

У
основ функции конденсированного
состояния ψ в

Хохлов Дмитрий Ренатович

Литература

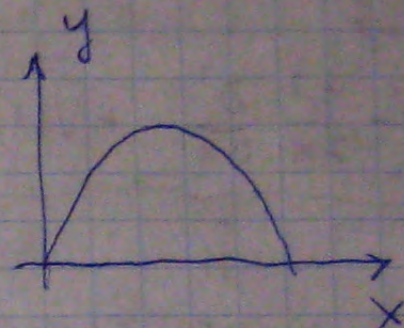
- 1 Кирьбачинский. Квант. в физ. конф. сост.
- 2 Котель, вв. в физ. тб. тела
- 3 Браунт, Чудинков, Эл-ны и фотонты в кр. лк.

Состояние неопредел.

13.09

$$\begin{cases} F_y = m\ddot{y} = -mg \\ F_x = m\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0 \\ x(t) = \dot{x}_0 t + x_0 \end{cases}$$



Ситу. пара переменных, одновр. определе-
ние к-рых невозможно

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \hbar$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$$\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\frac{\hbar}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

уп шарик $m = 1 \text{ кг}$, $\Delta V = 1 \text{ м/с}$

$\Delta x = 10^{-34} \text{ м}$ — ошибка определения коорд.

уп электрон в атоме

$$\Delta y \approx 10^{-10} \text{ м}; \quad \Delta V = 10^7 \text{ м/с}$$

$\Rightarrow$ Понятие траектории неостаточно.

Волновая функция

$$\Psi(x, t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = 1$$

- Ф.Ф.

- нормировка

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right)}_{\hat{H}} \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad - \text{УШ}$$

Стационарное состояние

$$\Psi = \Psi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi = \underbrace{\hbar\omega}_E \Psi$$

Свободная частица: $V(x) \equiv 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0; \quad \Psi = \Psi_0 e^{ikx};$$

$$-k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Psi(x, t) = \underbrace{\Psi_0}_{\text{нормировка}} e^{\frac{2\pi i}{2\pi\hbar} (Et - x\sqrt{2mE})}$$

Коледания струны.

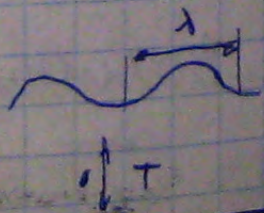
$$y(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$t=0: \quad y^{(x)} = e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$x=0: \quad y^{(t)} = e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$



фаза одинакова:

$$y(x, t) = \text{const} = e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow kx = \omega t;$$

$$x = \frac{\omega}{k} t \quad - \text{V скорость движения фронта.}$$

$$E = \hbar\omega;$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

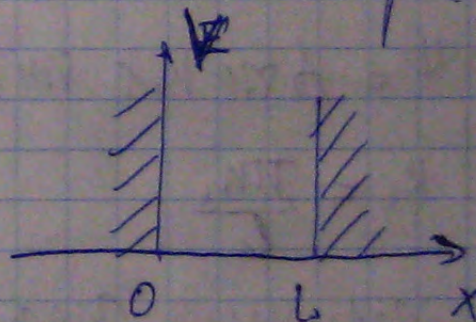
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m p^2}{\hbar^2 2m}} = \frac{p}{\hbar}$$

Соотношение де Бройля

$$k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow p = \hbar k$$

Квантование энергетического спектра.

$$V = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x \in [0, L] \\ \infty & x > L \end{cases}$$



реш. ур. Шр.

$$\Psi = A \cos kx + B \sin kx$$

$$\Psi(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi(x=L) = 0 \Rightarrow \Psi = B \sin kL = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\pi n}{L}; \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m L^2}, \quad n = \overline{1, \infty}$$

(4=0 → Ψ=0)

Трёхмерный случай

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi + V\Psi = E\Psi$$

$$V=0 \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, 0 \leq z \leq l)$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_1(x, t) \Psi_2(y, t) \Psi_3(z, t)$$

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_2 + \frac{1}{\Psi_3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_3 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 = -k_1^2$$

$$\frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_2 = -k_2^2$$

$$\frac{1}{\Psi_3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_3 = -k_3^2$$

$$\Psi = A \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z$$

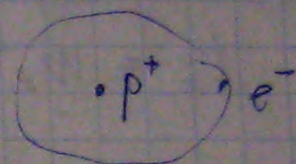
$$k_i = \frac{\pi n_i}{l}$$

одному значению E могут соответствовать несколько наборов $\{n_1, n_2, n_3\}$ н.ч. чисел $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$.

Степень вырождения — число наборов.

Атом водорода

$$V \sim \frac{e^2}{r}$$



$$\{q, i\} = r, \theta, \varphi$$

$$E_n = \frac{R_\infty}{n^2} \quad - \text{энергия уровня}$$

$$R_\infty = \frac{m e^2 \hbar^2}{2 \hbar^2} \quad - \text{const. Ридберга}$$

$$n=1. \quad \Psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \approx 0,5 \text{ \AA} \quad - \text{соблюд. Боровск. радиуса при } Z=1$$

$$r, \theta, \varphi \rightarrow n, l, m$$

квантовые числа

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

$$m_l = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$S_z = \pm \frac{1}{2}$$

При нек-ром n число возм. состояний $2n^2$.

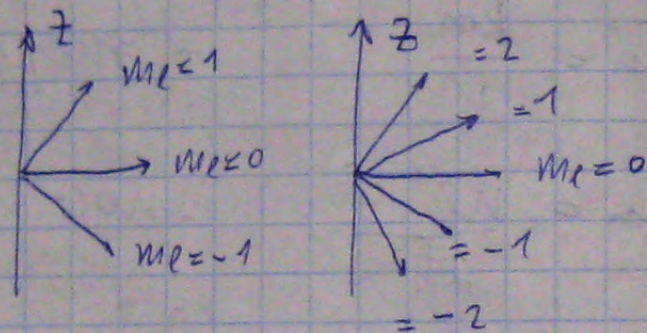
$$L^2 = l(l+1) \hbar^2$$

$$L_z = m_l \hbar$$

- проекция на ось z

$$\langle L^2 \rangle_{nlm} = \int \Psi_{nlm}^* L^2 \Psi_{nlm} = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\langle L_z \rangle_{nlm} = \hbar m_l$$



Принцип Паули (Полупроводник)

$$V = \frac{e g(e)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$z = 3$$

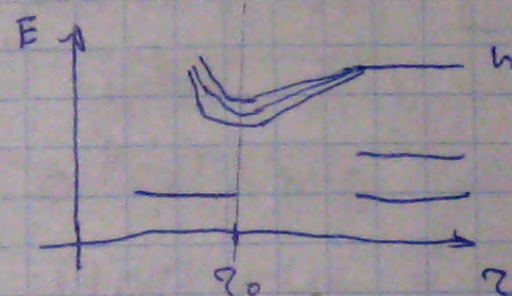
$$2e < z' < 3e$$

- в силу экранировки

Система из N π -нов, уровень n , кратность вырождения g_n .

$N g_n$ - число ~~вырожденных~~ состояний

Будем считать атомы: существование ур. вилу n



расщепление

равновес. расст.

(min энергии) = постоянная решетки

① Трансляция симметрия

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - базис. векторы. При трансляции на один из этих векторов структура не меняется. Пренебрег. дефектами, краями тела и теплов. колебаниями. $(N \gg 1)$

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a})$$

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi(\vec{r} + \vec{a})|^2$$

$$\psi(\vec{a} + \vec{r}) = c(\vec{a}) \psi(\vec{r}),$$

$$\text{где } |c(\vec{a})|^2 = 1$$

$$\text{Пусть } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$$

- потенциал решетки

- кв. модуль в.ф.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 N_1 + \vec{a}_2 N_2 + \vec{a}_3 N_3$$

МКЗ
20.09
(группа)
лектор

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{a} \cdot \vec{p}} \psi(\vec{r}) \Rightarrow \underbrace{c(\vec{a}'') c(\vec{a}')}_{11=1} c(\vec{a})$$

Итак,

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{k}\vec{a}} \psi(\vec{r})$$

Пусть

$$u(\vec{r}) := \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= u(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ u(\vec{r} + \vec{a}) &= \psi(\vec{r} + \vec{a}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{a})} \\ &= (e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \psi(\vec{r})) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{a})} = u(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$u(\vec{r} + \vec{a}) = u(\vec{r})$$
 - периодич. ф.я с периодом решетки

$\Psi(\vec{r}) = \underbrace{U(\vec{r})}_{\text{плоск. волна}} e^{ikz}$ - Теорема Блоха

Таким ~~м-ом~~ наз-ся Блоковский,
м-ом в р-не
в отличие от свобод-м-ов.

$\vec{k}$ - кварков. ~~вектор~~ вектор

$\bar{p}$ - паримирные

$$\vec{p} \propto \vec{h} \vec{k}$$

Перво $\vec{p}_j$ - ед. вектор, α_j - период кристалла,
 L_j - размер кристалла.

Границы "нет" $\Rightarrow$ периодич. гр. усл:

$$\psi(\vec{r} + L_j \vec{n}_j) = \psi(\vec{r})$$

$$\underbrace{u(\vec{r} + L_j \vec{n}_j)}_{u(\vec{r})} \cdot e^{ik(\vec{r} + L_j \vec{n}_j)} = u(\vec{r}) e^{ik\vec{r}} \Rightarrow$$

$$e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{L}_j \vec{n}_j} = 1 \Rightarrow \vec{k}_j \cdot \vec{L}_j \vec{n}_j = 2\pi n \Rightarrow (\vec{k}, \vec{n}) \in \frac{2\pi}{L_j} n.$$

Проекция $\vec{k}$ - кварковых. Вектора на
решётку дискретно.

$$\vec{k}_j = \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j \equiv \vec{b}_j \quad - \text{ вектор обратной решетки}$$

$$\psi(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = u(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) e^{i\phi_j(\vec{r} + a_j \vec{n}_j)} = \psi(\vec{r})$$

Зарисовка В.Ф.

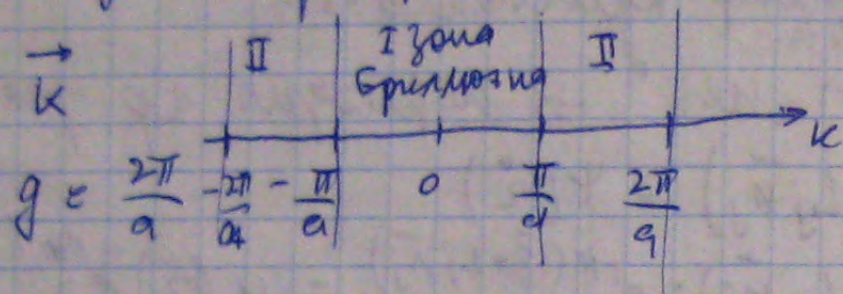
$$\psi; \vec{k} = \vec{k}' + \vec{g}, \quad \vec{g} = \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j$$

$$\psi_k(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = e^{i(\vec{q} + \vec{k}) \cdot a_j \vec{n}_j} \psi_k(\vec{r})$$

$$\psi_k(\vec{r} + a_j \vec{n}) = e^{ik \cdot a_j \vec{n}} \psi(\vec{r})$$

Итак, $\vec{k}$ и $\vec{k} + \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j$ - эквивалентны

уп. одномер. кристалл



здесь -
все р-ры. различные
значения $\vec{k}$. в др. зонах -
такие же

в 3-мерном случае - параллелепипед
зона Бриллюэна

$$\frac{2\pi}{L_j} \rightarrow \frac{2\pi}{L_x} \cdot \frac{2\pi}{L_y} \cdot \frac{2\pi}{L_z} = \text{объем фазового пространства, приходящий на одно значение } \vec{k} \text{ (одно состояние)}$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{V}$$

если Δ - фазов. объем эл-нов, то

$$N = \frac{\Delta V}{(2\pi)^3} \cdot 2$$

- полное число эл-нов.

с учетом спина $k: \uparrow \downarrow$

$$k_0 = \frac{2\Delta}{(2\pi)^3}$$

- их концентрация

особенности на границе зоны Бр.

$$\vec{k}, \vec{n}_j, \vec{a}_j$$

если $\lambda_{gr} \gg a_j$, то вблизи с доном мало

$$\lambda_{gr} = 2a_j \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \pi m = a_j k_j \Rightarrow k_j = \pm \frac{\pi}{a_j} m \quad m \in \mathbb{Z}$$

При отражении кр. зон Бр эл-н отражается
(создание волны в зонах Бр.)

Динамика Блоховских эл-нов.

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \underbrace{\varepsilon(\vec{p})}_{\text{энергия}} + \underbrace{U(\vec{r})}_{\text{пот. энергия}}$$

Ф. Гамильтона

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \hbar \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \vec{F}$$



$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{r}} = \vec{F}_{внеш} = -e|E|$$

$$\delta \varepsilon = -e E V \delta t = -e E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}} \delta t$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \vec{E}$$

- изменение квазиимпульса обусловлено внеш. полем.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma (F_{внеш} + F_{внутр})$$

Для Блохов $\vec{p} \neq m\vec{v}$
 Взаимны не все силы

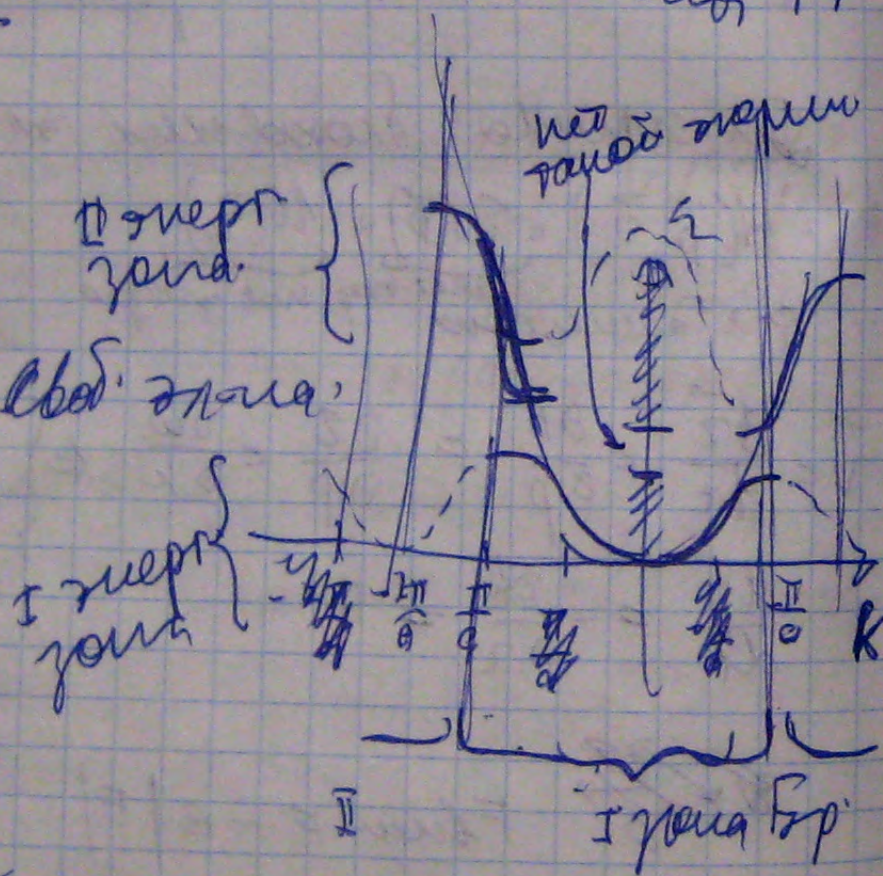
$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \frac{dp_j}{dt}$$

$\frac{1}{m} := \tilde{M}_{ij}^{-1}$ - тензор
 обрат. масс

$$\tilde{M}_{ij} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

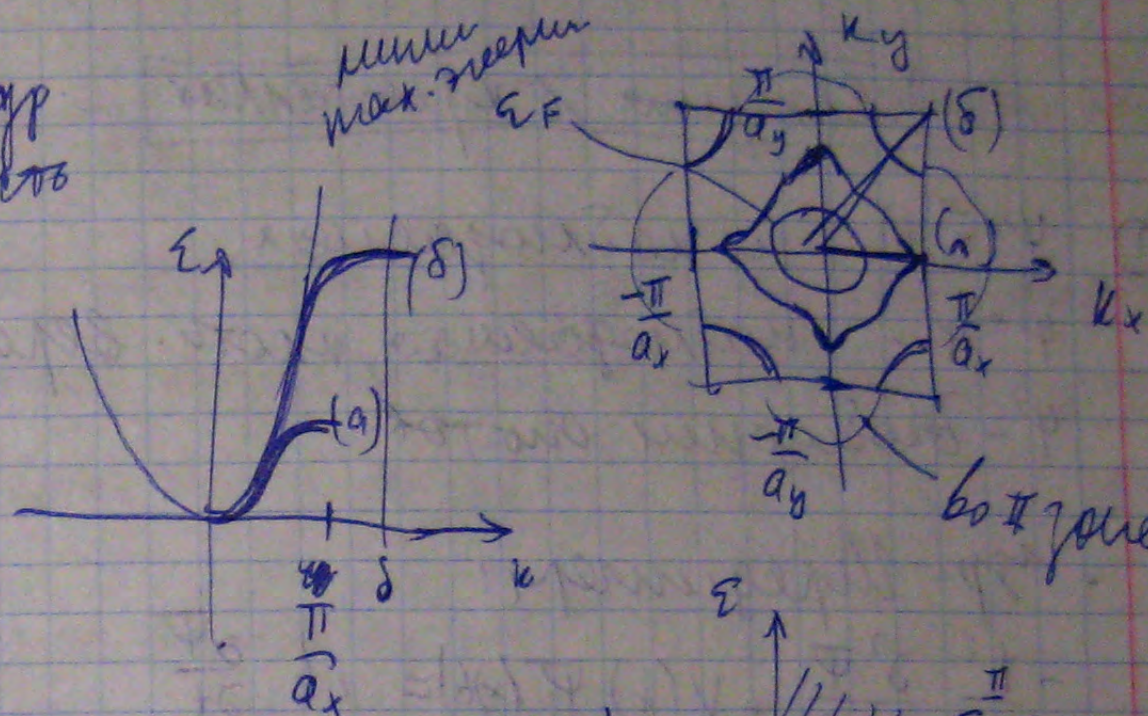
здесь $\vec{v}$ и $\vec{p}$
 вытиски
 (со стороны фермиона)

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} - \text{для свобод. элект.}$$

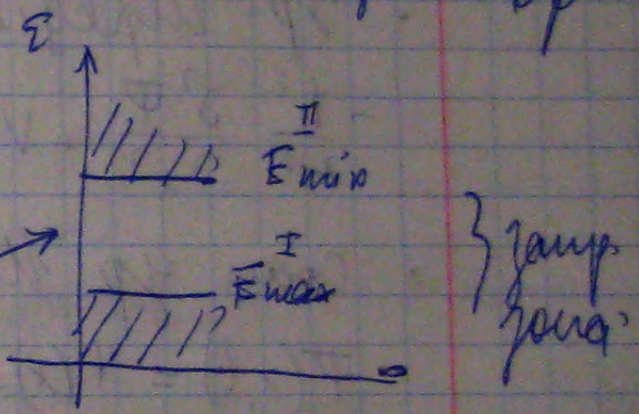


Двухзонный случай

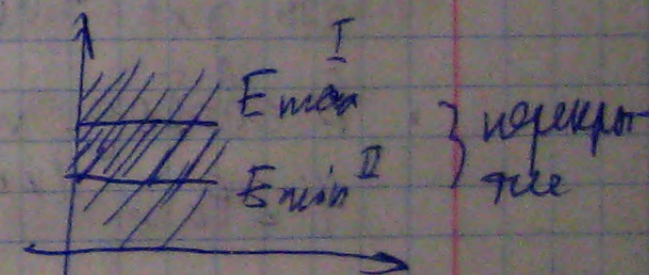
иначе
 иначе



случ 1
 непроводник
 или полупроводник



случ 2
 проводник



Полное число сост. в зоне

$$\left(\frac{2\pi}{a} \right)^3 / \frac{(2\pi)^3}{V} = \frac{V}{a^3} = N, \quad 2N$$

полное
 число
 сост. в зоне
 (2-спинов)

Уравнения в кристаллах

лек 4
27.09

- ① $\Psi(\vec{r}, t)$ - не наблюдаемая,
 $\Psi^* \Psi$ - наблюдаемая, плотн. вероятн
 Ψ - обобщение спотов.

