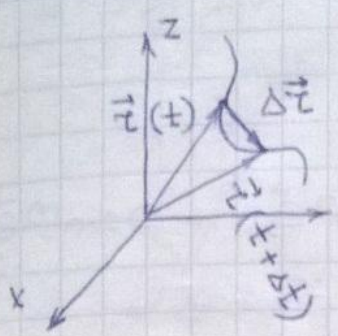
Кинематика материальной точки.



$\vec{r} = \vec{r}(t)$ - закон движения.

Скорость или скорость изменения радиус-вектора

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t).$$

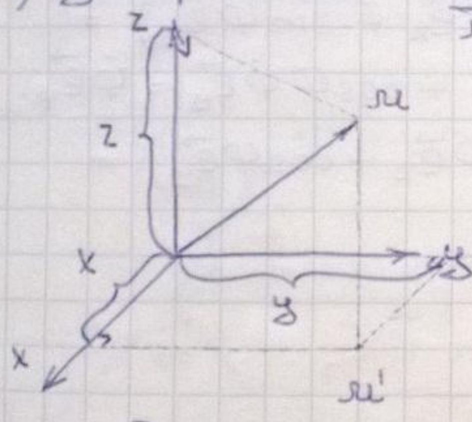
(полная производная по времени)

Быстрота изменения скорости или ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t).$$

Системы координат

1) декартовы координаты (x, y, z)



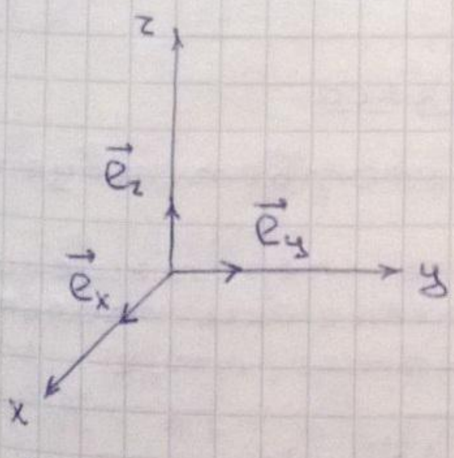
Положение точки задается:

$x, y, z \in (-\infty, +\infty)$.

$|\vec{e}_i| = 1$, где $i = x, y, z$.

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = (\vec{e}_x, \vec{e}_z) = (\vec{e}_y, \vec{e}_z) = 0$.

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

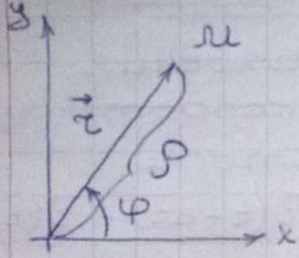


Особенность орт декартовой системы: неизменность длины и направления орт во времени.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \\ \vec{v}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \end{aligned}}$$

2) полярные координаты (ρ, φ)

$\rho = |\vec{r}|$, $\rho \geq 0$.



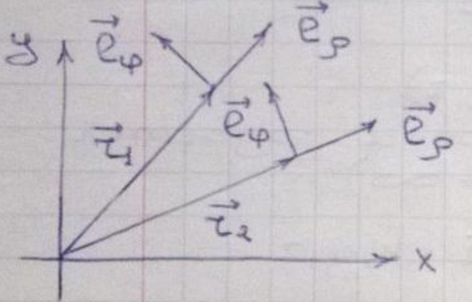
φ - угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором.

$\varphi \in [0, 2\pi]$.

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \rho\cos\varphi\,\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\,\vec{e}_y$.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{e}_x(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\dot{\varphi}) + \vec{e}_y(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\dot{\varphi}) = \dot{\rho}\underbrace{(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)}_{\equiv\,\vec{e}_\rho} + \rho\dot{\varphi}\underbrace{(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y)}_{\equiv\,\vec{e}_\varphi}.$$

$|\vec{e}_\rho| = |\vec{e}_\varphi| = 1$. $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) = 0 \Rightarrow \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ - локальный базис полярной системы координат.



$\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho \neq 0$, $\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi \neq 0$.

$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d}{dt}(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) = -\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x + \cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.

$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y) = -\cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x - \sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$.

Окончательно $\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$ и

$\boxed{\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

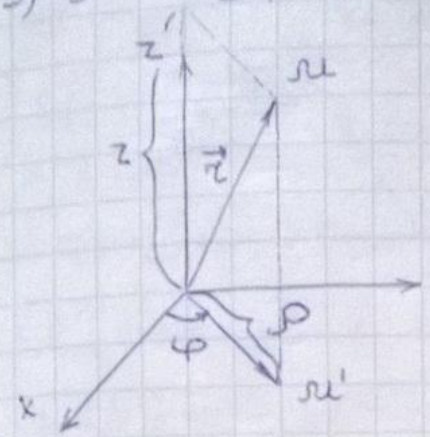
Построение локального базиса.

$q_i \sim \vec{e}_i$ - каждой координате соответствует орт.

Базисный вектор совпадает с перемещением (по направлению) при изменении только одной криволинейной координаты, т.е.

$\vec{e}_i \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}$, т.к. $|\vec{e}_i| = 1$.

3) цилиндрические координаты (ρ, φ, z).



ρ - длина проекции $\vec{r}$ на плоскость Oyx, $\rho \geq 0$.

φ - угол между положительным направлением Ox и проекцией $\vec{r}$ на Oxy.

$\varphi \in [0, 2\pi]$.

$z \in (-\infty, +\infty)$.

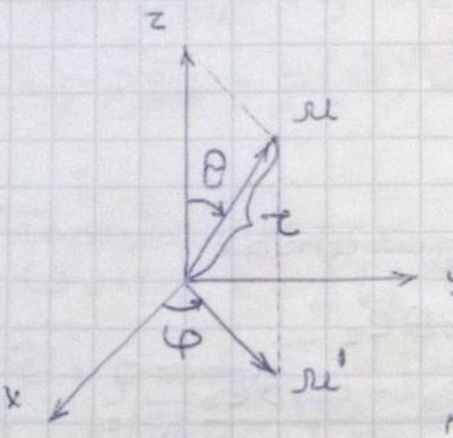
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\cos\varphi\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

$$\boxed{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\rho\cos\varphi\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\vec{e}_y) + \dot{z}\vec{e}_z =$$

$$\boxed{= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z.}$$

$$\boxed{\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$

4) сферические координаты (r, φ, θ).



$r = |\vec{r}| \geq 0$

θ - угол между положительным направлением Oz и радиус-вектором.

$\theta \in [0, \pi]$

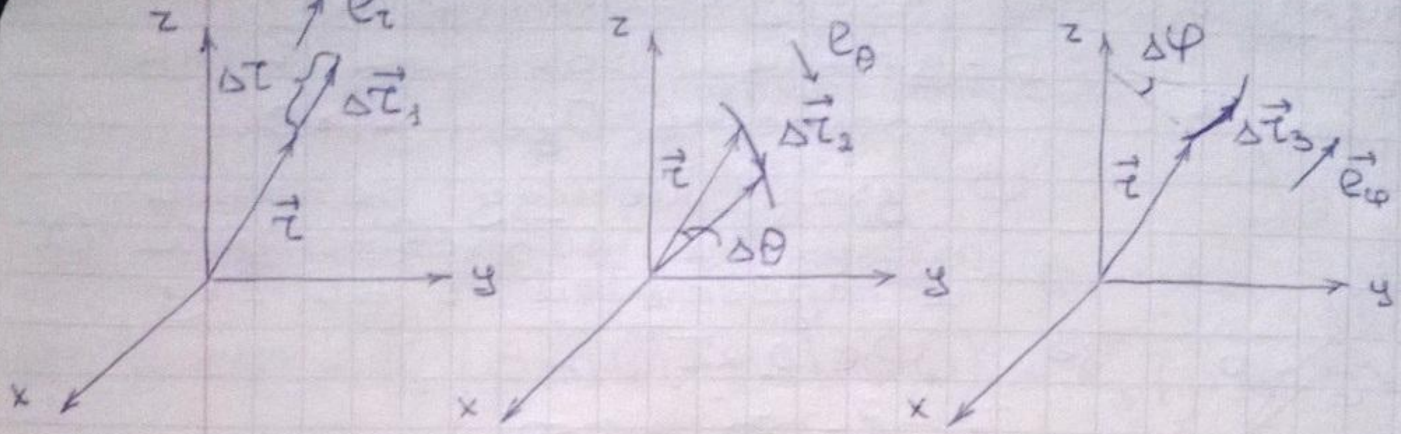
φ - угол между положительным направлением Ox и проекцией радиус-вектора на Oxy. $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z.$$

Вычислим скорость с помощью принципа суперпозиции движений.

$$\forall \Delta\vec{r} : \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3.$$

$$\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r}\Big|_{\theta,\varphi = \text{fixed}} = \Delta r\vec{e}_r.$$



$$\Delta\vec{r}_2 = \Delta\vec{r}\Big|_{r,\varphi = fixed} = r\Delta\theta\vec{e}_\theta$$

$$\Delta\vec{r}_3 = \Delta\vec{r}\Big|_{r,\theta = fixed} = r\sin\theta\Delta\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r\vec{e}_r + r\Delta\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\Delta\varphi\vec{e}_\varphi}{\Delta t} =$$

$$\boxed{= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.}$$

$$\boxed{\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2.}$$

Домашняя работа 1.

№1.

Скорость в сферических координатах.

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z.$$

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z}{(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta)^{1/2}} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z.$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{-r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_y}{(r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)^{1/2}} = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y.$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{r\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - r\sin\theta\vec{e}_z}{(r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta)^{1/2}} = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x +$$

$$+ \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z.$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(r\sin\theta\cos\varphi)\vec{e}_x + \frac{d}{dt}(r\sin\theta\sin\varphi)\vec{e}_y +$$
$$+\frac{d}{dt}(r\cos\theta)\vec{e}_z = \vec{e}_x(\dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi +$$
$$+ r\sin\theta(-\sin\varphi)\dot{\varphi}) + \vec{e}_y(\dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi +$$
$$+ r\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}) + \vec{e}_z(\dot{r}\cos\theta + r(-\sin\theta)\dot{\theta}) =$$
$$= \dot{r}(\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) +$$
$$+ r\dot{\theta}(\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z) +$$
$$+ r\sin\theta\dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

№2.

Ускорение в полярных координатах.

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi +$$
$$+ \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi +$$
$$+ \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho(\dot{\varphi})^2\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}).$$

№3.

Параболические координаты: $\rho = \sqrt{\xi\eta}$, $\varphi = \varphi$, $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi\vec{e}_x +$$
$$+ \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\vec{e}_y + \frac{1}{2}(\xi - \eta)\vec{e}_z.$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{-\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\vec{e}_x + \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi\vec{e}_y}{(\xi\eta\sin^2\varphi + \xi\eta\cos^2\varphi)^{1/2}} = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y.$$
$$\vec{e}_\xi = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-1/2}\cos\varphi\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/2}\sin\varphi\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z}{\left(\frac{1}{4}\frac{\eta}{\xi}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\frac{\eta}{\xi}\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\right)^{1/2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\eta}{\eta+\xi}}\cos\varphi\vec{e}_x + \sqrt{\frac{\eta}{\eta+\xi}}\sin\varphi\vec{e}_y + \sqrt{\frac{\xi}{\eta+\xi}}\vec{e}_z.$$

$$\vec{e}_\eta = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\sin\varphi\,\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z}{\left(\frac{1}{4}\frac{\xi}{\eta}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\frac{\xi}{\eta}\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\right)^{1/2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\,\vec{e}_z .$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\xi^{1/2}\eta^{1/2}\cos\varphi\right)\vec{e}_x + \frac{d}{dt}\left(\xi^{1/2}\eta^{1/2}\sin\varphi\right)\vec{e}_y +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\xi-\eta\right)\frac{1}{2}\vec{e}_z = \vec{e}_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\dot{\xi}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\dot{\eta}\cos\varphi - \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right) +$$

$$+ \vec{e}_y\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\dot{\xi}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\dot{\eta}\sin\varphi + \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) + \left(\dot{\xi}-\dot{\eta}\right)\frac{1}{2}\vec{e}_z =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\xi}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\sin\varphi\,\vec{e}_y + \vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}\dot{\eta}\left(\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\sin\varphi\,\vec{e}_y - \vec{e}_z\right) + \sqrt{\xi\eta}\,\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\xi}\sqrt{\frac{\eta+\xi}{\xi}}\,\vec{e}_\xi + \frac{1}{2}\dot{\eta}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}}\,\vec{e}_\eta + \sqrt{\xi\eta}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi .$$

№4.

