

студенты-
физики

Основы физики конденсированного состояния вещества

Конспект лекций Хохлова Р.В.

2014

Неизвестный

Студент физфака

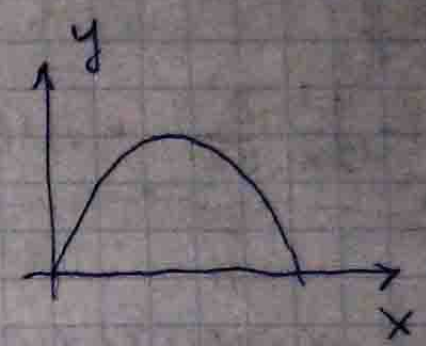
Литература

- 1 Курьбалинский. Квант. в физ. конг. сост.
- 2 Котель, вв. в физ. тб. тела
- 3 Браунт, Мудинев, Эл-ны и фолонты в кр. лек.

Состояние неопредел.

лек 2
13.09

$$\begin{cases} F_y = m\ddot{y} = -mg \\ F_x = m\ddot{x} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0 \\ x(t) = \dot{x}_0 t + x_0 \end{cases}$$

Сущ. пара переменных, омовр. определе-
ние к-рых невозможно

$$\begin{aligned} (\Delta p_x)(\Delta x) &\geq \hbar, & \hbar &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ \Delta E \Delta t &\geq \hbar, & \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \end{aligned}$$

пр шарик $m = 1 \text{ кг}$, $\Delta v = 1 \text{ м/с}$
 $\Delta x = 10^{-34} \text{ м}$ — ошибка определения коорд.

пр электрон в атоме
 $\Delta y \approx 10^{-10} \text{ м}$; $\Delta v = 10^7 \text{ м/с}$

⇒ понятие траектории неостаточно.

Волновая функция

$$\Psi(x, t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = 1$$

- Ф.Ф.

- непрерывна

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)}_{\hat{H}} \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad - \text{УШ}$$

Стационарные состояния

$$\Psi = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi = \underbrace{\hbar\omega}_E \psi$$

Свободная частица: $V(x) \equiv 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0; \quad \psi = \psi_0 e^{ikx}$$

$$-k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

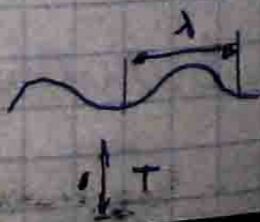
$$\Psi(x, t) = \underbrace{\psi_0}_{\text{нормировка}} e^{\frac{2\pi i}{2\pi\hbar} (Et - x\sqrt{2mE})}$$

Колемания струны.

$$y(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$t=0: \quad y^{(x)} = e^{ikx} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$x=0: \quad y^{(t)} = e^{-i\omega t} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Фаза стационарна:

$$y(x, t) = \text{const} = e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow kx = \omega t;$$

$$x = \frac{\omega}{k} t \quad - \text{V скорость движения фронта.}$$

$$E = \hbar\omega;$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

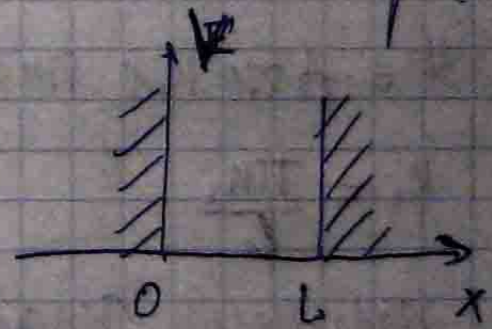
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{p^2}{2m}} = \frac{p}{\hbar}$$

Соотношение де Бройля

$$k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow p = \hbar k$$

Квантование энергетического спектра.

$$V = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x \in [0, L] \\ \infty & x > L \end{cases}$$



реш. ур. Шр:

$$\Psi = A \cos kx + B \sin kx$$

$$\Psi(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi(x=L) = 0 \Rightarrow \Psi = B \sin kL = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\pi n}{L}; \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m L^2}, \quad n = \overline{1, \infty}$$

($n=0 \rightarrow \Psi=0$)

Трёхмерной яме

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi + V\Psi = E\Psi$$

$$V=0 \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, 0 \leq z \leq l)$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_1(x, t) \Psi_2(y, t) \Psi_3(z, t)$$

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_2 + \frac{1}{\Psi_3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_3 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 = -k_1^2$$

$$\frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_2 = -k_2^2$$

$$\frac{1}{\Psi_3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_3 = -k_3^2$$

$$\Psi = A \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z$$

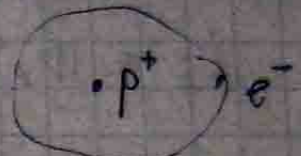
$$k_i = \frac{\pi n_i}{l}$$

одному значению E могут соответствовать несколько наборов $\{n_1, n_2, n_3\}$ ив. числа $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$.

Генерирующие выражения - ямело наборов.

Атом водорода

$$V \sim \frac{e^2}{r}$$



$$\{q, i\} = r, \theta, \varphi$$

$$E_n = \frac{R_\infty}{n^2}$$

- энергия уровня

$$R_\infty = \frac{m e^2 Z^2}{2 \hbar^2}$$

- пост. Ридберга

$$n=1. \quad \Psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m Z e^2} \approx 0,5 \text{ \AA}$$

- совпад. с Боровск. радиусом при $Z=1$

$$r, \theta, \varphi \rightarrow n, l, m$$

квантовые числа

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

$$m_l = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$S_z = \pm \frac{1}{2}$$

при нек-ром n число возм. состояний $2n^2$

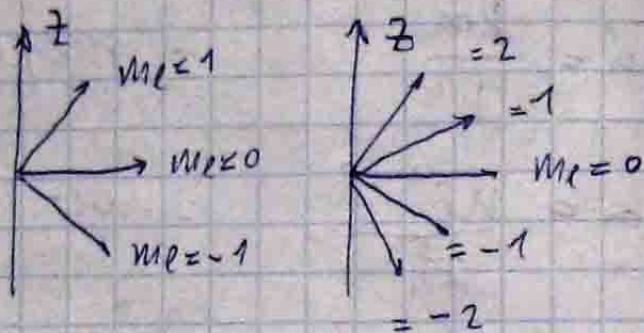
$$L^2 = l(l+1)\hbar^2$$

$$L_z = m_l \hbar$$

- проекция на ось z

$$\langle L^2 \rangle_{nlm} = \int \Psi_{nlm}^* L^2 \Psi_{nlm} = n \frac{l(l+1)}{4\pi}$$

$$\langle L_z \rangle_{nlm} = \frac{n m_l \hbar}{4\pi}$$



Принцип Паули (полупроводник)

$$V = \frac{e g(e)}{4\pi \epsilon_0 r}$$

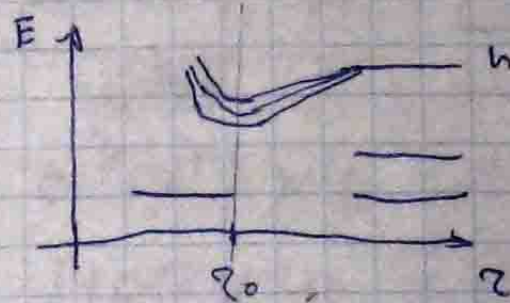
$$z = 3$$

$2e < z' < 3e$ - в суму экранировки

Сис-ма из N п-нов, уровень n, кратность вырождения g_n.

$N g_n$ - число ~~вырождений~~ состояний

Будем считать атомы: существование ур-в. выш и



расщепление

равновес. раст. (min энергии) = постоянная решетка

лек 3
20.09
(группа)

① Трансляция симметрия

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - базис. векторы. При трансляции на один из этих векторов структура не меняется. Пренебрег. дефектами, краями тела и теплов. колебаниями. (N^3)

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \vec{a})$$

- потенциал решетки

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = |\Psi(\vec{r} + \vec{a})|^2$$

- кв. модуль в.Ф.

$$\Psi(\vec{a} + \vec{r}) = c(\vec{a}) \Psi(\vec{r}),$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 N_1 + \vec{a}_2 N_2 + \vec{a}_3 N_3$$

$$\text{где } |c(\vec{a})|^2 = 1$$

$$\text{Пуская } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$$

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = \epsilon(\vec{a}) \psi(\vec{r}) \Rightarrow \underbrace{c(\vec{a}'') c(\vec{a}')}_{n=1} = c(\vec{a})$$

$$\Rightarrow c(\vec{a}) = e^{i\vec{k}\vec{a}}$$

Итак,

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{k}\vec{a}} \psi(\vec{r})$$

Пусть

$$u(\vec{r}) := \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$u(\vec{r} + \vec{a}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}) e^{-i\vec{k}(\vec{r} + \vec{a})} = (e^{i\vec{k}\vec{a}} \psi(\vec{r})) e^{-i\vec{k}(\vec{r} + \vec{a})} = u(\vec{r})$$

$u(\vec{r} + \vec{a}) = u(\vec{r})$ - периодич. ф. д. с периодом решетки

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

плоск. волна

- теорема Блоха

Факт ~~является~~ най-ся Блоховским, ~~является~~ в отличие от свобод. э-нов.

\vec{k} - квазиимпульс вектор

\vec{r} - координаты

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Пусть \vec{n}_j - ед. вектор, a_j - период кристалла, L_j - размер кристалла.

Границы "нет" \Rightarrow периодич. гр. усл:

$$\psi(\vec{r} + L_j \vec{n}_j) = \psi(\vec{r})$$

$$u(\vec{r} + L_j \vec{n}_j) \cdot e^{i\vec{k}(\vec{r} + L_j \vec{n}_j)} = u(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow u(\vec{r}) e^{i\vec{k} L_j \vec{n}_j} = u(\vec{r})$$

$$e^{i\vec{k} L_j \vec{n}_j} = 1 \Rightarrow \vec{k}_j L_j \vec{n}_j = 2\pi n \Rightarrow (\vec{k}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{L_j} n$$

Проекция \vec{k} - квартового вектора на решетку фиксирован.

$$\vec{k}_j = \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j \equiv \vec{b}_j$$

- вектор обратной решетки

$$\psi(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = u(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) e^{i\vec{b}_j(\vec{r} + a_j \vec{n}_j)} = \psi(\vec{r})$$

Периодичность Б.Ф.

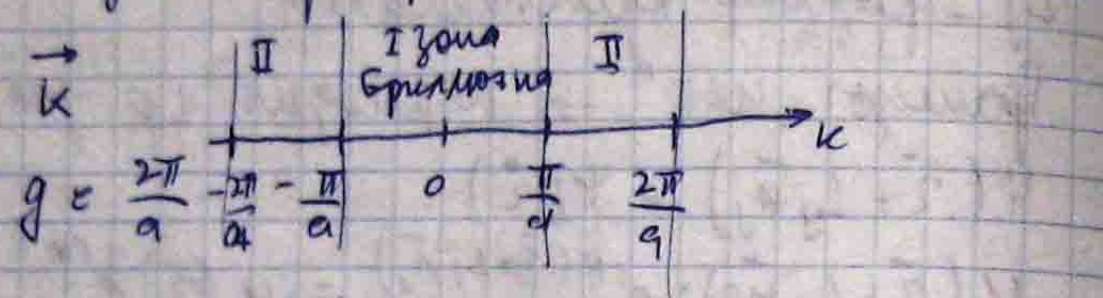
$$\psi; \vec{k} = \vec{k}' + \vec{g}, \quad \vec{g} = \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = e^{i(\vec{g} + \vec{k}') a_j \vec{n}_j} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = e^{i\vec{k}' a_j \vec{n}_j} \psi(\vec{r})$$

Итак, \vec{k} и $\vec{k} + \frac{2\pi}{a_j} \vec{n}_j$ - эквивалентны

уп одномер. кристалл



здесь - все разреш. энергетические состояния k . в гр. зонах - только m

в 3-мерном случае - параллелепипедная зона Бриллюэна

$$\frac{2\pi}{L_x} \rightarrow \frac{2\pi}{L_x} \cdot \frac{2\pi}{L_y} \cdot \frac{2\pi}{L_z} = \text{объем фазового пространства, приходящий на одно состояние } k \text{ (одно состояние)}$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{V}$$

если Δ - фазов. объем эл-нов, то

$$N = \frac{\Delta V}{(2\pi)^3} \cdot 2$$

- полное число эл-нов.

с учетом спина $k: \uparrow \downarrow$

$$n = \frac{2\Delta}{(2\pi)^3}$$

- их концентрация



Объемность на границе зоны Бр.

$$\vec{k}, \vec{n}_j, \vec{a}_j$$

если $\lambda_{gr} \gg a_j$, то Бр. зона с длиной мало

$$\lambda \cdot m = 2a_j, \text{ то } \text{проект. отраженные волны } (m \in \mathbb{Z})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \pi m = a_j k_j \Rightarrow k_j = \pm \frac{\pi}{a_j} m \quad m \in \mathbb{Z}$$

При достаточно малой гр. зоне Бр эл-н отражается (создает волны в зонах Бр.)

Динамика Блоховских эл-нов.

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \underbrace{\Sigma(\vec{p})}_{\text{кинет. энер. эл-на}} + \underbrace{U(\vec{r})}_{\text{пот. энергия}}$$

Фя Гамильтона

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \hbar \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{array} \right.$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -F$$



$$F_{\text{внеш}} = -e|E|$$

$$\delta \Sigma = -e E v \delta t = -e E \frac{\partial E}{\partial p} \delta t$$

$\frac{dp}{dt} = -eE$ - изменение квазиимпульса обусловлено внеш. полем.

$$m \frac{dV}{dt} = \Sigma (F_{внеш} + F_{внутр})$$

Для Блоховских $\hbar k$ -но $\vec{p} \neq \hbar \vec{k}$
 Квазиимпульс - не есть суммарное

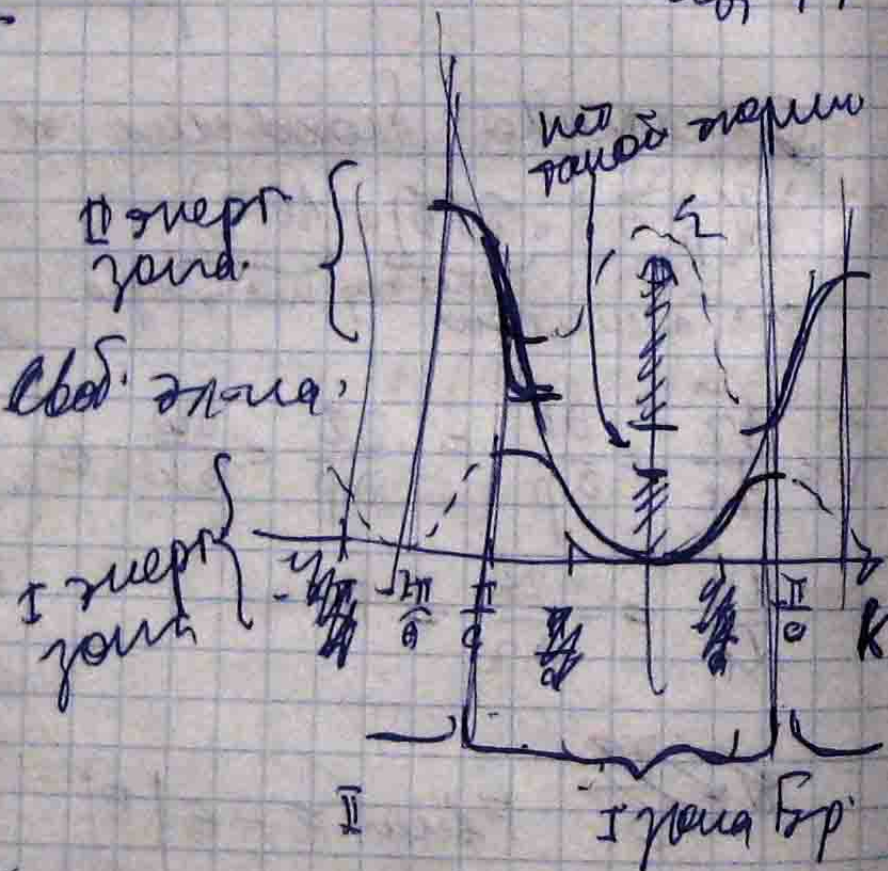
$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} \right) = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \right) \frac{dp_j}{dt}$$

" $\frac{1}{m}$ " := \tilde{M}_{ij}^{-1} - тензор обрат. массы

$$\tilde{M}_{ij} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

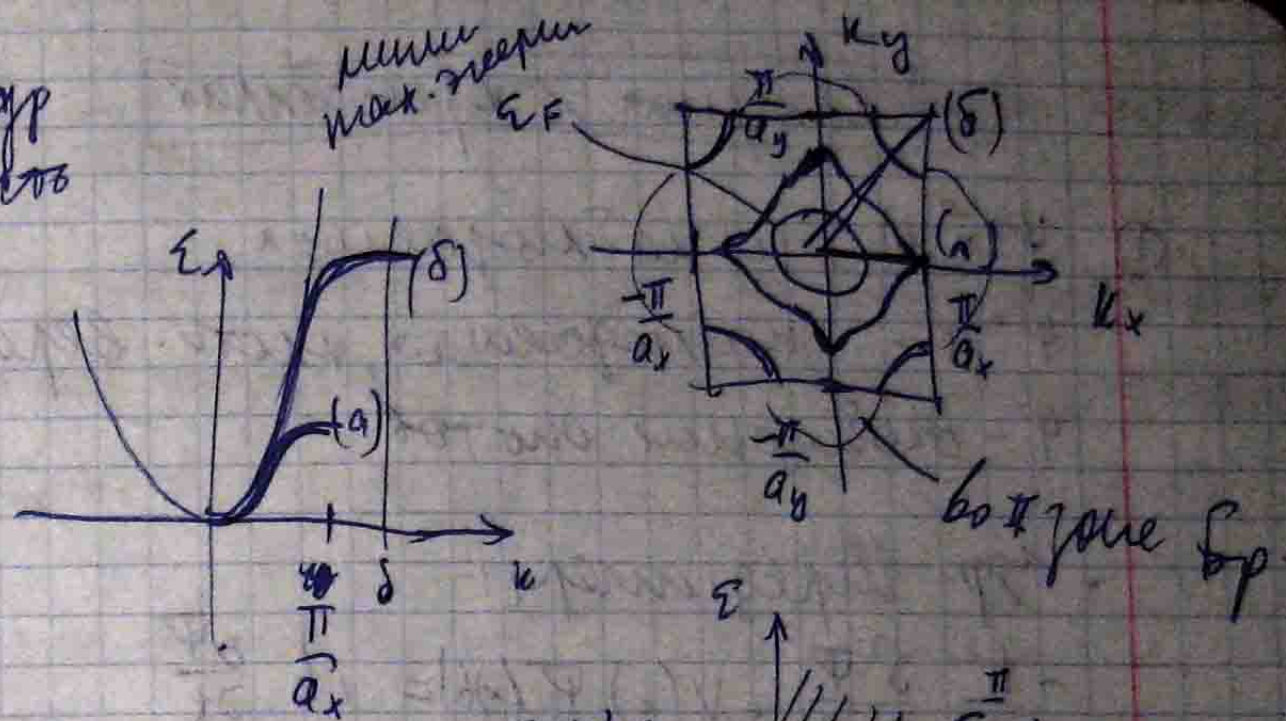
здесь \vec{v} - групп. скорость (со стороны кристалла)