• ур. Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

• Стационар. ур. Шредингера ($\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow E = \text{const}$)

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{i\omega t} \quad \text{— подстановка}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi, \quad E = \hbar \omega$$

• В свобод. пр-бе ($V(x) = 0$)

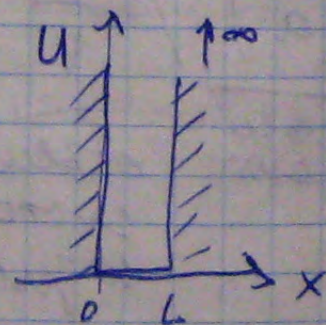
$$\Psi = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{— решение}$$

$$p = \hbar k$$

$$E = \hbar \omega$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

p, k - любые.



• В потенци. яме

$$E_n = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m}$$

при $L \rightarrow \infty$: $\Delta E \rightarrow 0$: дискрет. спектр $\rightarrow$ непрерыв. спектр

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad \text{— для 3-мерно случая.}$$

Разн. состояния с одинак. энергией - вырожденные.
 Степени вырожд. g_n - число разн. сост. с одинак. E

$$\text{пр. } \{n_1, n_2, n_3\} = \{1, 2, 1\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \quad g = 3.$$

① Квант. числа

$$V(r) = \frac{e^2}{r}$$

$$n \leftrightarrow n: E_n = \frac{R_\infty}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$l, m_l \leftrightarrow l, m_l:$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

— гл. квант. число

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

— орбитальное

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, l.$$

— магнитное

физ. смысл:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$$

— момент кол. вращ.

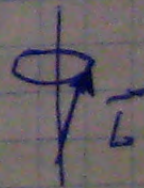
$$L_z = \hbar m_l$$

— проекция момента

$$|L_z| = \hbar m_l \leq \hbar l < \hbar \sqrt{l(l+1)} = |L|. \quad \frac{|L_z|}{|L|} < 1 \quad \text{всегда}$$

Сохраняются только $|L|$ и L_z

Направл. $\vec{L}$ прецессирует



① $g_n = n^2$:

$n=1$:

$l=0, m_l=0$

$n=2$:

$l=0, m_l=0$

$l=1, m_l=0$

$m_l=1$

$m_l=-1$

$n=3$:

$l=0, m_l=0$

$l=1, m_l=0$

$m_l=1$

$m_l=-1$

$l=2$

...

...

...

4

9

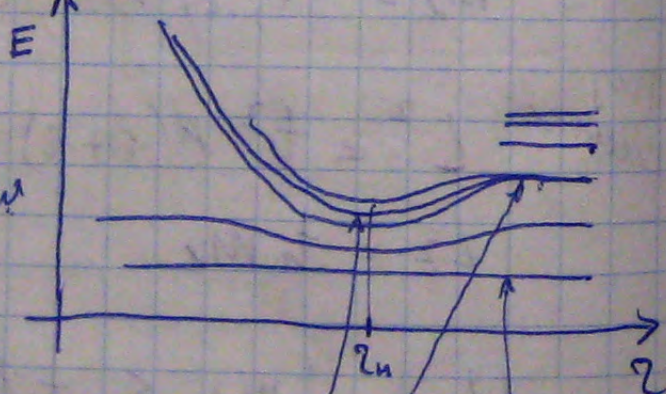
с учётом проекции спина:

$g_n = 2n^2$

В многоэлектронных атомах внешние э-ны экранированы внутренними от воздействия ядра
 $\Rightarrow$ на их энергию влияют только l и m_l .

① Два варианта поведения атома:

э-ны разн. атомов
 находятся в одно состоя-
 нии $\Rightarrow$ аннигилируют
 (принцип Паули)



все направления
 эквивалентны

все направления
 эквивалентны
 (сфер. симметрия)

экраниро-
 вано от
 ядра

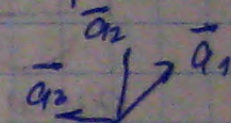
$N \cdot g_n$ - число э-нов
 на уровне

N - число атомов
 в в.б.
 g_n - степень вырожд.
 уровня n .

① Кристалл

трансляционная инвариантность:

при трансляции на $\vec{a}$ к $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ конфигурация
 в в.б. не меняется.



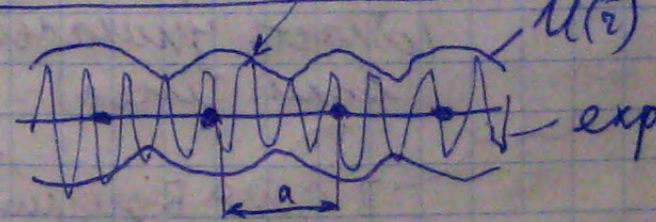
предположения:

- 1) Влияние краёв $\sim$ числу атомов на краю
 Общ. число атомов $\sim$
- 2) Дефекты
- 3) Колебания атомов

ВФ э-на в периодич. потенциале:

$\Psi(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{a})$ - периодич.
 $U(\vec{r})$ - скаляр



электрон не пока-
 зывается у какого-либо
 атома

Здесь $\vec{k}$ - квазиволновой вектор

особенности квант. волн вектора:

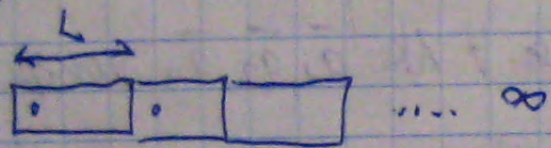
1) • в свобод. пр. бе: $k \in (-\infty, \infty)$ - непрерыв

• в кристалле: k - дискретно!

L - размер кристалла в данном направлении

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

волны



одна и та же волна (по модулю и по фазе!)

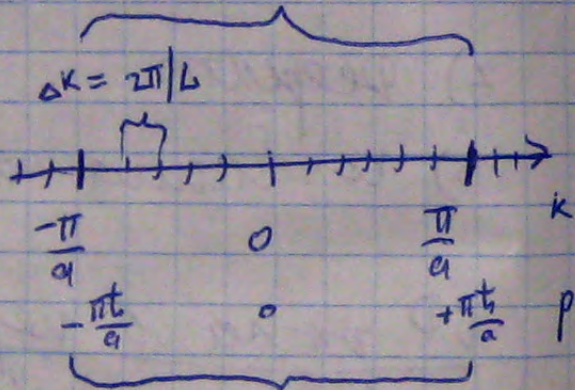
2) для волн. числа k и $k + \frac{2\pi n}{a}$ одинаковы
ме состояния одинаковы

$\Downarrow$

" $\forall k \notin (\text{ЗБрилла}) \exists k_0 \in (\text{ЗБрилла})$:
 $\psi(k) = \psi(k_0)$ "

число разл. k :

$$\frac{\frac{2\pi}{a}}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{L}{a} = N$$



I зона Бриллюэна

(область уникальности волн. чисел)

II зона Бриллюэна

т.к. k - квант. число - определяет сост. эл-на.

Если $k \in \pm \frac{\pi}{a}$ (на границе I зоны Бриллюэна), $\Rightarrow$

процесс выполняемый усл. Вульфа-Брэгга $\Rightarrow$
отражение волн от атомов $\Rightarrow$ стоячая волна (группов. скор. $u = 0$)

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}}$$

- скорость эл-на

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

- II закон Ньютона
 p - квазиимпульс, F - сила внешняя (не решётка)

$\vec{p} \neq m_0 \vec{v}$ для эл-на

$$m \vec{a} \equiv m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{внутр}}$$

(не период) (период)

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

m^* - эквив. масса эл-на (с учётом влияния решётки)

электроны с эквив. массой m^* - квазичастицы, св-ва которых эквивалентны

$$\text{Вводим, } m = m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \right)^{-1}$$

Эл-ны с m^* как будто существуют во внеш. поле, а среда влияет в m^* .

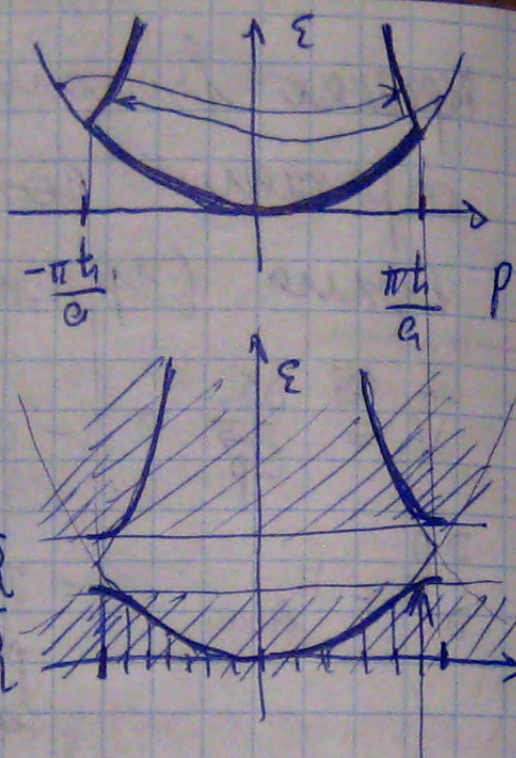
* отклик атома отражение слабый, но атомов много, волны складываются и появ. стояч. волны

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \text{— энергия электрона}$$

и кривая на $\frac{2\pi\hbar}{a}$ по p не меняется, перенесём ветви параболы вправо, где всё физично.

Здесь $\varepsilon(p)$ — многозначная ф.я.

зона
зона
зона



при $p = \pm \frac{\pi\hbar}{a}$ условие Вульва-Брэгга:

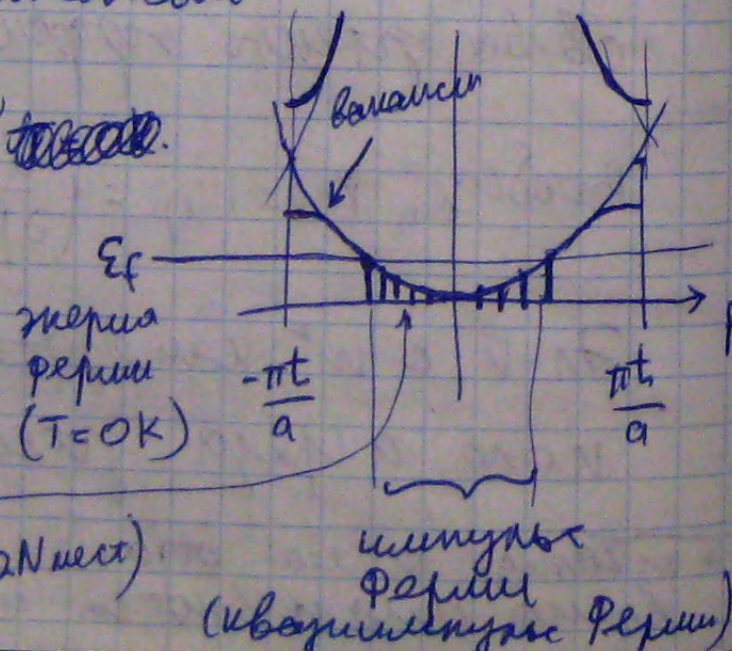
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \Big|_{\hbar k = \pm \frac{\pi\hbar}{a}} = 0$$

на границе на границе

заимствуют края параболы, появ. зон. зона.

Металл (проводник) — в б.б., у к-рог. выше ε_f есть вакансия.

(если канд. элект. займ. 1 эл-н, то места есть, если 2 — мест нет.)



На канд. значение p приходится по 2 проекции спина — (2N мест).

~~ширина зоны~~ Импульс Ферми определяется числом эл-нов свобод. при 0K.

Угловой и ~~фазовый~~ поперечный импульсы определяются шириной зон. зоны.

Лек 5
4.10.14

$$H = \varepsilon(\vec{p}) + V(\vec{z}) \quad \text{— ф-я Гамильтона}$$

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

— I ур. Гамильтона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{z}}$$

— II ур. Гамильтона

$$\vec{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}} \equiv \frac{d\omega}{d\vec{k}}$$

— групп. скор. волны (скорость частицы)

$$\varepsilon = \hbar\omega$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

где F — непрерывная! часть (внешняя)
 $p = m^*v$, m^* — приведённая

$$\Delta \vec{F}_{\text{внеш}} = -e\vec{E}$$

$$\delta \varepsilon = eE \underbrace{v \delta t}_{\delta x}$$

— энергия по перемещению

$$\xi = \frac{\partial \rho}{\partial c} = 3$$

$$\varepsilon \equiv \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} \delta p = v \delta p = e E v \delta t \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \underbrace{e E}_{F_{\text{electric}}}$$

$$m_0 \frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{F}_{\text{elektr}} + \vec{F}_{\text{magnet}}$$

$$\Rightarrow \vec{p} \neq m\vec{v}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \vec{p}_j} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_i \partial p_j} \frac{dp_i}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{\text{new}}$$

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij} \frac{dv_j}{dt} = F_{\text{buern } i}$$

$$m^* = m_{ij}^* = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \right)^{-1}$$

эфф. масса, учиты. вращ. с релёвкой
- тензор

$$m^* = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2} \right)^{-1}$$

При $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$: $m^* = m_0$

При слабо связанным с атомами электро-
нах (н-р, в металлах)

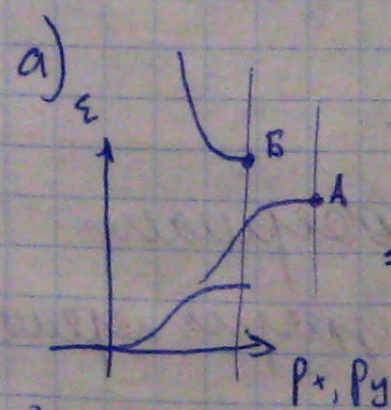
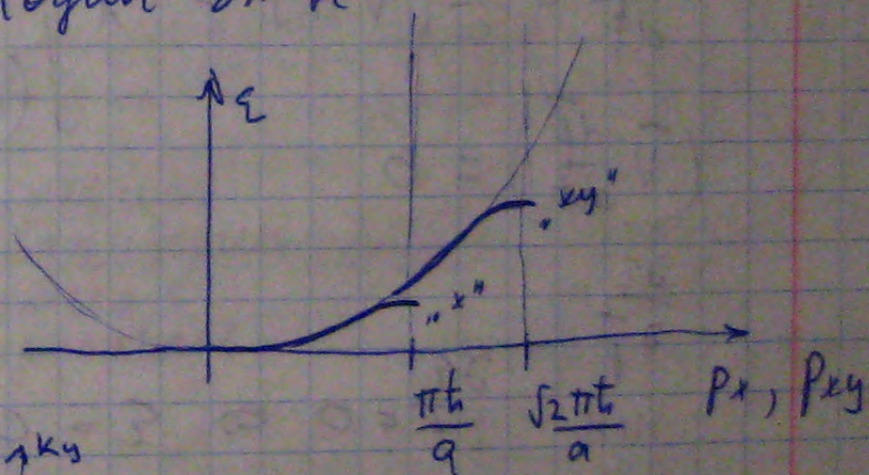
① Расам. гвизерную релієтну



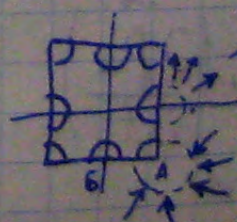
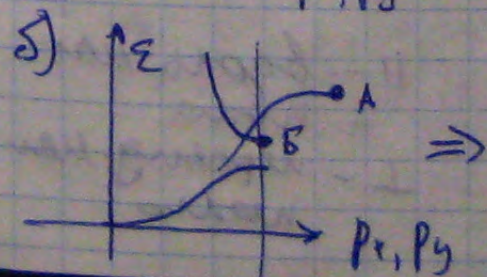
$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} - \text{запасовочный сектор}$$

$$q_f = \frac{p_f^2}{2m}$$

- поверхность Перин
(одна из них)



склопывание
поверхности
Ферри



- растут
- попутный
- сенолов

① движение эл-нов под внеш. ^{магнитным} полем

кинетику движения эл-на определяют дисперсии $\epsilon(p)$

Всё определяется величиной энергии Ферми E_F отсюда и эфф. масса.

Неопределенности $\ll$ значений квазиклассич. приближения

эл-ны в маг. поле:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] = \vec{F}_\perp \quad \left| \begin{array}{l} \text{сила Лоренца} \\ (\vec{v} \perp \vec{H}) \end{array} \right.$$

$$\left(\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}}$$

$$m^* \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \Rightarrow \epsilon = \text{const.}$$

так как ~~маг. поле~~ маг. поле не совершает работы, так оно перпендикулярно перемещению.

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \vec{p}_\parallel}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \vec{p}_\perp}{\partial t} \right)$$

$\parallel$ - вдоль маг. поля
 $\perp$ - перпенд. маг. полю

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right)_\parallel = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_\parallel = \text{const.}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}_\perp \vec{H}] = \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}_\perp}{dt} \vec{H} \right]$$

$$|\vec{p}_\perp| = \frac{eH}{c} |\vec{r}_\perp|$$

$$\vec{p}_\parallel = \text{const.}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m^* c}{eH}$$

- период ~~маг.~~ вращения свобод эл-на

$$T = \frac{2\pi m^* c}{eH}$$

- период вращения эл-на в кристалле

$$m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}$$

циклопотенциальная масса



зная направл. $\vec{H}$, можно опред.

форму поверхн. Ферми, определяя энергию эл-на на поверхности S.

$$\vec{F}_\perp = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] \perp \vec{v} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \text{const.}} \text{ на маг. поле}$$

значение $\varepsilon(\vec{p}) \rightarrow$ значение m^* .

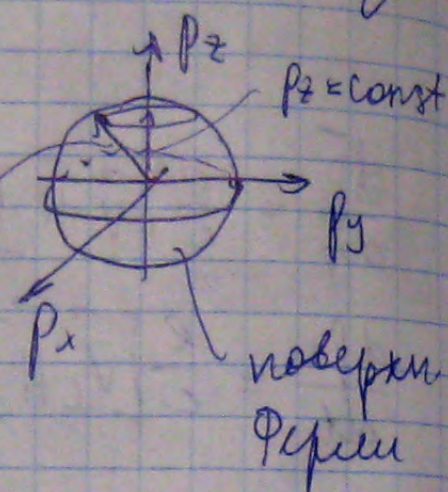
В простейшем случае:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}; \quad \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

($\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ - справедливо
для всех значений
параметров)

Ферми

минимум
Ферми



Плотность эл. сост.

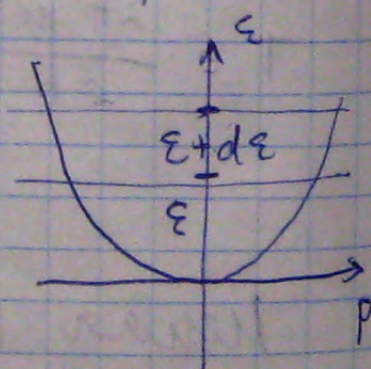
лек 6
11.10

(хотим определить период обращения
по энергии ε).

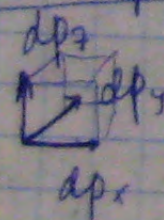
$N(\varepsilon)$ - кол-во эл. сост. с энергией, меньше ε .

