n\times n}$ симметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 3. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $A\mathbb{K}^{n\times n}$ кососимметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 4. Доказать, что $\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}$.

Задача 5. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество матриц с нулевым следом является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 6. Доказать, что сумма L двух линейных подпространств P и Q тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $\boldsymbol{x} \in L$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y} \in P$, $\boldsymbol{z} \in Q$.

Задача 7. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim P + \dim Q > \dim V$, то пересечение $P \cap Q$ содержит ненулевой вектор.

Задача 8. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim(P + Q) = \dim(P \cap Q) + 1$, то одно из этих подпространств содержится в другом.

Задача 9. Доказать, что для любого линейного подпространства P конечномерного линейного пространства V существует другое подпространство Q такое, что $V = P \oplus Q$.

Задача 10. Пусть A, B, C — три линейных подпространства конечномерного линейного пространства V, $P = (A \cap C) + (B \cap C)$, $Q = (A + B) \cap C$. Доказать, что $P \subseteq Q$. Привести пример, когда $P \neq Q$.

Задача 11. Доказать, что если в n-мерном комплексном линейном пространстве V рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$-мерное вещественное линейное пространство $V^{\mathbb{R}}$. (Описанная процедура называется овеществлением комплексного линейного пространства.) Исходя из базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V, построить базис пространства $V^{\mathbb{R}}$.