Эллиптические координаты: $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v$ $(a = \mathrm{const})$.

$$\vec{r} = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v\,\vec{e}_x + a\,\mathrm{sh}\,u\sin v\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_u = \frac{a\,\mathrm{sh}\,u\cos v\,\vec{e}_x + a\,\mathrm{ch}\,u\sin v\,\vec{e}_y}{\left(a^2\mathrm{sh}^2u\cos^2v + a^2\mathrm{ch}^2u\sin^2v\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,u\cdot\cos v\,\vec{e}_x + \mathrm{ch}\,u\sin v\,\vec{e}_y}{\left(\mathrm{sh}^2u\,(1-\sin^2v) + \mathrm{ch}^2u\sin^2v\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,u\cos v\,\vec{e}_x + \mathrm{ch}\,u\sin v\,\vec{e}_y}{\left(\mathrm{sh}^2u + \sin^2v\right)^{1/2}} .$$

$$\vec{e}_v = \frac{-a\,\mathrm{ch}\,u\sin v\,\vec{e}_x + a\,\mathrm{sh}\,u\cos v\,\vec{e}_y}{\left(a^2\mathrm{ch}^2u\sin^2v + a^2\mathrm{sh}^2u\cos^2v\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{-\operatorname{ch}u \sin v\, \vec{e}_x + \operatorname{sh}u \cos v\, \vec{e}_y}{(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2}}$$

$$\vec{v} = a\frac{d}{dt}(\operatorname{ch}u\cos v)\,\vec{e}_x + a\frac{d}{dt}(\operatorname{sh}u \sin v)\,\vec{e}_y =$$

$$= a(\operatorname{sh}u\cdot\dot{u}\cos v - \operatorname{ch}u \sin v\cdot\dot{v})\vec{e}_x + a(\operatorname{ch}u\cdot\dot{u}\sin v +$$

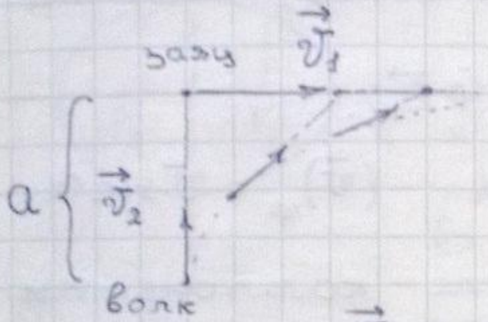
$$+ \operatorname{sh}u\cos v\cdot\dot{v})\,\vec{e}_y = a\dot{u}(\operatorname{sh}u\cos v\,\vec{e}_x + \operatorname{ch}u\sin v\,\vec{e}_y) +$$

$$+ a\dot{v}(-\operatorname{ch}u\sin v\,\vec{e}_x + \operatorname{sh}u\cos v\,\vec{e}_y) =$$

$$= a\dot{u}\sqrt{\operatorname{sh}^2u + \sin^2 v}\,\vec{e}_u + a\dot{v}\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}\,\vec{e}_v .$$

Задачи.

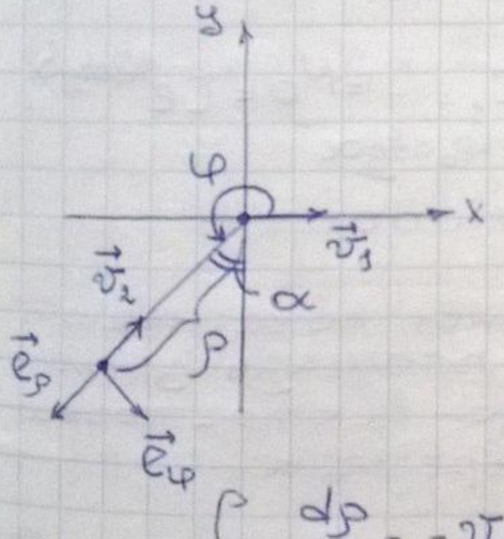
① Задача преследования.



В $\forall$ момент времени волк бежит в направлении строго на зайца. В нач. момент они двигаются в $\perp$ напр. расст. $= a$. Найти уравнение траектории волка.

$\vec{v}_3$ - скорость волка в СО „заяц".

$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Заяц находится в начале координат. Выбираем полярные коорд.



$$\vec{v}_3 = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$(\vec{v}_3)_\rho = -v_2 - (-v_1\sin\alpha) =$$

$$= -v_2 - v_1\cos\varphi, \text{ т.к. } \alpha + \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

$$-v_2 - v_1\cos\varphi = \dot{\rho}.$$

$$(\vec{v}_3)_\varphi = -v_1\cos\alpha = v_1\sin\varphi = \rho\dot{\varphi}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -v_2 - v_1\cos\varphi, \\ \rho\dfrac{d\varphi}{dt} = v_1\sin\varphi. \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{-v_2 - v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \left(-\frac{v_2}{v_1}\frac{1}{\sin\varphi} - \mathrm{ctg}\,\varphi\right) d\varphi. \Rightarrow$$

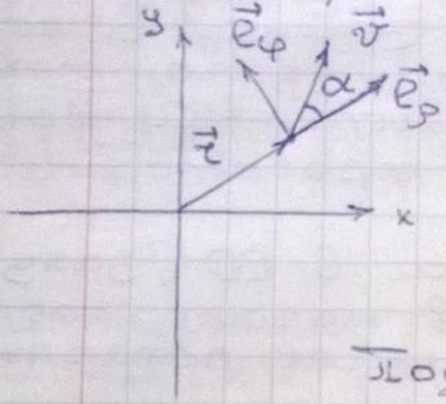
$$\Rightarrow \ln\rho = \frac{v_2}{2v_1}\ln\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right| - \ln|\sin\varphi| + \mathrm{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(\varphi) = C\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right|^{v_2/2v_1}\frac{1}{|\sin\varphi|}.$$

Используем начальные условия: $\rho(t=0) = a$ и $\varphi(t=0) = 3\pi/2$. $\Rightarrow C = a$.

Ответ: $\rho(\varphi) = a\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right|^{v_2/2v_1}\frac{1}{|\sin\varphi|}$.

② Частица движ-ся в плоскости так, что угол между ее $\vec{v}$ и $\vec{r}$ $= \alpha = \mathrm{const}$. Найти уравнение траектории.



$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

$$(\vec{v})_\rho = v\cos\alpha. \quad (\vec{v})_\varphi = v\sin\alpha.$$

Приравниваем компоненты.

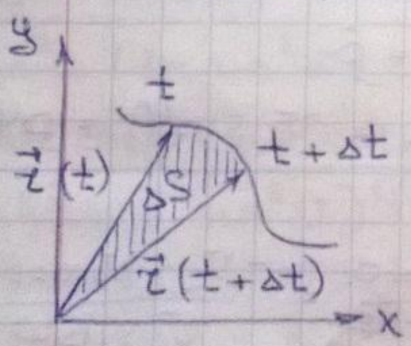
$$\dot{\rho} = v\cos\alpha \text{ и } \rho\dot{\varphi} = v\sin\alpha.$$

Поделим уравнения.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \mathrm{ctg}\,\alpha. \Rightarrow \ln\rho = \varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha + C_1. \Rightarrow \rho = Ce^{\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Ответ: $\rho = Ce^{\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$, где $C = \rho_0 e^{-\varphi_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$.

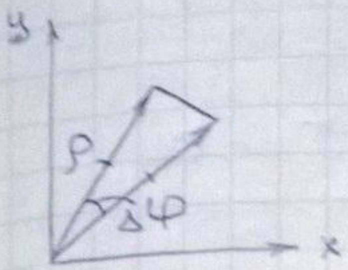
Секторная скорость



Это величина, показывающая какую площадь заметает радиус-вектор точки в единицу времени.

$$\sigma = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Направлена по правилу буравчика.



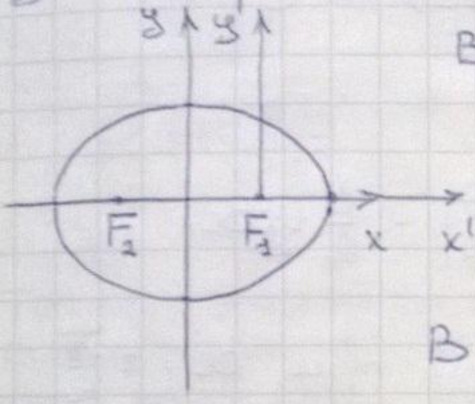
$$\Delta t \to 0$$

$$|\vec{r}(t)| = |\vec{r}(t+\Delta t)| = \rho$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}\rho^2 \sin(\Delta\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 \Delta\varphi$$

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t}\Big|_{\Delta t \to 0} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\varphi}.$$

③ Точка движется по эллипсу с параметром p и эксцентриситетом ε с постоянной относительно его фокуса секторной скоростью σ_0. Найти величину угловой скорости точки в перигелии.



В СК (x,y): $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

В СК (x',y'): $\rho = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$,

где $0 < \varepsilon < 1$, $p = \dfrac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$.

В перигелии $\sigma_0 = \frac{1}{2}\rho_п^2 \dot{\varphi}_п$.

Угловая скорость $\omega_п = \dot{\varphi}_п$.

$\rho_п = \rho_{min} = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ при $\cos\varphi = 1$.

Ответ: $\omega_п = \dfrac{2\sigma_0(1+\varepsilon)^2}{p^2}$.

Домашняя работа 2.

№ 1.

Точка движется по поверхности сферы так, что угол между ее скоростью и меридианом $= \alpha = const$. Найти уравнение траектории точки.

Т.к. точка движется по поверхности сферы, то $\vec{v}$ касателен к этой поверхности и $v_r = 0$.

Также $v_\theta = v\cos\alpha$ и $v_\varphi = v\sin\alpha$.

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.

Приравниваем компоненты.

$\dot{r} = 0$. $r\dot{\theta} = v\cos\alpha$ $r\sin\theta\dot{\varphi} = v\sin\alpha$.

$\sin\theta\frac{d\varphi}{d\theta} = tg\alpha \Rightarrow d\varphi = tg\alpha\frac{d\theta}{\sin\theta}$.

Здесь $v \neq 0$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta \neq const$. Интегрируем.

$\varphi = tg\alpha\int\frac{\sin\theta d\theta}{\sin^2\theta} + C = -tg\alpha\int\frac{d(\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} + C =$

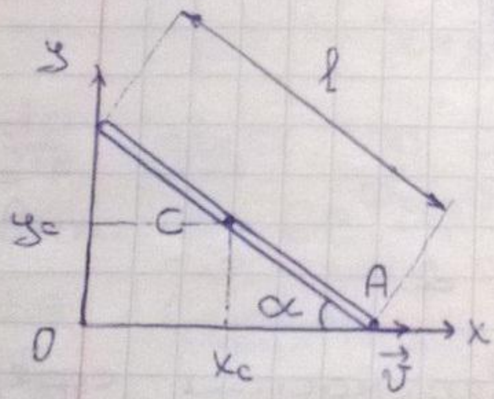
$= -tg\alpha\int\left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta}\right)\frac{1}{2}d(\cos\theta) + C =$

$= \frac{1}{2}tg\alpha\cdot\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right| + C$.

Ответ: $\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}tg\alpha\cdot\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right| - \frac{1}{2}tg\alpha\cdot$

$\cdot\ln\left|\frac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}\right|$ при $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$; $\theta = const$ при $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$.

№2.



Координаты центра стержня

$x_c = \frac{l}{2}\cos\alpha$ и $y_c = \frac{l}{2}\sin\alpha$.

Уравнение траектории

$x_c^2 + y_c^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Траекторией является окружность.

Для точки A: $x_A = vt = l\cos\alpha$. Значит,

$\cos\alpha(t) = \frac{vt}{l} \Rightarrow x_c = \frac{1}{2}vt$ и $y_c = \frac{l}{2}\sqrt{1-\frac{v^2t^2}{l^2}}$

Теперь найдем скорость центра.