$dN(\varepsilon)$ - приращение

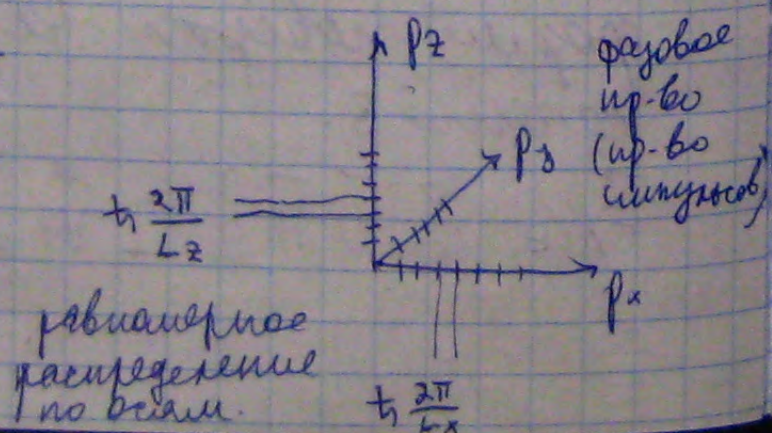
$$D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \text{плотность эл. сост.}$$



3-мерное пространство



элементар
объем



равномерное
распределение
по объемам.

$$dN_p^{(3)} = 2 \cdot \frac{dp_x dp_y dp_z}{\frac{h}{L_x} \frac{h}{L_y} \frac{h}{L_z}} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad \varepsilon = \varepsilon(|\vec{p}|), \quad \varepsilon(\theta), \quad \varepsilon(\varphi) = \text{const.}$$

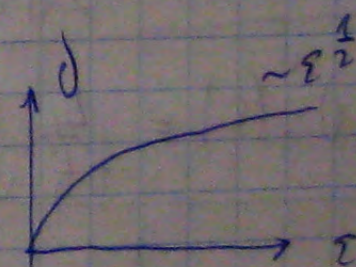
$$dN_p^{(3)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dN_p^{(3)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \cdot 4\pi$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m\varepsilon}; \quad dp = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon - \text{подстав.}$$

$$dN(\varepsilon) = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

$$D(\varepsilon) = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$



2-мерное пространство

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}$$

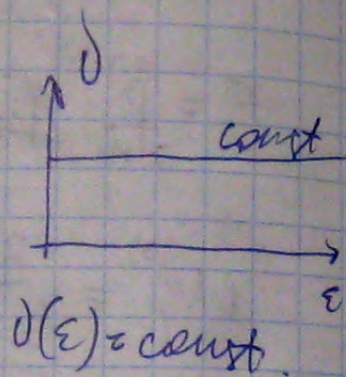
$$dN_p^{(2)} = \frac{2S}{(2\pi\hbar)^2} dp_x dp_y = \frac{2S}{(2\pi\hbar)^2} p dp \cdot 2\pi$$

S - площадь в фазовом
пространстве

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p dp = m d\epsilon$$

$$dN_{\epsilon}^{(2)} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^2} m d\epsilon$$

$$\rho^{(2)}(\epsilon) \equiv \frac{dN_{\epsilon}^{(2)}}{d\epsilon} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^2} m$$



1-мерное пр. б.о

$$dN_p^{(1)} = \frac{2L}{2\pi\hbar} dp = \frac{L}{\pi\hbar} dp$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dp = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\epsilon}} d\epsilon$$

$$dN_{\epsilon}^{(1)} = \frac{L}{2\sqrt{\epsilon}\pi\hbar} \sqrt{2m} d\epsilon = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} d\epsilon$$

$$\rho^{(1)}(\epsilon) = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} \propto \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$



разложим энергию на составляющие?

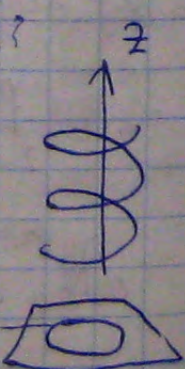
(Ландау) $\rightarrow \epsilon = \epsilon_{||} + \epsilon_{\perp} = \frac{p_{||}^2}{2m} + (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

$$p_{||} = \text{const.}$$

применение
квантования

интерпретация

функция



применение
Фунтментальное $\Rightarrow$ квантуется $\Rightarrow$ не все значения энергии возможны (квантуется)

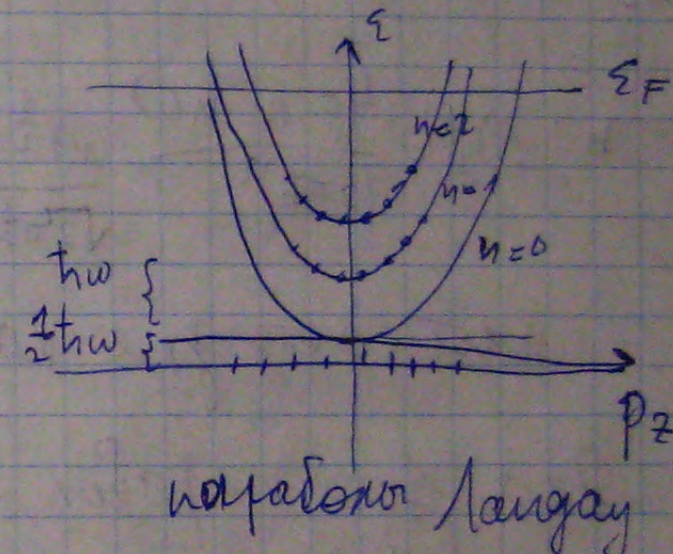
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega = \frac{eH}{m^*c}$$

$$\hbar\omega \sim H$$

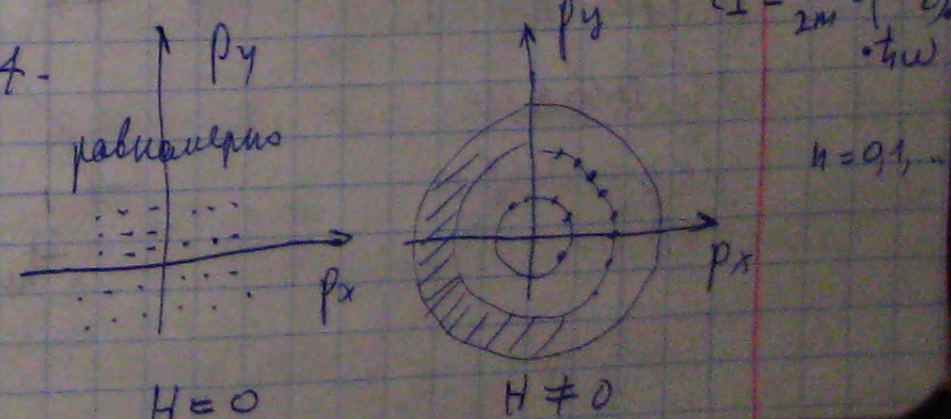
$$H \uparrow \Rightarrow \hbar\omega \uparrow$$

при пересечении
какой-либо энергии
 ϵ_F - энергии ферми-
уровня. Беск. плотности
состояний (1-мерный случай)



По первому прохождению парабол определяем
циклотронную массу m^* .

Рассм $p_z = \text{const.}$

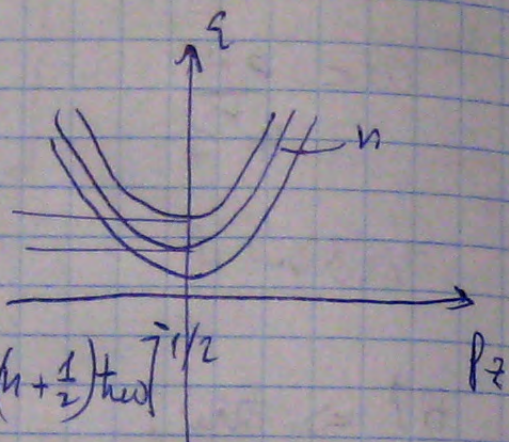


$$S = [2\pi(n+1) - 2\pi n] \frac{\hbar \omega}{2} = 2\pi n \frac{\hbar \omega}{2} - \text{поправка поправки}$$

число
сост. на
ед. объема
по границе
из кривой.

$$2 \cdot \frac{2\pi n \hbar \omega}{(2\pi \hbar)^2}$$

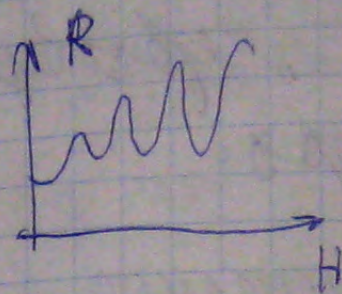
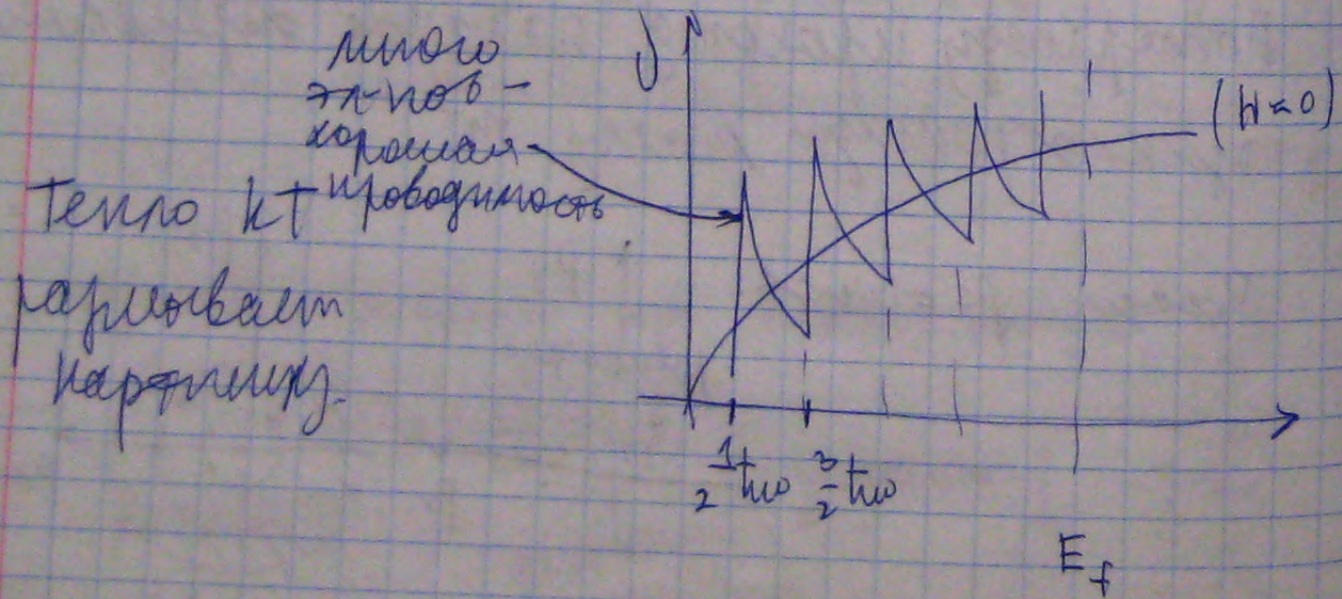
$$n: D_n(\epsilon) = \frac{4\pi m \hbar \omega}{(2\pi \hbar)^2} \frac{m^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi \hbar}} \left[\epsilon - (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \right]^{\frac{1}{2}}$$



плот. сост. где канц. параболы канц.

Для всех парабол, где все π -ноды

$$D(\epsilon) = \sum_{n=0}^{n_{max}} D_n(\epsilon) = \frac{\hbar \omega m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^2} \hbar^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[\epsilon - (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \right]^{\frac{1}{2}}$$



сопротивление
на π в максимумах

Форма поверхности Ферми определяет частоту осцилляций сопротивления

При высоком поле H послед. параболы пересекает уровень Ферми, и

E_f пойдёт вверх с ростом H

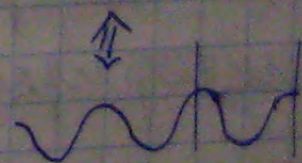
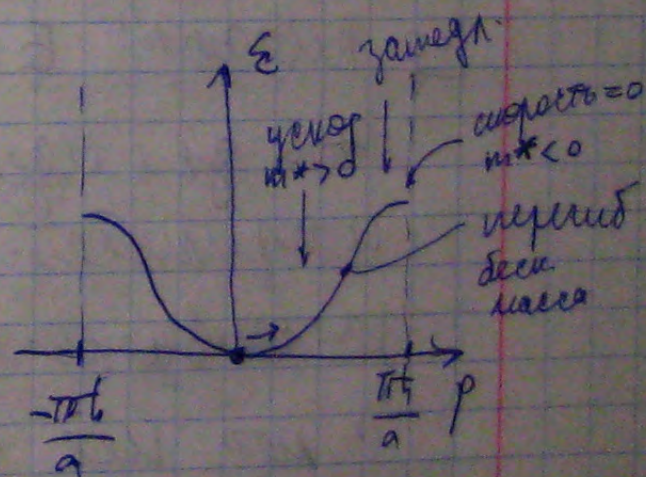
π -и в кристалле
и пост. π -ноды

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}$$

при малых p

$$m^* = \left(\frac{d^2 \epsilon}{d p^2} \right)^{-1}$$

на периферии $\frac{d^2 \epsilon}{d p^2} = 0, m^* \rightarrow \infty$



E (π ноды)

набирая энергию, эл-н "перескакивает"
решотку и формирует параз.

Формирование эл-на циклическое
(Блоховские осцилляции)

$$\tau = \int_{-\frac{\pi\hbar}{a}}^{\frac{\pi\hbar}{a}} \frac{dp}{eE} = \frac{2\pi\hbar}{aeE}; \quad \text{период осцилляций}$$

$$\frac{1}{\tau} = \nu_E = \frac{aeE}{2\pi\hbar}$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{eE} \sim \frac{\hbar v_F}{eE} \quad - \text{амплитуда осцилляций}$$

пр металл: $E = 10^6 \frac{B}{\text{см}} \rightarrow \chi = 10^6 \text{ см}$

это для идеальной системы - без дефектов
и примесей. На движение эл-н

рассеивают энергию

В металле нет Блоховских осцилляций

~~$E = 10^6 \frac{B}{\text{см}}$~~

Интерпретация (звуконепрерывное рассеяние)

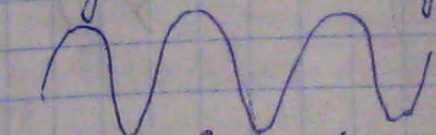
• $e < 0, m < 0$ - эл-н с отрицат. массой
 $\frac{e}{m^*} > 0$

• гр интерпретация: $\frac{e}{m^*} > 0$ - дырка

Метод сильной связи

лек 7
18.10

приближенная модификация



небольшое перекрытие
похоже на ВФ отравного атома $\psi(\vec{r}-\vec{e})$

Подход "метод сильной связи", эл-н более
локализованы.

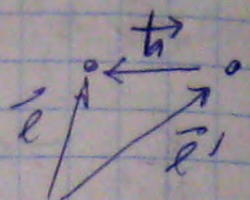
$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \underbrace{\psi_{\text{ат}}(\vec{r}-\vec{e})}_{\substack{\text{факт. м.о. - ВФ атома} \\ \text{м.о. -} \\ \text{отражающий} \\ \text{взвешивающий}}}$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\int \psi_k^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi_k d^3\vec{r}}{\int \psi_k^* \psi_k d^3\vec{r}}$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{\vec{e}, \vec{e}'} e^{i\vec{k}(\vec{e}-\vec{e}')} \frac{\int \psi_{\text{ат}}(\vec{r}-\vec{e}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi_{\text{ат}}(\vec{r}-\vec{e}') d^3\vec{r}}{1}$$

$$\{\vec{r} - \vec{r}' = \vec{h}\}$$

$$= \sum e^{i\vec{k}\vec{h}} \epsilon_{\vec{h}}$$



$$\epsilon_{\vec{h}} = \int \Psi_{at}^*(\vec{r} + \vec{h}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_{at}(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$V(\vec{r})$ = периодич. пот-л + пот-ли чужер. ат.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_{at}(\vec{r}) = E_{at} \Psi_{at}(\vec{r}) \quad - \text{У.Ш.}$$

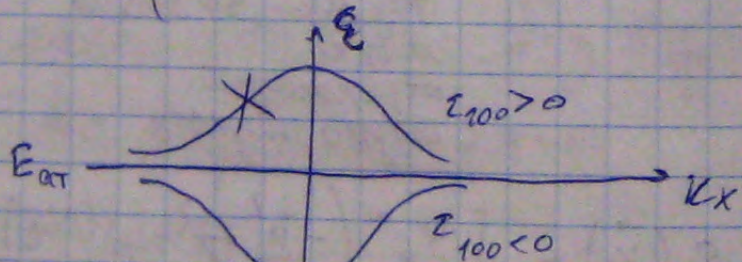
$$\vec{h} = 0 \quad \epsilon_0 \approx E_{at}$$

$$\vec{h} \neq 0 \quad \epsilon_{\vec{h}} = \int \Psi_{at}^*(\vec{r} + \vec{h}) \left(V(\vec{r}) - V_{at}(\vec{r}) \right) \Psi_{at}(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

тогда $0 > \epsilon_{100}$

$\neq 0$ для ближайших соседей

$$\epsilon(\vec{r}) = E_{at} + 2 \epsilon_{100} (\cos \alpha_{kx} + \cos \alpha_{ky} + \cos \alpha_{kz})$$



атомы взаимно
сдвигаются

Потенциал
порождается
уровнями
атомов

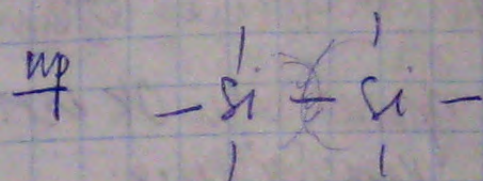
↓
Метод сильной связи позволяет отслеживать
искажение зон в в.б.

Метод подходит для ИИ и чужеродов.

① Хим. связь между атомами

1) Ковалентная. Пара эл-нов принадлежит
соедин. двум атомам. Связь направлена.

$\epsilon_{ковал} \sim 1 \div 10 \text{ эВ}$ - большая



(ср. кт $\sim 30 \text{ мэВ}$)

2) Ионная связь. Эл. плотность сильно смещена
по направлению к атомам

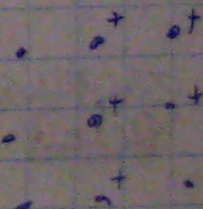
пр NaCl: $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ $\epsilon_{ион} \sim 1 \div 10 \text{ эВ}$

12) Смешанная ионно-ковал. связь (смещение
эл. плотности по центру) Атомы As_3B_5

пр GaAs

3) Металлическая связь. Эл. слабо связан
с атомами, облако рас-
плывается

$\epsilon_{мет} \sim 1 \div 10 \text{ эВ}$



4) Ван-дер-Ваальсовы

связи дипольных моментов

$\epsilon = 0,1 \div 1 \text{ эВ}$

из графика
кристаллическое

Взаимодействие между
диполями.

$$\epsilon_{\text{св}} = 0.1 \div 1 \text{ эВ.}$$

① Влияние теплового движения атомов

$\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta p \neq 0 \Rightarrow$ даже при 0 кельвинах
(Гейзенберг) колебания.

Виды колебаний:

- тепловые

- нулевые

$$\Delta x_0 \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2E_0M}}$$

$$\Delta x_0 \ll a$$

E_0 - энергия
нулевых колеб.

a - межатомное
расст.

кр. ^4He , ^3He

$$\frac{\Delta x_0}{a} = 2.7$$

^3He

$$\frac{\Delta x_0}{a} = 3.1$$

- они всегда больше

а) одинак атомов

(р-масса)

$\frac{B}{m}$

Большая T:

k мала, колеб. неравн.