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} - \text{для свобод. элект.}$$

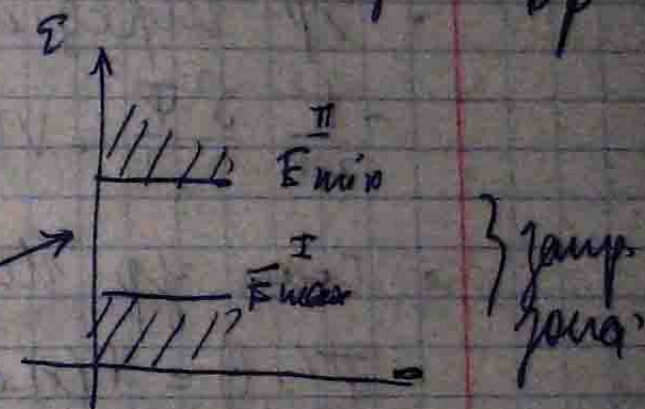


Двухзонный случай

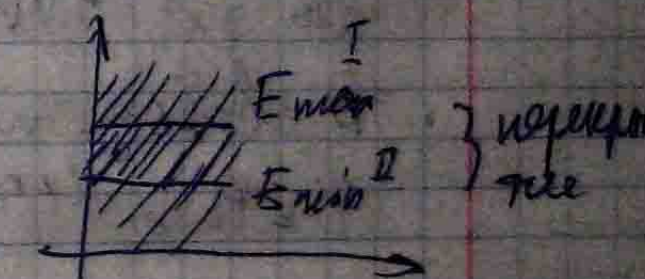
квадратная решетка



случай 1
 непроводник или диэлектрик



случай 2
 проводник



Полное число сост. в зоне

$$\underbrace{\left(\frac{2\pi}{a} \right)^3}_{\text{объем зоны}} / \underbrace{\left(\frac{2\pi}{V} \right)^3}_{\text{объем состояния в пространстве}} = \frac{V}{a^3} = N, \quad \underbrace{2N}_{\text{полное число сост. в зоне (2-спин)}}$$

Звонки в кристаллах

лек 4
27.09

- ① $\Psi(\vec{r}, t)$ - волновая функция, $\Psi^* \Psi$ - плотность вероятности, Ψ - обобщенные координаты.

• Ур. Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

• Стационар. Ур. Шредингера ($\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow E = \text{const}$)

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{i\omega t} \quad \text{- подстановка}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi, \quad E = \hbar \omega$$

• В свобод. пр-бе ($V(x) = 0$)

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{- решение}$$

$$p = \hbar k$$

$$E = \hbar \omega$$

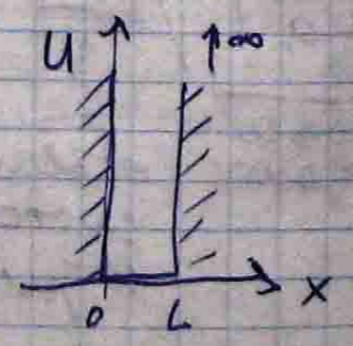
p, k - импульс

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

• В потенци. яме

$$E_n = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m}$$

при $L \rightarrow \infty$: $\Delta E \rightarrow 0$: дискретный спектр \rightarrow непрерывный спектр



$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad \text{- для 3-мерного случая}$$

Разм. состояний с одинак. энергией - вырождение. Степень вырожд. g_n - число разм. сост. с одинак. E

$$\text{пр } \{n_1, n_2, n_3\} = \{1, 2, 1\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \quad g = 3$$

① Квант. числа

$$V(r) = \frac{e^2}{r}$$

$$2 \leftrightarrow n: E_n = \frac{K_0}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$l, m_l \leftrightarrow l, m_l$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

- гл. квант. число

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

- орбитальное

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, l$$

- магнитное

рез. соотнош:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$$

- момент кол. вращ. движения

$$L_z = \hbar m_l$$

- проекция момента

$$|L_z| = \hbar m_l \leq \hbar l < \hbar \sqrt{l(l+1)} = |L|: \quad \frac{|L_z|}{|L|} < 1$$

Сохраняются только $|L|$ и L_z

Направл. \vec{L} прецессирует



① $g_n = n^2$

$n=1$:

$l=0, m_l=0$

$n=2$:

$l=0, m_l=0$

$l=1, m_l=0$

$m_l=1$

$m_l=-1$

$n=3$:

$l=0, m_l=0$

$l=1, m_l=0$

$m_l=1$

$m_l=-1$

$l=2$

...

...

...

} g

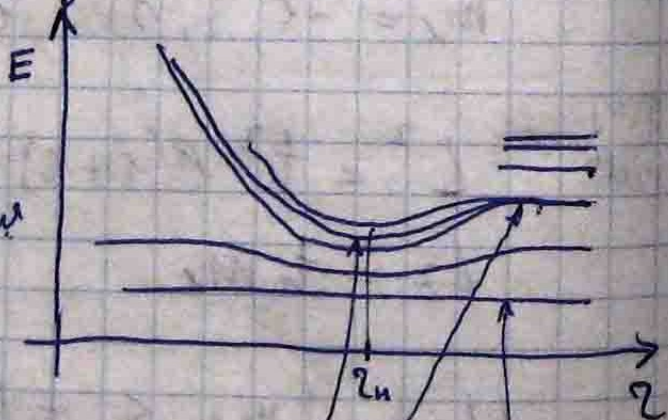
с учётом прецессии спина:

$g_n = 2n^2$

В многоэлектронных атомах внешние э-ны экранированы внутренними от воздействия ядра
 ↓
 на их энергию влияют только l и m_l .

① Два взаимодействующих атома:

э-ны разн. атомов находятся в одних состояниях ⇒ синхронизируются (принцип Паули)



все направл. не эквивалентны
 все направл. эквивалентны (сфер. симметрия)

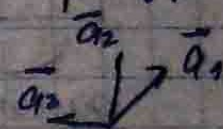
экранировка от ядра

$N \cdot g_n$ - число э-нов на уровне

N - число атомов в б.б.
 g_n - степень вырожд. уровня n .

① Кристалл

трансляционная инвариантность:
 при трансляции на \vec{v} к $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ конфигурация в б.б. не меняется.



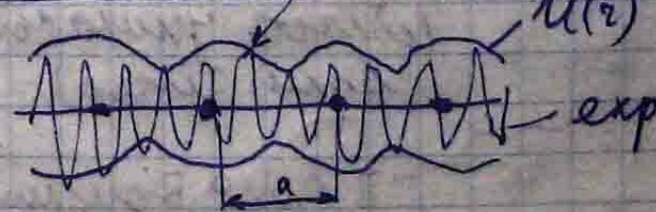
предположения:

- 1) Внешние края ~ плечи атомов на краю
 Общ. число атомов ~
- 2) Дефекты
- 3) Колебания атомов

ВФ э-на в периодич. потенциале:

$\Psi(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{a})$ - периодич. решетка



электрон не локализован у какого-либо атома

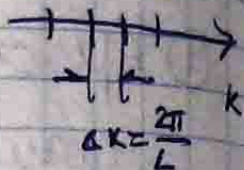
здесь \vec{k} - квазиимпульсный вектор

направление вектора:

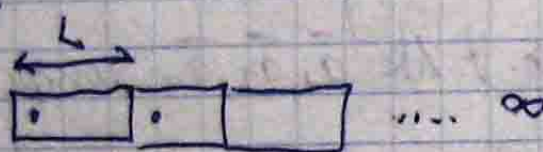
1) в свобод. пр. бе: $k \in (-\infty, \infty)$ - непрерывно

• в кристалле: k - дискретно!

L - размер кристалла в данном направлении



состояние



одна и та же ψ (по модулю и по фазе!)

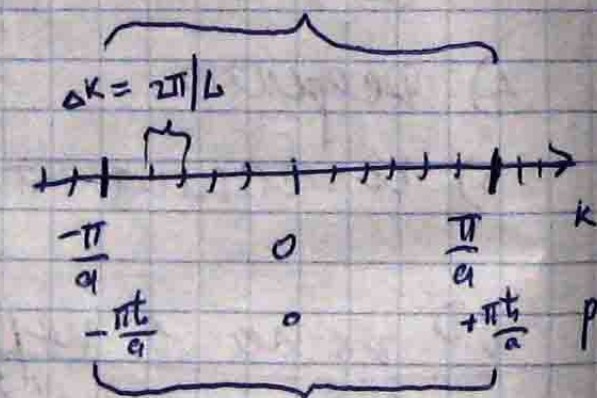
2) для волн. числа k и $k + \frac{2\pi n}{a}$ одинак. ^{в ф}

не состоящие одинак

↓

" $\forall k \notin (\text{ЗБрилли}) \exists k_0 \in (\text{ЗБрилли})$:

$$\psi(k) = \psi(k_0)$$



число разл. k :

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{L}{a} = N$$

I зона Бриллюэна (область уникальности волн. числа)

II зона Бриллюэна

тут k - квант. число - определяет сост. эл-на.

Если $k \in \pm \frac{\pi}{a}$ (на границе Бриллюэна), \Rightarrow

процесса выполняемая при Вульфера-Брилли \Rightarrow отражение волн от атомов \Rightarrow стоячая волна (чирнов. скор. $u=0$)

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} \quad \text{- скорость эл-на}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}_{\text{внеш}} \quad \text{- II зак. Ньютона}$$

\vec{p} - квазиимпульс, \vec{F} - сила внешнего воздействия (не решетка)

$\vec{p} \neq m_0 \vec{v}$ для эл-на

$$m \vec{a} \equiv m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{внутр}}$$

(не перемит) (перемит)

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

m^* - эфф. масса эл-на (с учетом влияния с решеткой)

электрон с эфф. массой m^* - квазичастица, своб. ускорен. эррентивно

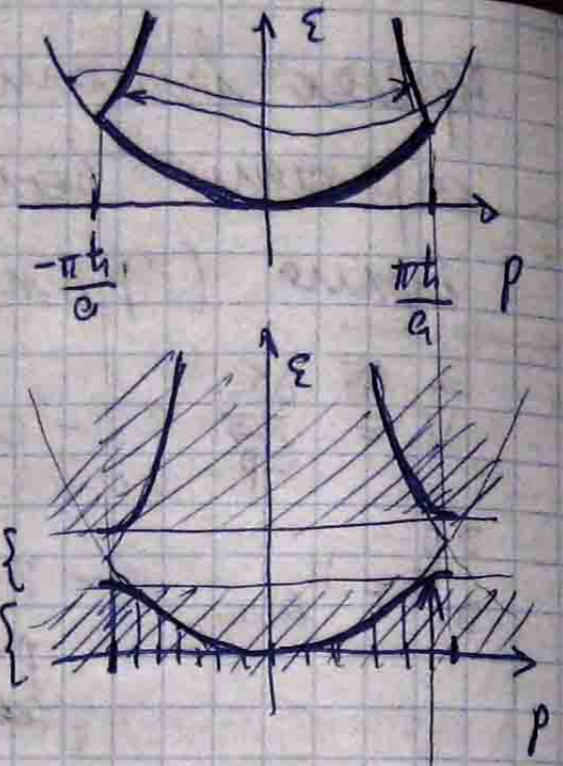
$$\text{Вдобав, } m_{ij} = m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \right)^{-1}$$

Эл-н с m^* как будто движется во внеш. поле, а среда удерживает в m^* .

* отклик атома отражение слабее, но атомов много, волны складываются и прояв. стояч. волна

$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ - кинетическая энергия

так как $\frac{2\pi\hbar}{a}$ по p не меняется, перенесём ветви параболы вправо, где всё физично.



Здесь $\psi(p)$ - многозначная ф.я.

запр. зона
разр. зона

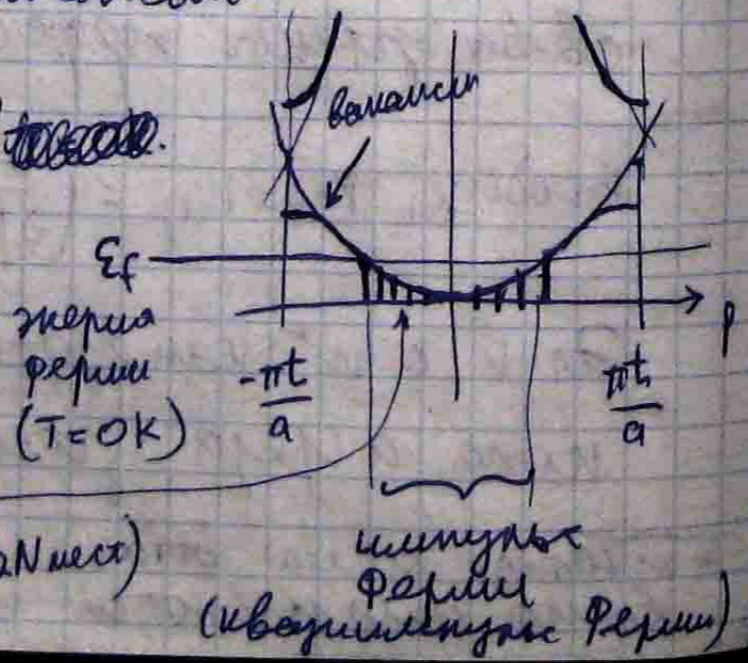
при $p = \pm \frac{\pi\hbar}{a}$ условие Вульера-Брота:

стая волна: $\psi \in \frac{\partial \psi}{\partial k} \Big|_{\hbar} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \Big|_{\hbar} = 0$
на границе на границе

замыкаются края параболы, появ. запр. зона.

металл (проводник) - в бо, у к-роо выше ϵ_f есть вакансия.

(если канг один займ 1 эл-н, то места есть, если 2 - мест нет.)



на канг значение p приходящее по 2 проекции спина - (2N мест)

~~Ширина зоны~~ Ширина Ферми опреде-ляется числом эл-нов свобод. при ОК. Циклотрон и ~~разр.~~ полупроводник опре-деляются шириной запр. зоны.

Лек 5
4.10.14

$H = \epsilon(\vec{p}) + V(\vec{z})$ - ~~уравн~~ Гамильтона

$\begin{cases} \frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} & \text{- I ур. Гамильтона} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{z}} & \text{- II ур. Гамильтона} \end{cases}$

$\vec{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} \equiv \frac{d\omega}{d\vec{k}}$ - групп. скор. волны (скорость расщипы) $\epsilon = \hbar\omega$
 $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

где F - непрерывна! часть (внешняя)
 $p = m^*v$, m^* - приведенная

$\Delta \vec{F}_{внеш} = -e\vec{E}$

$\delta\epsilon = eE v \delta t$ - энергия по перемещению $\frac{\delta x}{\delta t}$

$$\epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta p$$

$$\epsilon \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta p = v \delta p = e E v \delta t \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \underbrace{e E}_{F_{\text{внеш}}}$$

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{выт}} \quad *$$

$$\Rightarrow \vec{p} \neq m\vec{v}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_j}\right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j} \frac{dp_i}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{\text{внеш}i}$$

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij} \frac{dv_j}{dt} = F_{\text{внеш}i}$$

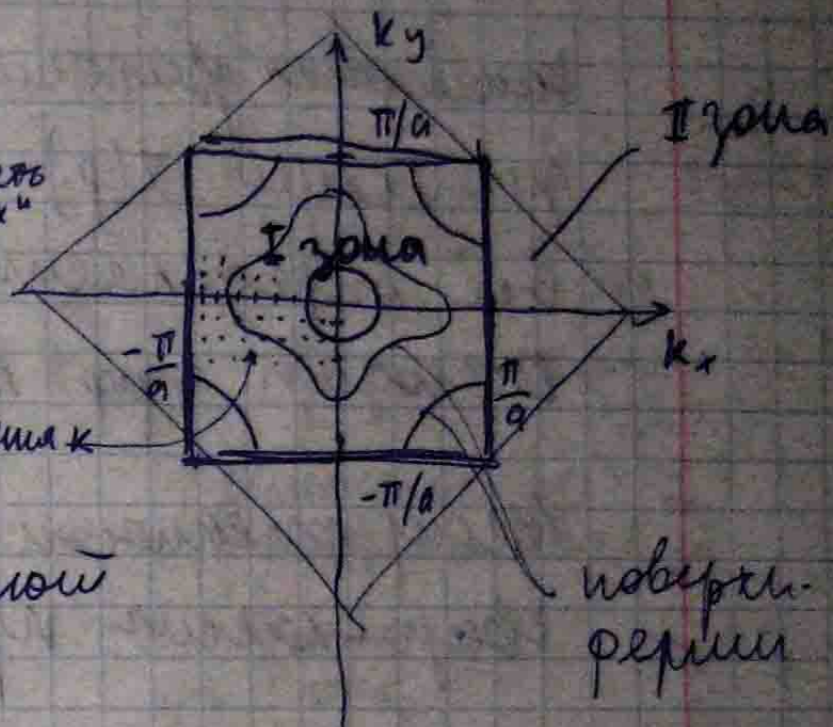
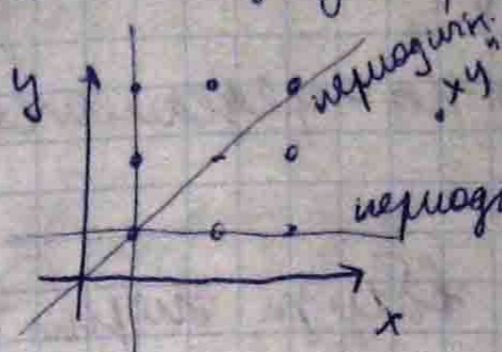
$$m^* \equiv m_{ij}^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{эфф. масса, учитыв. влияние} \\ \text{— тензор} \quad \text{с решеткой} \end{array}$$

$$m^* = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2}\right)^{-1}$$

$$\text{при } \epsilon = \frac{p^2}{2m_0} : m^* = m_0$$

при слабой связи с атомами электронов (н-р, в металлах)