$v_x = \dot{x}_c = \frac{1}{2}v$. $v_y = \dot{y}_c = \frac{l}{2}\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2v^2t}{l^2}\right) =$

$$= -\frac{v^2 t}{2l\sqrt{1-\frac{v^2t^2}{l^2}}}.$$

И ускорение.

$$a_x = \dot v_x = 0. \quad a_y = \dot v_y = \frac{-v^2\cdot 2l\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)^{\frac12} + v^2 t\cdot 2l\cdot\frac12\cdot\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2v^2t}{l^2}\right)}{4l^2\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)} = \frac{-v^2\cdot 2l^3\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right) - 2v^4t^2 l}{4l^4\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{v^2}{2l\left(1-\frac{v^2t^2}{l^2}\right)^{3/2}}.$$

№3.

Точка движется по эллипсу с эксцентриситетом ε с постоянной относительно его фокуса секторной скоростью. Найти отношение max и min возможной скорости точки.

$\vec\sigma = \frac12\rho^2\vec\omega$, где ω - угловая скорость.

$\vec v = [\vec\omega, \vec r] \Rightarrow v = \frac{2\sigma}{\rho^2}\rho = \frac{2\sigma}{\rho}$, т.к. $\vec\omega\perp\vec r$.

Уравнение эллипса в полярных координатах (начало в фокусе): $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$.

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

№4.

Точка движется по кардиоиде $\rho = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ так, что ее радиус-вектор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость и ускорение точки как функцию φ.

Уравнение траектории $\rho = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

$$\dot\rho = 2a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\dot\varphi}{2} = -a\omega\sin\varphi.$$

$$\vec v = \dot\rho\,\vec e_\rho + \rho\dot\varphi\,\vec e_\varphi = -a\omega\sin\varphi\,\vec e_\rho + 2a\omega\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\vec e_\varphi.$$

$$\ddot\rho = -a\omega^2\cos\varphi.$$

$$\vec a = \vec e_\rho(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) + \vec e_\varphi(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi) =$$

$$= \vec e_\rho\left(-a\omega^2\cos\varphi - 2\omega^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + \vec e_\varphi\left(-2a\omega^2\sin\varphi\right).$$

Лагранжев формализм (ЛФ)

Рассм. сист. N материальных точек.

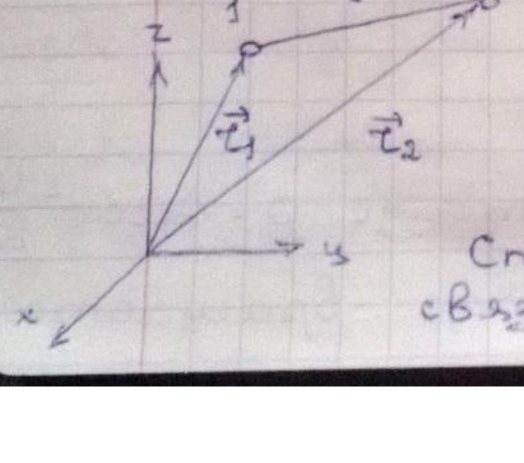
$\alpha = \overline{1,N}$ $\{\vec r_\alpha\}$ - $3N$ координат.

Пусть наложены связи (не вытекающее из уравнения движения ограничения на скорости, коорд. и т.д. точек).

Аналитически связь задается уравнением связи - некоторое соотношение между координатами, скоростями и т.д. точек.

$$f_i(\vec r_1, \dots, \vec r_N; \dot{\vec r}_1, \dots, \dot{\vec r}_N; t) = 0, \quad i = \overline{1,R}.$$

$\boxed{\text{Пр. 1}}$



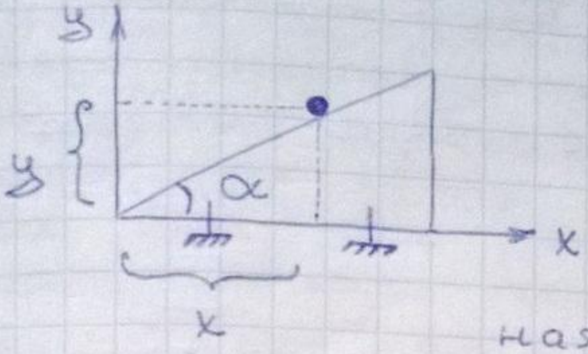
$$(\vec r_1 - \vec r_2)^2 = l^2$$

$$f(\vec r_1, \vec r_2) = (\vec r_1 - \vec r_2)^2 - l^2 = 0.$$

(2 шарика на жестком стержне)

Стационарная и голономная связь.

Пр. 2

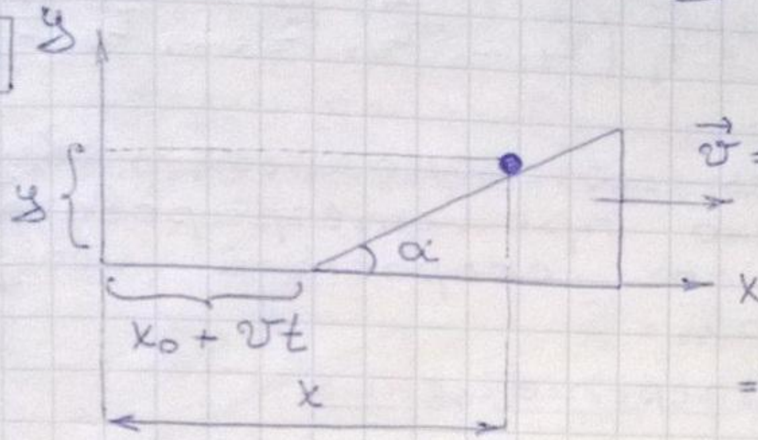


$z = 0 \Rightarrow \underline{f_1(z) = z = 0}$.

$y = x\,tg\alpha \Rightarrow \underline{f_2(x, y) = y - x\,tg\alpha = 0}$.

Стационарная, голономная связь.

Пр. 3



$\underline{f_1(z) = z = 0}$.

$tg\alpha = \dfrac{y}{x - x_0 - vt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f_2(x, y, t) = y - (x - x_0 - vt)\,tg\alpha = 0}$.

Нестационарная, голономная связь.

Классификация связей.

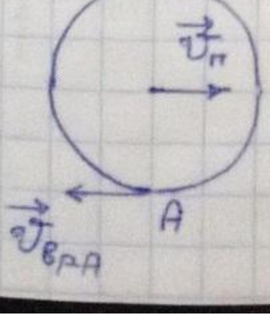
① Стационарная – связь, уравнение которой не зависит явным образом от времени.

$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$.

② Голономная – связь, уравнение которой не зависит от скоростей точек системы.

$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$.

Пр. 4 Качение диска по горизонтальной поверхности без проскальзывания.



$\vec{v}_A = 0$ (условие отсутствия проскальзывания).

$\vec{v}_A = \vec{v}_п + \vec{v}_{врА} \Rightarrow v_п = v_{врА}$.

Плоскость диска всегда вертикальна.

$v_п = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. $v_{врА} = \dot{\varphi}R$.

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \dot{\varphi}R \Rightarrow f(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{\varphi}R = 0.$$

Неголономная связь.

Замечание. Пусть уравнение связи имеет вид $f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt} f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_\alpha}\dot{\vec{r}}_\alpha = \tilde{f}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0.$$

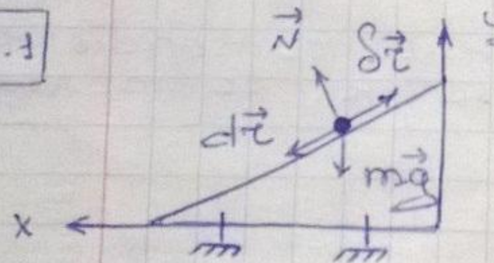
Неужели получилась неголономная связь. Нет. Сначала нужно проинтегрировать. Если зависимость от скоростей исчезнет, то связь голономная.

Виртуальные перемещения

(некоторое воображаемое бесконечно малое произвольное изменение координат точек системы, взятое в данный фиксированный момент времени и удовлетворяющее лишь уравнениям связи).

Это перемещение не обладает длительностью. Наплевать на уравнение движения.

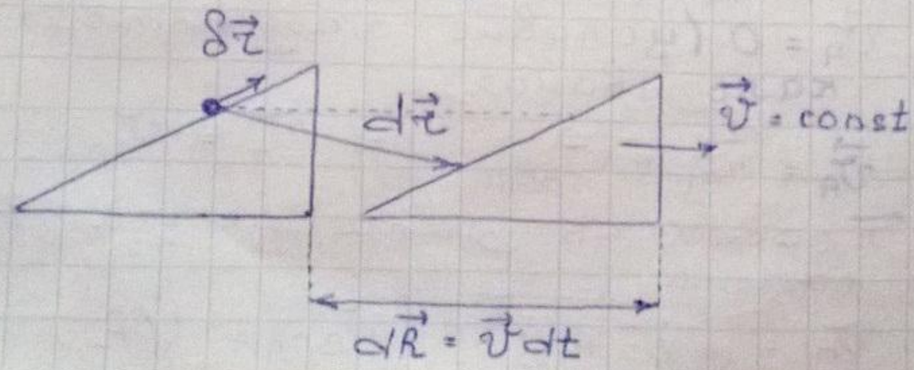
$\boxed{\text{пр. 1}}$



$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} = m\ddot{\vec{r}}, \\ y(0) = h, \\ \vec{v}(0) = 0. \end{cases}$$

$d\vec{r}$ - действительное перемещение, $\delta\vec{r}$ - виртуальное.

$\boxed{\text{пр. 2}}$



③ Идеальная связь.

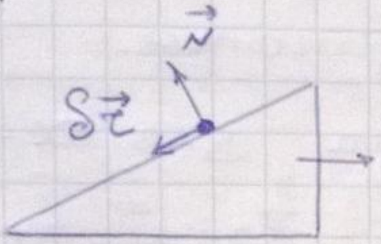
Силы, с которыми тела, реализующие связи, действуют на тела системы, называются **силами реакции связи**.

Идеальная связь - связь, при которой работа всех сил реакции связи на любом виртуальном перемещении равна нулю.

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{R}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha) = 0,$$

где $\vec{R}_\alpha$ - сила реакции связи, действующая на α-ю частицу; $\delta\vec{r}_\alpha$ - виртуальное перемещение α-ой частицы.

пр. 1



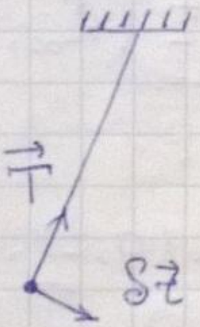
$\vec{R} = \vec{N}$.

$\delta A = (\vec{N}, \delta\vec{r}) = 0$.

Идеальная связь.

Всевозможные поверхности всегда реализуют идеальную связь.

пр. 2

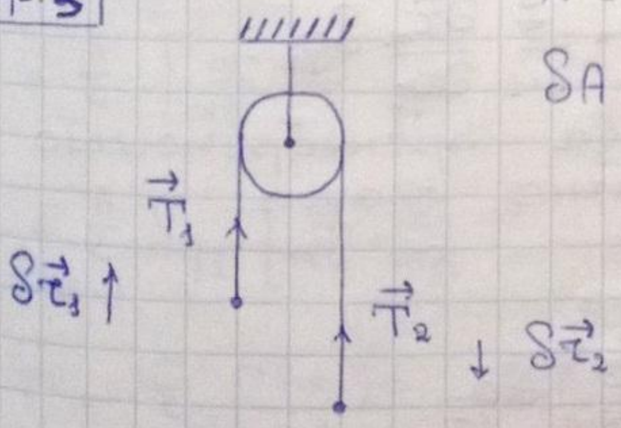


$\vec{R} = \vec{T}$.

$\delta A = (\vec{T}, \delta\vec{r}) = 0$.

Идеальная связь.

пр. 3



$N = 2$. $\delta\vec{r}_1 = -\delta\vec{r}_2$.

$$\delta A = (\vec{T}_1, \delta\vec{r}_1) + (\vec{T}_2, \delta\vec{r}_2) = (\vec{T}_1, \delta\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_2) = 0.$$

Идеальная связь.

Формулировка ЛФ.

Рассмотрим систему N материальных точек на которые наложены связи: 1) голономные, 2) идеальные.