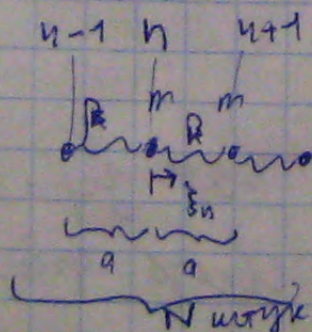
малая T:

k большая, колеб. коллектив.

температура
Рейли

Путь кристалл большой, нескраб.
замкнутой цепочки

$$n \leftrightarrow n+N$$



$$f_n = \beta (\ddot{z}_{n+1} - \ddot{z}_n) - \beta (\ddot{z}_n - \ddot{z}_{n-1})$$

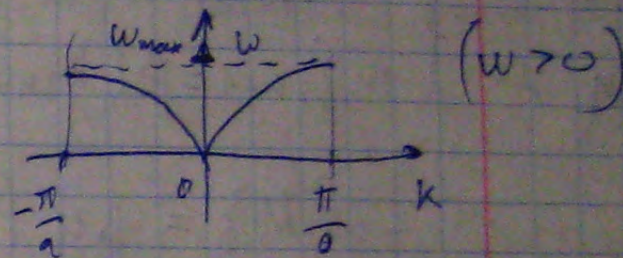
- сила, действующая на
n-й атом

$$f_n = m \ddot{z}_n = \beta (\ddot{z}_{n+1} + \ddot{z}_{n-1} - 2\ddot{z}_n)$$

$$\text{будем } z_n = z_0 e^{i(\omega t + nka)}$$

$$- \omega^2 m z_0 e^{i(\omega t + nka)} = \beta z_0 (e^{ika} + e^{-ika} - 2) e^{i(\omega t + nka)}$$

$$\omega = \pm \frac{2\sqrt{\frac{\beta}{2m}} \sin \frac{ka}{2}}{\omega_{\text{max}}}$$



при $k \text{ макс}$ $\rightarrow$ колеб. в направлении $\rightarrow f = f_{\text{max}}$

при $\omega \ll \omega_{\text{max}}$: $\omega \sim \underbrace{\left(2\sqrt{\frac{\beta}{2m}}\right)}_{v_{\text{зв}}} k$ - как для звука.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda \gg a, \frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{\pi}{a}$$

расст. среды как непрерывной. (концентрация приближение)

$$k = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda = 2a$$

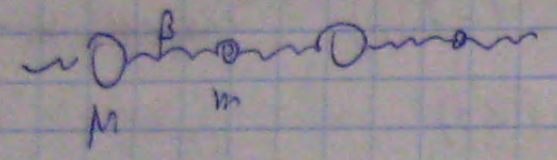
Физич. разн. k: $\left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$.

$$z_n = z_{n+N} \quad e^{in ka} = e^{i(n+N)ka} \Rightarrow e^{iNka} = 1 \Rightarrow$$

$$k_q = \frac{2\pi}{Na} q = \frac{2\pi}{L} q$$

$$q = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2}$$

8) атом, двух сортов



анализ на:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{2n} &= \beta(z_{2n+1} + z_{2n-1} - 2z_{2n}) \\ \ddot{z}_{2n+1} &= \beta(z_{2n+2} + z_{2n} - 2z_{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 M z = \beta \gamma (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta z \\ -\omega^2 m \gamma = \beta z (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta \gamma \end{cases}$$

$$\det || = 0 = \begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 M & -2\beta \cos ka \\ -2\beta \cos ka & 2\beta - \omega^2 m \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \beta \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4m^2 k^2 a^2}{mM}}$$

Пусть волны длинные: $ka \ll 1$

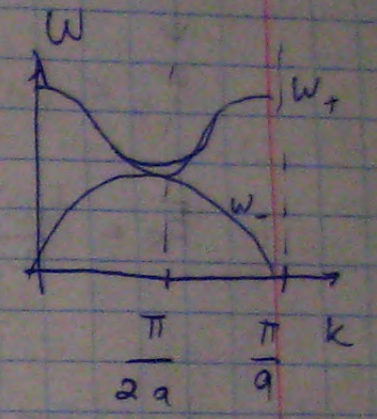
$\omega_+ \approx \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) 2\beta}$ — оптическая ветвь

$\omega_- \approx a \sqrt{\frac{2\beta}{m+M}} k$ — акустическая ветвь при $M \rightarrow m$ см. предл. задачу

$\omega_- \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1$
 $\omega_+ \rightarrow \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2} = - \frac{M}{m}$
 М и m колебл-т фазе, т.е. $1 \gg a$
 М и m колебл-т в противофазе

ω_- и ω_+ создают фоновый $\Rightarrow$ не фоновый. с $\rightarrow m$ поменял

ω_+ создает фоновый $\frac{M}{m} \rightarrow \frac{m}{M}$



Теория теплоемкости

ММЗ 25.10 (замена Юная) Александров Александров

1) Каждый атом колеб. соотв. гарм. осциллятор. $E = n \hbar \omega$ — квантуется.

Введем квазичастицу — фонона — кванта колебания крист. решетки

$\epsilon = \hbar \omega$ — энергия фонона

$\vec{p} = \hbar \vec{k}$ — квазиимпульс

$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p}$ — групп. скорость

Теперь неподвижна решетка содержит фоновый газ.

приближение гарм. осциллятора: $V \sim x^2$.
 $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 + V) \psi = E \psi$ - ур. Шрёд. для осцилл.

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega, \quad n = 0, \infty$$

$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$ - энергия нулевых колебаний
 (осн. сост. сис-мы)

① Вероятность состояния осцилл. с энергией E_n :
 $W(E_n) = \mathcal{P} e^{-\frac{E_n}{kT}}$ - распрег. Гиббса

нормировка
множителем

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \mathcal{P} e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P} e^{-\frac{E_n}{kT}}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar \omega n e^{-\frac{\hbar \omega n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar \omega n}{kT}}} =$$

$$= \left\{ x = \frac{\hbar \omega}{kT} \right\} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} =$$

$$= \left\{ \text{редукция} \right\} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{d}{dx} (\ln(1 - e^{-x})) = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^x - 1} =$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

энергия
нулевых
колеб.

энергия теплов.
колеб.

$$\bar{E} = \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{E} = \bar{n} \hbar \omega$$

амплитуды?

$$kT \ll \hbar \omega : \bar{n} \sim e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$$

$$kT \gg \hbar \omega : \bar{n} = \frac{1}{1 + \frac{\hbar \omega}{kT} - 1} = \frac{kT}{\hbar \omega} ; \bar{E} = kT$$

процессы

1) возбужд. новых мод.

Есть максимум, или друг ω_{max}
 (или размер кристалла конечен). Далее
 растут только амплитуды колеб.

2) θ_D - температур. Дебая - при kT -ей возбуж-
 дается ω_{max} .

$T > \theta_D$ - модель непр. среднего

$T < \theta_D$ - квантовое эф.эф.

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_{max}}{k}$$

точная ф-ла только для
 одномерного случая

① Энергия всей решетки:

$$\varepsilon_{\text{рем}} = \sum_{\substack{k, \\ \text{по всем} \\ \text{поперукам}}} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} - 1}$$

k - квантовое число
 k_B - пост. Больцм.

В пределе классическая асимптотика: ($k_B T \gg \hbar \omega$):

$$\bar{\varepsilon} = k_B T, \quad \varepsilon_{\text{рем}} = N k_B T$$

N - число атомов в кристалле.

1D: $N = N_{\text{ат}}$

3D: $N = 3 N_{\text{ат}}$

$\varepsilon = 3 N_{\text{ат}} k_B T$

степени свободы расем неровности

$$C_V \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = 3 N_{\text{ат}} k_B$$

$$C_D = \frac{C_V}{D} = 3R$$

$R = k_B N_A$ - газ. пост.
 N_A - число Авогад.

Термодинамическая
- моляр. термодинамическая
(3-и Дюлонга и Пти)

① Модель Эйнштейна

$$\{\omega_k\} \rightarrow \omega_{\text{эв}} - \text{квантов. частота}$$

$$\varepsilon_{\text{рем}} = \frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{e^{\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}} - 1} \cdot N$$

а) $k_B T \gg \hbar \omega_{\text{эв}}$: $\varepsilon_{\text{рем}} = N k_B T$ (разном. в рез)

б) $k_B T \ll \hbar \omega_{\text{эв}}$: $\varepsilon_{\text{рем}} \sim e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}}$

$$C \sim e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}}$$

(если точно, $C = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \dots = N \hbar \omega_{\text{эв}} e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}} \cdot \left(-\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T^2}\right) \left(-\frac{1}{T^2}\right) = k_B \left(\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}\right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{эв}}}{k_B T}}$)

Но $C_{\text{Эйнст}} \sim T^3$!

Замена $\{\omega_k\} \rightarrow \omega_{\text{эв}}$ приводит к невер. результ.

Иногда модель Эйнштейна работает

(для оптич. фононов или при сверхнизких T -рах)

Для сверхнизких T -р $\left(T < \frac{\hbar \omega_{\text{мин}}}{k_B} = \frac{2\pi \hbar}{k_B L} V_{\text{зв}} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ K}}{L [\text{н}]}\right)$

$\omega_{\text{мин}} = V_{\text{зв}} k_{\text{мин}} = \frac{2\pi}{L} V_{\text{зв}} \equiv \omega_{\text{эв}}$ $V_{\text{зв}} \sim 5000 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ в металлах.
для $L = 1 \text{ нм}$: $T < 0,2 \text{ K}$.

① Модель Дебая

$$\bar{\varepsilon}_{\text{рем}} = \sum_{\substack{k, \\ \text{поперукам}}} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} - 1} \xrightarrow[\Delta k = \frac{2\pi}{L} \text{ - мало}]{\sum \rightarrow \int} \sum_{\text{поперукам}} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} - 1}$$

$$C = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\text{поперукам}} \int d\vec{k} \frac{\hbar \omega(k)}{\left(e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} - 1\right)^2} e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} \cdot \frac{\hbar \omega(k)}{k_B T^2} =$$

$$= \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\text{поперукам}} \int d\vec{k} \frac{\hbar^2 \omega^2(k)}{\left(e^{\frac{\hbar \omega(k)}{k_B T}} - 1\right)^2} \frac{1}{k_B T^2}$$

Спектральная плотность $\rho(\omega)$:

$\rho(\omega) d\omega$ - доля колеб. с частотами в $(\omega, \omega + d\omega)$

$$C_v = \underbrace{3p}_{\text{степ. свободы}} \underbrace{N}_{\text{число степеней свободы}} \underbrace{k_B}_{\text{элементарная ячейка}} \int \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}} \mathcal{D}(\omega) d\omega$$

3p - число ветвей в спектре
 (3p-3 - оптим. ветви)
 3 - акустич. ветви

Найдём теперь $\mathcal{D}(\omega)$.

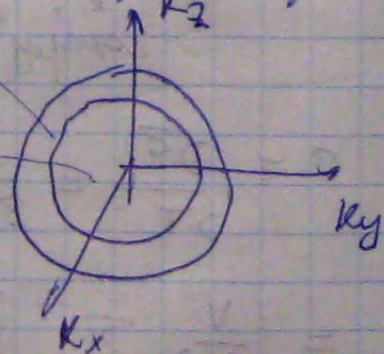
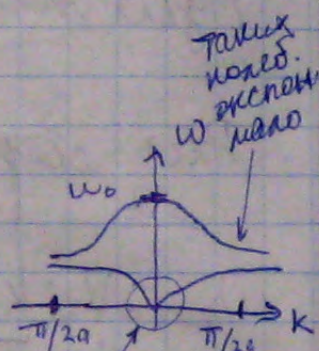
Пополним модель Фейба:

- 1) только акустич. фононы ($\hbar \omega \ll k_B T$, T мало)
- 2) $\omega = v_{ph} k$ - линейный закон
- 3) v_{ph} изотропно $\Rightarrow$ зона Бриллюэна - сфера.
 (сфера Фейба - сфера того же объёма, что и исход. зона Бр)

$$\mathcal{D}(\omega) d\omega = \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{4}{3}\pi k_{ph}^3} \quad \begin{matrix} \text{объём слоя} \\ \text{объём Фейба} \end{matrix}$$

$$\mathcal{D}(\omega) d\omega = \frac{3k^2 dk}{k_{ph}^3} = \frac{3\omega^2 d\omega}{\omega_{ph}^3} \quad \mathcal{D}(\omega) - \text{погр. в шот-1.}$$

$$C_v = 3Nk_B \int_0^{\omega_D} \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{\left(e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \frac{3\omega^2}{\omega_D^3} d\omega =$$



$$= \frac{3Nk_B \cdot 3}{\omega_D^3 \left(\frac{k}{k_{ph}} \right)^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^4 e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}} \left(\frac{k}{k_{ph}} \right)^3}{\left(e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \left(\frac{k_{ph}}{k} \right) =$$

$$= 3Nk_B \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\omega_D} dz \frac{z^4 e^{-z}}{(e^z - 1)^2} \sim T^3 \quad \left\{ z = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right\}$$

сложн. инт-л. расск. асимптотически.

$$\frac{T}{\theta} \gg 1: C_v = 3Nk_B \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^3 = 3Nk_B \quad (z \rightarrow 0)$$

$$\frac{T}{\theta} \gg 1: C_v = 3Nk_B \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{dz z^4 e^{-z}}{(e^z - 1)^2} = \frac{12\pi^4}{15} Nk_B \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \quad (z \rightarrow \infty)$$

① Вклад эл-нов в теплоёмкость.

Ферми-Дирак, запрет Паули

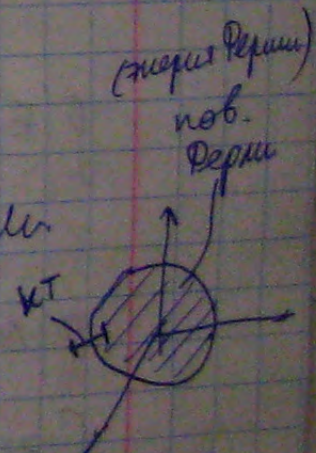
При $T=0$ все эл-ны - в сфере Ферми

Вклад упрощ. слоя kT эл-нов в теплоёмк.

$$E_{полн} = E_0 + E_{возбужд.}$$

$f(E)$ - ф-я плотности состояний на эл. энергии

$\rho(E) dE$ - число эл-нов в $(E, E+dE)$



$$E_{\text{mean}} = E_0 + \underbrace{\rho(E_F)}_{\substack{\text{плотность} \\ \text{состояний}}} \underbrace{kT}_{\substack{\text{температура} \\ \text{средн}}} \cdot \underbrace{\frac{3}{2}}_{\substack{\text{энергия} \\ \text{средн}}} kT$$

E_F - уровень Ферми

$2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}$ - $\uparrow$ число состояний в одном состоянии

$$dN = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

$\sim V$

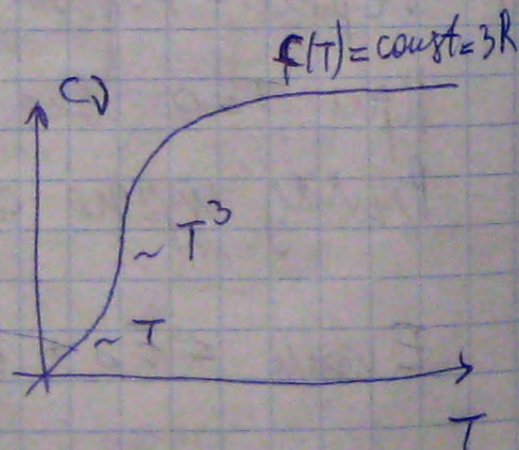
$$E = \frac{p^2}{2m}; \quad dE = \frac{2p dp}{2m} = \sqrt{\frac{2E}{m}} dp$$

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}$$

$$dN = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi 2mE \sqrt{\frac{m}{2E}} dE$$

$$\rho(E) = \frac{8\sqrt{2} \pi V m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{E}$$

далее будет показано:
 $c(T) \sim T$ - линейно



Зам. $T \rightarrow \infty$ с классической предельное

Лек 9
01.11

$$\frac{1}{2} kT = E_k$$

$$\frac{3}{2} kT = E_k$$

$$\frac{1}{2} kT = E_n$$

$$\frac{3}{2} kT = E_n$$

- где среднее атома

$$E = kT$$

$$E = 3kT$$

одномерный

3-мерный

$E = 3NkT$ - энергия кристалла, N - число атомов

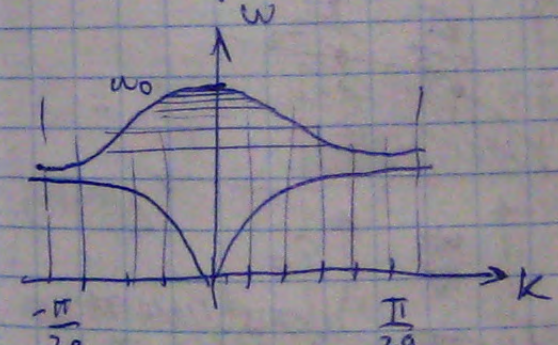
$$c = \frac{\partial E}{\partial T} = 3Nk = 3R$$

$$c \neq c(T)$$

$$c \neq c(\omega_0)$$

$T \rightarrow 0 \quad c \rightarrow 0$ (линейно не должно)

Зам. атомов и отстоят



← Дебай

← Дебай

При $\omega \gg \omega_0$ все сост с
 примерно равной вероятностью ($\sim e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1$)

При $\omega < \omega_0 \quad c \sim T^3$ (Дебай)

Зам. атомов

$$T \rightarrow \infty$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} kT N + \frac{1}{2} kT N - \text{энергия в ядрах}$$

стен. энергия нуклонов
стен. энергия нуклонов
стен. энергия нуклонов

$$3 kT N - \text{энергия в ядрах}$$

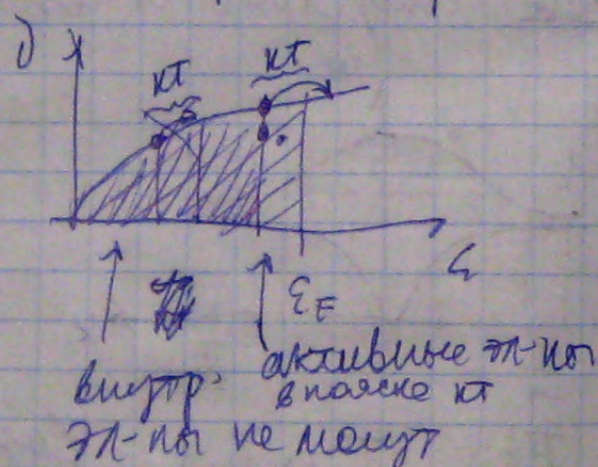
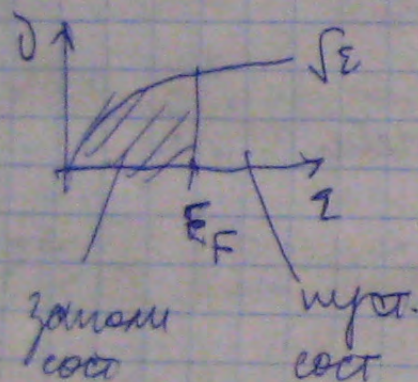
$$\frac{3}{2} kT N + \frac{3}{2} kT N = 4.5 kT N$$

$$C = 4.5 kT N$$

$$C_{\text{ядр.}} = 3 kT N$$

- потому что запрет Паули
не упр. в ядрах нуклонов
н-нон (в ядрах н-нон)

плотность состояний из Ферми-Дирака



$$E_{\text{полн.}} = E(0) + \frac{3}{2} kT \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon$$

нужн. энергия
нужн. энергия
нужн. энергия

возбужд. нуклонов
сост. в ядрах н-нон

$$g(\epsilon_F) = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{3/2} \epsilon_F^{1/2}$$

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{3/2} \frac{3}{2} \epsilon_F^{3/2}$$

(полное число валентных э-нов)

$$g(\epsilon_F) = \frac{2}{3} \frac{N}{\epsilon_F}$$

$$E_{\text{полн.}} = E(0) + \frac{3}{2} kT \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon$$

$$= E(0) + \frac{3}{2} N kT \frac{2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)$$

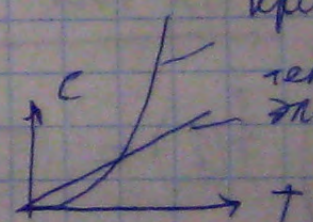
энергия
н-нон не
знаем
запрет Паули

(обычные, не Ферми-газ)

$$\frac{kT}{\epsilon_F} \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$$

при высок. T-рах
н-нон мало!