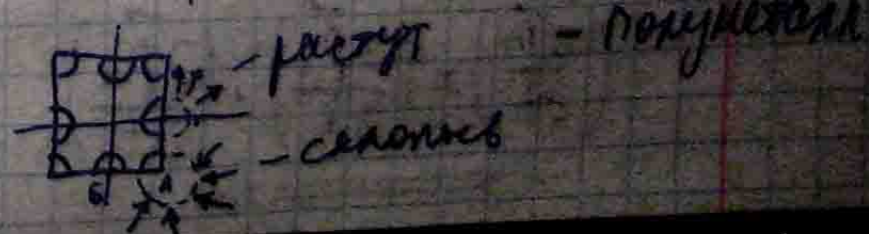
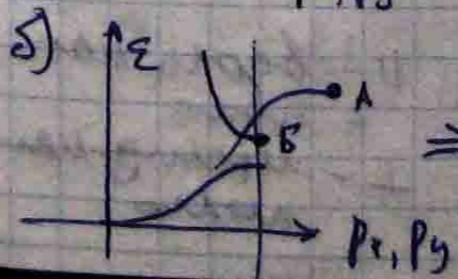
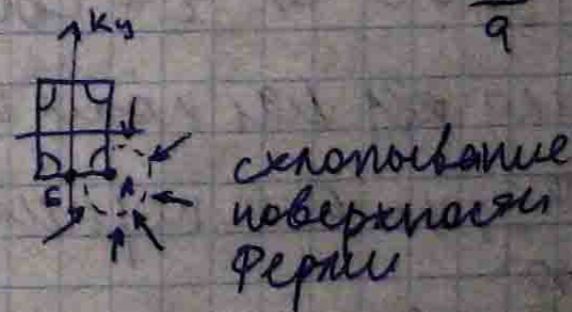
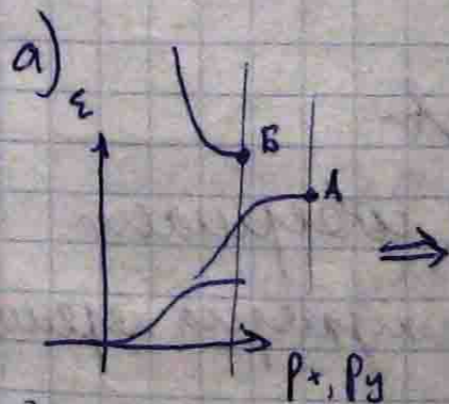
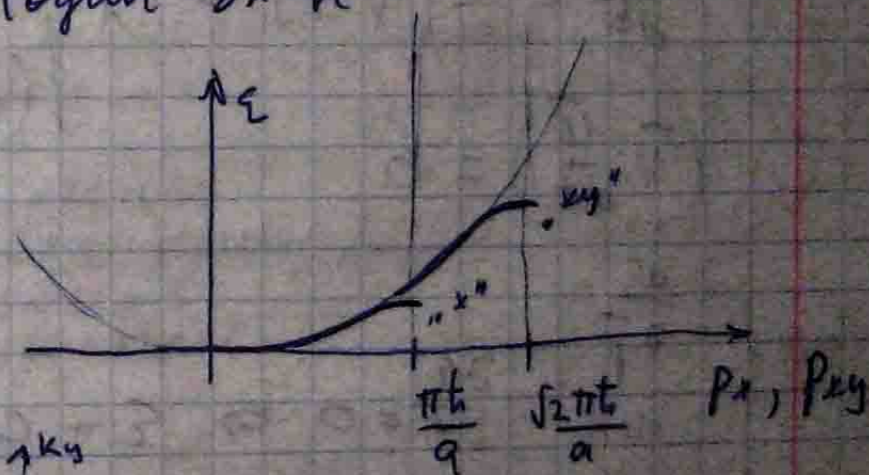
① Расщепление энергетической зоны



$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \text{— затравочный спектр}$$

$$\epsilon_f = \frac{p_f^2}{2m}$$

— поверхности Ферми (одна из них)



① Физический эквивалент под действием ^{магнитного} поля

Кинетическая энергия э-на определяется
диперсией $\epsilon(p)$

Все определяется формой энергии Ферми
отсюда и эквив. масса

Неопределенности «маленький»
квант классич. приближения

э-н в маг. поле:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] = \vec{F}_L \quad \left| \begin{array}{l} \text{сила Лоренца} \\ (\vec{v} | \dots) \end{array} \right.$$

$$\left(\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}}$$

$$m^* \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} = 0 \Rightarrow \epsilon = \text{const.}$$

т.к. сила ~~не~~ маг. поля не совершает
работу, т.к. она перпендикулярна перемещению.

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} \right) = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_{||}} \right) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_{\perp}} \right)$$

|| - вдоль маг. поля
⊥ - перпенд. маг. поля

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right)_{||} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{||} = \text{const.}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}_{\perp} \vec{H}] = \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \vec{H} \right]$$

$$|\vec{p}_{\perp}| = \frac{eH}{c} |\vec{r}_{\perp}|$$

$$\vec{p}_{||} = \text{const.}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m^* c}{eH}$$

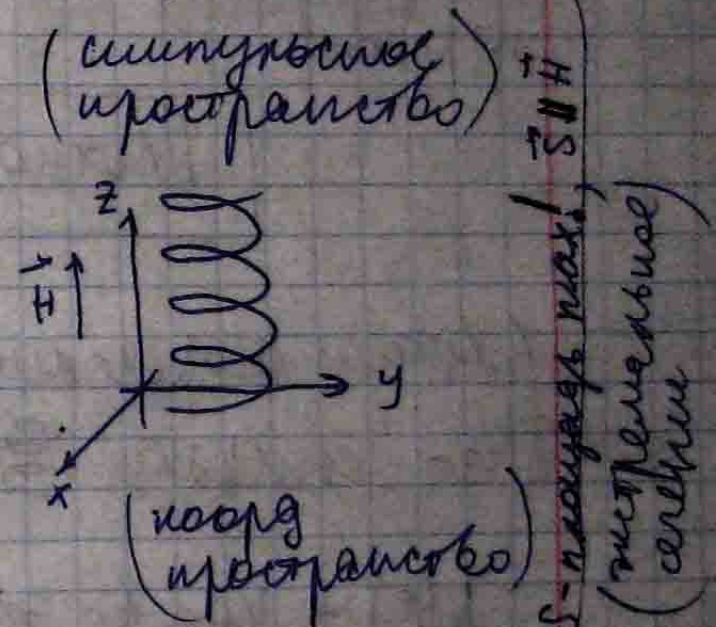
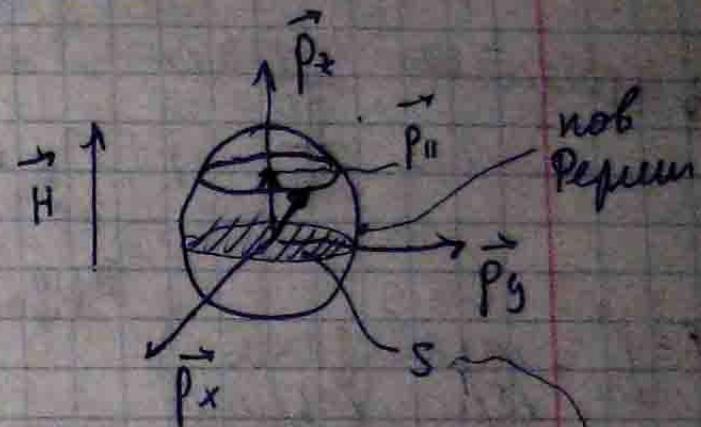
- период
свободного э-на
вращение

$$T = \frac{2\pi m^* c}{eH}$$

- период
вращения э-на
в маг. поле

$$m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial v}$$

циклопотенциальная масса



Иная напр-ва. \vec{H} , можно опред.

форму поверхности Ферми, определяя энергию на поверхности S .

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] \perp \vec{v} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \text{const.}}$$

значение $\epsilon(\vec{p}) \rightarrow$ значение m^*

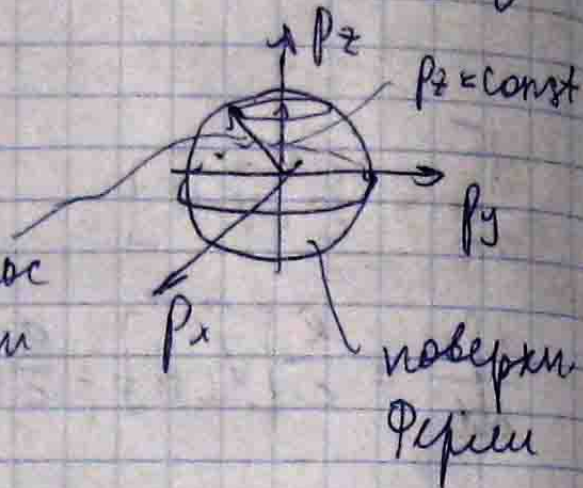
~~перуа~~

в простейшем случае:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}; \quad \epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

↑
Ферми

минимум
Ферми



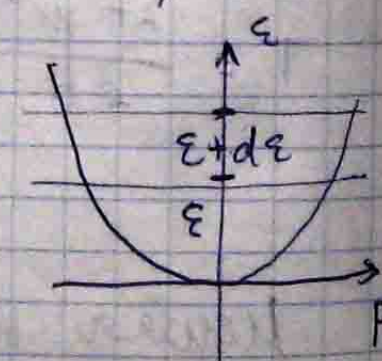
$\left(\epsilon = \frac{p^2}{2m} \right)$ - сферическо
вблизи Ферми
параболы

Плотность эл. сост. лек 6
11.10

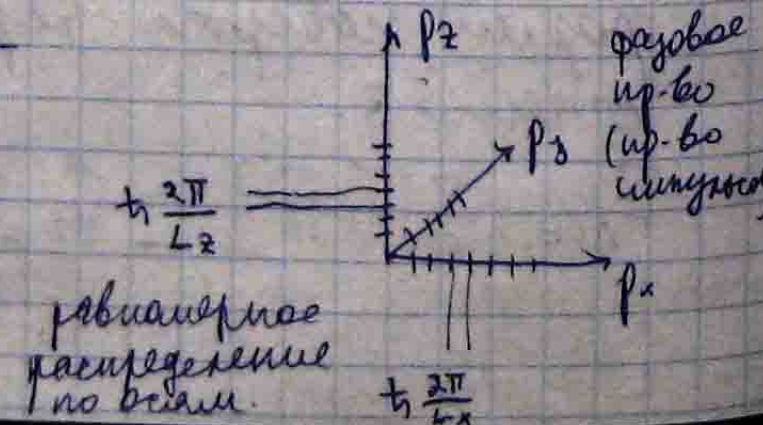
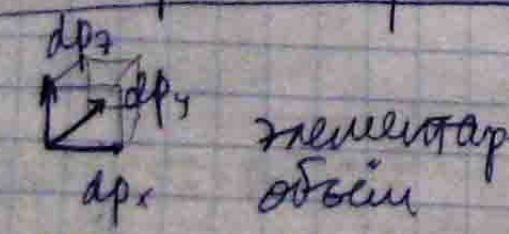
(хотим определить период обращения по кругу \oint .)

$N(\epsilon)$ - кол-во эл. сост. с энергией, меньше ϵ .
 $dN(\epsilon)$ - приращение

$$D(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \quad \text{- плотность эл. сост.}$$



3-мерное ир.во:



$$dN_p^{(3)} = 2 \cdot \frac{dp_x dp_y dp_z}{\left(\frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \frac{2\pi}{L_z} \right)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad \epsilon = \epsilon(|\vec{p}|), \quad \epsilon(\theta), \quad \epsilon(\varphi) = \text{const.}$$

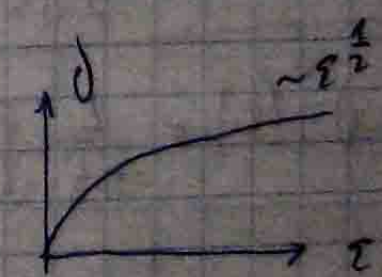
$$dN_p^{(3)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dN_p^{(3)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \cdot 4\pi$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m\epsilon}; \quad dp = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\epsilon}} d\epsilon \quad \text{- неграв.}$$

$$dN(\epsilon) = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon$$

$$D(\epsilon) = \frac{8\sqrt{2}\pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}}$$



2-мерное ир.во

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}$$

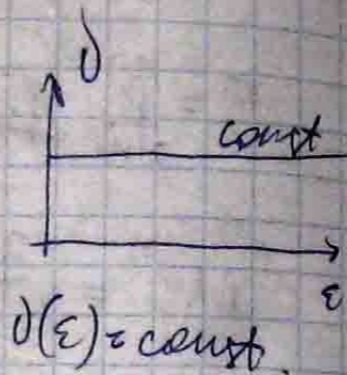
$$dN_p^{(2)} = \frac{2S}{(2\pi\hbar)^2} dp_x dp_y = \frac{2S}{(2\pi\hbar)^2} p dp \cdot 2\pi$$

S-поверхность в 6-разовом ир.во

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p dp = m d\epsilon$$

$$dN_{\epsilon}^{(2)} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^2} m d\epsilon$$

$$D^{(2)}(\epsilon) \equiv \frac{dN_{\epsilon}^{(2)}}{d\epsilon} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^2} m$$



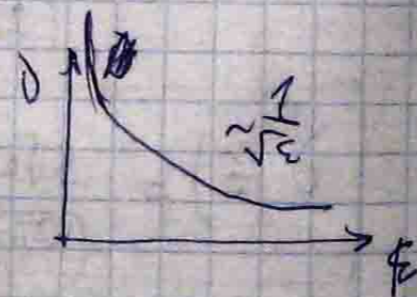
1-мерное кр. к.

$$dN_p^{(1)} = \frac{2L}{2\pi\hbar} dp = \frac{L dp}{\pi\hbar}$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dp = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\epsilon}} d\epsilon$$

$$dN_{\epsilon}^{(1)} = \frac{L \sqrt{2m}}{2\sqrt{\epsilon} \pi\hbar} d\epsilon = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} d\epsilon$$

$$D^{(1)}(\epsilon) = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}$$



разложим энергию на составляющие?

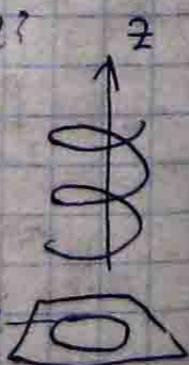
(Лангау) $\rightarrow \epsilon = \epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp} = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + (n + \frac{1}{2}) \epsilon_{hw}$

$p_{\parallel} = \text{const.}$

аккумуляция квазиэнергетических уровней

интервал ϵ_{hw}

функция



аккумуляция уровней \Rightarrow квантования \Rightarrow не все значения энергии возможны (квантование)

$n = 0, 1, 2, \dots$

$\omega = \frac{eH}{m^*c}$

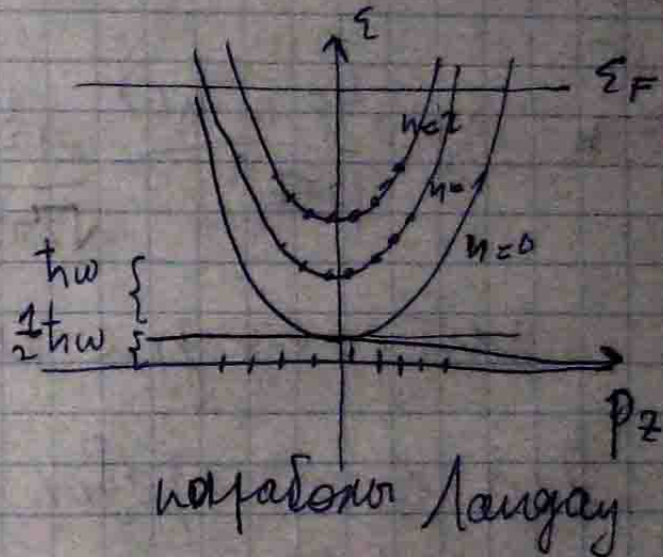
$\hbar\omega \sim H$

$H \uparrow \Rightarrow \hbar\omega \uparrow$

при непрерывном изменении энергии

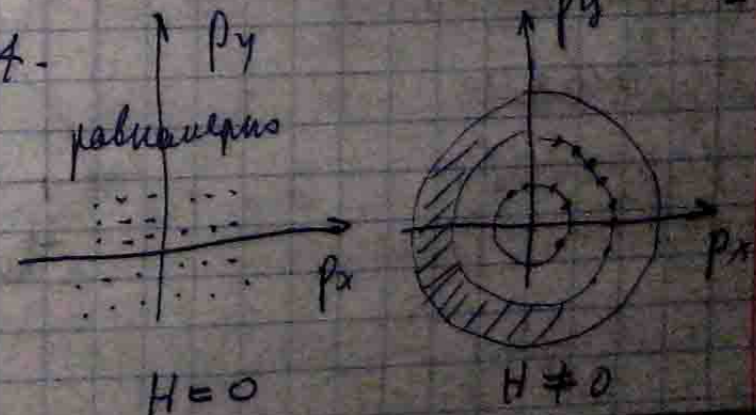
ϵ_F - уровень Ферми -

происх. диск. квантовых состояний (1-мерный случай)



По первому порядку парабол определяем циклотронную массу m^* .