Идеальность: $\delta A = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} (\vec{R}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha) = 0.$

Голономность: $f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $i = \overline{1, k}$

$s = 3N - k$ - число степеней свободы (минимально необходимое число координат для однозначного задания положения точек системы)

$\{q_1, \dots, q_s\}$ - обобщенные координаты.

Записываем II закон Ньютона для α-ой частицы.

$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha$, где $\vec{F}_\alpha$ - заданные внешние силы.

Скалярно домножаем на $\delta\vec{r}_\alpha$ и суммируем

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\ddot{\vec{r}}_\alpha, \delta \vec{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{F}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{R}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{F}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha).$$

Так как $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s, t) = \vec{r}_\alpha(q, t)$, то

$$\delta\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q + \delta q, t) - \vec{r}_\alpha(q, t) = \left[\vec{r}_\alpha(q, t) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i + \dots\right] - \vec{r}_\alpha(q, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i.$$

Все последующие члены ряда пренебрежимо малы, так как δq_i бесконечно малы.

Преобразуем правую часть.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{F}_\alpha, \delta\vec{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} \left(\vec{F}_\alpha, \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\delta q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} Q_i \,\delta q_i \quad , \text{где}$$

$Q_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$ - обобщенная сила.

Теперь займемся левой частью.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\ddot{\vec{r}}_\alpha, \delta \vec{r}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{d\dot{\vec{r}}_\alpha}{dt}, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \delta q_i =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} m_\alpha \,\delta q_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) - \left(\dot{\vec{r}}_\alpha, \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\right] =$$

Проведем некоторые вспомогательные выкладки.

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i .$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} =$$

$$= \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} .$$

Продолжаем преобразовывать левую часть.

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} m_\alpha \,\delta q_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\alpha, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\dot{\vec{r}}_\alpha, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_i}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\alpha} \frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}}{2}\right)\right] \delta q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \delta q_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T - \frac{\partial}{\partial q_i} T\right], \quad \text{где}$$

$T = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}}{2}$ - кинетическая энергия системы

Приравниваем правую и левую части.

$$\sum_{i=1}^{s} \delta q_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T - \frac{\partial}{\partial q_i} T \right) = \sum_{i=1}^{s} Q_i \,\delta q_i . \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i .$$

$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right)$, где $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^p + \vec{F}_\alpha^d$, $\vec{F}_\alpha^p$ - потенциальные силы, $\vec{F}_\alpha^d$ - диссипативные силы.

Сила называется потенциальной, если ее можно представить в виде градиента некоторой скалярной ф-и: $\vec{F}^p = -\nabla U$.

$\vec{F}^p = \vec{F}^p(\vec{r}, t)$ - зависит от $\vec{r}$ и t, но не от $\dot{\vec{r}}$.

$$\vec{F}_\alpha^p = -\nabla_\alpha U \equiv -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_\alpha} U .$$

$$Q_i = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^d \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^d ,$$

где Q_i^d - обобщенная диссипативная сила.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^d + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$

$\equiv 0$, т.к. U не зависит от скорости.

Пусть $L \equiv T - U$ - ф-я Лагранжа. Тогда

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d}$$ - уравнение Лагранжа.

$i = \overline{1, s}$.

Пр. 1 материальная точка в потенциальном поле.

$N = 1.$ $K = 0.$ $\Rightarrow s = 3N - K = 3.$

1) Декартовы координаты.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

$U = U(x, y, z, t)$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t).$$

Теперь составим уравнения Лагранжа.

$\vec{F}^d = 0 \Rightarrow Q_i^d = 0$.

$q_1 = x: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x.$

Аналогично $m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y$ и $m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$.

2) Цилиндрические координаты.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$U = U(\rho, \varphi, z, t)$.

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z, t).$$

$q_1 = \rho. \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}. \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho}. \Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0.$

$q_2 = \varphi. \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}. \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$

$\Rightarrow m\dot{\varphi}\cdot 2\rho\dot{\rho} + m\rho^2\ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$

$q_3 = z. \quad m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$

3) Сферические координаты.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2).$$

$U = U(r, \varphi, \theta, t)$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r, \varphi, \theta, t).$$

$q_1 = r.$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0.$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}. \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

$q_2 = \varphi.$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}. \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

$q_3 = \theta.$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mr^2\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\cos\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Обобщенные силы.

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{F}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right), \text{ где } i = \overline{1, S}.$$

Пр. 1 материальная точка.

$N = 1. \quad S = 3N - k = 3.$

1) Декартовы координаты.

$q_1 = x.$ $\quad Q_1 = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right) = F_x\frac{\partial x}{\partial x} + F_y\frac{\partial y}{\partial x} + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = F_x.$

$q_2 = y.$ $\quad Q_2 = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) = F_y.$

$q_3 = z.$ $\quad Q_3 = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right) = F_z$

2) Цилиндрические координаты.

$q_1 = \rho.$ $\quad Q_1 = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right) = F_x\frac{\partial x}{\partial \rho} + F_y\frac{\partial y}{\partial \rho} + F_z\frac{\partial z}{\partial \rho} =$

$= F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi = (\vec{F}, \vec{e}_\rho) = F_\rho.$

$q_2 = \varphi.\quad Q_2 = \left(\vec{F}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right) = F_x \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} =$

$= -\rho \sin\varphi F_x + \rho \cos\varphi F_y = \rho(\vec{F}, \vec{e}_\varphi) = \rho F_\varphi.$

$q_3 = z.\quad Q_3 = F_z.$

3) Сферические координаты.

$q_1 = r.\quad Q_1 = \left(\vec{F}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right) = F_x \dfrac{\partial x}{\partial r} + F_y \dfrac{\partial y}{\partial r} + F_z \dfrac{\partial z}{\partial r} =$

$= F_x \dfrac{\partial}{\partial r}(r \sin\theta \cos\varphi) + F_y \dfrac{\partial}{\partial r}(r \sin\theta \sin\varphi) + F_z \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cos\theta) =$

$= F_x \sin\theta \cos\varphi + F_y \sin\theta \sin\varphi + F_z \cos\theta = (\vec{F}, \vec{e}_r) = F_r.$

$q_2 = \varphi.\quad Q_2 = \left(\vec{F}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right) = F_x \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} =$

$= F_x(-r \sin\theta \sin\varphi) + F_y r \sin\theta \cos\varphi = r \sin\theta (\vec{F}, \vec{e}_\varphi) =$

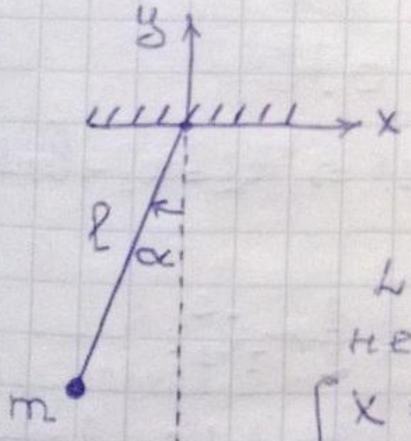
$= r \sin\theta F_\varphi.$

$q_3 = \theta.\quad Q_3 = \left(\vec{F}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) = F_x r \cos\theta \cos\varphi + F_y r \cos\theta \sin\varphi +$

$+ F_z(-r \sin\theta) = r(\vec{F}, \vec{e}_\theta) = r F_\theta.$

№ 1.

Математический маятник. $\vec{F}_{сопр} = -\beta \vec{v}.$



$S = 1.$

$\curvearrowleft \to \alpha > 0$: „+".

$\to \to \alpha < 0$: „−".

$L = T - U$ (сила трения никак не сказывается на ФЛ)

$$\begin{cases} x = -l \sin\alpha, \\ y = -l \cos\alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -l \cos\alpha\, \dot{\alpha}, \\ \dot{y} = l \sin\alpha\, \dot{\alpha}. \end{cases}$$

$$T = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m l^2 \dot{\alpha}^2}{2}.$$

Потенциальная сила $\vec F^p = -\frac{\partial U}{\partial \vec r} = -\mathrm{grad}\,U$.

$$\vec F^p = m\vec g = -mg\vec e_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec e_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec e_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec e_z\right). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = mg, \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = f_1(y, z, t), \\ U = mgy + f_2(x, z, t), \\ U = f_3(x, y, t). \end{cases}$$

Возьмем $U = mgy = -mgl\cos\alpha$.

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot\alpha^2 + mgl\cos\alpha.$$

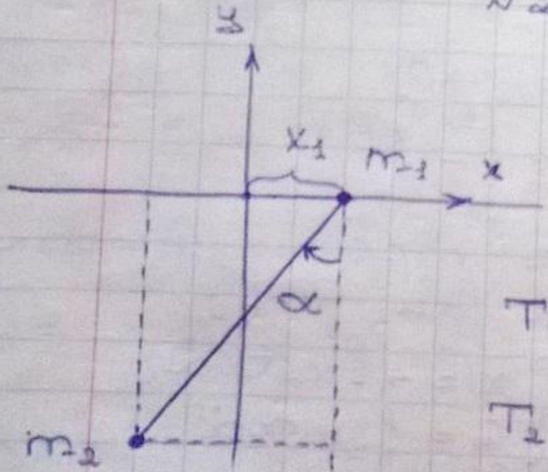
$q = \alpha$. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q^d_\alpha$.

$\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = ml^2\dot\alpha$. $\quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -mgl\sin\alpha$.

$$Q^d_\alpha = \left(\vec F^d, \frac{\partial \vec r}{\partial \alpha}\right) = F^d_x\frac{\partial x}{\partial \alpha} + F^d_y\frac{\partial y}{\partial \alpha} + F^d_z\frac{\partial z}{\partial \alpha} =$$
$$= (\beta l\cos\alpha\,\dot\alpha)(-l\cos\alpha) + (-\beta l\sin\alpha\,\dot\alpha)(l\sin\alpha) =$$
$$= -\beta l^2\dot\alpha.$$

УД: $ml^2\ddot\alpha + mgl\sin\alpha + \beta l^2\dot\alpha = 0$.

№2.



$x_1 = x_1$, $\quad y_1 = 0$.

$x_1 - x_2 = l\sin\alpha \Rightarrow x_2 = x_1 - l\sin\alpha$.

$y_2 = -l\cos\alpha$.

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) = \frac{1}{2}m_1\dot x_1^2.$$

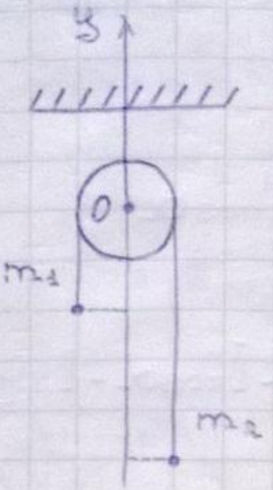
$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot x_2^2 + \dot y_2^2) = \frac{m_2}{2}\left((\dot x_1 - l\cos\alpha\,\dot\alpha)^2 + (l\sin\alpha\,\dot\alpha)^2\right) = \frac{1}{2}m_2\left(\dot x_1^2 - 2\dot x_1 l\cos\alpha\,\dot\alpha + l^2\dot\alpha^2\right).$$

$U_1 = m_1 g y_1 = 0.$

$U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g l\cos\alpha.$

$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 l\cos\alpha\,\dot{\alpha} + l^2\dot{\alpha}^2\right) + m_2 g l\cos\alpha$

N 3.



$\vec{F}_{сопр} = -\beta\vec{v}.$

l – длина нити, R – радиус блока.

$q = y_1.$

$l = -y_1 + \pi R - y_2 \Rightarrow y_2 = \pi R - y_1 - l.$

$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2. \quad T_2 = \frac{1}{m_2}\frac{1}{2} m_2^2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_1^2.$

$U_1 = m_1 g y_1. \quad U_2 = m_2 g y_2 = m_2 g(\pi R - y_1 - l).$

$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 - m_1 g y_1 - m_2 g(\pi R - y_1 - l).$

УЛ $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_1}L - \frac{\partial L}{\partial y_1} = Q^d.$

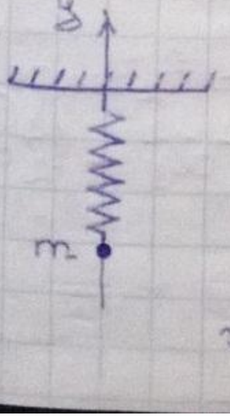
$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1. \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = -m_1 g + m_2 g.$

$Q^d = \left(\vec{F}_1^d, \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y_1}\right) + \left(\vec{F}_2^d, \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y_1}\right) = -\beta\dot{y}_1 + (-\beta\dot{y}_2)(-1) =$

$= -2\beta\dot{y}_1.$

$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_1 g - m_2 g = -2\beta\dot{y}_1.$

N 4.