температура
крит. ядра
температура
н-нон



$$C \equiv \frac{\partial E}{\partial T} = 3 g(\epsilon_F) k^2 T \sim T$$

(н-нон)

$C \sim g(\epsilon_F)$ при $T \ll \text{const}$ - можно определить
плотность э-н. состояний

Далее будем говорить о конкретных материалах пол. тел.

Полупроводники

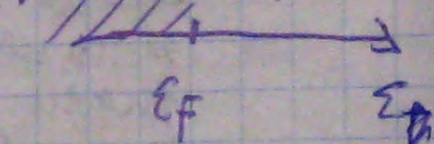
СВ 60 ПР сильно зависят от чистоты. Мотки, первый полупроводников. тр.р. 50+60-е - род ПР технологий

$T=0$

Статистика Ферми-Дирака (эл.-ны)

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{kT}} + 1}$$

заполн. уровни



- Вероятн. заполнения

ζ - хим. пот.-л

$$\zeta \xrightarrow{T \rightarrow 0} \epsilon_F$$

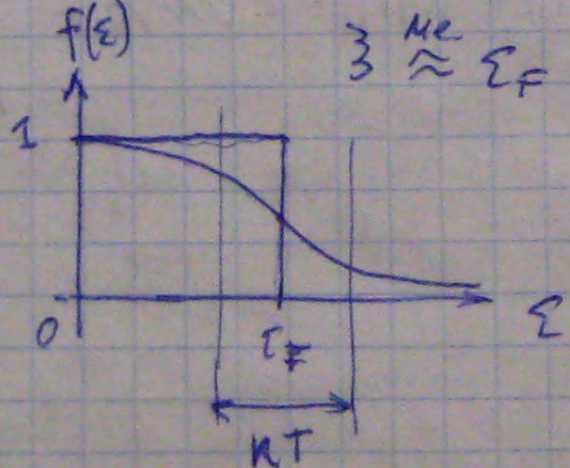
$$\zeta \approx \epsilon_F$$

а) Металл:

$$\epsilon > \zeta \quad f \rightarrow 0$$

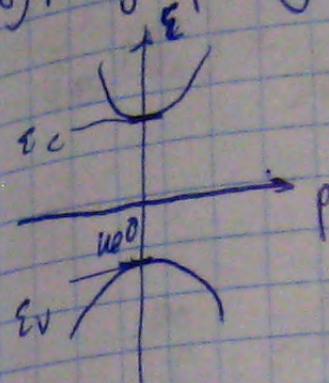
$$\epsilon < \zeta \quad f \rightarrow 1$$

$$\zeta \approx \text{const}(T)$$



лек 10.
08.11

3) Полупроводник



здесь эл.-ны $\epsilon < 0, m > 0$

здесь дырки $\epsilon < 0, m_{eff} < 0$ или $\epsilon > 0, m_{eff} > 0$

c - conductive
v - valence

$$T=0: \quad n = \int_0^{\epsilon_v} f(\epsilon) \nu_v(\epsilon) d\epsilon =$$

$$T \neq 0: \quad = \int_0^{\epsilon_v} f(\epsilon) \nu_v(\epsilon) d\epsilon + \int_{\epsilon_c}^{\infty} f(\epsilon) \nu_c(\epsilon) d\epsilon$$

$$\int_0^{\epsilon_v} (1 - f(\epsilon)) \nu_v d\epsilon = \int_{\epsilon_c}^{\infty} f(\epsilon) \nu_c(\epsilon) d\epsilon$$

$$p = n$$

$$1 - f(\epsilon) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{kT}} + 1} = \frac{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{kT}}}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{-\frac{\epsilon - \zeta}{kT}} + 1} = f(\epsilon_n)$$

$\epsilon = f(\epsilon_n)$
↑
энергия дырок

ν_v - плот. сост. в валентной зоне
 ν_c - плот. сост. в зоне проводимости
 $f(\epsilon)$ - вероят.

концентрация
p - число дырок
n - число эл.-нов

$$\epsilon_h + \zeta_h = -(\epsilon - \zeta)$$

далее будет удобно:

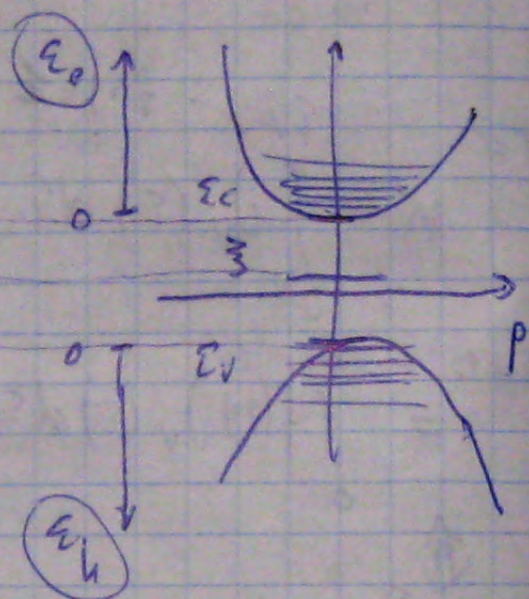
$$\epsilon_e := \epsilon - \epsilon_c$$

$$\epsilon_h := -(\epsilon - \epsilon_v)$$

$$\epsilon_e = -\zeta_e$$

$$\epsilon_h = -\zeta_h$$

$$\epsilon_g \equiv \zeta_g \begin{cases} \zeta_e \\ \zeta_h \end{cases}$$



концентрация электронов

$$p = \int_0^\infty f(\epsilon_h + \zeta_h) \nu_v(\epsilon_h) d\epsilon_h$$

концентрация дырок

$$n = \int_0^\infty f(\epsilon_e + \zeta_e) \nu_e(\epsilon_e) d\epsilon_e$$

$$\zeta_e + \zeta_h = \zeta_g$$

- ширина запрещенной зоны

\$g\$-gap

$$\zeta_{e,h} \gg kT \Rightarrow f(\epsilon) \approx e^{-\frac{\epsilon - \zeta}{kT}}$$

$$f(\epsilon_e + \zeta_e) \approx e^{-\frac{\epsilon_e + \zeta_e}{kT}}$$

\$h\$-hole

при квадратичном законе дисперсии \$\epsilon(p)\$ - закон дисперсии.

$$\nu_e(\epsilon_e) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_e^{1/2}$$

$$n = \int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon_e + \zeta_e}{kT}} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_e^{1/2} d\epsilon_e = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e}{kT}} \int_0^\infty e^{-z} z^{1/2} dz = \left(z := \frac{\epsilon_e}{kT} \right)$$

$$n = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e}{kT}}$$

\$n=p\$

$$p = 2 \left(\frac{m_h kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_h}{kT}}$$

$$np = n^2 = p^2 = 4 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^3 (m_e m_h)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e + \zeta_h}{kT}} \Rightarrow$$

$$n = p = 2 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{\epsilon_g}{2kT}}$$

\$m_e, m_h\$ - эффективные массы

можно

экспоненциально:

$$n = \exp\left(\frac{\epsilon_g}{T}\right)!$$

при \$T \rightarrow 0\$ \$\epsilon\$ - носители



\$\epsilon(T=0)\$

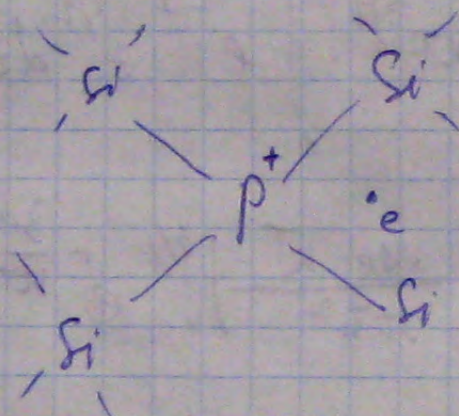


при $T \neq 0$ $\downarrow$ смещается в сторону с Φ
(обычно вниз) большей малой носителей

понятие "уровень Ферми" применимо только к Ме.
вобще, вопрос о хим. потен. а он слабо зав. от T .

① Примем

a) $\overset{IV}{Si} (P)$ — чистый
донорное сост.



Потен. ион + эл-н
аналог атома водорода

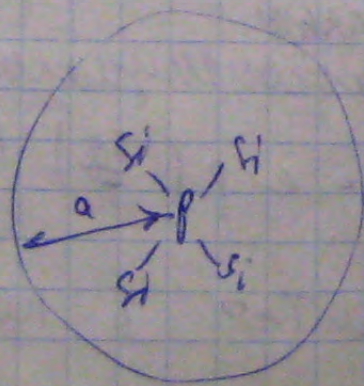
энергия связи с ионом-отмала ϵ_c

эл-н

- в периодич. поле кристалла
- в поле иона (атом водорода)

13 эв $\rightarrow$ 130 мев — связь

- бор. радиус $\gg$ радиус иона
- ϵ ион



эл. облака внутри бор. радиуса компенсируют

донорное сост.

$\downarrow$
 $\epsilon_{св\epsilon p} < \epsilon_d$

b) $\overset{IV}{Si} (A)$

акцепторное сост.

b) иониз

v) $Si (P > A)$

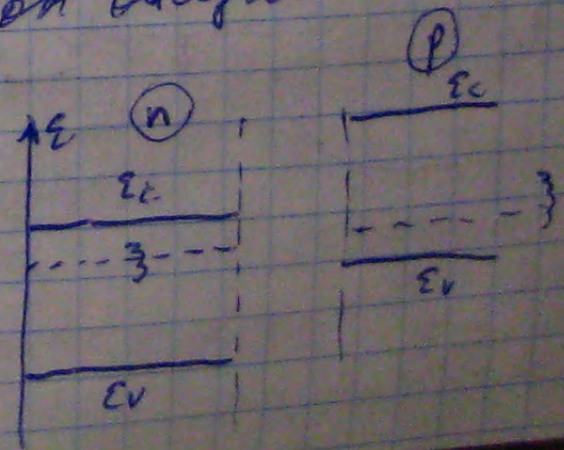
$Si (P < A)$

концентрация

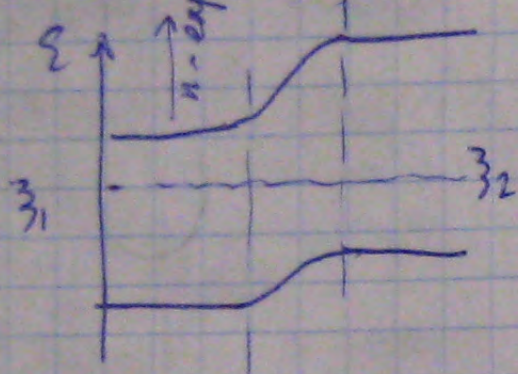
Хим. потенциал $T \Delta$ инвариантен.
При контакте ПП он один.

① Контакт двух ПП

n, p-тип ПП.

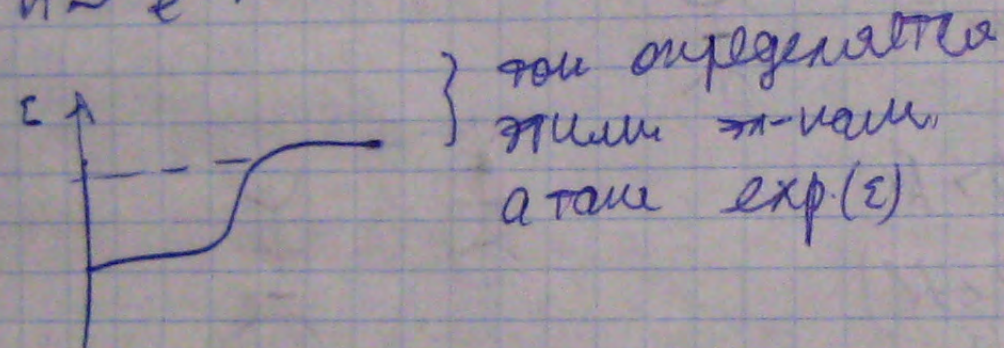


При контакте ~~с~~ ~~двух~~ ~~э-пол~~ и
дырки потекут $\Rightarrow$ появится потенци-
ал, удерживающий ~~э-пол~~ дырки от
дальнейшей диффузии

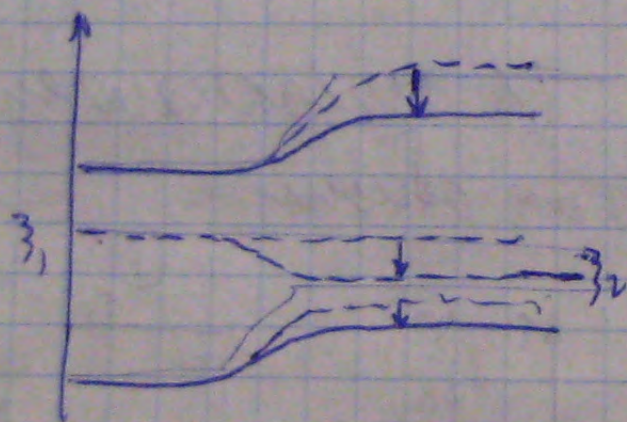


$\mu \approx 0$ $3_1 \approx 3_2$
(внеш. напряжение)

$n \sim e^{-\frac{(3_1 - 3_2)}{kT}}$ $\leftarrow \exp(\epsilon), \exp\left(\frac{1}{T}\right)$



$\mu \neq 0$: (μ)

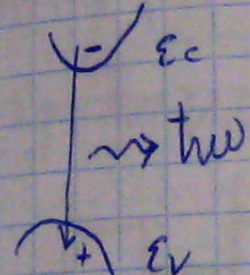


число носителей
тока $\exp$ увеличи-
лось

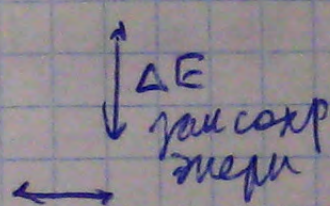
ВАХ $\downarrow$ перехода (проба)



① Опосредованные приборы

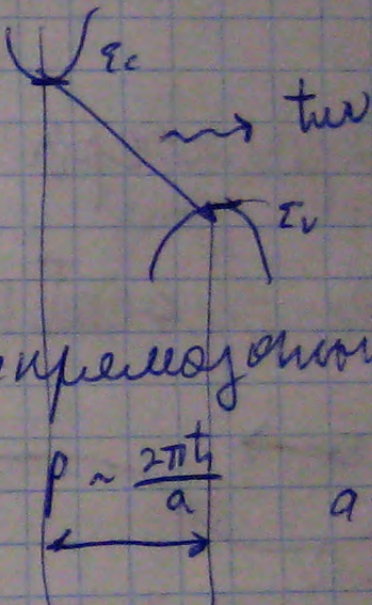


(прямозонный)
неупорядоченный



ΔE $\rightarrow$ t_{th}
 Δp $\rightarrow$ t_{th}
(непрямозонный ПП)

Фонан может
забрать энер-
гию, но ~~не~~
~~будет~~
~~наблюдаться~~
навероятно



a - пост. решетки

$t_{th} = p = \frac{2\pi t_{th}}{\lambda}$

$\lambda \sim 1 \mu m$

$a \sim 10^{-9} m$

$\downarrow$

Прямозонные ПП лучше излучают

Кремний - не прямозонный
Кремний сам на возд. покрывается окислом
(применя по популярности в электронике)

прямозонные:
Аз В 5
группа

А III В V
(тип GaAs (арсенид галлия))

Ближний
инфракрасный
AsGa

Лек 11
15.11

Способы накачки (созд. инверсии насел.)

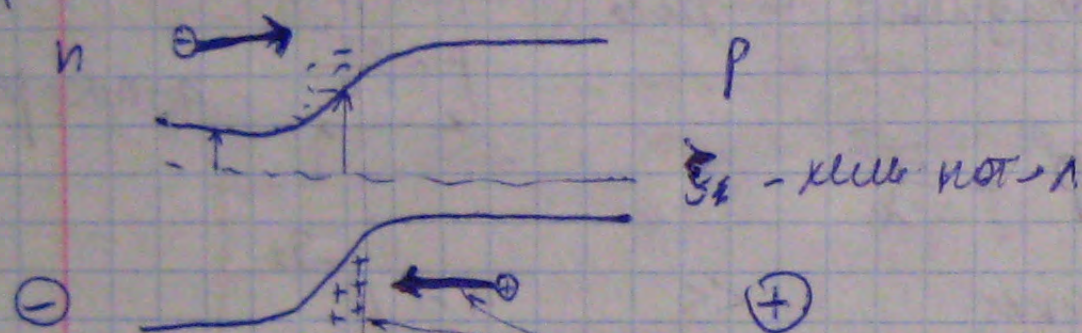
- оптический
- электрический



Резонатор

Эт способ накачки?

интерференция



E_g - кин. пот. А

поисковик
напо при отст.
напряжении

созд инверсии
насел. в
области контакта

Резонаторы:

- внешний
- созданием щели

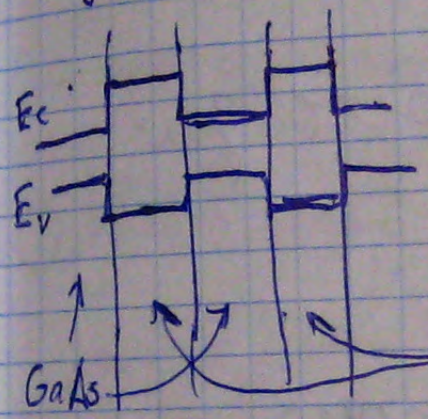


Аноды!

гетероперла - в ба с движущимися пост. решетками,
к-рые можно намотать спиралью (линейная)
отражения

$Al_{1-x}Ga_xAs$ (х часть Ga заменено на Al.)

E_g^{TeM} больше, чем для чистого Al.