Рассм $p_z = \text{const.}$



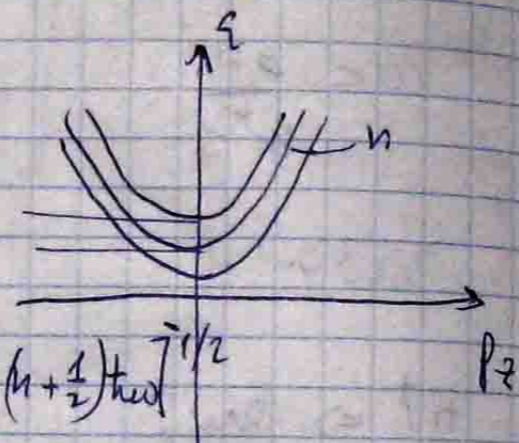
$\epsilon_L = \frac{p_{\perp}^2}{2m} = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$S = [2\pi(n+1) - 2\pi n] \hbar \omega = 2\pi \hbar \omega - \text{площадь кольца}$$

число состояний по объему попарно у кривых.

$$2 \cdot \frac{2\pi \hbar \omega}{(2\pi \hbar)^2}$$

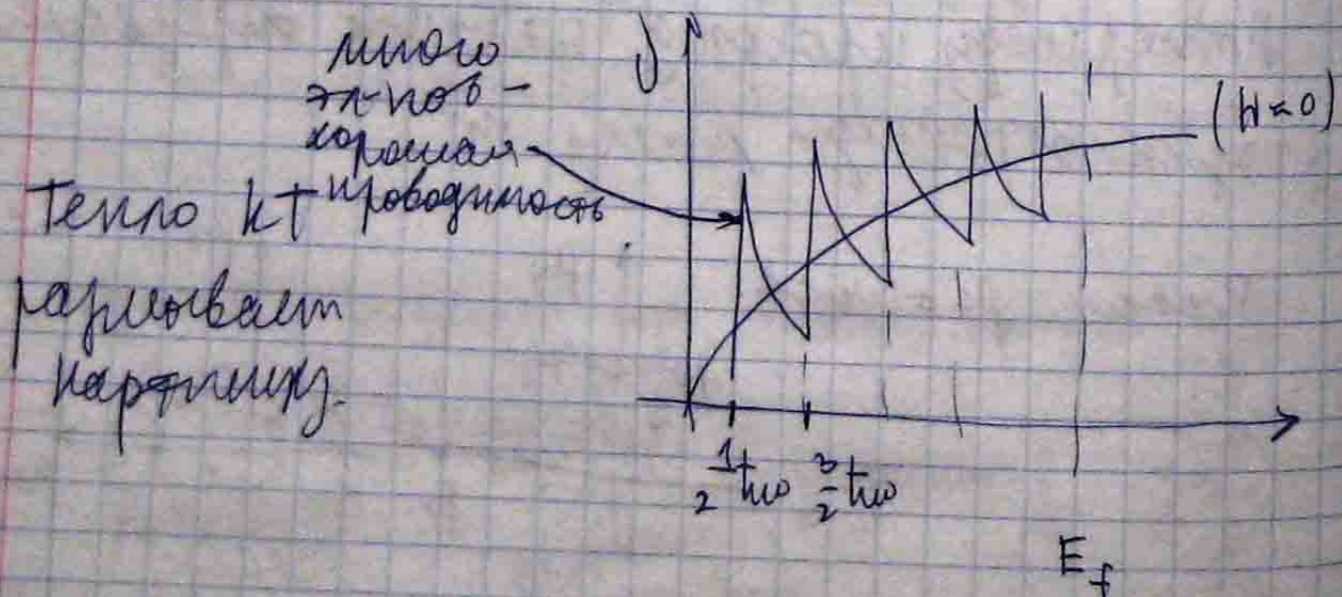


$$n: D_n(\epsilon) = \frac{4\pi m \hbar \omega}{(2\pi \hbar)^2} \frac{m \frac{1}{2}}{\sqrt{2\pi \hbar} [\epsilon - (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega]^{1/2}}$$

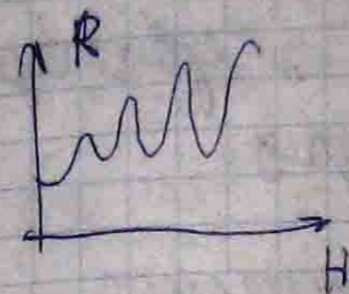
плот. сост. где концы параболы находятся

Для всех парабол, где все π -ноды

$$D(\epsilon) = \sum_{n=0}^{n_{max}} D_n(\epsilon) = \frac{\hbar \omega m \frac{3}{2}}{\sqrt{2\pi^2 \frac{1}{3}}} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[\epsilon - (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \right]^{-\frac{1}{2}}$$



множество π -ноды - короткая терно кт проводимости парирование картинку



соответствие ~~к~~ уровней

Форма поверхности Ферми определяет у галтели осцилляций соответствия

При высоком поле H ось параболы пересекает уровень Ферми, и

E_F пойдет вверх с ростом H

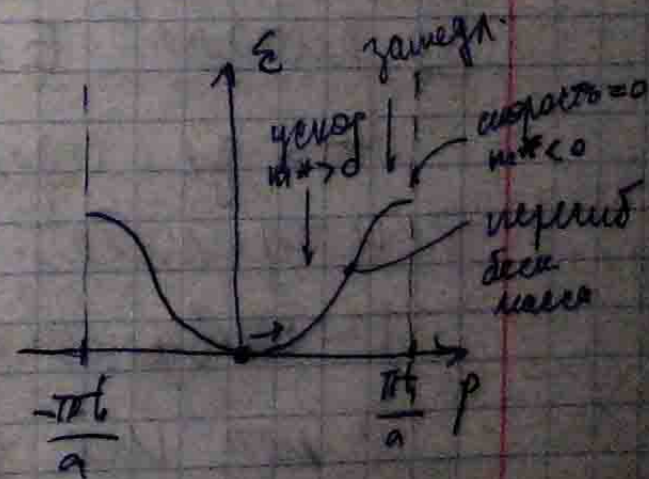
π -и в кристалле, плот. эл. поле

$$\frac{d\epsilon}{dp} = v \vec{E}$$

при малых p

$$m^* = \left(\frac{d^2 \epsilon}{dp^2} \right)^{-1}$$

на перегибе $\frac{d^2 \epsilon}{dp^2} = 0, m^* \rightarrow \infty$



ϵ (э. поле)



набирает энергию, э-и, "перескакивает"
решетку и формирует параз.

Формирует э-и на циклическое
(Блоховские осцилляции)

$$\tau = \int_{-\frac{\pi\hbar}{a}}^{\frac{\pi\hbar}{a}} \frac{d\epsilon}{dE} = \frac{2\pi\hbar}{a e E}; \quad \text{период осцилляций}$$

$$\frac{1}{\tau} = \nu_E = \frac{a e E}{2\pi\hbar}$$

$$\chi = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{e E} \sim \frac{\gamma B}{e E} \quad \text{— амплитуда осцилляций}$$

пр. литая: $E = 10^6 \frac{B}{\text{см}} \rightarrow \chi = 10^6 \text{ см}$

Это для идеальной среды — без дефектов
и примесей. На границах э-и

рассеивает энергию

В нет нет Блоховские осцилляции

~~$E = \hbar^2 k^2 / 2m$~~

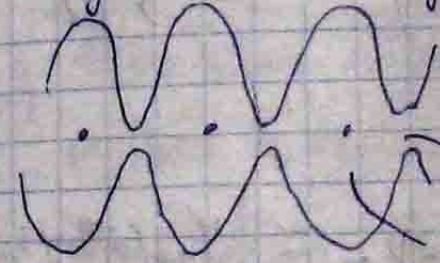
Интерпретация (зависимые рассуждения)

- $e < 0, m < 0$ — э-и с отрицат. массой
- $\frac{e}{m} > 0$
- гр интерпретация: $\frac{e}{m} > 0$ — "дырка"

Метод сильной связи

лек 7
18.10

линейная модуляция



небольшое перекрытие
похоже на ВР отравленного атома

Подход "метод сильной связи", э-и более
локализованы.

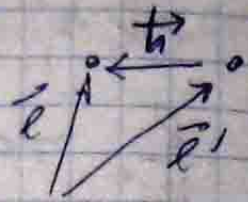
$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{l}} e^{i\vec{k}\vec{l}} \underbrace{\Psi(\vec{r}-\vec{l})}_{\substack{\text{фаз. мн. — ВР атома} \\ \text{линейк,} \\ \text{отражающую} \\ \text{взвешивание}}}$$

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\int \Psi_k^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_k d^3\vec{r}}{\int \Psi_k^* \Psi_k d^3\vec{r}}$$

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\sum_{\vec{l}, \vec{l}'} e^{i\vec{k}(\vec{l}-\vec{l}')} \int \Psi_{\vec{l}}(\vec{r}-\vec{l}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_{\vec{l}'}(\vec{r}-\vec{l}') d^3\vec{r}}{1}$$

$$\{\vec{r} - \vec{r}' = \vec{h}\}$$

$$= \sum e^{i\vec{u}\vec{h}} \epsilon_{\vec{h}}$$



$$\epsilon_{\vec{h}} = \int \Psi_{\text{ат}}^*(\vec{r} + \vec{h}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_{\text{ат}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$V(\vec{r}) = \text{вероятн. пот-л} + \text{пот-лы упрочн. ат.}$

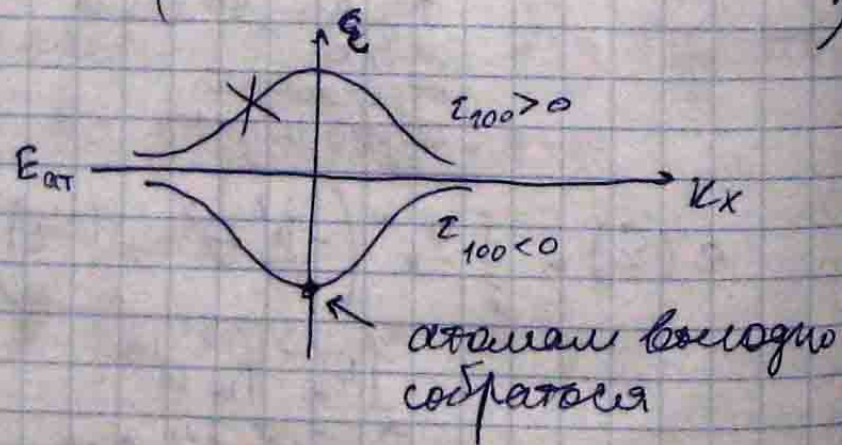
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi_{\text{ат}}(\vec{r}) = E_{\text{ат}} \Psi_{\text{ат}}(\vec{r}) \quad - \text{У.Ш.}$$

$\vec{h} = 0 \quad \epsilon_0 \approx E_{\text{ат}}$

$\vec{h} \neq 0 \quad \epsilon_{\vec{h}} = \int \Psi_{\text{ат}}^*(\vec{r} + \vec{h}) \left(V(\vec{r}) - V_{\text{ат}}(\vec{r}) \right) \Psi_{\text{ат}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$

$\epsilon_{100} \gg 0$
тогда $\neq 0$ для ближайших соседей

$$\epsilon(\vec{k}) = E_{\text{ат}} + 2 \epsilon_{100} (\cos a k_x + \cos a k_y + \cos a k_z)$$



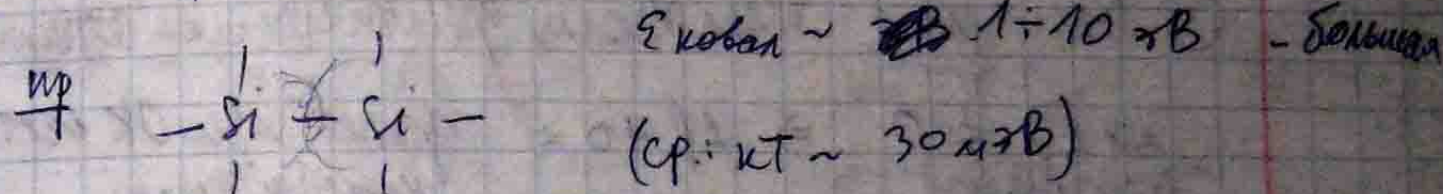
Потенциал определяется уровнями атомов

↓
Метод сильной связи позволяет отследить уширение зон в б.б.е

Метод подходит для ПП и упрочн. атомов.

① Хим. связь между атомами

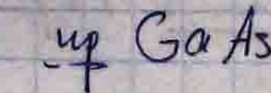
1) Ковалентная. Пара эл-нов принадлежат обоим атомам. Связь направлена.



2) Ионная связь. Эл. плотность сильно смещена к одному из атомов



12) Смешанная ионно-ковал. связь (смещены эл. плотности на соседних) Атомы A_3B_5



3) Металлическая связь. Эл. слабо связаны с атомами, облако рел-плывается



4) Ван-дер-Ваальсовы связи чистых молекул $\epsilon = 0,1 \div 1 \text{ эВ}$

из графика
кристаллического

возбужденная - между
атомными

$$\epsilon_{cb} = 0,1 \div 1 \div 10$$

1) Влияние температуры флуктуирует

$\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta p \neq 0 \Rightarrow$ даже при ок. состоянии

Виды колебаний:

- типовые

- нулевые

$$\Delta x_0 \sim \frac{h}{\sqrt{2m\epsilon_0}}$$

$$\Delta x_0 \ll a$$

ϵ_0 - энергия нулевых колеб. a - межатомное расстояние

кр: ^4He , ^3He

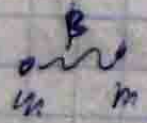
$$\frac{\Delta x_0}{a} = 2,7$$

$$\frac{\Delta x_0}{a} = 3,1$$

- они всегда ненулевые

a) Одинак атомов

(Р-моды)



Большая T:

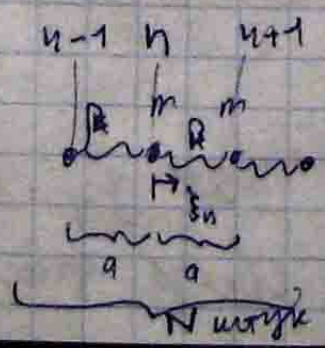
k мала, колеб. неравнос.

Малая T:

k больш, колеб. коллектив.

температура
Резонанс

Путь кристалла большой, не край. N атомов



$$n \leftrightarrow n+N$$

$$f_n = \beta(z_{n+1} - z_n) - \beta(z_n - z_{n-1})$$

- сила, действующая на n -й атом

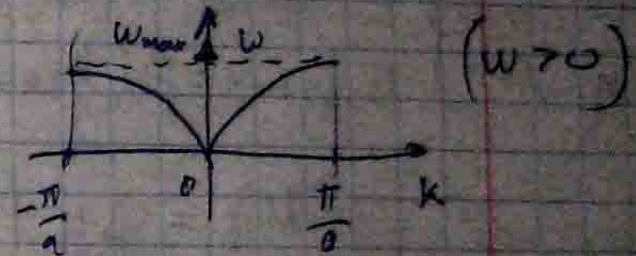
$$f_n = m \ddot{z}_n = \beta(z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n)$$

$$\text{ищем } z_n = z_0 e^{i(\omega t + nka)}$$

$$- \omega^2 m z_0 e^{i(\omega t + nka)} = \beta z_0 (e^{ika} + e^{-ika} - 2) e^{i(\omega t + nka)}$$

$$\omega = \pm \frac{2\sqrt{\beta}}{2m} \sin \frac{ka}{2}$$

ω_{max}



при $\omega_{max} \rightarrow$ предел. ω увеличивается $\rightarrow f = f_{max}$

при $\omega \ll \omega_{max}$: $\omega \sim \left(2\sqrt{\frac{\beta}{m}}\right) k$ - как для звука

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda \gg a, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{\pi}{a}$$

распл. среды как непрерывной. (квантизация приближена)

$$k = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda = 2a$$

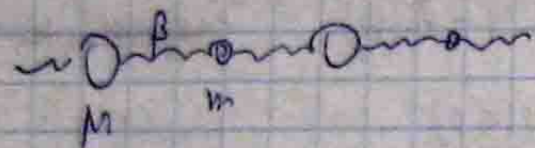
Фигур. разн. $k: \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$.

$$z_n = z_{n+N} \quad e^{inKa} = e^{i(n+N)Ka} \Rightarrow e^{iNKa} = 1 \Rightarrow$$

$$k_q = \frac{2\pi}{Na} q = \frac{2\pi}{L} q$$

$$q = 0, \pm 1, \dots$$

д) атаман "физик сертов"



ашикыт-
 $\xi \rightarrow \begin{cases} M \ddot{\xi}_{2n} = \beta (\xi_{2n+1} + \xi_{2n-1} - 2\xi_{2n}) \\ m \ddot{\xi}_{2n+1} = \beta (\xi_{2n+2} + \xi_{2n} - 2\xi_{2n+1}) \end{cases}$

$$\begin{cases} -\omega^2 M \xi = \beta \eta (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta \xi \\ -\omega^2 m \eta = \beta \xi (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta \eta \end{cases}$$

$$\det || = 0 = \begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 M & -2\beta \cos ka \\ -2\beta \cos ka & 2\beta - \omega^2 m \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \beta \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4\cos^2 ka}{mM}}$$

Путь будем гнившие!
 $ka \ll 1$:

$$\omega_+ \approx \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) 2\beta} \quad \text{— оптическая ветвь}$$

$$\omega_- \approx a \sqrt{\frac{2\beta}{m+M}} k \quad \text{— акустическая ветвь}$$

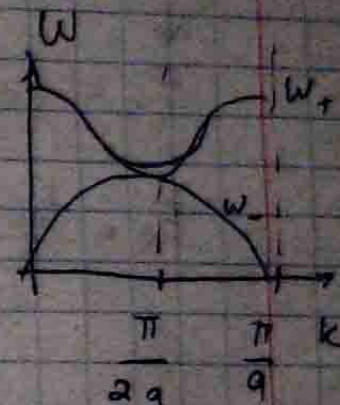
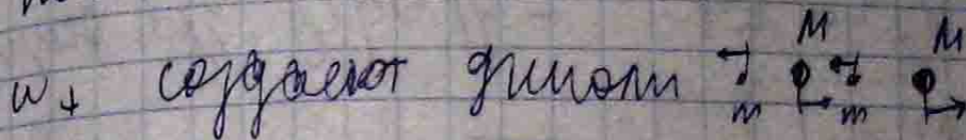
при $M \rightarrow m$
 ан. предель. газу

$$\omega_- \rightarrow \frac{\xi}{\eta} \rightarrow 1 \quad \text{M и m колебл. в фазе}$$

или $\lambda \gg a$

$$\omega_+ \rightarrow \left(\frac{\eta}{\xi} \right)_+ = -\frac{M}{m} \quad \text{M и m колебл. в противофазе}$$

ω_- не создает фоновой \Rightarrow не фоновый. $c \rightarrow m$
 покажи



Теория упругости

ММ 8 (задача)
 25.10
 (задача)
 (задача)
 (задача)

① Кангуну нори колеб. соотв. гарм. осцилятор.
 $E = \hbar \omega$ — квантуется.

Введишь квадратичн. — фонона — кванта
 колебания крист. решетки

$$\epsilon = \hbar \omega \quad \text{— энергия фонона}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{— квазиимпульс}$$

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \quad \text{— групп. скорость}$$

Теперь неидеальн. решетка содержит
 фононный газ.

Приближенно гарм. осциллятора: $V \sim x^2$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 + V\right) \Psi = E \Psi. \quad \text{— ур. Шрёг. для осцилл.}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad n = 0, \infty$$

$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$ — энергия нулевых колебаний (осн. сост. сис-мы)

① Вероятность состояния осцилл. с энергией E_n :

$$W(E_n) = \underbrace{\mathcal{P}} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad \text{— распр. Гиббса}$$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \mathcal{P} e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P} e^{-\frac{E_n}{kT}}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar \omega n e^{-\frac{\hbar \omega n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar \omega n}{kT}}}$$

$$= \left\{ x = \frac{\hbar \omega}{kT} \right\} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{d}{dx} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}} =$$

$$= \left\{ \text{решет. прогрессии} \right\} = \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \frac{d}{dx} (\ln(1 - e^{-x})) = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^x - 1} =$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$\frac{\hbar \omega}{2}$ — энергия нулевых колеб.
 $\frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$ — энергия теплов. колеб.

$$\bar{E} = \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \quad \leftarrow \bar{E} = \bar{n} \hbar \omega$$

асимптотика:

$$kT \ll \hbar \omega : \bar{n} \sim e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$$

$$kT \gg \hbar \omega : \bar{n} = \frac{1}{1 + \frac{\hbar \omega}{kT} - 1} = \frac{kT}{\hbar \omega}; \quad \bar{E} = kT$$

процессы

1) возбужд. новых мод.