$\vec{F}^d = -\beta\vec{v}.$

$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2. \quad U = mgy + \frac{1}{2}k(y - l_0)^2.$

$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy - \frac{1}{2}k(y - l_0)^2.$

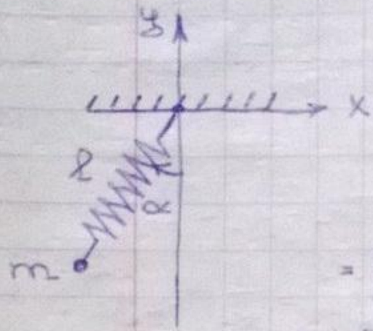
УЛ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = Q^d.$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y. \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg - k(y - l_0).$$

$$Q^d = \left(\vec F^d, \frac{\partial \vec r}{\partial y}\right) = (-\beta \dot y)\cdot 1 = -\beta \dot y.$$

$$m\ddot y + mg + k(y - l_0) = -\beta \dot y.$$

N 5.



$S = 2. \quad N = 1.$

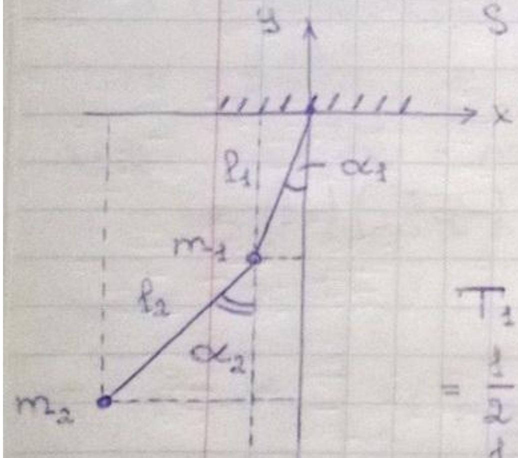
$x = -l\sin\alpha$ и $y = -l\cos\alpha$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) =$$
$$= \frac{1}{2}m\left((-\dot l\sin\alpha - l\cos\alpha\,\dot\alpha)^2 + (-\dot l\cos\alpha + l\sin\alpha\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\dot\alpha)^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot l^2 + l^2\dot\alpha^2).$$

$$U = mgy + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = -mgl\cos\alpha + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot l^2 + l^2\dot\alpha^2) + mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

N 6.



$S = 2, \; N = 2.$

$x_1 = -l_1\sin\alpha_1, \quad y_1 = -l_1\cos\alpha_1.$

$x_2 = -l_1\sin\alpha_1 - l_2\sin\alpha_2,$

$y_2 = -l_1\cos\alpha_1 - l_2\cos\alpha_2.$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) =$$
$$= \frac{1}{2}m_1\left((-l_1\cos\alpha_1\dot\alpha_1)^2 + (l_1\sin\alpha_1\dot\alpha_1)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\alpha_1^2.$$

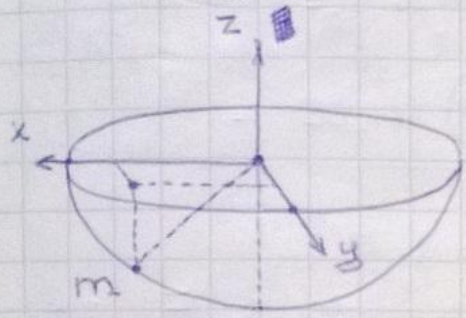
$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2) = \frac{1}{2}m_2\left((-l_1\cos\alpha_1\dot\alpha_1 - l_2\cos\alpha_2\dot\alpha_2)^2 +\right.$$
$$\left.+ (l_1\sin\alpha_1\dot\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2\dot\alpha_2)^2\right) = \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot\alpha_1^2 + l_2^2\dot\alpha_2^2 +\right.$$
$$\left.+ 2l_1l_2\dot\alpha_1\dot\alpha_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right).$$

$$U_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos\alpha_1.$$

$$U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2).$$

$$L = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right) + m_1 g l_1 \cos\alpha_1 + m_2 g (l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2).$$

№8.

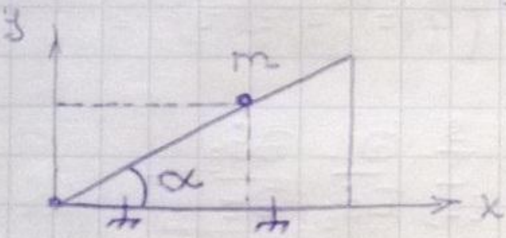


$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \right).$$

$$U = mgz = mgR\cos\theta.$$

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \right) - mgR\cos\theta.$$

№9.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg}\alpha.$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \frac{m\dot{x}^2}{2\cos^2\alpha}.$$

$$U = mgy = mgx \operatorname{tg}\alpha.$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2\cos^2\alpha} - mgx \operatorname{tg}\alpha.$$

<u>Метод интегралов движения в ЛФ.</u>

<u>Интеграл движения</u> - некоторая ф-я переменных $\dot{q}_i, q_i, t$, которая сохраняет свое значение постоянным при движении системы.

$$f(\dot{q}, q, t) = \mathrm{const} \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} f(\dot{q}(t), q(t), t) = 0.$$

Вместо решения УЛ находим интегралы движения и решаем!

1. Обобщенная энергия.

$$\boxed{E \equiv \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.}$$

Пример. 1 материальная точка в потенциальном поле.

$N = 1$. $K = 0$. $\Rightarrow S = 3$. $q_i = \{x, y, z\}$.

$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t)$.

$$E = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L =$$

$$= \dot{x}m\dot{x} + \dot{y}m\dot{y} + \dot{z}m\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z, t).$$

Условие того, что обобщенная энергия E является интегралом движения: $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}E = \sum_{i=1}^{s}\left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}L\left(\dot{q}(t), q(t), t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i Q_i^d.$$

Достаточные условия: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_i^d = 0$.

Если ФЛ явно не зависит от времени и отсутствует диссипация, то обобщенная энергия E является интегралом движения.

2. Обобщенный импульс.

p_i – обобщенный импульс, соответствующий обобщенной координате q_i.

$$\boxed{p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}$$

Пример. 1 материальная точка в потенциальном поле.

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - U(x,y,z,t).$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x, \quad p_2 = m\dot y, \quad p_3 = m\dot z.$$

Условие того, что обобщенный импульс p_i является интегралом движения: $\frac{d}{dt}p_i = 0$.

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_i^d.$$

Достаточные условия: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ и $Q_i^d = 0$.

Если $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ (ФЛ не зависит от q_i), то q_i – циклическая координата. $\Leftrightarrow$

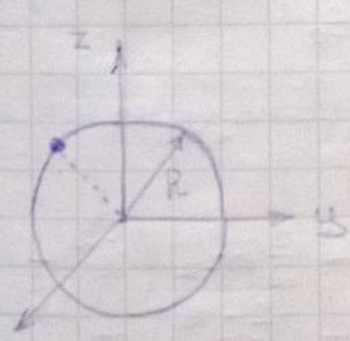
$\Leftrightarrow$ $L = L(\dot q_1, \dots, \dot q_s, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s, t)$.

Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате, при отсутствии диссипации является интегралом движения.

№1.

Частица движется по сфере радиуса R в поле тяготения.

$$s = 2. \quad q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi.$$



$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) = \frac{m}{2}(R^2\dot\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2).$$

$$U = mgz = mgR\cos\theta.$$

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - mgR\cos\theta.$$

Ищем интегралы движения.

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad Q_i^d = 0 \Rightarrow E = const.$

$$E = \sum_{i=1}^{s} \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = \dot\theta\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} + \dot\varphi\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - L =$$

$$= \dot\theta \cdot mR^2\dot\theta + \dot\varphi \cdot mR^2 \sin^2\theta\dot\varphi - \frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right) +$$

$$+ mgR\cos\theta = \frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right) + mgR\cos\theta = const. \quad (1)$$

Само значение энергии находим из начальных условий.

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow$ $p_\varphi = const.$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\dot\varphi = const. \quad (2)$$

из (2): $\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$. подставляем в (1)

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2 + mgR\cos\theta. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\theta} - mgR\cos\theta\right)}.$$

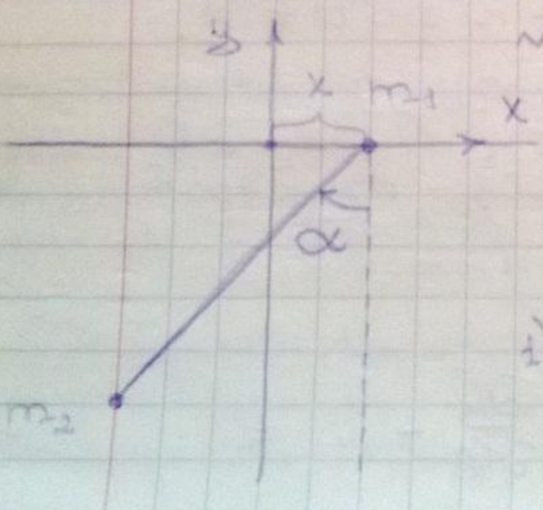
$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \pm\frac{d\theta}{\sqrt{\dots\dots\dots}}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = \theta(t)$ неявно в виде квадратуры.

$$\frac{\dot\theta}{\dot\varphi} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\pm\sqrt{\dots\dots\dots}}{p_\varphi/mR^2\sin^2\theta} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{\theta_0}^{\theta} \pm\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\dots\dots}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi = \varphi(\theta)$ явно, но в виде квадратуры.

№2.



$$L = \frac{1}{2}m_1\dot x^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot x^2 - 2l\cos\alpha\,\dot x\dot\alpha + l^2\dot\alpha^2\right) + m_2 g l\cos\alpha.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow E = const.$

$$E = \sum_{i=1}^{2} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - L = \dot{x}(m_1\dot{x} +$$

$$+ m_2\dot{x} - m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}) + \dot{\alpha}(m_2 l^2\dot{\alpha} - m_2 l\cos\alpha\,\dot{x}) -$$

$$- \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + m_2 l\cos\alpha\,\dot{x}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\alpha}^2 - m_2 g l\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 - m_2 l\cos\alpha\,\dot{x}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\alpha}^2 - m_2 g l\cos\alpha$$

2) $\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\ Q_1^* = 0. \Rightarrow P_x = \text{const}.$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2\dot{x} - m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}.$$

Из второго ур-я $\dot{x} = \frac{P_x + m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}}{m_1 + m_2}$.

Подставляем в первое уравнение.

$$E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{P_x + m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}}{m_1+m_2}\right)^2 -$$

$$- m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}\left(\frac{P_x + m_2 l\cos\alpha\,\dot{\alpha}}{m_1+m_2}\right) + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\alpha}^2 - m_2 g l\cos\alpha$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{P_x^2}{m_1+m_2} - \frac{1}{2}\frac{m_2^2 l^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2}{m_1+m_2} + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\alpha}^2 - m_2 g l\cos\alpha$$

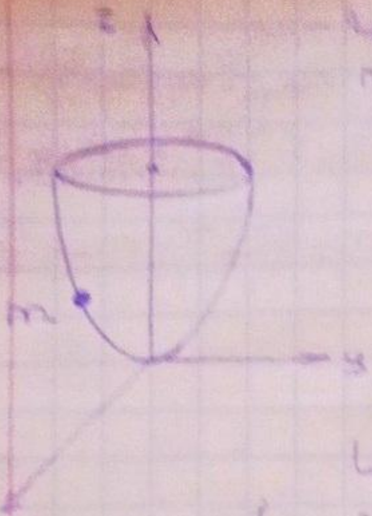
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\alpha}^2\left(1 - \frac{m_2\cos^2\alpha}{m_1+m_2}\right) = E - \frac{1}{2}\frac{P_x^2}{m_1+m_2} + m_2 g l\cos\alpha$$

$$\dot{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{2E - \frac{P_x^2}{m_1+m_2} + 2m_2 g l\cos\alpha}{m_2 l^2\left(1 - \frac{m_2\cos^2\alpha}{m_1+m_2}\right)}}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \pm\frac{d\alpha}{\sqrt{\cdots}}.$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} = \frac{\frac{P_x \pm m_2 l\cos\alpha\sqrt{\cdots}}{m_1+m_2}}{\pm\sqrt{\cdots}}$$

№3.
Частица движется по поверхности параболоида: $z = a(x^2+y^2)$.