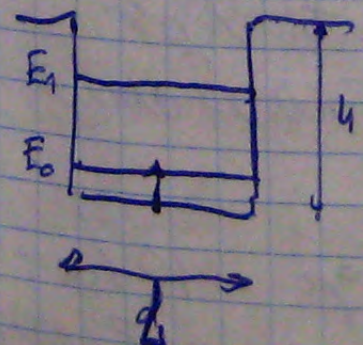


$Al_{1-x}Ga_xAs$

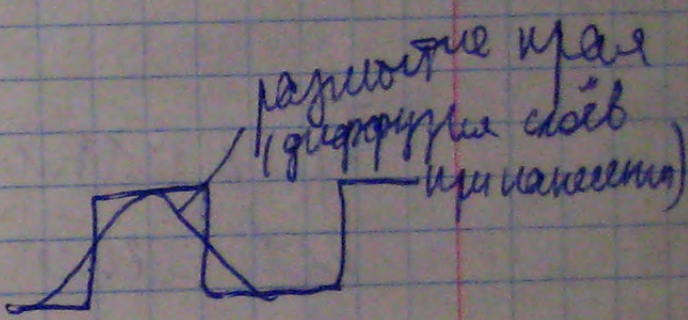
сверхрешетка

Квант. точки. Барьеры, узкие ямы

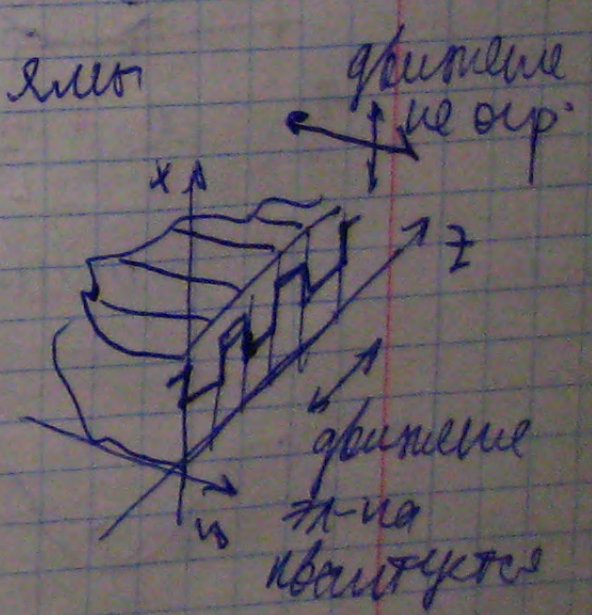
$$E_{полн} = E_{x,y} + E_z$$



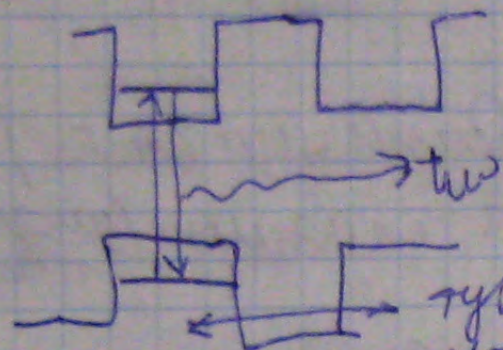
$E_0 - E_1 = E(h, l)$
регулировка
толщины энерг. слоя
барьер



различия в
диффузии слоев
при наложении



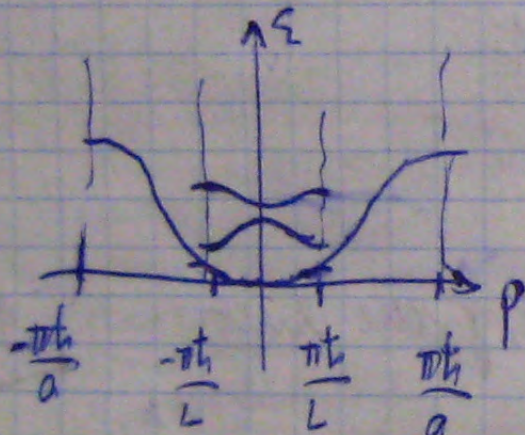
диффузия
π-на
квантовых



туннельный эффект при
малых толщинах
барьера $\Rightarrow$ проводимость.

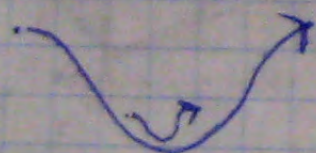
При малых
еще и периодичности для
перioda L

Кванты
механики
(сервис)



Большая зона от
perioda a

мини-зона от perioda L



под действием э. поля E
функции Ψ - вол
в p-пр-ве, колебания,
акустич.

для металлов амплитуда ~ 10 Кель-
ви интерес.

$$\lambda = \frac{a e E}{2 \pi \hbar} \text{ (расст.)}$$

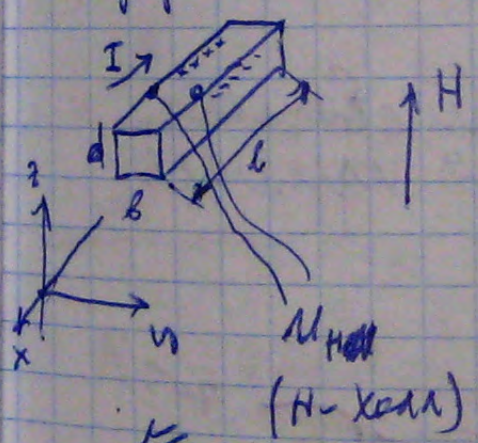
А для сверхрешетки амплитуда меньше
 $\lambda \sim E$ (напряженность) $\lambda \approx \frac{a e E}{2 \pi \hbar} \sim 10^{12} \div 10^{13} \text{ Гц}$

1970 - полупроводник - кристаллическая структура
(вынужденная)

квант. 1-перные слои (квант. проводники)
0-перные слои (квант. точки)

1) Квант. эффект Холла

Эффект Холла, простой (середина 1980)



$$v = \mu E$$

- дрейф-скорость
 μ - подвижность

$$j = e n v = e n \mu E$$

- плотность тока
 n - концентрация носителей

$$j = \sigma E$$

- закон Ома
 σ - удельная проводимость

$$\sigma = e n \mu \Rightarrow n \mu = \frac{\sigma}{e}$$

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$E_y = \frac{U_H}{b} = R_H j = R_H \frac{I}{b d} \Rightarrow R_H = \frac{U_H d}{I H}$$

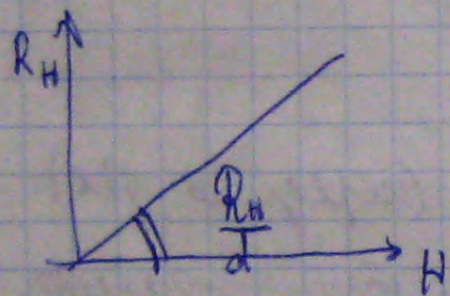
порт.
Холла

$$R_H = \frac{M_H}{I} = \frac{\rho_H H}{d}$$

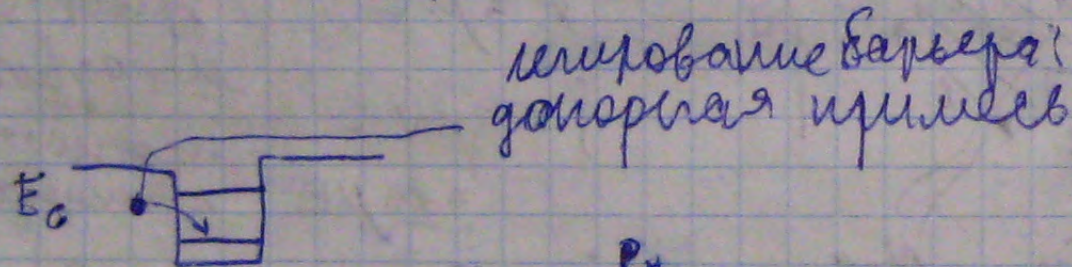
$$F_L = \frac{1}{c} M_H H = E_y \Rightarrow \frac{M_H H}{c} = E_y$$

$$\frac{v_H}{e} = \frac{j \times H}{en} = E_y$$

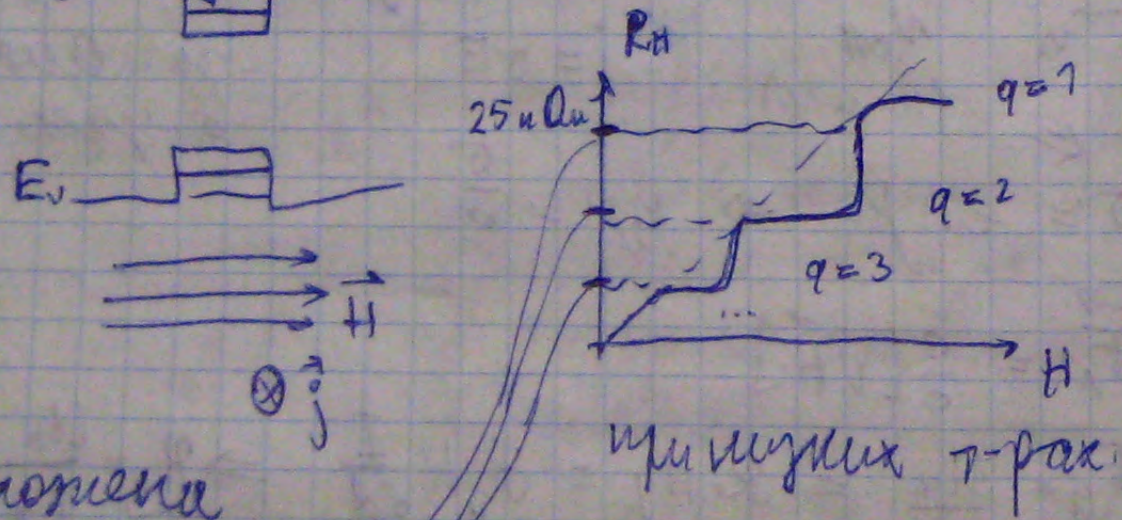
$$\rho_{Hn} = \frac{1}{en} = \text{const}(\dots) \Rightarrow n = \dots$$



для носит. заряда
одного типа



легирование барьера
донорная примесь



положена
прямо
для всех значений. $R_H \sim \frac{1}{q}$, $q = 1, 2, 3, \dots$

Величина кванта проводимости. двумерное

$$j = \frac{I}{S} \quad \frac{IH}{en} = \frac{eH}{n} ; \quad h = \frac{1}{n^2}$$

$$R_H = \frac{M_H}{I} = \frac{H}{en}$$

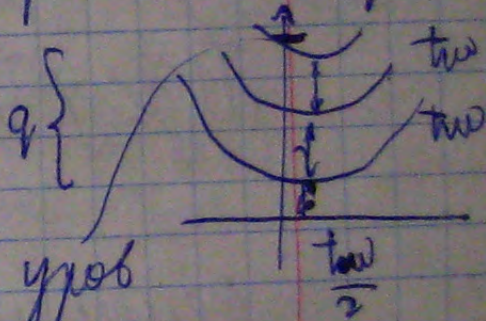
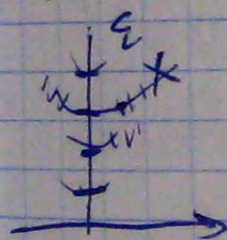
$$\omega = \frac{eH}{mc}$$

См. движение в маг. поле

$$E_{\text{полн}} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega + \frac{p_z^2}{2m}$$

энергия Ландау
параллельно Ландау

А у нас движение поперек
равновесно



уров.
Ферми.
q-уров. Ландау
уров. Ферми

$$N = \frac{2\pi m \hbar \omega S}{(2\pi \hbar)^2} = \frac{eH}{hc} S$$

- полн. число сост.
на площадке S.

(на квант. уровне)

$$n = \frac{N}{S} = \frac{eH}{hc}$$

- квантован. сост.
на квант. уровне

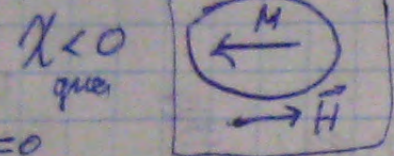
$$R_H = \frac{H}{en} = \frac{H}{e \left(\frac{eH}{hc} q \right)} = \frac{h}{e^2 q}$$

$q = 1, 2, 3$
число уровней Ландау
под уровнем Ферми

Магнитные материалы

① При высок. т-рах все в в-ва

диамагнетики



$M(H=0) = 0$

$$\vec{M} \parallel \vec{H} \quad V = M$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

Ферромагнетизм

$$|\chi_{пара}| \gg |\chi_{диа}|$$

$$\chi_{диа}(T) = const$$

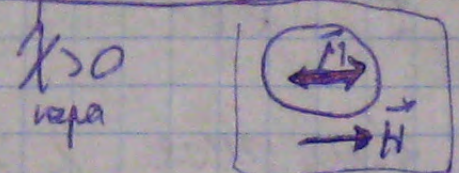
$$\chi_{пара}(T) \propto \frac{1}{T} \quad - \text{зак. Кюри}$$

$$\text{точнее, } \chi_{пара}(T) = \frac{1}{T - \theta} \quad - \text{зак Кюри-Вейсса}$$

θ_p - точка Кюри парамагн.
(p-парамагнетизм)

(Кюри-Вейс $\xrightarrow{T \rightarrow \infty}$ Кюри)

парамагнетики



$M(H=0) \neq 0$

$\vec{M}$ - магн. дип. момент

$\vec{M}$ - магн. дип. момент

V - объем

χ - магн. восприимч.

$$\chi = \frac{I}{H} + 4\pi\chi$$

(сгс) - магн. проницаемость

Лек 12
27.11

$$\chi_{диа} < 1$$

$$\chi_{пара} > 1$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \chi \vec{H}$$

$$\chi = 0 \quad - \text{идеальный диамагнетизм} \Rightarrow \chi = -\frac{1}{4\pi}$$

парамагнетики

① диамагнетики -

атомы и молекулы не имеют соб. маг. момента в нулевом поле.

парамагнетики -

ат. и молек. имеют...

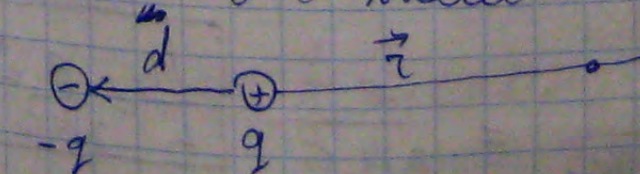
$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}] \quad - \text{мех. момент кол. групп}$$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad - \text{модуль мех. момента} = const$$

$$L_z = \hbar m_l \quad - \text{проекция на ось} = const$$

$$m_l = -l, \dots, l$$

Электрич. момент



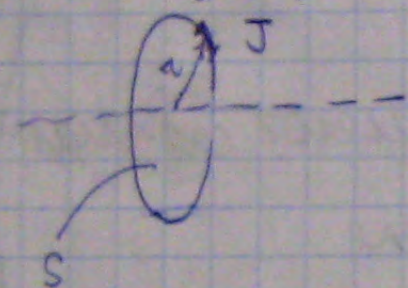
$$E = \frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+d)^2}$$

$$= q \frac{2dr + d^2}{r^2(r+d)^2} \approx \frac{2qd}{r^3} = \frac{2}{r^2} p$$

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad - \text{эл. дипольн. момент}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{n})}{r^3} \vec{n} - \frac{\vec{p}}{r^3}, \quad \text{Напряженность поля диполя в ось симметрии}$$

Магнит. диполь



$$\Delta H = \frac{J \Delta \varphi}{c r^2}$$

$$H = \frac{J 2\pi r}{c r^2} = \frac{2\pi r^2 J}{c r^3} = \frac{2JS}{c r^3}$$

$$\frac{JS}{c} \equiv M \quad - \text{маг. дипольн. момент кругового тока}$$

Связь мех. и маг. моментов атома.

$$J = \frac{q}{2\pi R} V; \quad S = \pi R^2; \quad L = m_q V R$$

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{qV}{2\pi R} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{qVR}{2c}$$

$$L = m_q V R$$

$$\frac{M}{L} = \frac{q}{2cm_q} = \frac{N \cdot e}{2c N \cdot m_e} = \frac{e}{2m_e c} \quad \boxed{\frac{M}{L} = \frac{e}{2m_e c}}$$

это справедливо вообще для маг. ядра и нуклонов.

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2m_e c} \equiv \gamma = g \gamma, \quad g=1.$$

g - г-фактор
 γ - гиромагнитное отношение

L квантуется $\Rightarrow M$ квантуется.

$$M_z = \frac{e\hbar}{2m_e c} m_l \quad - \text{квантование магнитного момента}$$

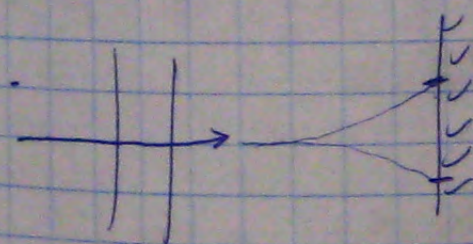
$$m_l = -l, \dots, l$$

В маг. поле:

$$\vec{H} \uparrow \quad \varepsilon_M = -\vec{M} \cdot \vec{H} = -\frac{e\hbar H}{2m_e c} m_l$$

энергия взаимодействия с маг. полем

$$\text{Пусть } H = H(z) \Rightarrow \varepsilon_M = \varepsilon_M(z) \Rightarrow F = M_z \frac{\partial H}{\partial z}$$



эксперимент
Герлаха-Иштерна

2 линия

$$2l+1=2 \Rightarrow l=\frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad - \text{магнетон Бора}$$

$$\leftarrow l=1$$

$$l \rightarrow s = \frac{1}{2} \quad - \text{спин, проекции } \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{M}{S} = \frac{e}{mc} = g\gamma, \quad g=2.$$

момент квант.
связанный с собой

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

- полный момент квант.
звращения - ~~связан~~
момент квант. вращ.

$$|L-S| \leq |\vec{J}| \leq |L+S|$$

$$m_J = -J, \dots, J.$$

Вклад в спин-орбит.

от $\vec{L}$ и от $\vec{S}$ разный ($g=1$ и $g=2$)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

без вывода

или:

$$1 \leq g \leq 2$$

$$S=0, J=L \Rightarrow g=1$$

$$L=0, J=S \Rightarrow g=2$$

$$M_z = \mu g m_J$$

проекц. маг. момента
 $m_J = -J, \dots, J$

Система стремится к min энергии,
т.е. $\vec{\mu}$ ориентирован паралл. с $\vec{H}$.

но есть температура, ориентация сбивается.

$$n(m_J) \sim \exp\left(-\frac{\epsilon_{m_J}}{kT}\right)$$

Больцман

распредел.

концентрации маг. стрелок

$$\epsilon_{m_J} = -g\mu H m_J$$

$$\sum_{m_J=-J}^J n(m_J) = N$$

$$m_J = -J$$

$$\frac{n(m_J)}{N} = \frac{e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}$$

- проверка для
Больцмана

n - обш. концентрация

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow n_{m_J=J} = N \quad - \text{все стрелки с } m_J=J$$

$$T \rightarrow \infty \quad (kT \gg \mu H) \Rightarrow \frac{n_{m_J}}{N} \approx \frac{1}{2J+1} = \text{const} \quad - \text{все стрелки равномерно распределены}$$

$$\epsilon = -N \mu g H \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}$$

$$\epsilon = -\vec{\mu} \vec{H}$$

$$\vec{M} = N g \mu \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}$$

$$\mu H \ll kT$$

(Несколько $\mu H = kT$, $T \approx 95 K$)

$$M = n g \mu \frac{\sum_{m_J = -J}^J m_J \left(1 + \frac{\mu g H m_J}{kT}\right)}{2J+1} = \frac{n g \mu^2 H}{kT} \frac{\sum_{m_J = -J}^J m_J^2}{2J+1}$$

$$= \frac{n (\mu g)^2 H}{kT} \frac{1}{2J+1} \sum_{m_J = -J}^J m_J^2 = \frac{n (\mu g)^2 H}{3kT} J(J+1) = \chi$$

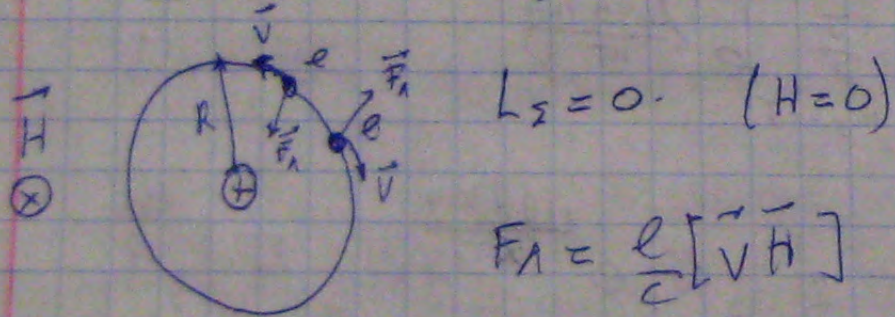
$$\sum_{m_J = -J}^J m_J^2 = \frac{1}{3} J(J+1)(2J+1)$$

$$\chi_{пара} = \frac{n (\mu g)^2}{3kT} J(J+1)$$

($\chi \sim \frac{1}{T}$ - закон Кюри)

- макс. воспр.
лага идеальной
магнитных сред
(без учета взаимод.
между ионами)

① Динамизм



$$L_z = 0 \quad (H=0)$$

$$F_L = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$H=0: \left\{ \frac{m v_0^2}{R} = F_R \right.$$

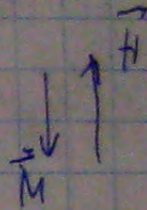
$$H \neq 0: \left\{ \frac{m v^2}{R} = F_R - \frac{e H v}{c} \right.$$

$$(v - v_0 \equiv \Delta v \ll v_0)$$

$$\frac{m}{R} \Delta v \cdot 2v = -\frac{e H v}{c} \Rightarrow \Delta v = -\frac{e H R}{2 c m}$$

$m \Delta v R$ - гом. мех. момент

$$M = 2 \frac{e}{2mc} m \Delta v R = -2 \frac{e^2 R^2}{4 m c^2} H$$



а теперь в 3-мерном случае

$$R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$M = -\frac{e^2 H}{6 m c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2$$

$$\chi_{ква} = -\frac{e^2 n}{6 m c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2 = const(T)$$

① Суммарный

$$\chi = \chi_{пара} + \chi_{ква}$$

$$\frac{\chi_{ква}}{\chi_{пара}} \sim \frac{e^2 a^2}{m c^2} / \frac{\mu^2}{kT} = \frac{kT m a^2}{\hbar^2}$$

a - радиус атома

$$\frac{\hbar^2}{m a^2} \sim \varepsilon_a \sim 1 \text{ эВ} \leftrightarrow 10^5 K \quad - \text{энергия связи электрона в атоме}$$

$$\frac{\chi_{ква}}{\chi_{пара}} \sim \frac{kT}{\varepsilon_a} \ll 1$$

① ~~Ферромагнетизм~~ пара Ферри

за-пол в металле не созд. параман-
нетизм, тк не учтено валент.