Если температура, или длина волны λ_{max} (или размер кристалла конечен). Тогда работает только асимптотическая часть.

2) θ_D — температур. Дебая — при kT — при возбужд. гасится λ_{max} .

$T > \theta_D$ — модель непрерыв. среды

$T < \theta_D$ — квантовое эррор

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_{max}}{k}$$

Точная формула только для одномерного случая

① Энергия всей решетки:

$$\epsilon_{\text{реш}} = \sum_{k, \text{ по всем } \text{полюсам}} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} - 1}$$

k - кубическое число
 k_B - пост. Больцман.

В пределе классической асимптотики ($k_B T \gg \hbar \omega$):

$$\bar{\epsilon} = k_B T, \quad \epsilon_{\text{реш}} = N k_B T$$

N - число атомов в кристалле.

1D: $N = N_{\text{ат}}$

N - число каналов (степеней свободы, число осцилляторов)

3D: $N = 3 N_{\text{ат}}$

$\epsilon = 3 N_{\text{ат}} k_B T$

элементы свободы расем независимы

$$C_V \equiv \frac{\partial \epsilon_{\text{реш}}}{\partial T} = 3 N_{\text{ат}} k_B$$

$R = k_B N_A$ - газоб. пост.

$$C_D = \frac{C_V}{\nu} = 3R$$

N_A - число Авогадро.
 Термодинам. - моляр. теплоёмк. (3-и Дюлонга и Петри)

① Модель Эйнштейна

$\{\omega_k\} \rightarrow \omega_{\text{кв}}$ - кубическая решетка

$$\epsilon_{\text{реш}} = \frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{e^{\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{kT}} - 1} \cdot N$$

a) $kT \gg \hbar \omega$: $\epsilon_{\text{реш}} = N k_B T$ (разном. б. рез)

b) $kT \ll \hbar \omega$: $\epsilon_{\text{реш}} \sim e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{kT}}$

$$C \sim e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$$

(если точно, $C = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} = \dots = N \hbar \omega_{\text{кв}} e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{kT}} \left(-\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{k} \right) \left(-\frac{1}{T^2} \right) = k_B \left(\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{kT} \right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega_{\text{кв}}}{kT}}$)

Но $C_{\text{Эйнштейн}} \sim T^{-3}$!

заменим $\{\omega_k\} \rightarrow \omega_{\text{кв}}$ приводит к невер. результ.

Многие модели Эйнштейн. работают

(для оптич. фононов или при сверхнизких T -рах)

Для сверхнизких T -р $\left(T < \frac{\hbar \omega_{\text{мин}}}{k_B} = \frac{2\pi \hbar}{k_B L} v_{\text{зв}} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ K}}{L [\text{н}]} \right)$

$\omega_{\text{мин}} = v_{\text{зв}} k_{\text{мин}} = \frac{2\pi}{L} v_{\text{зв}} \equiv \omega_{\text{з}}$ $v_{\text{зв}} \sim 5000 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ в металлах.

для $L = 1 \text{ нм}$: $T < 0,2 \text{ K}$.

① Модель Дебая

$$\bar{\epsilon}_{\text{реш}} = \sum_{k, \text{ по полюсам}} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} - 1} \xrightarrow{\Delta k = \frac{2\pi}{L} - \text{мало}} \int \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} - 1}$$

$$C = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\text{по полюсам}} \int d\bar{k} \frac{\hbar \omega(k)}{\left(e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} - 1 \right)^2} e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} \frac{\hbar \omega(k)}{k_B T^2} = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\text{по полюсам}} \int d\bar{k} \frac{\hbar^2 \omega^2(k)}{\left(e^{\frac{\hbar \omega(k)}{kT}} - 1 \right)^2} \frac{1}{k_B T^2}$$

Спектральная плотность $\rho(\omega)$:

$\rho(\omega) d\omega$ - доля колеб. с частотами в $(\omega, \omega + d\omega)$

$$C_V = \underbrace{3p}_{\text{степен. свободы}} N k_B \int \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)^2 e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1\right)^2} \mathcal{D}(\omega) d\omega$$

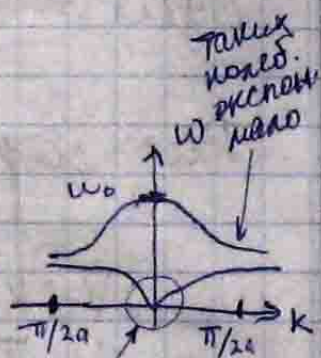
число степеней свободы

3p - число ветвей в центре

(3p-3 - опущ. ветви
3 - акустич. ветви)

Найдём теперь $\mathcal{D}(\omega)$.

Помогем нам геометрия Фейбана:



1) только акустич. фононы ($\hbar \omega \ll \hbar \omega_0$, $T \ll \theta$)

2) $\omega = v_{ph} k$ - линейной закон

3) v_{ph} изотропно \Rightarrow зона Бриллюэна - сфера.
(сфера Фейбана - сфера того же объёма, что и исход. слитки. зона Фр.)

$$\mathcal{D}(\omega) d\omega = \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{4}{3}\pi k_0^3} \quad \text{- объём слоя}$$

$$\mathcal{D}(\omega) d\omega = \frac{3k^2 dk}{k_0^3} = \frac{3\omega^2 d\omega}{\omega_0^3}$$

$\mathcal{D}(\omega)$ - погр. в шот-л

$$C_V = 3Nk_B \int_0^{\omega_D} \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)^2 e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1\right)^2} \frac{3\omega^2}{\omega_D^3} d\omega =$$

$$= \frac{3Nk_B \cdot 3}{\theta_D^3 \left(\frac{k}{\hbar}\right)^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)^4 e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \left(\frac{\hbar}{k_B T}\right) =$$

$$= 3Nk_B \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\omega_D} dz \frac{z^4 e^z}{(e^z - 1)^2} \sim T^3 \quad \left\{ z := \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right\}$$

слитки шот-л. расщ. акустических.

$$\frac{T}{\theta} \gg 1: C_V = 3Nk_B \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)^3 = 3Nk_B \quad (z \rightarrow 0)$$

$$\frac{T}{\theta} \ll 1: C_V = 3Nk_B \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\omega_D} \frac{dz z^4 e^z}{(e^z - 1)^2} = \frac{12\pi^4}{15} Nk_B \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \quad (z \rightarrow \infty)$$

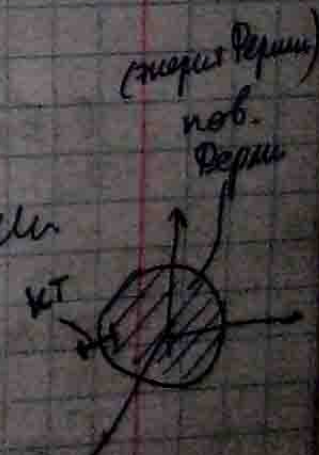
1) Вклад эл-нов в теплоёмкость.

Ферми-Дирак, закон Паули

При $T=0$ все эл-ны - в сфере Ферми.
Вклад узкого слоя kT эл-нов в теплоёмк.

$$E_{ном} = E_0 + E_{корр.}$$

$f(E)$ - ф-я плотности состояний на эл. энергии
 $f(E)dE$ - число эл-нов в $(E, E+dE)$



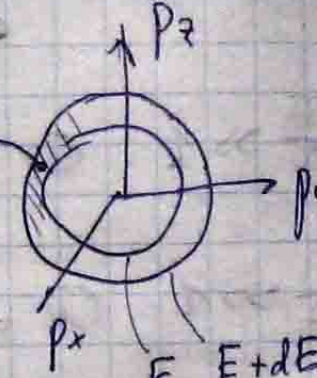
$$E_{\text{total}} = E_0 + \underbrace{\rho(E_F)}_{\text{плотность состояний}} \underbrace{kt}_{\text{толщина слоя}} \cdot \underbrace{\frac{3}{2} kt}_{\text{энергия электрона в-на.}}$$

E_F - уровень Ферми

$2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}$ - эл-нов в одном состоянии

$$dN = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

"V"



$$E = \frac{p^2}{2m}; \quad dE = \frac{2p dp}{2m} = \sqrt{\frac{2E}{m}} dp$$

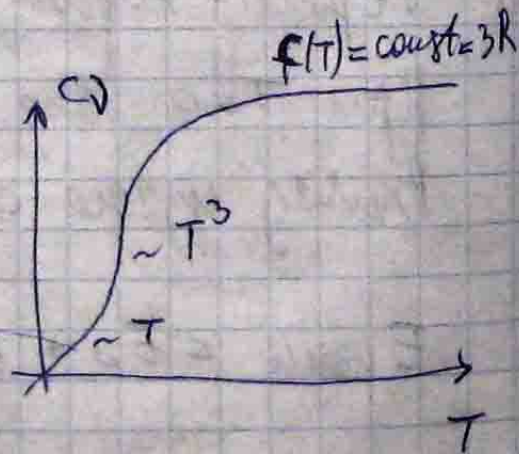
$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}$$

$$dN = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi 2mE \sqrt{\frac{m}{2E}} dE$$

$$\rho(E) = \frac{8\sqrt{2} \pi V m^{3/2} \sqrt{E}}{(2\pi\hbar)^3}$$

здесь будет показано:

$C_{эл}(T) \sim T$ - линейно



Зам $T \rightarrow \infty$ с Статистически определяется Лек 9
01.11

$$\frac{1}{2} kT = E_k$$

$$\frac{3}{2} kT = E_n$$

$$\frac{1}{2} kT = E_n$$

$$\frac{3}{2} kT = E_n$$

$$E = kT$$

$$E = 3kT$$

одинаковой

3-мерной

- где электр. атома

$E = 3NkT$ - энергия в кристалле, N - число ат.

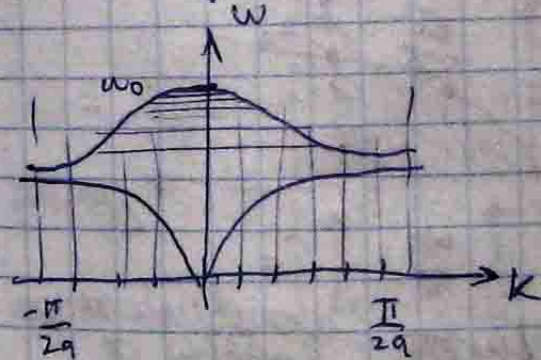
$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = 3Nk = 3R$$

$$C \neq C(T)$$

$$C \neq C(\text{в-во})$$

$T \rightarrow 0 \quad C \rightarrow 0$ (уменьше и меньше)

Зам амплитуда и ширина кривой



← ширина

← амплитуда

Тогда $u \gg kT$ все сост с
практически полной вероятностью ($\sim e^{-\frac{hw}{kT}} \approx 1$)

Тогда $u \ll kT$ $C \sim T^3$ (Дебай)

Зам Амплитуда эл-нов.

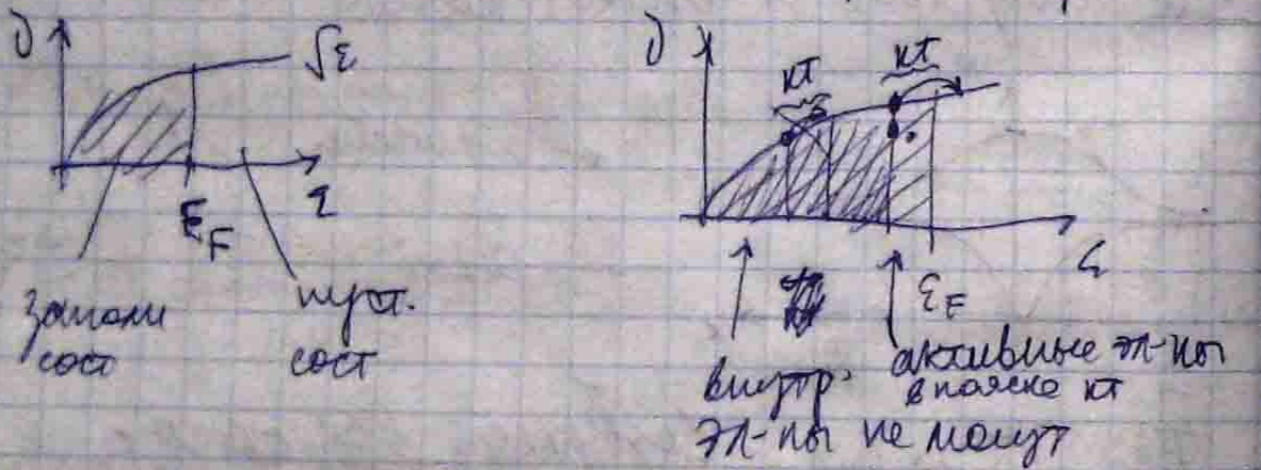
$T \rightarrow \infty$

$3 \cdot \frac{1}{2} kT N + \frac{1}{2} N$ - энергия в π -нодах
 (отсюда следует, что энергия π -нода равна $\frac{1}{2} kT$)
 $3 kT N$ - энергия в σ -каналах

$\frac{3}{2} kT N + 3 kT N = 4,5 kT N$

$C = 4,5 kT N$
 $C_{заполн} = 3 kT N$
 - потому что запрет Паули не дает π -нодам (в слое kT)

отношение состояний у Ферми-Дирака



$E_{ном} = E(0) + \frac{3}{2} kT D(E_F) kT$
 (полное число состояний в слое kT)
 (энергия π -нода) (энергия σ -канала) (полное число состояний в слое kT)

$D(E_F) = \frac{8\sqrt{2} \pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{3/2} E_F^{1/2}$

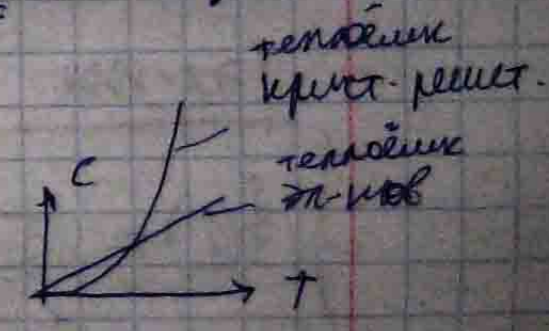
$N = \int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{8\sqrt{2} \pi V}{(2\pi\hbar)^3} m^{3/2} \frac{3}{2} E_F^{3/2}$
 (полное число валентных π -нодов)

то: $D(E_F) = \frac{2}{3} \frac{N}{E_F}$

$E_{ном} = E(0) + \frac{3}{2} kT D(E_F) kT = E(0) + \frac{3}{2} N kT \frac{2}{3} \left(\frac{kT}{E_F} \right)$

энергия π -нода не может Паули (обычные, не Ферми-газ)

$\frac{kT}{E_F} \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$
 при высок. T-пах $\frac{kT}{E_F}$ мало!



$C \equiv \frac{\partial E}{\partial T} = 3 D(E_F) k^2 T \sim T$
 (э. нод)

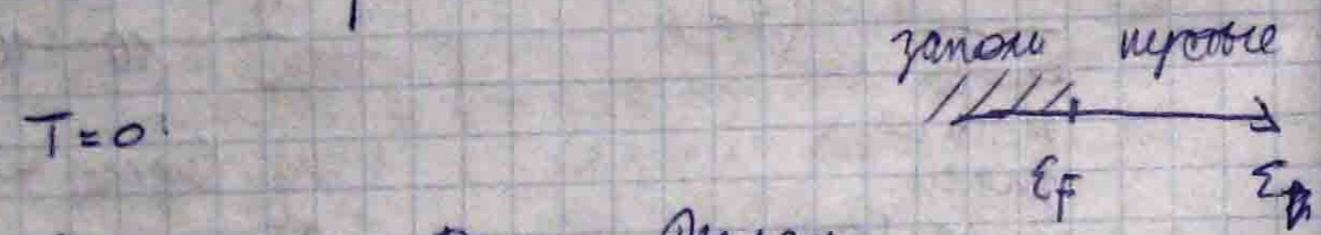
$C \sim D(E_F) k^2 T = const$ - можно определить плотность π -состояний

Далее будем говорить о конкретных материалах в тех.

лек 10.
08.11

Полупроводники

Св 60-70 гг сильно развивалась технология, первый полупроводниковый ТР-р 50-60-е - расцвет полупроводниковой технологии

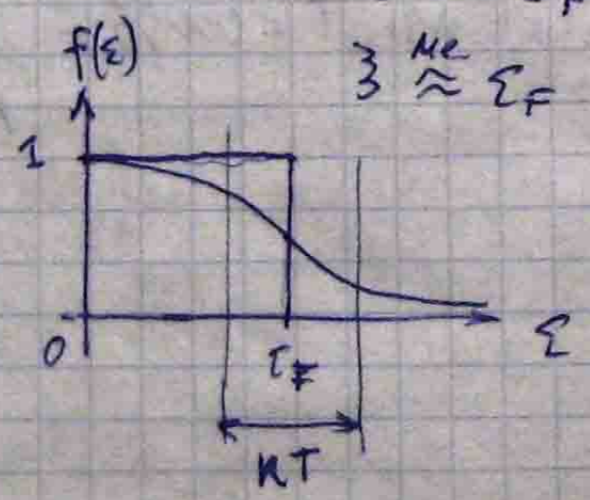


Статистика Ферми-Дирака (эл-нов)

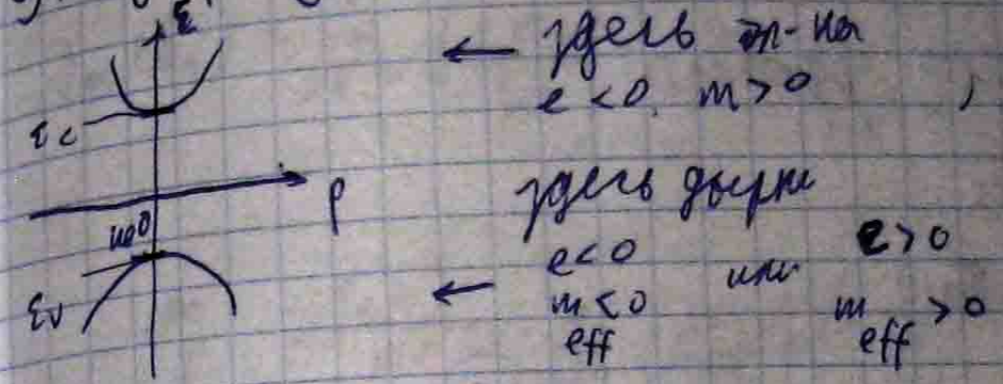
$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \xi}{kT}} + 1}$$

- вероятность заполнения
 ξ - хим. пот-л
 $\xi \xrightarrow{T \rightarrow 0} \xi_F$
 $\xi \approx \xi_F$

а) металлы:
 $\epsilon > \xi \rightarrow f \rightarrow 0$
 $\epsilon < \xi \rightarrow f \rightarrow 1$
 $\xi \approx \text{const}(T)$



3) Полупроводники



c - conductive
v - valence

$T=0$

$$n = \int_0^{\infty} \nu_v(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = 0$$

$T \neq 0$

$$= \int_0^{\epsilon_v} f(\epsilon) \nu_v(\epsilon) d\epsilon + \int_{\epsilon_c}^{\infty} f(\epsilon) \nu_c(\epsilon) d\epsilon$$

$$\int_0^{\epsilon_v} (1 - f(\epsilon)) \nu_v d\epsilon = \int_{\epsilon_c}^{\infty} f(\epsilon) \nu_c(\epsilon) d\epsilon$$

Вероятность не заполнения (дырки) = Вероятность заполнения (эл-нов)

ν_v - плот. сост. в зоне валентной
 ν_c - плот. сост. в зоне проводимости
 $f(\epsilon)$ - вероят.