Решаем задачу в цилиндрических координатах.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + (2a\rho\dot\rho)^2).$$

$$U = mgz = mga\rho^2.$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2 + 2ma^2\rho^2\dot\rho^2 - mga\rho^2.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $Q_i^d = 0$ $\Rightarrow$ $E = \text{const}$.

$$E = \sum_{i=1}^{2} \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = \dot\rho \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} + \dot\varphi \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - L = \dot\rho(m\dot\rho + 4ma^2\rho^2\dot\rho) + \dot\varphi(m\rho^2\dot\varphi) - \frac{1}{2}m\dot\rho^2 - \frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2 - 2ma^2\rho^2\dot\rho^2 + mga\rho^2 = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2 + 2ma^2\rho^2\dot\rho^2 + mga\rho^2.$$

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, $Q_i^d = 0$ $\Rightarrow$ $p_\varphi = \text{const}$.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi.$$

Из второго ур-я: $\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}$. Подставляем в первое.

$$E = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\right)^2 + 2ma^2\rho^2\dot\rho^2 + mga\rho^2.$$

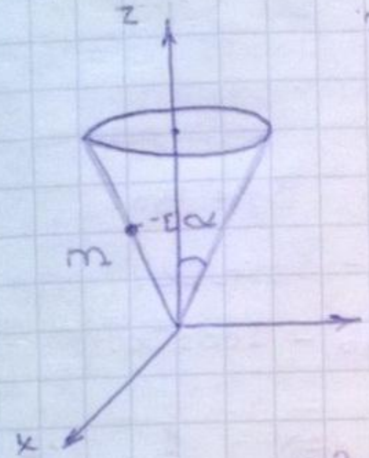
$$\frac{1}{2}m\dot\rho^2(1 + 4a^2\rho^2) = E - \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} - mga\rho^2.$$

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2E - \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} - 2mga\rho^2}{m(1+4a^2\rho^2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{\rho_0}^{\rho} \pm \frac{d\rho}{\sqrt{\dots\dots}}.$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{\dots\dots}}{p_\varphi / m\rho^2} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{\rho_0}^{\rho} \pm \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dots\dots}}.$$

№4.



Частица движется по поверхности конуса. Решаем задачу в цилиндрических координатах.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{z} \Rightarrow z = \rho \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2\operatorname{ctg}^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2.$$

$$U = mgz = mg\rho\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 - mg\rho\operatorname{ctg}\alpha.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow E = \text{const}$.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 + mg\rho\operatorname{ctg}\alpha.$$

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow p_\varphi = \text{const}$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

Из второго ур-я $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}$. Подставляем в первое.

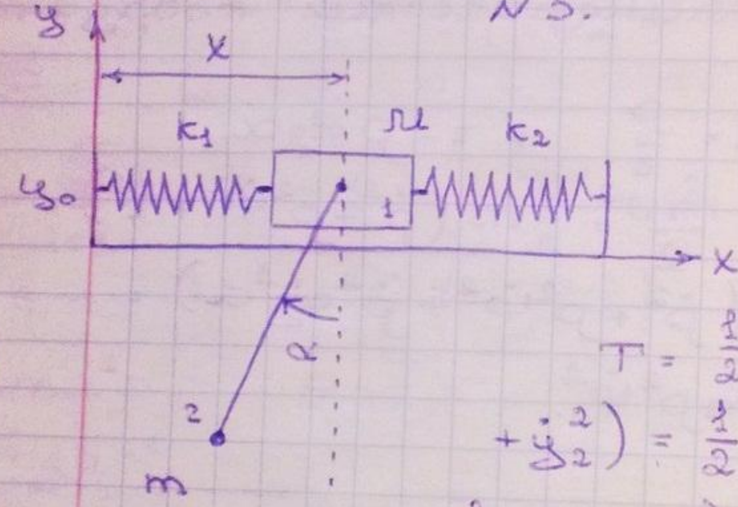
$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} = E - \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} - \rho mg\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2E\sin^2\alpha}{m} - \frac{p_\varphi^2\sin^2\alpha}{m^2\rho^2} - g\rho\sin 2\alpha}.$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\rho_0}^{\rho} \pm\frac{d\rho}{\sqrt{\dots\dots}}.$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{\dots\dots}}{p_\varphi/m\rho^2} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\dots\dots}}.$$

№5.



$x_1 = x,\quad y_1 = y_0.$

$x_2 = x - l\sin\alpha,$

$y_2 = y_0 - l\cos\alpha.$

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{x} - l\cos\alpha\,\dot{\alpha})^2 + l^2\sin^2\alpha\,\dot{\alpha}^2\right).$$

$$U = Mgy_0 + mg(y_0 - l\cos\alpha) + \frac{1}{2}k_1(x - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(L - x - l_2)^2$$

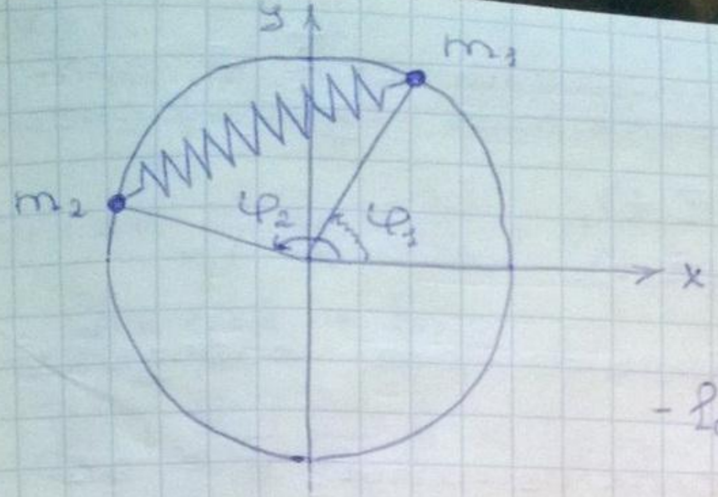
$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\alpha}l\cos\alpha + l^2\dot{\alpha}^2) + mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}k_1(x - l_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(L - x - l_2)^2 - Mgy_0 - mgy_0.$$

№6.

Решаем задачу в полярных координатах.

$$T = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\varphi}_2^2.$$

$$U = m_1gR\sin\varphi_1 + m_2gR\sin\varphi_2 + \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) - \right.$$



$-l_0)^2.$

$L = T - U = \frac{1}{2}R^2(m_1\dot{\varphi}_1^2 + m_2\dot{\varphi}_2^2) - gR(m_1 \sin\varphi_1 + m_2 \sin\varphi_2) - \frac{1}{2}k\left(2R\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} - l_0\right)^2.$

Неоднозначность ф-и Лагранжа.
ФЛ определена с точностью до полной производной по времени от скалярной ф-и обобщенных координат и времени $\frac{d}{dt}f(q,t)$.
Т.е. УЛ для системы с ФЛ L совпадает с уравнением Лагранжа для системы с ФЛ $L' = L + \frac{d}{dt}f(q,t)$.
L и L' описывают одну и ту же систему.

Описание движения заряженных частиц в э/м поле в рамках ЛФ.
Уравнения Максвелла в СГС:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho. \qquad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0.$$

Ищем потенциалы.

$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} \equiv 0$. $\Rightarrow$ существует векторный потенциал $\vec{A}$ магнитного поля такой, что $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Т.к. $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} \equiv 0$, то $\exists$ скалярный потенциал φ электрического поля такой, что

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi.$$

Утв. По данным потенциалам $\vec{A}, \varphi$ напряженности $\vec{E}, \vec{H}$ определяются однозначно.

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t), \\ \varphi = \varphi(\vec{r}, t). \end{cases}$$

Потенциалы зависят только от координат и времени.

Утв. По данным $\vec{E}, \vec{H}$ потенциалы $\vec{A}, \varphi$ определяются неоднозначно.

Пусть известны потенциалы $\vec{A}, \varphi$, соответствующие данной конфигурации $\vec{E}$ и $\vec{H}$ э/м поля. Построим другой набор потенциалов.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\alpha(\vec{r}, t). \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

$$\vec{H}' = \operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha(\vec{r}, t) = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{H}.$$

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \nabla\alpha\right) =$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Переход $\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\alpha(\vec{r}, t), \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \end{cases}$ не меняющий $\vec{E}$ и $\vec{H}$, называется калибровочным преобразованием. Неизменность $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при калибровочных преобразованиях называется калибровочной инвариантностью.

ФЛ заряженной частицы с m, e

$$\boxed{L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) - e\varphi}$$

УД: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{лор} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{H}]$.

Покажем, что УЛ $\equiv$ УД.

$N = 1. \quad S = 3. \quad q_i = \{x, y, z\}.$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) - e\varphi.$$

$$q_1 = x: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - e\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

$$\text{УЛ}: \; m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) + e\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Учтем, что $\frac{dA_x(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}$. Получаем

$$m\ddot{x} = e\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{z}.$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

$$\text{УЛ}: \; m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}(H_z\dot{y} - H_y\dot{z}).$$

Также

$$[\vec{v} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(H_z\dot{y} - H_y\dot{z}) + \cdots$$

Окончательно $m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}\left([\vec{v}\times\vec{H}]\right)_x$.

Осуществим теперь калибровочное преобразование.

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\alpha(\vec{r},t), \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\vec{r},t)}{\partial t}. \end{cases}$$

$$L' = L + \frac{e}{c}\left(\nabla\alpha, \dot{\vec{r}}\right) - e\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = L + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\dot{z}\right) = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\alpha(\vec{r},t)\right).$$

Однородные и постоянные электрическое и магнитное поля.

$\vec{H} = \mathrm{const}$, $\vec{E} = \mathrm{const}$.

Выберем оси системы координат так, чтобы $\vec{H} \parallel Oz$.

$\vec{E} = \vec{E}_0$, $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$, где $H_0 = \mathrm{const}$.

Из условия $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ получаем систему уравнений для нахождения векторного потенциала.

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_x &: \ 0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \vec{e}_y &: \ 0 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ \vec{e}_z &: \ H_0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\}$$

Выбор частного решения для $\vec{A}, \varphi$ – выбор нормировки.

Ищем 4Р с $A_z = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A_y}{\partial z} \Rightarrow A_y \neq A_y(z). \\ 0 &= \frac{\partial A_x}{\partial z} \Rightarrow A_x \neq A_x(z). \\ H_0 &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\}$$

① $A_y = H_0 x$, $A_x = 0$.

② $A_y = 0$, $A_x = -H_0 y$.

③ $A_y = \frac{1}{2} H_0 x$, $A_x = -\frac{1}{2} H_0 y$.

Пусть $\vec{A} = \frac{1}{2} H_0 \left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)$.

$$\frac{e}{c}\left(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \frac{eH_0}{2c}\left(-y\dot{x} + x\dot{y}\right).$$

В выбранной калибровке $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$. Поэтому

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi \;\Rightarrow\; \varphi = -\left(\vec{E}_0\cdot\vec{r}\right).$$

ФЛ: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \boxed{\frac{eH_0}{2c}\left(-y\dot{x} + x\dot{y}\right)} + e\left(\vec{E}_0\cdot\vec{r}\right)$.

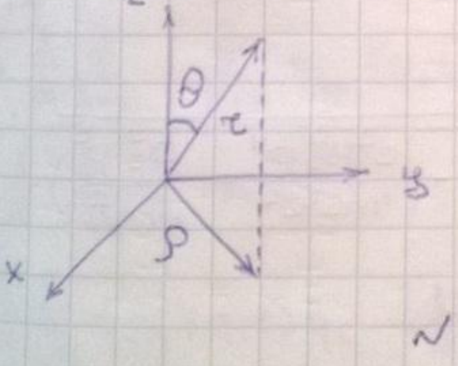
Перепишем ФЛ в цилиндрические координаты.