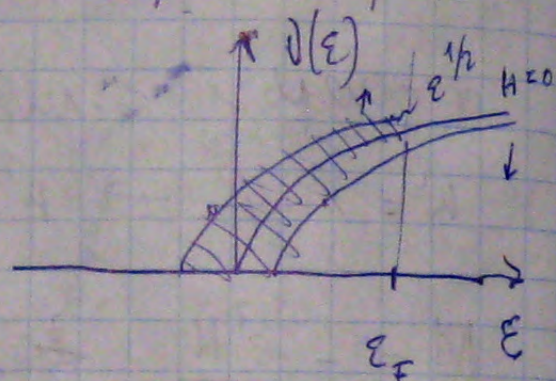
не по Борнуману, а по Ферри-Вейсбаху

$\uparrow \downarrow$

$\uparrow, \downarrow$ - направление
спин-а-нов

$$\epsilon_{\uparrow} = \frac{p^2}{2m} - \mu H$$

$$\epsilon_{\downarrow} = \frac{p^2}{2m} + \mu H$$



$$M_e = M(n_{\uparrow} - n_{\downarrow})$$

$$M_e = \mu^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{H=0} \cdot H$$

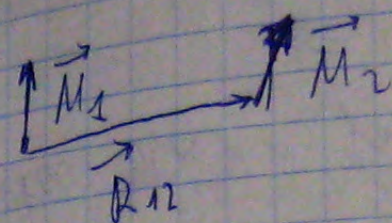
$$\chi_{\uparrow} = \frac{3\mu^2}{2} \frac{1}{\epsilon_F}$$

- параманетизм Паули
 $\epsilon_F \gg kT \Rightarrow$

лек 13
29.11.

при нулевых т-рах отдельное мал.
орбиты взаимод-ют.

(диполь-дипольное взаимод.) (мал. магнетон)
нет



$$U_m = \frac{(\vec{M}_1 \vec{M}_2) - 3(\vec{M}_1 \vec{n}_{12})(\vec{M}_2 \vec{n}_{12})}{R_{12}^3}$$

- энергия
взаимод-я
двух диполей

$$U_m \approx \frac{\mu^2}{a^3}$$

- оценка по
порядку

$$U_k \approx \frac{e^2}{a}$$

a - размер атома

$$\frac{U_m}{U_k} = \frac{\left(\frac{\hbar^2}{m e^2} \right)}{m c^2} \approx \frac{m v^2}{m c^2} = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sim 10^{-4}$$

- энергия кул.
взаимод.

в атомах $v \approx 10^8$ c

$$\frac{U_m}{U_k} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 = \left(\frac{1}{137} \right)^2 (= 10^{-4})$$

Но не стоит забывать U_m со счетов:

а) у Марганца на d оболочке эк-нон $S = \frac{5}{2}$
(правильно Хунда) $\hat{S}$ ось. сост

б) H_2 в осн сост. спины атомов $\uparrow$ и $\downarrow$.

Для π -на неразумно $\Rightarrow$

$$\Psi(1,2) = \alpha \Psi(2,1) \quad (\alpha = \text{const}, \alpha \text{ в } \Psi, \Psi \text{ совпадают})$$

но: $\Psi(1,2) = \alpha^2 \Psi(1,2) \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$.

$$\Psi(1,2) = \Psi(2,1) \quad - \text{симм} - \text{Бозоны (чл. спин)}$$

$$\Psi(1,2) = -\Psi(2,1) \quad - \text{антисимм} - \text{Фермионы (полуцел. спин)}$$

ВФ π -на антисимметрична.

При отсутствии вращений ~~и~~ орбитального и магн.

$$\Psi(1,2) = \underbrace{S(\sigma_1, \sigma_2)}_{\text{спиновая ВФ (магнитное)}} \underbrace{\Psi(r_1, r_2)}_{\text{орбитальная ВФ (кулоновское)}}$$

$$\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$$

предполож. $S(\sigma_1, \sigma_2) = S(\sigma_2, \sigma_1) \Rightarrow \Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$

предполож. $S(\sigma_1, \sigma_2) = -S(\sigma_2, \sigma_1) \Rightarrow \Psi(1,2) = \Psi(2,1)$
($\uparrow \downarrow s=0$) ^{функция}

$\Rightarrow E_a$ - энергия ^{функция} антисимм. ВФ Ψ

$\Rightarrow E_s$ - энергия ^{функция} симм. ВФ Ψ

Положение спинов ($\uparrow \uparrow$ или $\uparrow \downarrow$) накладывает или сим или антисимметричность ВФ простран-

ственного движения (орбитальное, попарно взаимодейст.)

$$E_a - E_s = E_{\text{обменное взаимодействие}}$$

$E_{\text{обмен}} > E_{\text{кулонов-гипотетическое магнитное}}$
(тоо разные взаимодействия!)

Спиновой поправки

$$H_s = \frac{1}{4} (E_s + 3E_a) + (E_a - E_s) \vec{S}_1 \vec{S}_2 = E - A \vec{S}_1 \vec{S}_2$$

обменный интеграл

$S=1: S_z = -1, 0, 1 \rightarrow E_a$

$S=0: S_z = 0 \rightarrow E_s$

$$\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2; |\vec{J}|^2 = |\vec{L}_1|^2 + |\vec{L}_2|^2 + 2(\vec{L}_1 \vec{L}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{L}_1 \vec{L}_2 = \frac{1}{2} [|\vec{J}|^2 - |\vec{L}_1|^2 - |\vec{L}_2|^2] = \frac{1}{2} [J(J+1) - L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)]$$

$J = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad L_1, L_2 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow S=0 \Rightarrow \vec{S}_1 \vec{S}_2 = -\frac{3}{4}$
 $S=1 \Rightarrow \vec{S}_1 \vec{S}_2 = \frac{1}{4}$

$A > 0 \Rightarrow$ выгодно $\uparrow \uparrow$ ($A > 0$ в ~~разн.~~ одинаковом ^{спине})

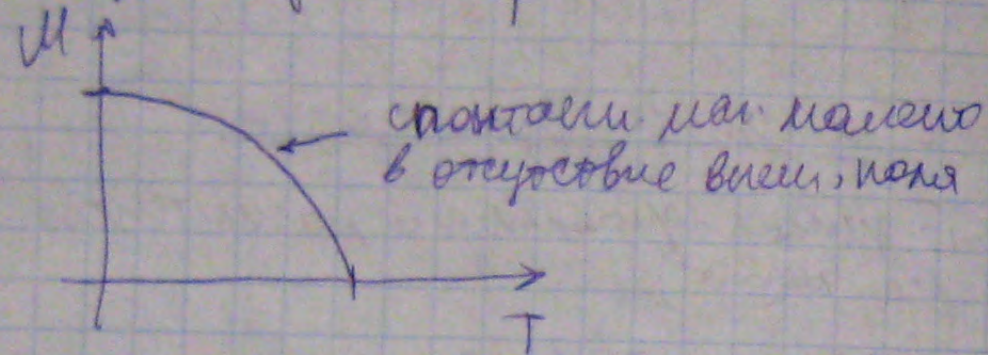
$A < 0 \Rightarrow$ выгодно $\uparrow \downarrow$ ($A < 0$ в ~~разн.~~ одинаковом ^{спине})

1) обменное взаимодействие пропорционально $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

2) $E_{\text{обмен}} \sim \exp(-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

интервал

При нулевых T-рах



Прибл. метод:

Метод самосогласованного поля

(здесь: метод Кюри-Вейса)

• спин 1/2?

$$J = \frac{1}{2} \Rightarrow g = 2 \Rightarrow m_J = \pm \frac{1}{2}$$

Кюри-Вейс: упреждаю маг. стрелки
приска. в поле $\vec{H}_{eff} = \vec{H} + \alpha \vec{M}$ самосогл. маг. поле
 α внеш. поле около атомов.

$$\sum_{m_J = -J}^J m_J e^{\frac{\mu g H_{eff}}{kT}}$$

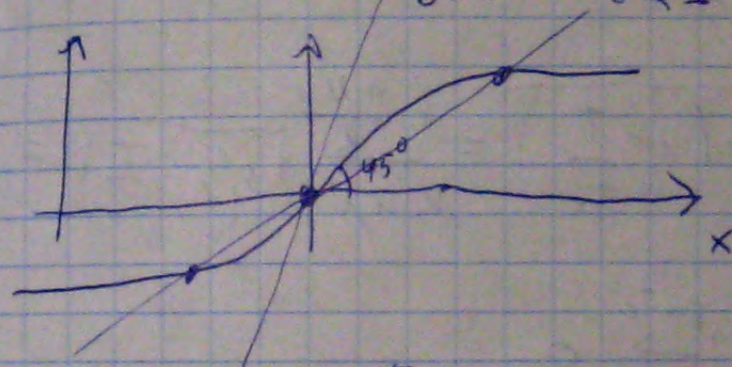
$$M = n \mu g \frac{\sum_{m_J = -J}^J m_J e^{\frac{\mu g H_{eff}}{kT}}}{\sum_{m_J = -J}^J e^{\frac{\mu g H_{eff}}{kT}}} = 2n \mu \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}} - e^{\frac{\mu(H-\alpha M)}{kT}}}{e^{\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}} + e^{\frac{\mu(H-\alpha M)}{kT}}}$$

$$M = n \mu \tanh\left(\frac{\mu(H + \alpha M)}{kT}\right)$$

$$H=0 \Rightarrow M_s = n \mu \tanh \frac{\alpha \mu M_s}{kT} \Leftrightarrow bx = \tanh x \quad \left| \begin{array}{l} \text{s-choi-} \\ \text{tunnel} \end{array} \right.$$

$$\left\{ x := \frac{\alpha \mu M}{kT}, \quad b := \frac{kT}{\alpha \mu^2 n} \right\} \quad \left| \begin{array}{l} M_s \equiv M \\ H=0 \end{array} \right.$$

$$bx = \tanh x$$

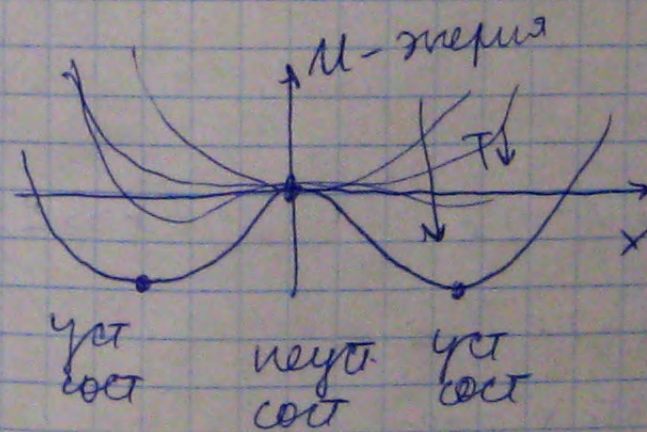


$$b > 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M_s = 0$$

$$b < 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{неуст. сост.} \\ x \neq 0 & \text{уст. сост.} \end{cases}$$

$$b < 1 : \frac{kT}{\alpha \mu^2 n} < 1 \Leftrightarrow T < \alpha \frac{\mu^2 n}{R}$$

$$T_{up} \equiv T_c - \text{Темпер. Кюри}$$



$$\alpha > 0$$

при понижении T появл. спонтанная намагниченность

Ферромагнетизм.

$$T \lesssim T_c : \quad \text{th } x \approx x - \frac{x^3}{3} \quad (x \ll 1)$$

$$b x \approx x - \frac{x^3}{3} \Rightarrow |x| = \sqrt{3(1-b)}$$

$$\frac{\alpha \mu M_s}{kT} = \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}$$

$$M_s \stackrel{T \approx T_c}{\approx} \frac{k T_c}{\alpha \mu} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} = \frac{k \frac{\alpha \mu^2 n}{k}}{\alpha \mu} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} =$$

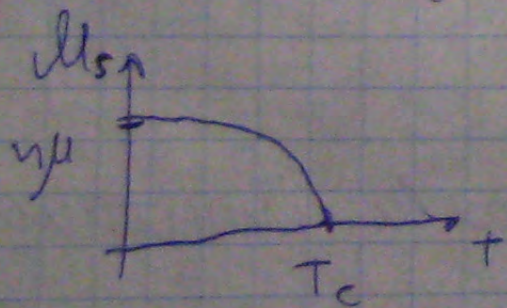
$$= n \mu \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} 0$$

ном.
маг.
момент
всех упорядоченных

$$T \ll T_c : \quad \text{th } x \approx 1 - 2e^{-2x} \quad (x \gg 1)$$

$$b x \approx 1 - 2e^{-2x} \Rightarrow$$

$$M_s \approx n \mu \left(1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T}}\right) \xrightarrow{T \rightarrow 0} n \mu$$



$$T \gtrsim T_c, H \neq 0.$$

$$\text{th} \left(\frac{\mu(H + \alpha M)}{kT} \right) \approx \frac{\mu(H + \alpha M)}{kT}$$

$$M = \frac{n \mu^2 (H + \alpha M)}{kT}$$

$$M \left(1 - \frac{n \mu^2 \alpha}{kT}\right) = \frac{n \mu^2 H}{kT}$$

$$M \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) = \frac{n \mu^2 H}{kT}$$

$$M = \frac{n \mu^2}{k(T - T_c)} H = \chi H$$

$\chi \sim \frac{1}{T - T_c}$ маг. стрелки
взаимно
Кюри-Вейс

Без вывода!

$$\alpha = \frac{z}{4} \frac{A}{\mu^2 n} = \frac{z A}{4 \mu M_{s0}}$$

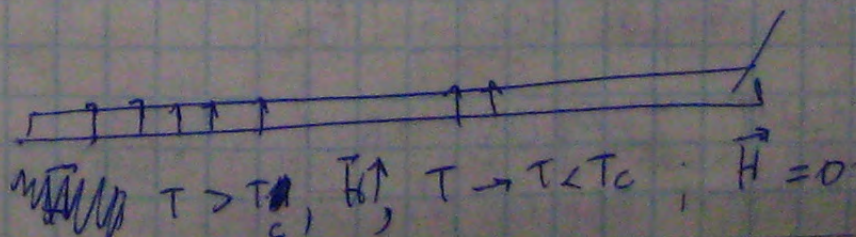
A - обменный интеграл
 z - кол-во "соседей" атома
 $M_{s0} = M_s|_{T=0}$

$$k T_c = \frac{z}{4} A$$

$A > 0 \rightarrow \alpha > 0$ (ферромагнит. упоряд.-ть)

$$\left. \begin{array}{l} T_c(\text{Fe}) \\ T_c(\text{Ni}) \end{array} \right\} > 300 \text{ K.}$$

ферромагнетики



$\uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow E_{\text{обм}} \text{ min.}$
 $\uparrow\downarrow\uparrow \rightarrow E_{\text{маг.}} \text{ max.}$

$\uparrow\uparrow\uparrow \downarrow \uparrow\downarrow\uparrow$ разбиение на домены
 доменная стенка - поворот маг. намагн. стенки ~~не~~ происходит

Ферромагнетизм при низк. T -рах $M = nS$

одну из стенок поворачивать нельзя
 непрерывный поворот - размазывание)
 коллективное возбуждение - бозона возбужд.
 частота возбуждения - магн.:

$\epsilon(\vec{p}), \epsilon(0) \neq 0$
 целый спин $\Rightarrow$ бозон

Продолжн; Сверхпроводники

при $A > 0 \rightarrow \uparrow\uparrow$

при $A < 0 \rightarrow \uparrow\downarrow$ - $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ спин
 обмен. инт.-А антиферромагн.

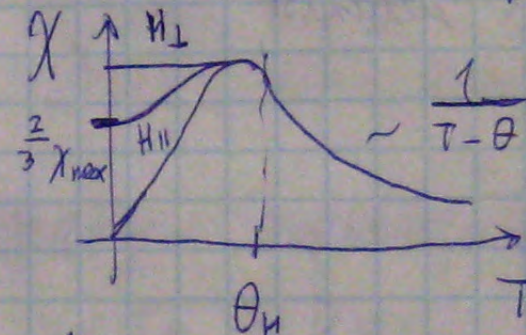
Критич. T -ра - T -ра Нееля, (θ_N)

антиферромагнит. упоряд.-ть. $(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow)$
 удвоение периода крист. решётки.

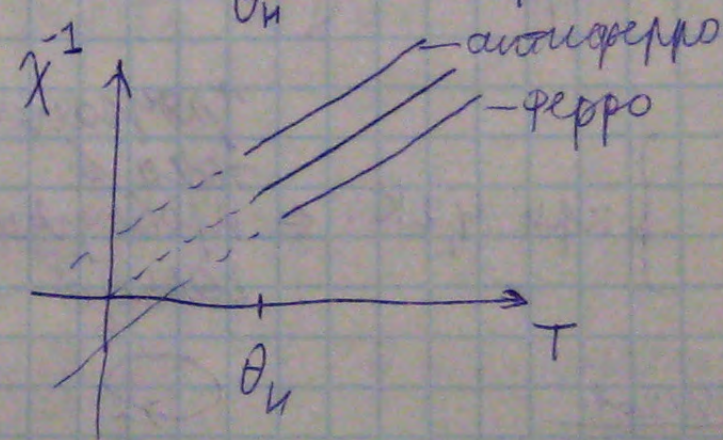
магнитон. момента нет. $(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow)$

$T < \theta_N$ - упоряд.

$T > \theta_N$ - неупоряд.



магнитон.
 χ -восприимч.



$\frac{2}{3}$ - { 2 веса от $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$
 1 вес от $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

удвоение периода решётки на решетке не бозона
 (спин не релаксируется).

нужны ~~все~~ незаряженные частицы со спином
 (для кубового проникновения) (для бранней)
 нейтрон.