$p = n$

$$1 - f(\epsilon) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \xi}{kT}} + 1} = \frac{e^{\frac{\epsilon - \xi}{kT}}}{e^{\frac{\epsilon - \xi}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{-\frac{\epsilon - \xi}{kT}} + 1}$$

$\xi = f(\xi_n)$
 ↑
 уровень дырок

концентрация p-электронов
 n-электронов

$$\epsilon_h + \zeta_h = -(\epsilon - \zeta)$$

гравитация удовлетворена:

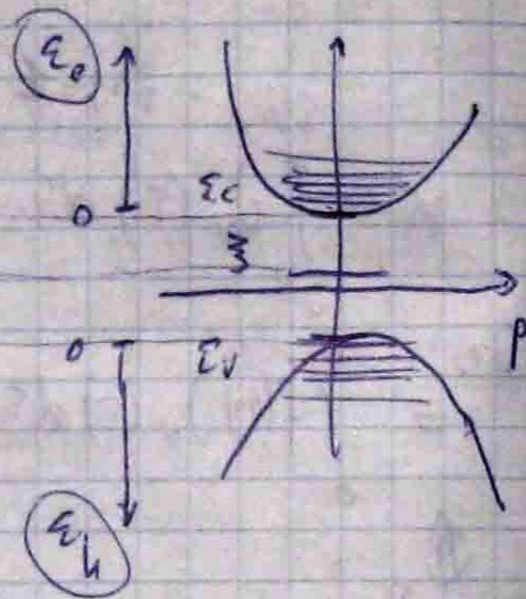
$$\epsilon_e := \epsilon - \epsilon_c$$

$$\epsilon_h := -(\epsilon - \epsilon_v)$$

$$\epsilon_e = -\zeta_e$$

$$\epsilon_h = -\zeta_h$$

$$\epsilon_g \equiv \zeta_g \left\{ \begin{array}{l} \zeta_e \\ \zeta_h \end{array} \right.$$



концентрация электронов

$$n = \int_0^{\infty} f(\epsilon_h + \zeta_h) \nu_v(\epsilon_h) d\epsilon_h$$

концентрация дырок

$$p = \int_0^{\infty} f(\epsilon_e + \zeta_e) \nu_c(\epsilon_e) d\epsilon_e$$

$$\zeta_e + \zeta_h = \zeta_g$$

- ширина запрещенной зоны

| g-gap

$$\zeta_{e,h} \gg kT \Rightarrow f(\epsilon) \approx e^{-\frac{\epsilon - \zeta}{kT}}$$

$$f(\epsilon_e + \zeta_e) = e^{-\frac{\epsilon_e + \zeta_e}{kT}}$$

h-hole

при квадратичном законе дисперсии $\epsilon(p)$ - закон дисперсии.

$$\nu_e(\epsilon_e) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_e^{1/2}$$

$$n = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\epsilon_e + \zeta_e}{kT}} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_e^{1/2} d\epsilon_e = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e}{kT}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{1/2} dz = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e}{kT}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$n = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e}{kT}}$$

n=p

$$p = 2 \left(\frac{m_h kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_h}{kT}}$$

$$np = n^2 = p^2 = 4 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^3 (m_e m_h)^{3/2} e^{-\frac{\zeta_e + \zeta_h}{kT}} \Rightarrow$$

$$n = p = 2 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{\epsilon_g}{2kT}}$$

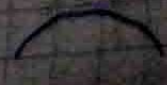
m_e, m_h - эффективные массы

или

экспоненциально:

$$n = \exp\left(\frac{\epsilon_g}{T}\right)!$$

при $T=0$ ζ - носители

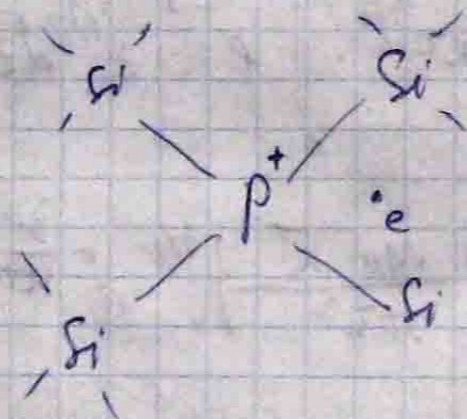


$\epsilon(T=0)$

при $T \neq 0$ ζ смещается в сторону ϵ
(обычно вниз) боковой малой носитель

понятие "уровни Ферми" применимо только к Me.
вещью, говорит о хим. потен. а отсюда зав. от T.

① Примем
a) $\text{Si} (P)$ ϵ — уровень
доликовое сост.



Потен. макс + ϵ -и
аналог атома водорода

энергия сверх с потенциалом ϵ — ϵ_v

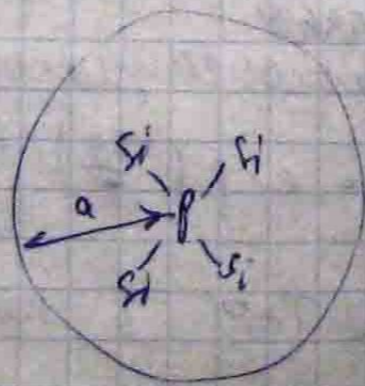
ϵ -и

- в периодич. поле кристалла
- в поле "иона" (атом водорода)

130в → 130мв — связь

бор. радиус \gg радиус

ϵ макс



э. облака внутри бор. радиуса локализованы

доликовое сост

$\epsilon_{сверх} < \epsilon_g$

b) $\text{Si} (AI)$

акцепторное сост.

b) иониз

c) $\text{Si} (P > AI)$

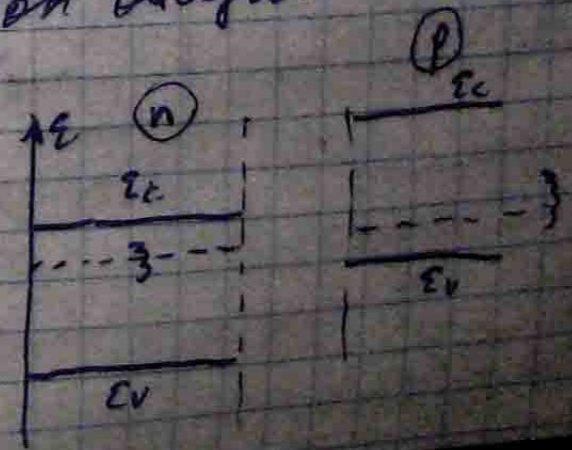
$\text{Si} (P < AI)$

концентрация

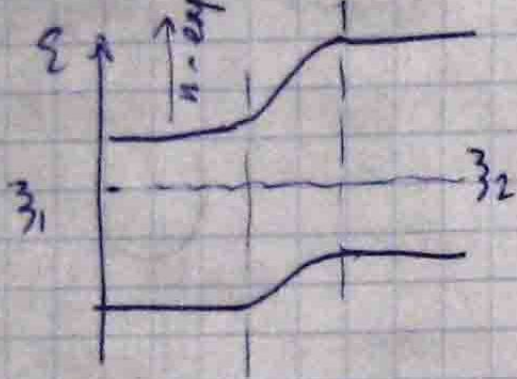
Хим. потенциал $T \Delta$ инвариантен.
При контакте ПП он одинаков.

① Контакт двух ПП

n, p — тип ПП.

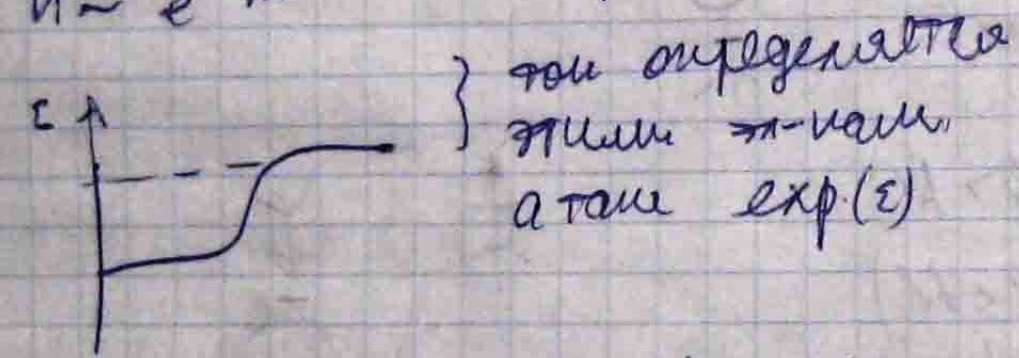


При контакте ~~с~~ ~~ферро~~ э-пол и
 дырки потечут \Rightarrow появится потенци-
 ал, удиртывающий ~~э-пол~~ дырки от
 дальнейшей диффузии

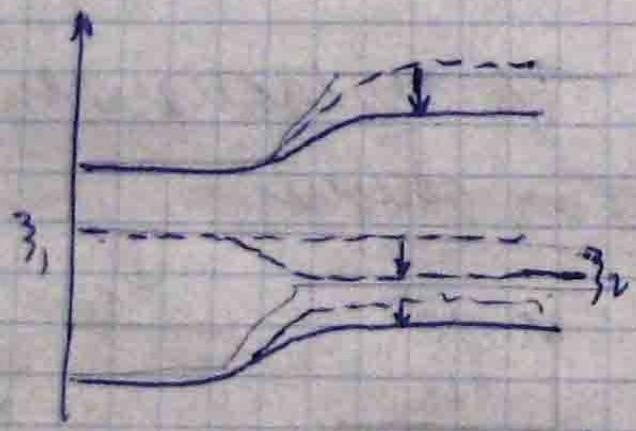


$\mu \approx 0$ $z_1 = z_2$
 (внеш. напряжение)

$n \sim e^{-\frac{(\epsilon - z)}{kT}}$ $\leftarrow \exp(\epsilon), \exp\left(\frac{1}{T}\right)$

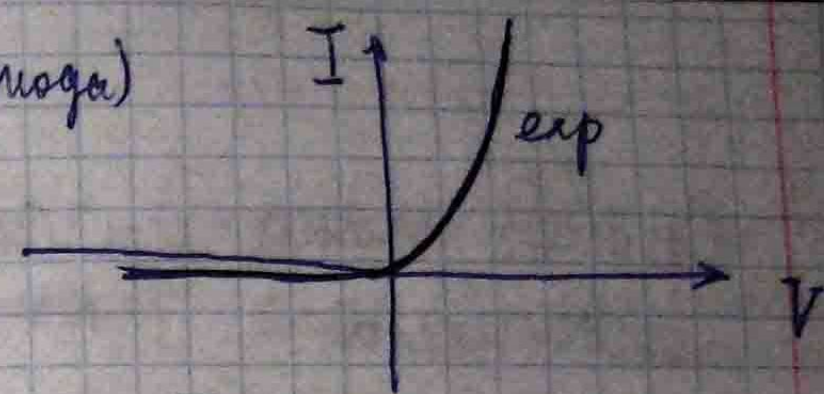


$\mu \neq 0$: (U)

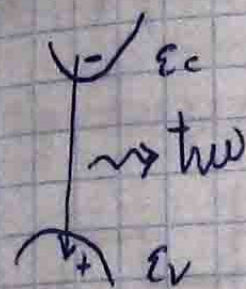


$eV = z_1 - z_2$
 число носителей
 тока exp увеличи-
 лось

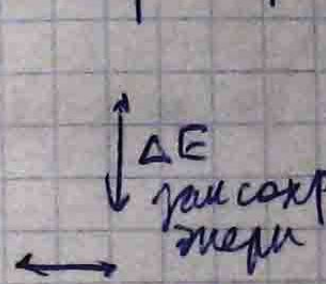
ВАХ $\propto I^{-n}$ - перехода (прогда)



① Определяются приборы



(прямозонный)
 неупорядочен



(непрямозонный ПП)
 замсор шумельса

Фонон может
 забрать или
 выдать, но
~~не может~~
~~не может~~
 маловероятно

$p \sim \frac{2\pi h}{a}$

a - пост. решетки

$t_{ik} = \rho = \frac{2\pi h}{\lambda}$

$\lambda \sim 1 \mu\text{m}$

$\ll a \sim 10^{-9} \text{m}$

\Downarrow

Прямозонные ПП лучше излучают

Кремний - не прямозонный
 Кремний сам по себе покрывает оксидом
 (проблема по непрерывности в электронике)

прямозонные:

AzBs
 группа

AIII BV
 GaAs (арсенид галлия)

Сильный
 инверсионный
 A5B5

Лек 11
15.11

Способы накачки (созд. инверсии насел.)

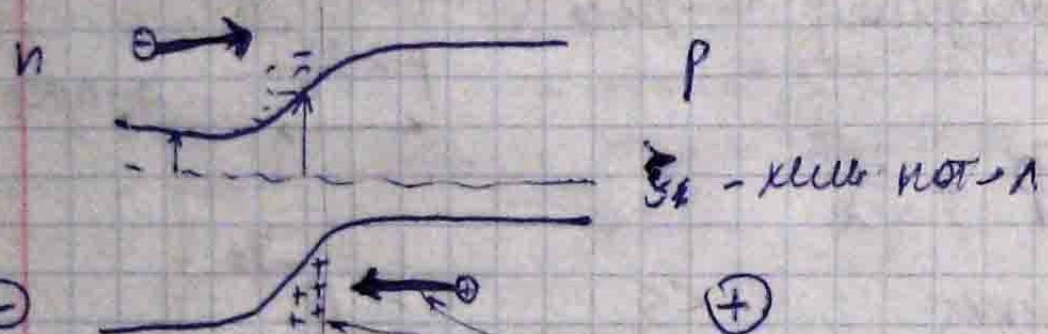
- оптический
- электрический



Резонатор

Эт способ накачки:

интерференция

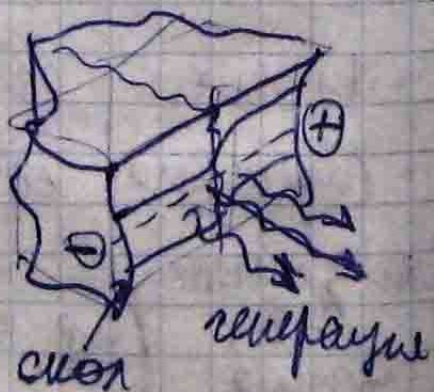


инверсия насел. созд. при отст. напряжении

созд. инверсии насел. в области контакта

Резонаторы:

- внешний
- созданы шок

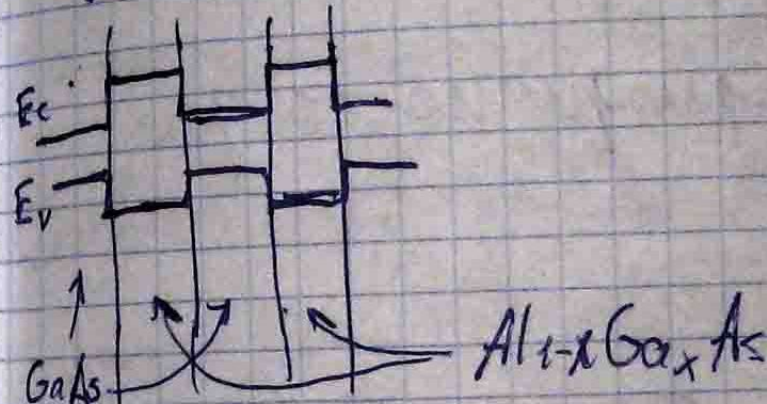


Алфёров!

гетероструктура - структура с разными пол. решетками, к-ры почти полностью сданы. (гетероструктурная гетероструктура)

$Al_{1-x}Ga_xAs$ (x часть Ga заменено на Al.)

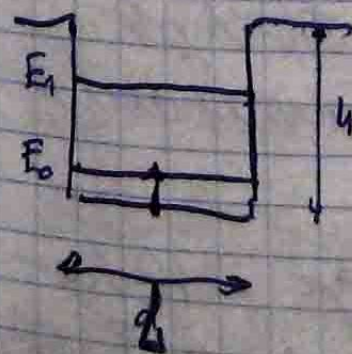
$E_g^{тех}$ больше, чем ширина Al.