$q = \{\rho, \varphi, z\}$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho\cos\varphi\left(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) - \rho\sin\varphi\left(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right) = \rho^2\dot{\varphi}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2\dot{\varphi}.$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \boxed{\frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot{\varphi}} + e\left(\vec{E}_0\cdot\vec{r}\right).$$

Теперь в сферические координаты.



$\rho = r\sin\theta$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \boxed{\frac{eH_0}{2c} r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}} + e\left(\vec{E}_0\cdot\vec{r}\right).$$

№ 1.

Частица массой m и заряда e движется в постоянном магнитном поле. $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_i^d = 0 \Rightarrow E = \text{const}$.

$$E = \dot\rho \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} + \dot\varphi \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} + \dot z \frac{\partial L}{\partial \dot z} - L = \dot\rho (m\dot\rho) + \dot\varphi \left(m\rho^2\dot\varphi + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\right) + \dot z (m\dot z) - \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot\varphi =$$

$$= \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot z^2 = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right).$$

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ и $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow$ $p_\varphi = const.$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi + \frac{eH_0}{2c}\rho^2.$$

3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ и $Q_i^d = 0$. $\Rightarrow$ $p_z = const.$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z.$$

Из третьего уравнения $\dot z = \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$. $\Rightarrow z - z_0 = \frac{p_z}{m}(t - t_0)$.

Из второго: $\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{eH_0}{2mc}$.

Подставляем в первое ур-е.

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m}{2}\rho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{eH_0}{2mc}\right)^2 + \frac{m}{2}\frac{p_z^2}{m^2}.$$

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{p_\varphi eH_0}{2mc} + \frac{e^2H_0^2\rho^2}{8mc^2} + \frac{p_z^2}{2m}.$$

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^2} + \frac{p_\varphi eH_0}{m^2c} - \frac{e^2H_0^2\rho^2}{4m^2c^2} - \frac{p_z^2}{m^2}}.$$

$$dt = \pm\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2E\rho^2}{m} - \frac{p_\varphi^2}{m^2} + \frac{p_\varphi eH_0}{m^2c}\rho^2 - \frac{e^2H_0^2\rho^4}{4m^2c^2} - \frac{p_z^2\rho^2}{m^2}\right)}}$$

to be continued ...

№ 2.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \dot{x}e^{\gamma t} + \gamma x e^{\gamma t} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{d}{dt}(xe^{\gamma t}).$$

Рассмотрим ФЛ $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$.

УЛ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. $\frac{\partial L}{\partial x} = 0.$ $\Rightarrow m\ddot{x} = 0.$ $\Rightarrow \dot{x} = v_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0).$

Составим интегралы движения.

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q^d = 0$. $\Rightarrow E = const.$

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \dot{x}m\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

2) $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ и $Q^d = 0$. $\Rightarrow p_x = const.$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

№ 3.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{s} b_i(q,t)\dot{q}_i + c(q,t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\dot{q}_i\dot{q}_j) + \sum_{i=1}^{s} b_i(q,t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\left(\dot{q}_i\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_j\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)\right) + b_k(q,t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\left(t_{ik}(q,t)\dot{q}_i + \sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\dot{q}_j\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) + b_k(q,t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} t_{ik}(q,t)\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} t_{kj}(q,t)\dot{q}_j + b_k(q,t)$$

$$E = \sum_{k=1}^{s}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\dot{q}_k\left(\sum_{i=1}^{s} t_{ik}(q,t)\dot{q}_i +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{s} t_{kj}(q,t)\dot{q}_j + 2b_k(q,t)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_j -$$

$$-\sum_{i=1}^{s} b_i(q,t)\dot q_i - c(q,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} t_{ij}(q,t)\dot q_i \dot q_j - c(q,t).$$

№ 1 (продолжение).

Сделаем замену $a = \rho^2$.

$$\int \frac{da}{\sqrt{-\frac{e^2H_0^2}{m^2c^2}a^2 + \left(\frac{8E}{m} + \frac{4p_\varphi e H_0}{m^2c} - \frac{4p_z^2}{m^2}\right)a - \frac{4p_\varphi^2}{m^2}}} =$$

$$= \int \frac{da}{\sqrt{\alpha a^2 + \beta a + \gamma}}, \text{ где}$$

$$\alpha = -\frac{e^2H_0^2}{m^2c^2}, \quad \beta = \frac{8E}{m} + \frac{4p_\varphi e H_0}{m^2c} - \frac{4p_z^2}{m^2}, \quad \gamma = -\frac{4p_\varphi^2}{m^2}.$$

№ 4.

Частица движется в магнитном поле

$$\vec H = \frac{H_0}{ch^2(ay)}\vec e_z.$$

Ищем векторный потенциал $\vec A$.

$$\vec H = \operatorname{rot}\vec A. \iff \begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{H_0}{ch^2(ay)}. \end{cases}$$

Пусть $A_y = A_z = 0$.

$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0. \Rightarrow A_x$ не зависит от z.

$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{H_0}{ch^2(ay)} \Rightarrow A_x = -\frac{H_0}{a}th(ay).$

Теперь найдем скалярный потенциал.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \Rightarrow \varphi = 0.$$

ФЛ $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}\left(-\frac{H_0}{a} th(ay)\right)\dot{x} =$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eH_0}{ac} th(ay)\dot{x}.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_d^i = 0. \Rightarrow E = const.$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1)$$

2) $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ и $Q_d^i = 0. \Rightarrow p_x = const.$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{eH_0}{ac} th(ay). \quad (2)$$

3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ и $Q_d^i = 0. \Rightarrow p_z = const.$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad (3)$$

из (3) находим $z - z_0 = \frac{p_z}{m}(t - t_0)$, $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$.

из (2): $\dot{x} = \frac{p_x}{m} + \frac{eH_0}{amc} th(ay)$.

Подставляем в (1).

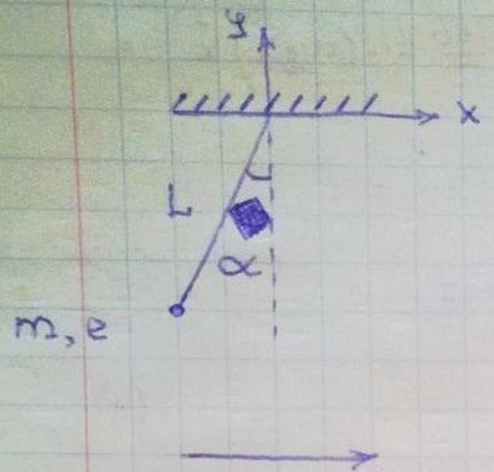
$$\frac{2E}{m} = \left(\frac{p_x}{m} + \frac{eH_0}{amc} th(ay)\right)^2 + \dot{y}^2 + \frac{p_z^2}{m^2},$$

$$\dot{y} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_z^2}{m^2} - \left(\frac{p_x}{m} + \frac{eH_0}{amc} th(ay)\right)^2}.$$

$$t - t_0 = \pm\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\cdots\cdots\cdots}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\pm\sqrt{\cdots\cdots\cdots}}{\frac{p_x}{m} + \frac{eH_0}{amc} th(ay)}.$$

№5.



Найдем скалярный потенциал φ электрического поля.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\varphi_x = E_0, \\ -\varphi_y = 0, \\ -\varphi_z = 0. \end{cases} \Rightarrow \varphi = -E_0 x.$$

$$\vec{E}_0 = \text{const} \qquad \begin{cases} x = -L\sin\alpha \\ y = -L\cos\alpha. \end{cases}$$

ФЛ $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + eE_0 x - mgy = \frac{m}{2}(+L^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + L^2\sin^2\alpha\,\dot{\alpha}^2) - eE_0 L\sin\alpha + mgL\cos\alpha =$

$$= \frac{1}{2} mL^2\dot{\alpha}^2 - eE_0 L\sin\alpha + mgL\cos\alpha.$$

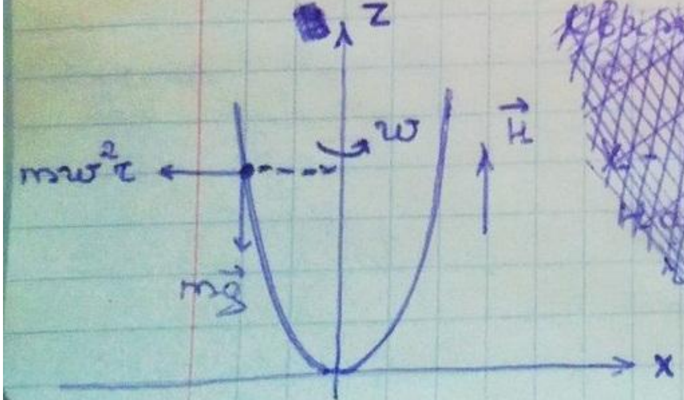
Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_\alpha = 0$, то $E = \text{const}$.

$$E = \frac{1}{2} mL^2\dot{\alpha}^2 + eE_0 L\sin\alpha - mgL\cos\alpha,$$

$$\dot{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{2E}{mL^2} - \frac{2eE_0\sin\alpha}{mL} + \frac{2g\cos\alpha}{L}},$$

$$t - t_0 = \pm\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\ldots\ldots\ldots}}.$$

№6



Магнитное поле $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot\varphi - mgz =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2 + 4a^2\rho^2\dot\rho^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\omega - mga\rho^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad и \quad Q_d^i = 0. \Rightarrow E = const.$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 - \rho^2\omega^2 + 4a^2\rho^2\dot\rho^2\right) + mga\rho^2 - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\omega$$

$$E + \frac{m\rho^2\omega^2}{2} - mga\rho^2 = \frac{m\dot\rho^2}{2}\left(1 + 4a^2\rho^2\right) - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\omega$$

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{\frac{2E}{m} + \rho^2\omega^2 - 2ga\rho^2 + \frac{eH_0}{mc}\rho^2\omega}{1 + 4a^2\rho^2}}.$$

$$t - t_0 = \pm\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{\ldots\ldots}}.$$

№7.

$\vec{E} = E_0\vec{e}_x$, $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$, $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Векторный потенциал $\vec{A} = \frac{1}{2}H_0\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)$.

Скалярный потенциал $\varphi = -E_0 x$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\left(-y\dot x + x\dot y\right) + eE_0 x - mgz.$$

Составим УЛ.

1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x - \frac{eH_0}{2c}y. \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{eH_0}{2c}\dot y + eE_0.$$

$$m\ddot x - \frac{eH_0}{2c}\dot y - \frac{eH_0}{2c}\dot y - eE_0 = 0. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\ddot x - \frac{eH_0}{c}\dot y - eE_0 = 0. \qquad (1)$$

2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eH_0}{2c}x. \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{eH_0}{2c}\dot{x}.$

$$m\ddot{y} + \frac{eH_0}{c}\dot{x} = 0. \qquad (2)$$

3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg.$

$$m\ddot{z} + mg = 0. \iff \ddot{z} = -g. \qquad (3)$$

$\dot{z} = -gt + C_1$. Из начальных условий $C_1 = v_{0z} + gt_0$.

$\dot{z} = v_{0z} - g(t - t_0). \Rightarrow z = v_{0z}t - g\frac{(t-t_0)^2}{2} + C_2.$

$C_2 = z_0 - v_{0z}t_0. \Rightarrow z = z_0 + v_{0z}(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}.$

Преобразуем (2).

$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{eH_0}{c}x\right). \Rightarrow m\dot{y} = -\frac{eH_0}{c}x + C_3.$

$C_3 = mv_{0y} + \frac{eH_0}{c}x_0. \Rightarrow \dot{y} = \frac{eH_0}{mc}(x_0 - x) + v_{0y}.$

Подставляем в (1).

$$m\ddot{x} + \frac{e^2H_0^2}{mc^2}(x - x_0) - \frac{eH_0}{c}v_{0y} - eE_0 = 0.$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{eH_0}{mc}\right)^2}_{=\omega} x = \left(\frac{eH_0}{mc}\right)^2 x_0 + \frac{eH_0}{mc}v_{0y} + \frac{eE_0}{m}.$$

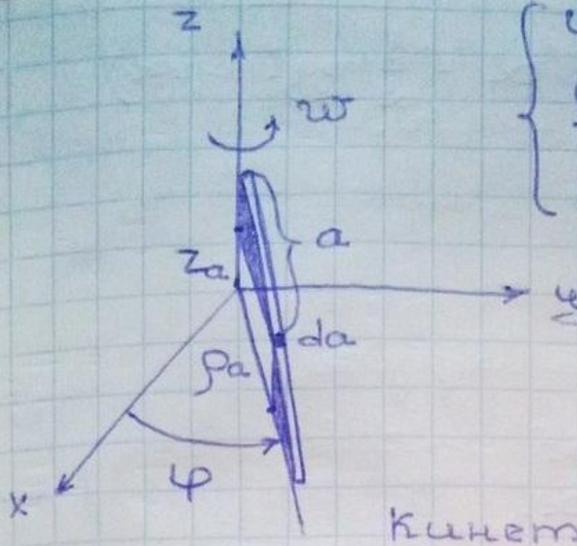
$$x(t) = C_4\cos\omega t + C_5\sin\omega t + x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{mc^2E_0}{eH_0^2}.$$

Движение тел с распределенной массой

№1.