при $T < \theta$:

а) $\uparrow^H \uparrow\downarrow\uparrow$

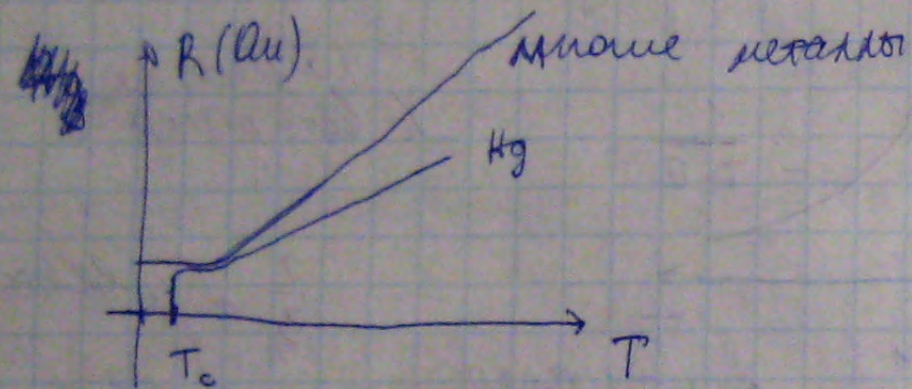
$H_{||}$ малые
 отклонения влияют

б) $\uparrow^H \uparrow\downarrow\uparrow$

$H_{\perp}$ отклонения спинов ~~не~~
 почти не влияют

① Сверхпроводимость (1911, Кембриджский) Жидкий He

$T_{\text{крит He}} = 4,2 \text{ K}$ — жидкий "холодильник"



$\rho_{\text{Cu}} \sim 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{см}$

$\rho < 10^{-25} \text{ Ом} \cdot \text{см}$

при 4,2 K. ← затухание тока в проводнике кольца

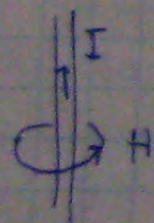
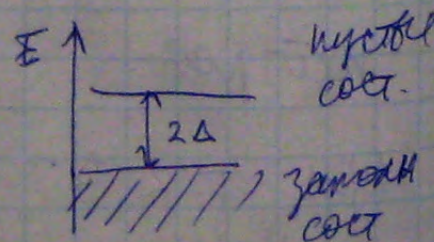


св-ва сверхпроводников
1) $\rho \sim 0$ при $I < I_c(T, H)$

2) эффект Мейснера

$B \equiv 0$ в глубине при $H < H_c \Rightarrow \chi = -\frac{1}{4\pi}$

3) В квант-ых экспериментах при $T < T_c$ появ-ся щель в спектре 2Δ



от. большие поля H (от тока в собств) нарушают упоряд. подавление

Зак. Видемана - Франца

ме: больше электропровод → больше ~~теплопровод~~ теплопровод.

сверхпр: цель Δ растёт, уменьш. теплопровод.

4) Большие токи портят свойства низкотемп.

Идеальн. проводник (ИП)

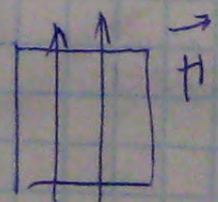
$T < T_c \Rightarrow \rho = 0$

Сверхпр. (СП)

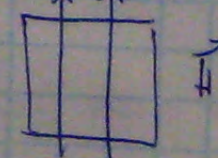
$T < T_c \Rightarrow \rho = 0$



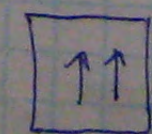
пока $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \rightarrow I$ компенсирует $\frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow H=0$ внутри
всё время, т.к. ток не затухает.



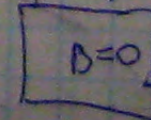
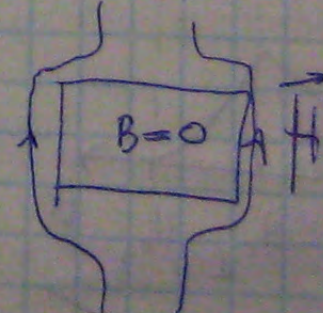
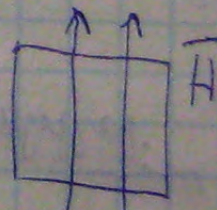
$T > T_c$



$T < T_c$



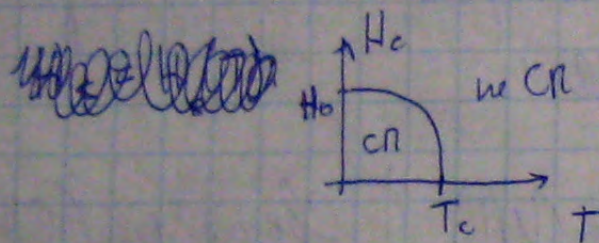
$\vec{H} = 0$



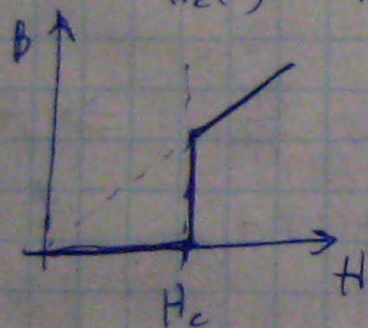
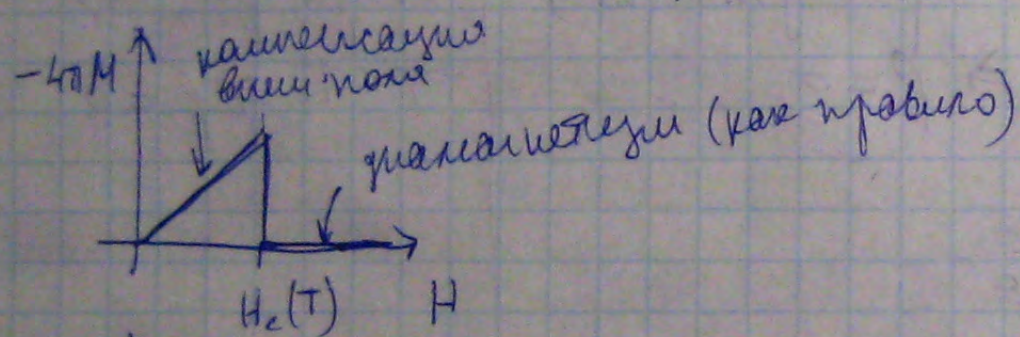
Итак, эффект Хейснера - не просто эффект СР.

Типы СР:

1) I рода: $T_c \text{ счт} < T_c$: $H < H_c \rightarrow \text{СР}$
 $H > H_c \rightarrow \text{нет СР}$

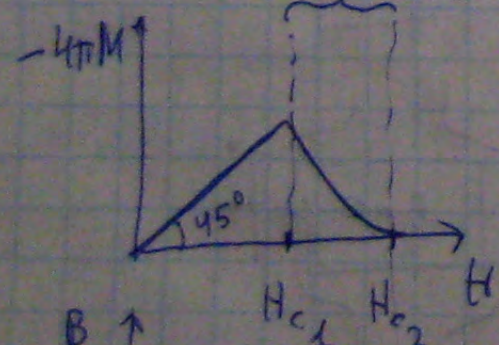


$$H_c = H_c(T)$$

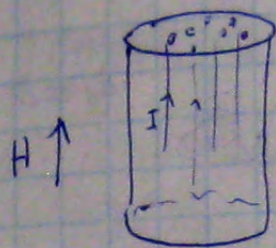


2) II рода

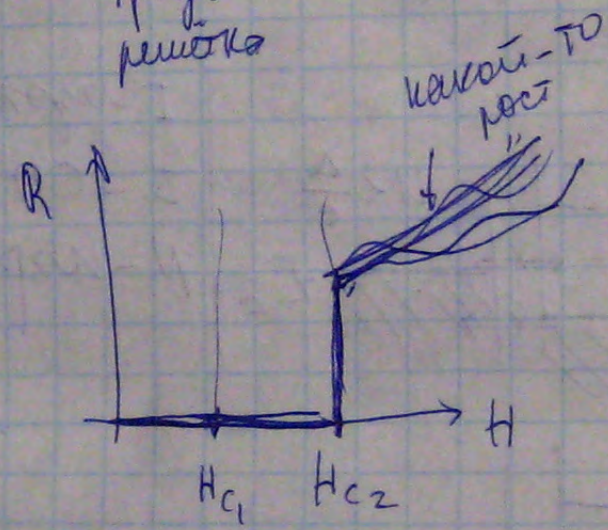
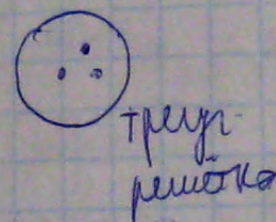
разрушение сверхпроводимости.



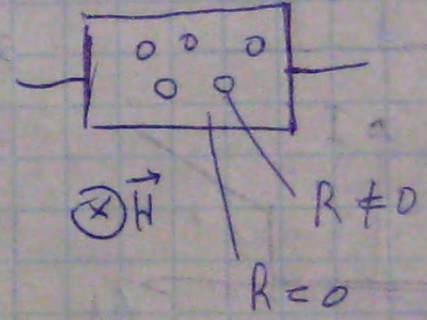
проникновение маг. поля в СР в виде вихрей (А.А. Абрикосов, конец 1950-е)



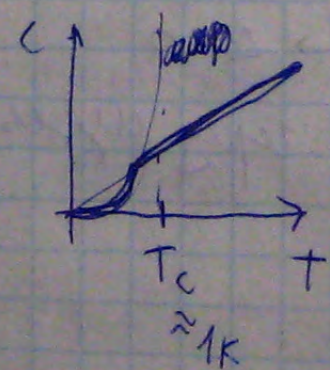
отталкивание вихрей от ЦР



$H_{c1} < H < H_{c2}$
 с ростом H число "0" растёт



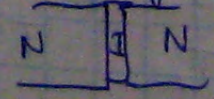
Al: $T_c \sim 1\text{K}$, $H > H_c$

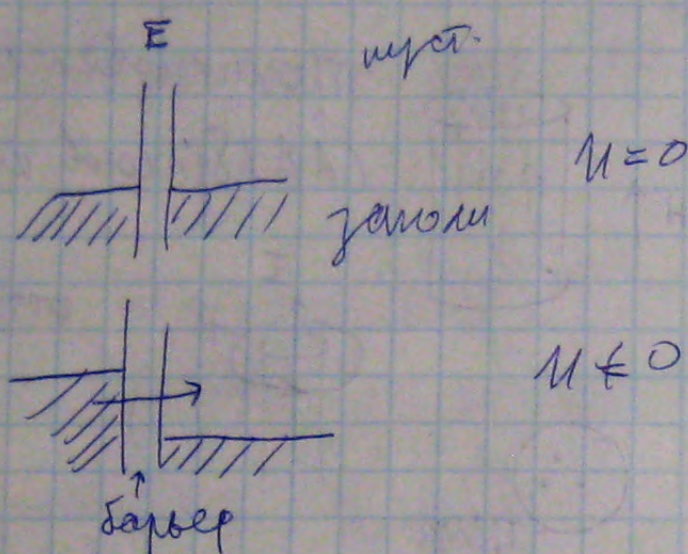
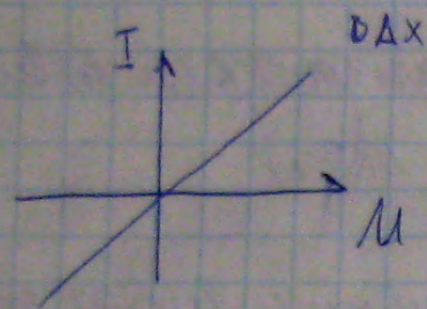


С - теплоёмкость

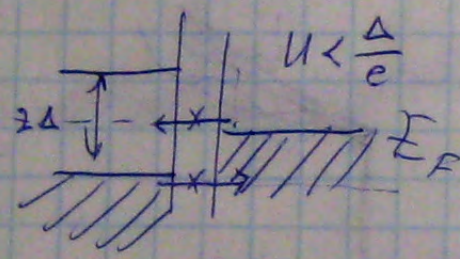
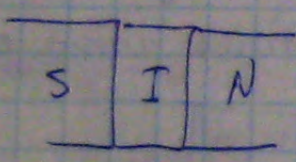
$T \downarrow \Rightarrow \text{узлов} \uparrow$

Способ измерения узел-туннельный эффект

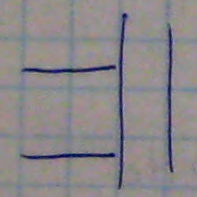
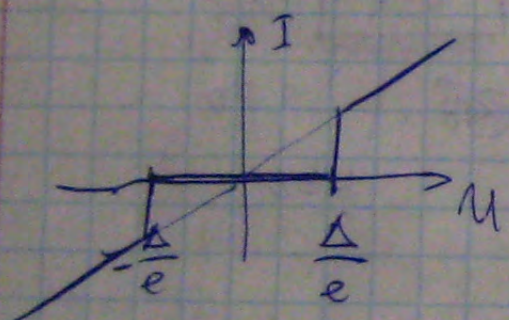




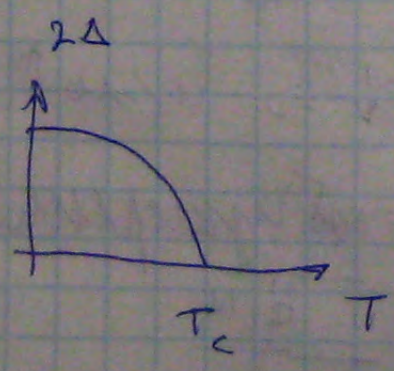
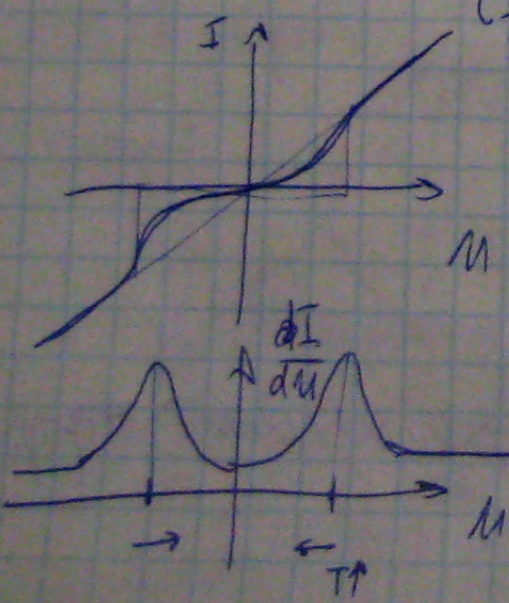
б) малые T:



I-устройство
S-СП
N-норм.



с ростом T: $\Delta \downarrow$, или $T = T_c \rightarrow \Delta = 0$
термич. возбужд. перес. узла



S-superc.
N-Norm.

Теория Джозефсона

4) Конденат Брегга

2 вида э-нов $\rightarrow n_s$
 $\rightarrow n_n$

$n_s \rightarrow n, T \rightarrow 0$
 $n_s \rightarrow 0, T \rightarrow T_c$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_s}{dt} &= -e \vec{E} \\ \vec{j} &= -e \vec{v}_s n_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} \Rightarrow$$

- плот тока

и Паравек: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \vec{B} \right) = 0$$

(1) $\frac{d}{dt} \Rightarrow$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{— микроскопич.}$$

(2) $\text{rot } \vec{B} = \vec{C}$

(1) $\frac{d}{dt} = 0$
= (2)

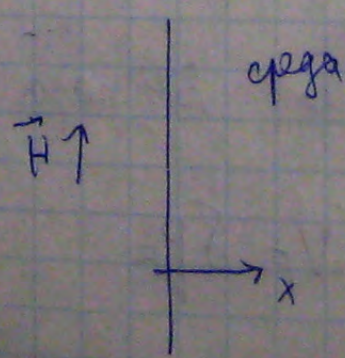
$$\vec{\nabla} \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}$$

(3)

(Брегга Конденат)

— гл. СП.
Брегга

$\vec{C} < 0$



$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B}$$

$$\nabla^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{j}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow B(x) = B(0) e^{-\frac{x}{\Lambda}}$$

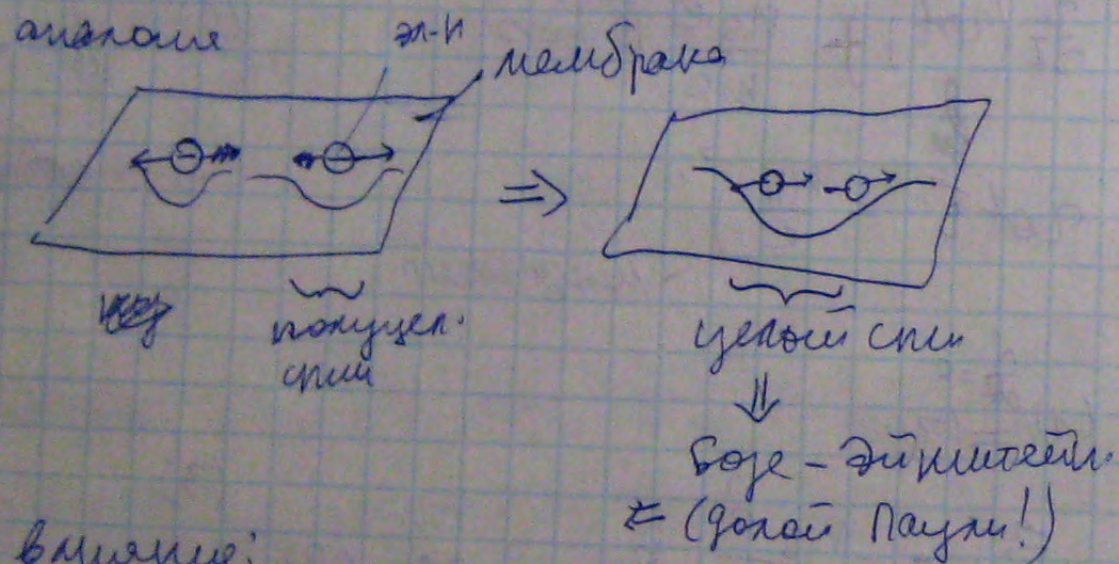
Λ - длина проникновения маг. поля в СП.

$$\Lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}$$

$$\Lambda \sim 10^2 \div 10^3 \text{ \AA}$$

① Микроскопическая теория объяснения СП (Купер, Шрифер и ...)

1. Возможно $\pi\pi$ притяжение π в узлах решетки.



Внимание:
- мембрана
- группа $N-2$ π -нов.

~~описание~~ описание всех π -нов в Ф пара π -нов

$$\Delta = \delta E = \delta \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p_F}{m} \delta p_F = v_F \delta p_F$$

(p_F - импульс Ферми)

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar}{\delta p} \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta} \sim \frac{1}{k_F} \frac{\epsilon_K}{\Delta}$$

$\sim 10^3 \text{ \AA}$ - неуп-тв пар

Область неопределенности Δ вносит π в π пар π нов.

Рассеяние π нов (аналогия со спином π нов) $\Rightarrow$ приведет к увеличению π нов (аналогия со спином π нов) $\Rightarrow$ π нов π нов

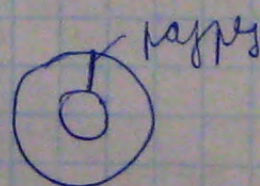
$\Rightarrow$ сопротивление $R = 0$.

Сверхпровод. кольцо



$$\Phi = \frac{n \hbar c}{2e} = n \underbrace{\frac{\Phi_0}{2}}_{\text{квант маг. потока}}$$

$$n = 0, 1, \dots$$



$$I = I_0 \frac{\sin \frac{n \Phi}{\Phi_0}}{\frac{n \Phi}{\Phi_0}}$$

- туннельный ток через π нов (стандарт. эффект Джозефсона)

ККВИИ - определение маг. потока.

$$\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}$$

- осциллирующее напряжение (стандарт. эффект Джозефсона)

Как лектор дочитает курс до
конца, так сразу выложу
остальные лекции.

Пока последняя от 6.12.14.