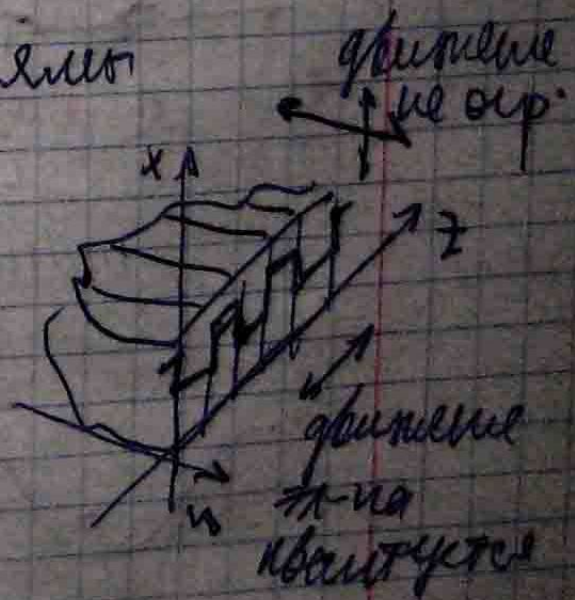
верхняя решетка

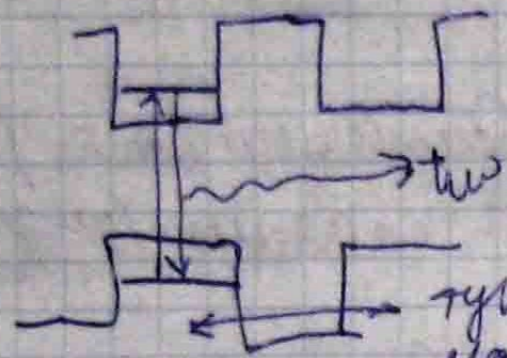
квант.-точеч. барьеры, узкие ямы

$$E_{ном} = E_{x,y} + E_z$$



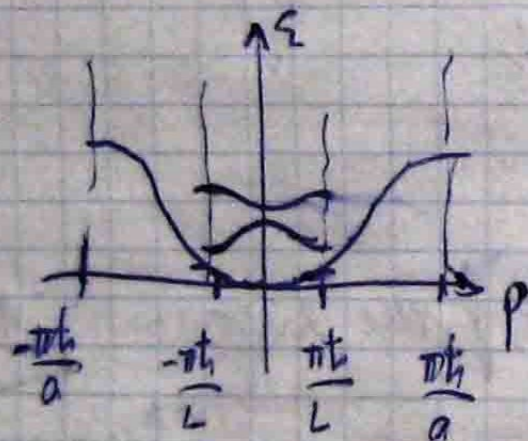
$E_0 - E_1 = E(h, l)$
резонировка
толщиной энергии слоя
барьер





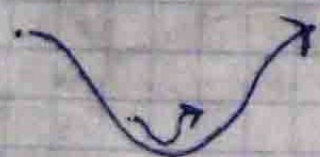
туннельный эффект при малых толщинах барьера \Rightarrow проводимость.

При малых λ это ещё и периодичность для периода L



Большая зона от периода a

мини-зона от периода L



под действием э. поля E дрейфуют \hbar -вол в p -пр-ве, колебания, акустиче.

для металлов амплитуда ~ 10 км - не шутка.

~~$\lambda = \frac{q\hbar E}{2\pi\hbar}$~~

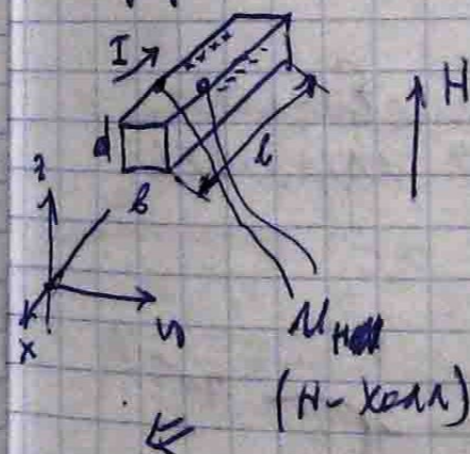
А для сверхрешетки амплитуда меньше $\lambda \sim E$ (напряженность) $\lambda = \frac{q\hbar E}{2\pi\hbar} \sim 10^{12} \div 10^{13} \text{ Гц}$

1970 - молекуляр-кристаллическая (высокая)

крист. 1-первое слош (квант. уровней)
0-первое слош (квант. точки)

1) Квант. эффект Холла

Эффект Холла простой (середина 19c)



$$v = \mu E$$

- дрейф-скорость μ -подвижность

$$j = env =$$

- плотность тока n -концентр. носителей

$$= en\mu E$$

$$j = \sigma E$$

- зак. Ома σ -удел. электропровод

$$\sigma = en\mu \Rightarrow n\mu = \frac{\sigma}{e}$$

$$\vec{F}_\perp = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$E_y = \frac{U_H}{d} = \mathcal{R}_H j = \mathcal{R}_H \frac{I}{bd}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_H = \frac{U_H d}{IH}$$

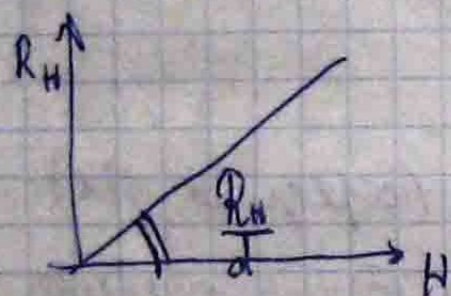
ностр. холла

$$R_H = \frac{M_H}{I} = \frac{J \times H}{d}$$

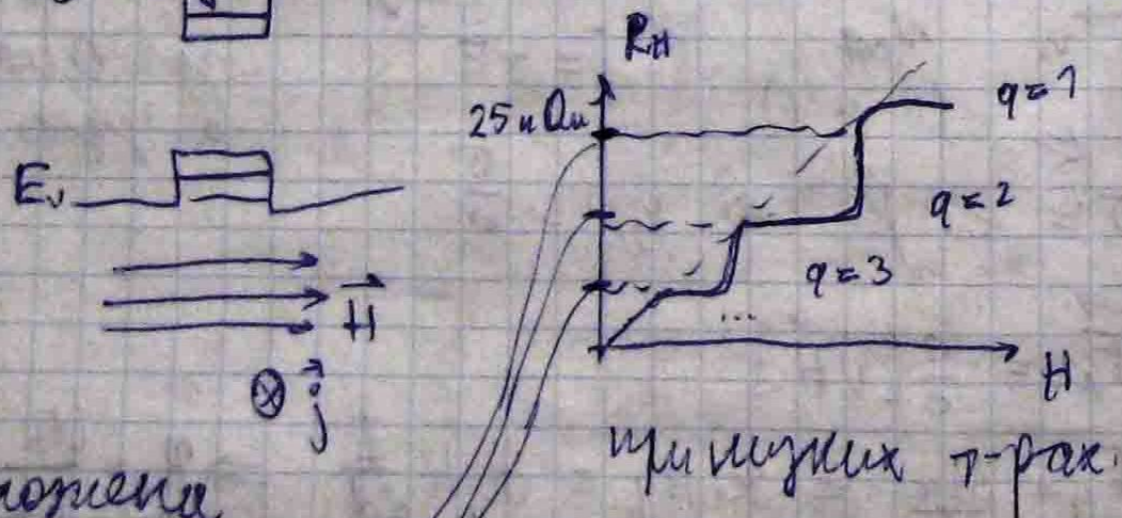
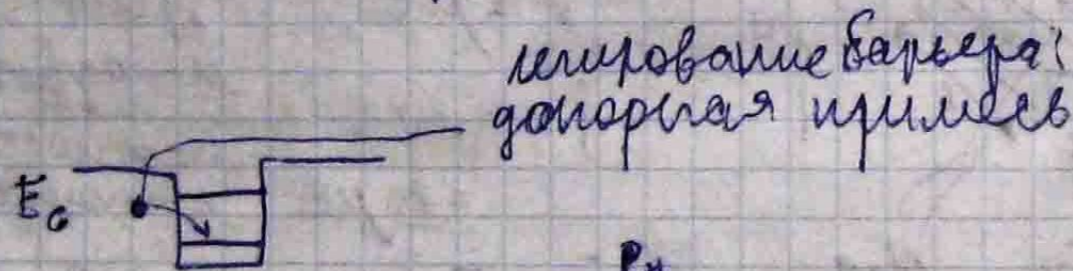
$$F_x = \frac{d}{c} M_x H = E_y \Rightarrow \frac{M_x H}{c} = E_y$$

$$\frac{V_H}{e} = \frac{J \times H}{e n c} = E_y$$

$$R_{UH} = \frac{1}{e n c} = \text{const}(\dots) \Rightarrow \underline{H = \dots}$$



для конст. тока
одного типа



положена
прото
для всех сигналов $R_H \sim \frac{1}{q}$, $q=1,2,3,\dots$

Величина квантово подготов. функции

$$j = \frac{I}{S} \quad \frac{IH}{\hbar c} = \frac{eUH}{\hbar} ; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$R_H = \frac{UH}{I} = \frac{H}{e n c}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\omega = \frac{eH}{m c}$$

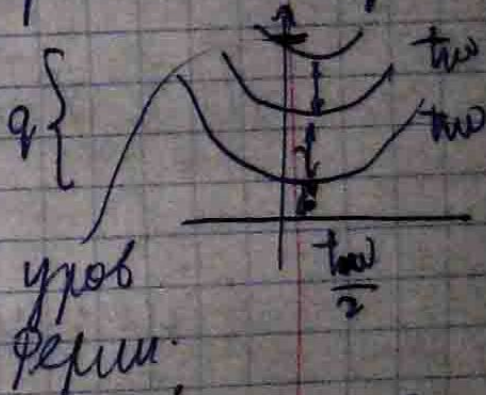
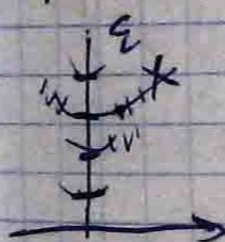
См. функции в маг. поле \mathcal{H}

$$E_{\text{норм}} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega + \frac{p_z^2}{2m}$$

энергия Landau
переходов Landau

А у нас функции
квантовано

номером q



q-уров Landau
уров Ферми

$$N = \frac{2\pi m \hbar \omega S}{(2\pi \hbar)^2} = \frac{eH}{\hbar c} S$$

- норм. число сост.
на площадке S.
(на канг. уровне)

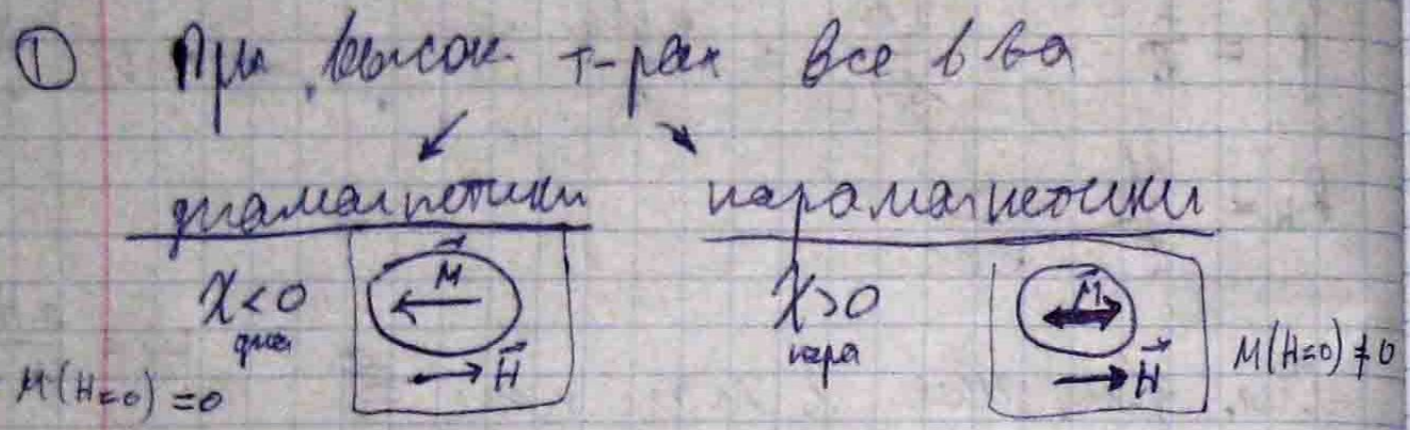
$$n = \frac{N}{S} = \frac{eH}{\hbar c}$$

- концентрация сост.
на канг. уровне

$$R_H = \frac{H}{e n c} = \frac{H}{e c (\frac{e \hbar}{\hbar c} q)} = \frac{\hbar}{e^2 q}$$

q=1,2,3
анало уров.
ноз для ферми

Магнитные материалы



$\vec{M} V = \vec{M}$

$\vec{M} = \chi \vec{H}$

\vec{M} - магн. момент

\vec{M} - магн. момент

V - объём

χ - магнит. восприимчив.

Ферромагнетизм

$|\chi_{пара}| \gg |\chi_{диа}|$

$\chi_{диа}(T) = const$

$\chi_{пара}(T) \approx \frac{1}{T}$ - зак. Кюри

точнее, $\chi_{пара}(T) = \frac{1}{T - \theta}$ - зак Кюри-Вейсса

θ_p - точка Кюри парамагнетики (p-парамагнетик)

(Кюри-Вейс $\xrightarrow{T \rightarrow \infty}$ Кюри)

$\chi \equiv \frac{I}{H} + 4\pi \chi$ (сгс) - магнит. проницаемость

Лек 12
27.11

(раньше $\chi \leftrightarrow \mu$)

$\chi_{диа} < 1$
 $\chi_{пара} > 1$

$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \chi \vec{H}$

$\chi = 0$ - идеальной диамагнетизм $\Rightarrow \chi = -\frac{1}{4\pi}$

① парамагнетики - диамагнетики -

атомы и молекулы не имеют соб. магн. момента в нулевом поле.

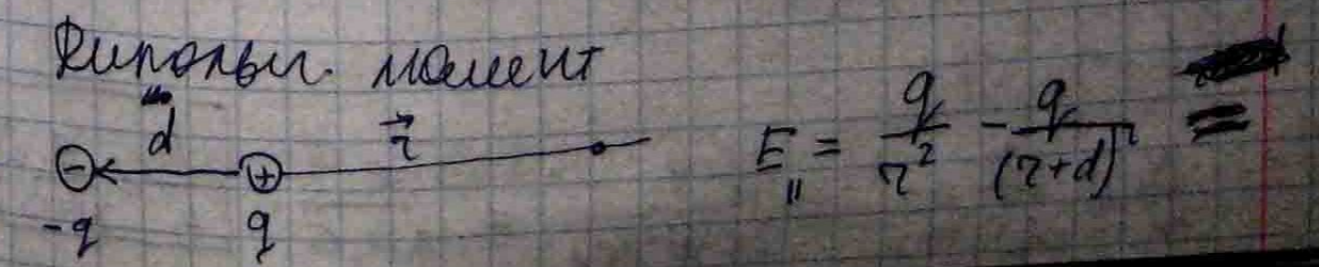
парамагнетики - ато. и молек. имеют...

$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]$ - мех. момент кол. групп

$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ - модуль магн. момента

$L_z = \hbar m_l$ - проекция на ось

$m_l = -l, \dots, l$



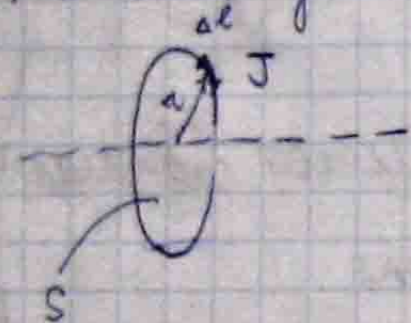
$$= q \frac{2d^2 + d^2}{r^2(1+d)^2} \approx \frac{2qd}{r^3} = \frac{2}{r^2} p$$

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad - \text{эл. дипольный момент}$$

$$\vec{E}(\vec{z}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{p}}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{z}}{z}$$

Напряженность поля диполя в осев. направлении

Магнит. ток



$$\Delta H = \frac{J \Delta l}{c r^2}$$

$$H = \frac{J 2\pi R}{c r^2} = \frac{2\pi R^2 J}{c r^3} = \frac{2JS}{c r^3}$$

$$\frac{JS}{c} \equiv M \quad - \text{маг. дипольный момент кругового тока}$$

Связь мех. и маг. моментов атома.

$$J = \frac{q}{2\pi R} V; \quad S = \pi R^2; \quad L = m_q V R$$

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{qV}{2\pi R} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{qVR}{2c}$$

$$L = m_q V R$$

$$\frac{M}{L} = \frac{q}{2cm_q} = \frac{N \cdot e}{2c N \cdot m_e} = \frac{e}{2m_e c} \quad \boxed{\frac{M}{L} = \frac{e}{2m_e c}}$$

это справедливо вообще для маг. дипольного момента.

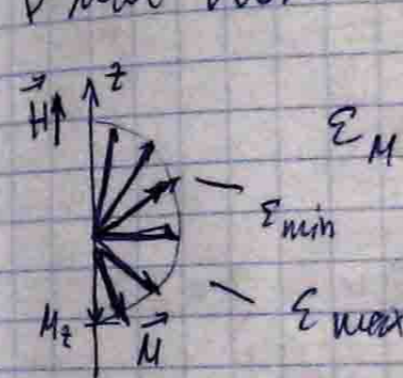
$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2m_e c} \equiv \gamma = g\gamma, \quad g=1.$$

g-фактор
γ-процентное отношение

L квантуется ⇒ M квантуется.

$$M_z = \frac{e\hbar}{2m_e c} M_l \quad - \text{квантование магнитного момента} \quad m_l = -l, \dots, l$$

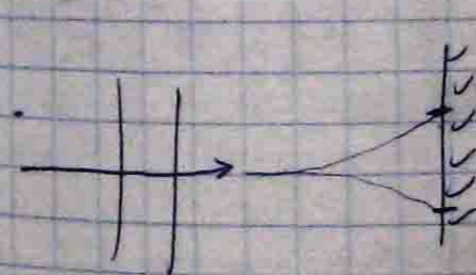
В маг. поле:



$$\epsilon_M = -\vec{M} \cdot \vec{H} = -\frac{e\hbar H}{2m_e c} M_l$$

Энергия взаимодействия с маг. полем

$$\text{Пусть } H = H(z) \Rightarrow \epsilon_M = \epsilon_M(z) \Rightarrow F = \frac{\partial \epsilon_M}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} M_l$$



Эксперимент
Герлаха-Устера

$$2l+1=2 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad - \text{магнетон Бора} \quad \leftarrow l=1$$

$$l \rightarrow s = \frac{1}{2} \quad - \text{спин, проекция } \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{M}{S} = \frac{e}{mc} = g\gamma, \quad g=2.$$

момент квант. флукт.,
связанный с собой.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad - \text{полный момент квант. вращения} - \text{самого}$$

$$|L-S| \leq |\vec{J}| \leq |L+S| \quad \text{момент квант. фл. атома.}$$

$$m_J = -J, \dots, J.$$

вклад в суммарн.

от \vec{L} и от \vec{S} равной ($g=1$ и $g=2$)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad \text{без вывода}$$

$$1 \leq g \leq 2$$

$$S=0, J=L \Rightarrow g=1$$

$$L=0, J=S \Rightarrow g=2$$

$$M_z = \mu g m_J \quad \text{проекц. маг. момента}$$

$$m_J = -J, \dots, J$$

Система стремится к min энергии,
т.е. $\vec{\mu}$ ориентировано паралл. с \vec{H} .