Палочка: m, l. $\omega = \text{const}$.

Разбиваем стержень на кусочки длиной da.



$$\begin{cases} \varphi = \omega t + \varphi_0, \\ \rho_a = a\cos\alpha, \\ z_a = (l-a)\sin\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\varphi = \omega, \\ \dot\rho_a = -a\dot\alpha\sin\alpha, \\ \dot z_a = (l-a)\dot\alpha\cos\alpha. \end{cases}$$

Кинетическая энергия элемента da:

$$dT = \frac{dm\cdot v_a^2}{2} = \frac{dm}{2}\left(\dot\rho_a^2 + \rho_a^2\dot\varphi^2 + \dot z_a^2\right) =$$

$$= \frac{dm}{2}\left(a^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha + a^2\omega^2\cos^2\alpha + (l-a)^2\dot\alpha^2\cos^2\alpha\right).$$

$$T = \int dT = \left[\begin{matrix} dm \to da \\ m \to l \\ dm = m\frac{da}{l}\end{matrix}\right] = \frac{m}{2l}\int_0^l da\left(a^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha + \right.$$

$$\left. + a^2\omega^2\cos^2\alpha + (l-a)^2\dot\alpha^2\cos^2\alpha\right) = \frac{m}{2l}\left(\frac{l^3}{3}\dot\alpha^2\sin^2\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{l^3}{3}\omega^2\cos^2\alpha + \frac{l^3}{3}\dot\alpha^2\cos^2\alpha\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{l^2\dot\alpha^2}{3} + \frac{l^2}{3}\omega^2\cos^2\alpha\right).$$

Потенциальная энергия стержня.

$$U = \int dU = \int dm\, g z_a = \frac{mg}{l}\int_0^l da\,(l-a)\sin\alpha =$$

$$= \frac{mg}{l}\left(la - \frac{a^2}{2}\right)\Big|_0^l \sin\alpha = \frac{1}{2}mgl\sin\alpha.$$

ФЛ $L = T - U = \frac{ml^2}{6}\left(\dot\alpha^2 + \omega^2\cos^2\alpha\right) - \frac{1}{2}mgl\sin\alpha.$

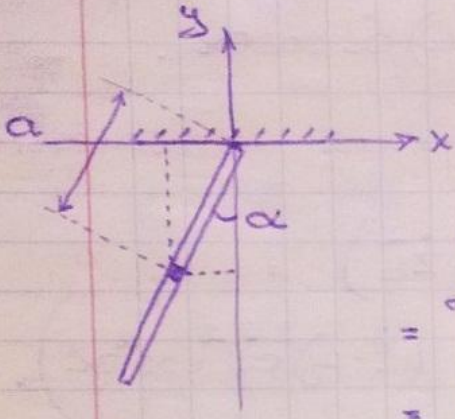
Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_i = 0$, то $E = const.$

$$E = \frac{ml^2}{6}\dot\alpha^2 - \frac{ml^2}{6}\omega^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}mgl\sin\alpha.$$

$$\dot\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E + \frac{ml^2}{6}\omega^2\cos^2\alpha - \frac{1}{2}mgl\sin\alpha\right)}.$$

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\ldots\ldots}}.$$

№ 2.



$$\begin{cases} x_a = -a\sin\alpha, \\ y_a = -a\cos\alpha. \end{cases}$$

$$dT = \frac{dm\,v_a^2}{2} = \frac{dm}{2}\left(\dot x_a^2 + \dot y_a^2\right) =$$

$$= \frac{dm}{2}\left(a^2\dot\alpha^2\cos^2\alpha + a^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{a^2\dot\alpha^2\,dm}{2}.$$

$$T = \int\limits_0^l m\frac{da}{l}\,\frac{a^2\dot\alpha^2}{2} = \frac{m\dot\alpha^2}{2l}\,\frac{a^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{1}{6}ml^2\dot\alpha^2.$$

$$dU = dm\,g\,y_a.$$

$$U = \int\limits_0^l m\frac{da}{l}g\left(-a\cos\alpha\right) = -\frac{mg\cos\alpha}{l}\,\frac{a^2}{2}\Bigg|_0^l = -\frac{1}{2}mgl\cos\alpha.$$

$$L = T - U = \frac{1}{6}ml^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\alpha.$$

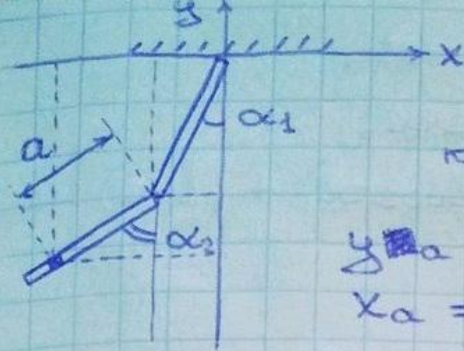
Так как $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_\alpha = 0$, то $E = \text{const}$.

$$E = \frac{1}{6}ml^2\dot\alpha^2 - \frac{1}{2}mgl\cos\alpha. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E + \frac{1}{2}mgl\cos\alpha\right)}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\ldots\ldots}}.$$

№ 3.



$T_1 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\alpha}_1^2$. $\quad U_1 = -\frac{1}{2} mgl\cos\alpha_1$

Рассмотрим нижнюю палочку.

$$y_a = -l\cos\alpha_1 - a\cos\alpha_2,$$
$$x_a = -l\sin\alpha_1 - a\sin\alpha_2.$$

$$dT = \frac{dm}{2}\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2\right) = \frac{dm}{2}\Big(\left(-l\cos\alpha_1\dot{\alpha}_1 - a\cos\alpha_2\dot{\alpha}_2\right)^2 + \left(l\sin\alpha_1\dot{\alpha}_1 + a\sin\alpha_2\dot{\alpha}_2\right)^2\Big) = \frac{dm}{2}\left(l^2\dot{\alpha}_1^2 + a^2\dot{\alpha}_2^2 + 2la\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right).$$

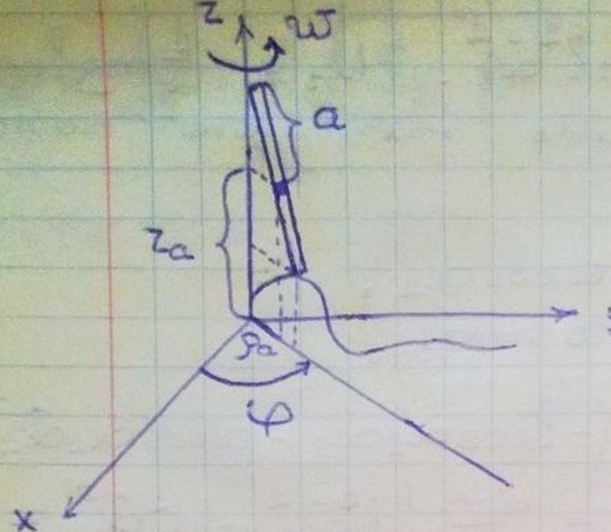
$$T_2 = \int_0^l \frac{m}{2}\frac{da}{l}\left(l^2\dot{\alpha}_1^2 + a^2\dot{\alpha}_2^2 + 2la\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right) = \frac{m}{2l}\left(l^2\dot{\alpha}_1^2 a + \frac{a^3}{3}\dot{\alpha}_2^2 + la^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right)\Big|_0^l = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\alpha}_2^2 + l^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right).$$

$dU = dm\, g\, y_a$.

$$U_2 = \int_0^l m\frac{da}{l}g\left(-l\cos\alpha_1 - a\cos\alpha_2\right) = -\frac{mg}{l}\left(la\cos\alpha_1 + \frac{a^2}{2}\cos\alpha_2\right)\Big|_0^l = -mgl\left(\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos\alpha_2\right).$$

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{4}{3}\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{3}\dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right) + mgl\left(\frac{3}{2}\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos\alpha_2\right).$$

№4.



$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega t, \\ \rho_a = a\cos\alpha, \\ z_a = f(l\cos\alpha) + (l-a)\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\varphi = \omega, \\ \dot\rho_a = -a\dot\alpha\sin\alpha, \\ \dot z_a = -f' l \sin\alpha\,\dot\alpha + (l-a)\cos\alpha\,\dot\alpha \end{cases}$$

$$dT = \frac{dm}{2}\left(\dot\rho_a^2 + \rho_a^2\dot\varphi^2 + \dot z_a^2\right) = \frac{dm}{2}\Big(a^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha +$$
$$+ a^2\omega^2\cos^2\alpha + \left((l-a)\dot\alpha\cos\alpha - f'(l\cos\alpha)\,l\dot\alpha\sin\alpha\right)^2\Big) =$$
$$= \frac{dm}{2}\Big(a^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha + a^2\omega^2\cos^2\alpha + (l-a)^2\dot\alpha^2\cos^2\alpha +$$
$$+ (a-l)\,l\dot\alpha^2\sin 2\alpha\, f'(l\cos\alpha) + \left(f'(l\cos\alpha)\,l\dot\alpha\sin\alpha\right)^2\Big).$$

$$T = \int dT = \frac{m}{2l}\Big(\frac{a^3}{3}\dot\alpha^2\sin^2\alpha + \frac{a^3}{3}\omega^2\cos^2\alpha +$$
$$+ \frac{(a-l)^3}{3}\dot\alpha^2\cos^2\alpha + \frac{(a-l)^2}{2}\,l\dot\alpha^2\sin 2\alpha\, f'(l\cos\alpha) +$$
$$+ a\left(f'(l\cos\alpha)\,l\dot\alpha\sin\alpha\right)^2\Big)\Big|_0^l = \frac{ml^2}{2}\Big(\frac{1}{3}\dot\alpha^2\sin^2\alpha +$$
$$+ \frac{1}{3}\omega^2\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\dot\alpha^2\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\dot\alpha^2\sin 2\alpha\, f'(l\cos\alpha) +$$
$$+ l\left(F'(l\cos\alpha)\,l\dot\alpha\sin\alpha\right)^2\Big). \ (?)$$

$$dU = dm\cdot g\, z_a$$

$$U = \int_0^l m\frac{da}{l}g\left(f(l\cos\alpha) + (l-a)\sin\alpha\right) =$$
$$= \frac{mg}{l}\left(af(l\cos\alpha) + al\sin\alpha - \frac{a^2}{2}\sin\alpha\right)\Big|_0^l =$$

$$= \frac{mg}{l}\left(l f(l\cos\alpha) + l^2 \sin\alpha - \frac{l^2}{2}\sin\alpha \right) =$$

$$= mg\left(f(l\cos\alpha) + \frac{1}{2} l \sin\alpha \right).$$

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{1}{3}\dot\alpha^2 + \frac{1}{3}\omega^2\cos^2\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\dot\alpha^2 \sin 2\alpha\, f'(l\cos\alpha) + l\left(f'(l\cos\alpha)\, l\dot\alpha \sin\alpha \right)^2 \right) -$$

$$- mg\left(f(l\cos\alpha) + \frac{1}{2} l \sin\alpha \right).$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $Q_\alpha = 0$, то $E = const$.

В состоянии равновесия $\dot\alpha = 0$.

$$E = -\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 \cos^2\alpha + mg\left(f(l\cos\alpha) + \frac{1}{2} l \sin\alpha \right).$$

Сделаем замену $\psi = l\cos\alpha$. Тогда

$$f(\psi) = \frac{1}{mg}\left(E + \frac{1}{6} m\omega^2 \psi^2 - \frac{1}{2} mgl\sqrt{1 - (\psi/l)^2} \right).$$