но есть температура, экспериментальная проверка.
 $n(m_J) \sim \exp\left(-\frac{\epsilon_{m_J}}{kT}\right)$ Больцман
 распредел. концентрации на уровнях

$$\epsilon_{m_J} = -g\mu H m_J$$

$$\sum_{m_J=-J}^J n(m_J) = N$$

- проверка для
Больцмана
и-одн. концентрации

$$\frac{n(m_J)}{N} = \frac{e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}$$

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow n_{m_J=J} = N \quad - \text{все стрелки с } m_J=J$$

$$T \rightarrow \infty \quad (kT \gg \mu H) \Rightarrow \frac{n_{m_J}}{N} \approx \frac{1}{2J+1} = \text{const} \quad - \text{все стрелки}$$

равноамериканно

$$\epsilon = -\mu g H \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}$$

$$\epsilon = -\mu H$$

$$\mu = N g \mu \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H m_J}{kT}}}$$

$$\mu H \ll kT$$

(при $\mu H = kT$, $T \approx 95K$)

$$M = n g \mu \frac{\sum_{m_J = -J}^J m_J \left(1 + \frac{\mu g H m_J}{kT}\right)}{2J+1} = \dots$$

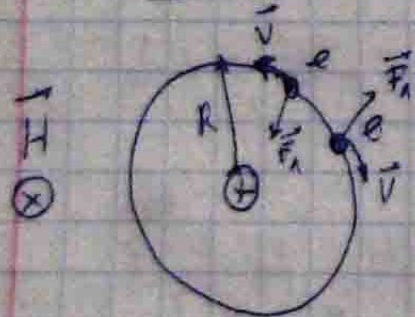
$$= n \frac{(\mu g)^2 H}{kT} \frac{1}{2J+1} \sum_{m_J = -J}^J m_J^2 = \dots = \frac{n(\mu g)^2}{3kT} J(J+1) H = \chi$$

$$\chi_{пара} = \frac{n(\mu g)^2}{3kT} J(J+1)$$

($\chi \sim \frac{1}{T}$ - закон Кюри)

- маг. воспр. пара идеальных магнитных спинов (без учета спин-орбит. между ними)

① Динамика



$$L_z = 0 \quad (H=0)$$

$$F_1 = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]$$

$$H=0: \left\{ \frac{m v_0^2}{R} = F_R \right.$$

$$H \neq 0: \left\{ \frac{m v^2}{R} = F_R - \frac{e H v}{c} \right.$$

$$(v - v_0 \equiv \Delta v \ll v_0)$$

$$\frac{m}{R} \Delta v \cdot 2v = -\frac{e H v}{c} \Rightarrow \Delta v = -\frac{e H R}{2 c m}$$

$m \Delta v R$ - гол. мех. момент

$$M = 2 \frac{e}{2mc} m \Delta v R = -2 \frac{e^2 R^2}{4 m_e c^2} H$$



а теперь в 3-мерном случае

$$R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$M = -\frac{e^2 H}{6 m c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2$$

$$\chi_{пара} = -\frac{e^2 n}{6 m c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2 = const(T)$$

① Симметрия

$$\chi = \chi_{пара} + \chi_{диа}$$

$$\frac{\chi_{пара}}{\chi_{пара}} \sim \frac{e^2 a^2}{m c^2} / \frac{\mu^2}{kT} = \frac{kT m a^2}{\hbar^2}$$

a - радиус атома.

$$\frac{\hbar^2}{m a^2} \sim \epsilon_a \sim 1 \text{ эВ} \leftrightarrow 10^5 K \quad \text{- энергия связи электрона в атоме}$$

$$\frac{\chi_{пара}}{\chi_{пара}} \sim \frac{kT}{\epsilon_a} \ll 1$$

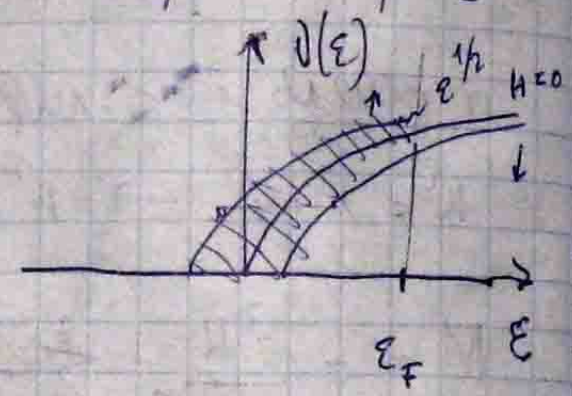
① ~~Ферми-Дирак~~ пара Ферми

заполн. в металле не созд. параман-
кетери, тк не вырожден.
не по Борнуману, а по Ферми-Дираку

\vec{H} ↑, ↓ - направление
спин. эл. пов

$$\epsilon_{\uparrow} = \frac{p^2}{2m} - \mu H$$

$$\epsilon_{\downarrow} = \frac{p^2}{2m} + \mu H$$



$$M_e = M(n_{\uparrow} - n_{\downarrow})$$

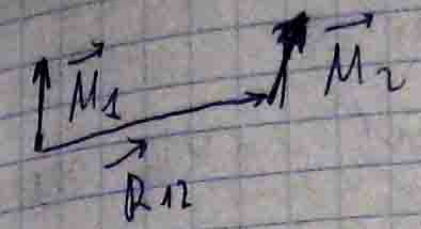
$$M_e = \mu^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon = \epsilon_F} \cdot H$$

$$\chi_n = \frac{3\mu^2}{2} \frac{1}{\epsilon_F} \quad - \text{параметры Паули}$$

$\epsilon_F \gg kT \Rightarrow$

лек 13
29.11.

при нулевых T-рах отдельные маг.
спинки взаимно-орт.
(спиновое-спиновое взаимодействие) (маг. монополей)
нет



$$U_m = \frac{(\vec{M}_1 \vec{M}_2)}{R_{12}^3} = \frac{(\vec{M}_1 \vec{n}_{12})(\vec{M}_2 \vec{n}_{12})}{R_{12}^3}$$

$$U_m \approx \frac{\mu^2}{a^3}$$

$$U_k \approx \frac{e^2}{a}$$

$$\frac{U_m}{U_k} = \frac{\left(\frac{\hbar^2}{m e^2} \right)^2}{m c^2} \approx \frac{m v^2}{m c^2} = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \approx 10^{-4}$$

↑ в атомах $v \approx 10^8 \text{ c}$

$$\frac{U_m}{U_k} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 = \left(\frac{1}{137} \right)^2 (= 10^{-4})$$

Но не стоит сравнивать U_m со светом:

а) у Маграна на d оболочке эк-пол $\hat{S} = \frac{5}{2}$
(проблемо Хунда) $\hat{S} = \frac{5}{2}$

б) H_2 в осн. сост. спин. атомов ↑ и ↓.

Фла α -на неразумно \Rightarrow

$\psi(1,2) = \alpha \psi(2,1)$ ($\alpha = \text{const}$, α в Ψ . Ш. согласован)

но: $\psi(1,2) = \alpha^2 \psi(1,2) \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$.

$\psi(1,2) = \psi(2,1)$ - симм - Бозоны (чел. спин)

$\psi(1,2) = -\psi(2,1)$ - антисимм - Фермионы (полуцел. спин)

ВФ α -на антисимметрична.

При отсутствии внешнего ~~поля~~ орбитального и магн.

$\psi(1,2) = \underbrace{S(\sigma_1, \sigma_2)}_{\text{спиновое ВФ (магнитное)}} \underbrace{\psi(r_1, r_2)}_{\text{орбитальное ВФ (кулоновское)}}$

$\psi(1,2) = -\psi(2,1)$

предполагая $S(\sigma_1, \sigma_2) = S(\sigma_2, \sigma_1) \Rightarrow \psi(r_1, r_2) = -\psi(r_2, r_1)$

предполагая $S(\sigma_1, \sigma_2) = -S(\sigma_2, \sigma_1) \Rightarrow \psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1)$

$\Rightarrow E_a$ - энергия ^{взаимоим.} ВФ ψ

$\Rightarrow E_s$ - энергия ^{спин.} ВФ ψ

Положение спинов (11 или 1 $\bar{1}$) определяет сим или антисимметричность ВФ простран-

м-момента
спина

свободной фермионной функции (попарно)

$E_a - E_s = E_{\text{обменного взаимодействия}}$

$E_{\text{обмен}} > E_{\text{кулонов-гравитационное взаимодействие}}$
1700 раз больше взаимодействия!

Спиновой намагниченности

$H_s = \frac{1}{4} (E_s + 3E_a) + (E_a - E_s) \vec{S}_1 \vec{S}_2 = E - A \vec{S}_1 \vec{S}_2$
обменное взаимодействие

$S=1: S_z = -1, 0, 1 \rightarrow E_a$
 $S=0: S_z = 0 \rightarrow E_s$

$\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2; |\vec{J}|^2 = |\vec{L}_1|^2 + |\vec{L}_2|^2 + 2(\vec{L}_1 \vec{L}_2) \Rightarrow$

$\vec{L}_1 \vec{L}_2 = \frac{1}{2} [|\vec{J}|^2 - |\vec{L}_1|^2 - |\vec{L}_2|^2] = \frac{1}{2} [J(J+1) - L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)]$

$J = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad L_1, L_2 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow S=0 \Rightarrow \vec{S}_1 \vec{S}_2 = -\frac{3}{4}$
 $S=1 \Rightarrow \vec{S}_1 \vec{S}_2 = \frac{1}{4}$

$A > 0 \Rightarrow$ выгодно $\uparrow\uparrow$ ($A > 0$ в паре одинаковых спинов)

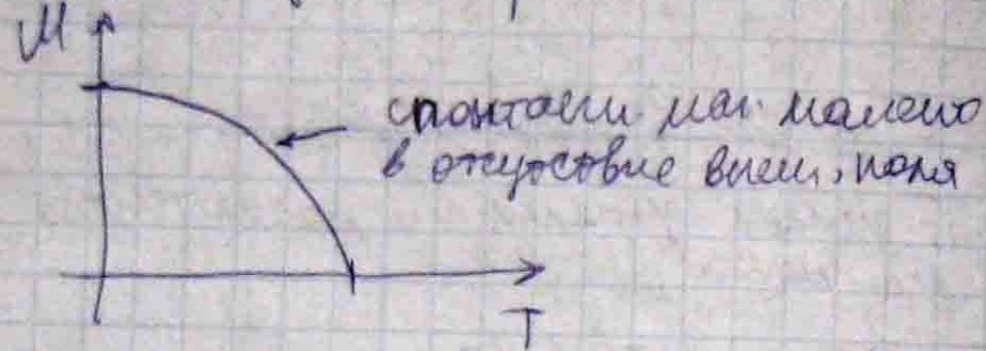
$A < 0 \Rightarrow$ выгодно $\uparrow\downarrow$ ($A < 0$ в паре ^{разных} спинов)

1) обменное взаимодействие пропорционально $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

2) $E_{\text{обмен}} \sim \exp(-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

спин

При нулевом T-розе



Прибли. метод:

Метод самосогласованного поля

(здесь: метод Кюри-Вейса)

$J = \frac{1}{2} \Rightarrow g = 2 \Rightarrow m_J = \pm \frac{1}{2}$

Кюри-Вейс: учтем разл. маг. стрелки
прямая в поле $\vec{H}_{eff} = \vec{H} + \alpha \vec{M}$ самосогл. магнетонное поле

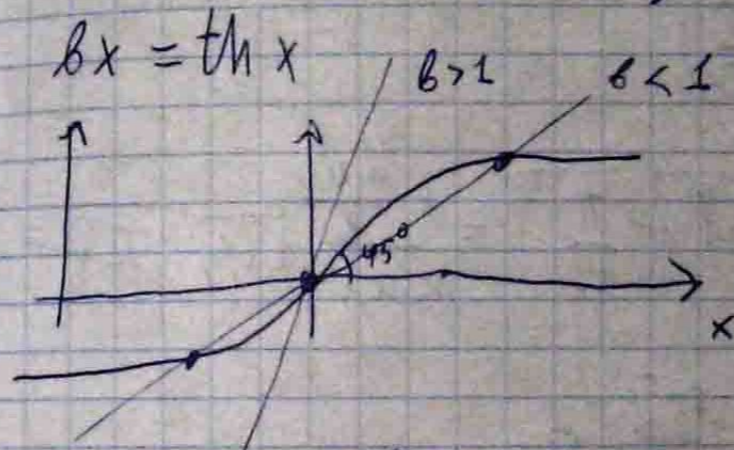
$$M = n \mu g \frac{\sum_{m_J = -J}^J m_J e^{\frac{\mu g H_{eff}}{kT}}}{\sum_{m_J = -J}^J e^{\frac{\mu g H_{eff}}{kT}}} = 2n \mu \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}} - e^{-\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}}}{e^{\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}} + e^{-\frac{\mu(H+\alpha M)}{kT}}}$$

$$M = n \mu \operatorname{th} \left(\frac{\mu(H + \alpha M)}{kT} \right)$$

$$H=0 \Rightarrow M = n \mu \operatorname{th} \frac{\alpha M \mu}{kT} \Leftrightarrow b x = \operatorname{th} x$$

S-спин-тоунде
 $M_s \equiv M|_{H=0}$

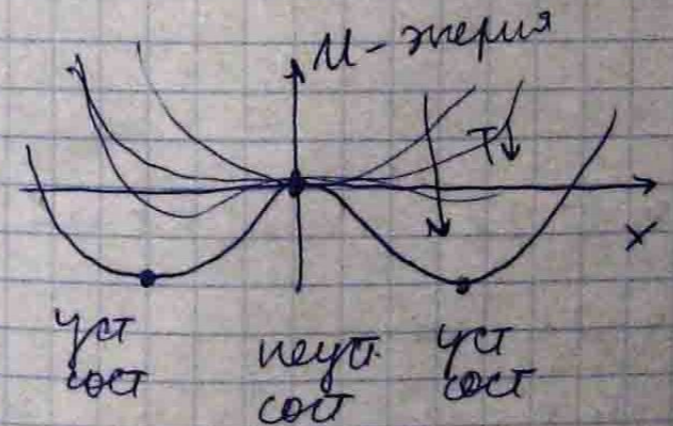
$$\left\{ x := \frac{\alpha \mu M}{kT}, b := \frac{kT}{\alpha \mu^2 n} \right\}$$



$b > 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M_s = 0$
 $b < 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{нейтр. сост.} \\ x \neq 0 & \text{уст. сост.} \end{cases}$

$b < 1 : \frac{kT}{\alpha \mu^2 n} < 1 \Leftrightarrow T < \alpha \frac{\mu^2 n}{R}$

$T_{кр} \equiv T_c$ - Темпер. Кюри



$\alpha > 0$

при повышении T появ. спонтанная намагниченность ферромагнетизм.

$T \lesssim T_c$: $\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}$ ($x \ll 1$)
 $\Rightarrow x \approx x - \frac{x^3}{3} \Rightarrow |x| = \sqrt{3(1-\epsilon)}$

$\frac{\alpha \mu M_s}{kT} = \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}$

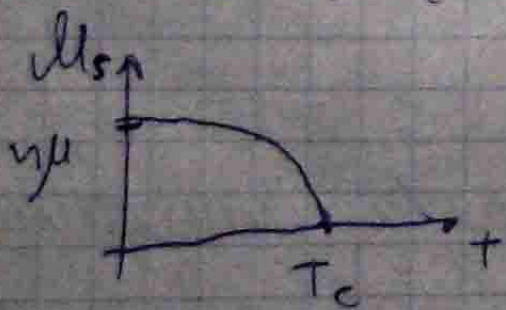
$M_s \stackrel{T \rightarrow T_c}{\approx} \frac{kT_c}{\alpha \mu} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} = \frac{k \frac{\alpha \mu^2 n}{k}}{\alpha \mu} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} =$

$= \mu \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} 0$

номм. маг. момент
 всех упорядоченных

$T \ll T_c$: $\tanh x \approx 1 - 2e^{-2x}$ ($x \gg 1$)
 $\Rightarrow x \approx 1 - 2e^{-2x}$

$M_s \approx \mu \left(1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T}}\right) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \mu$



$T \gtrsim T_c, H \neq 0.$

$\tanh\left(\frac{\mu(H + \alpha M)}{kT}\right) \approx \frac{\mu(H + \alpha M)}{kT}$

$M = \frac{n \mu^2 (H + \alpha M)}{kT}$

$M \left(1 - \frac{n \mu^2 \alpha}{kT}\right) = \frac{n \mu^2 H}{kT}$

$M \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) = \frac{n \mu^2 H}{kT}$

$M = \frac{n \mu^2}{k(T - T_c)} H = \chi H$

$\chi \sim \frac{1}{T - T_c}$ маг. восприимчивость Кюри-Вейса

Без вывода!

$\alpha = \frac{z}{4} \frac{A}{\mu^2 n} = \frac{z A}{4 \mu M_{s0}}$

A - обменный интеграл
 z - кол-во "соседей" атома

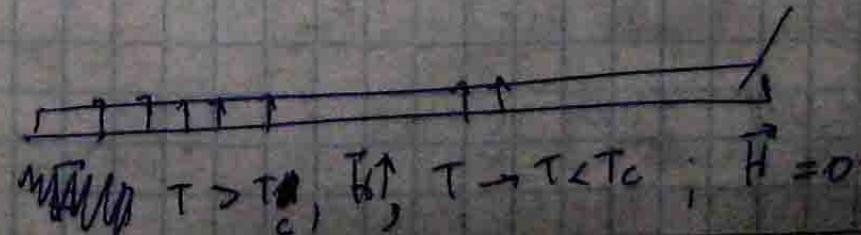
$M_{s0} = M_s|_{H=0}$

$kT_c = \frac{z}{4} A$

$A > 0 \rightarrow \alpha > 0$ (ферромагнит. упоряд-ть)

$T_c(\text{Fe})$
 $T_c(\text{Ni})$ } $> 300\text{K}$

ферромагнетики



$\uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow E_{обм} \text{ min}$
 $\uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow E_{маг} \text{ max}$

$\Rightarrow E_{обм} + E_{маг}$



доменная стенка - поворот маг. намагн. стенок

Ферромагнетизм при низк. T-рах $M \propto S$

Возм. из-за спинового поворота иезла
 непрерывный поворот - размагничивание
 коллективное возбуждение - бозона возбуждения

разница возбуждения - магнетон:

$\epsilon(\vec{p}), \epsilon(0) = 0$
 узкий спин \Rightarrow бозон

Проводим; Сверхпроводники

лек 14
6.12.14

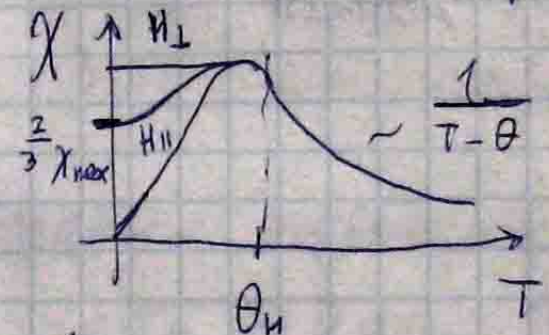
при $A > 0 \rightarrow \uparrow\uparrow$

при $A < 0 \rightarrow \uparrow\downarrow$ - $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ спинт
 обмен шаг-A антиферромагн.

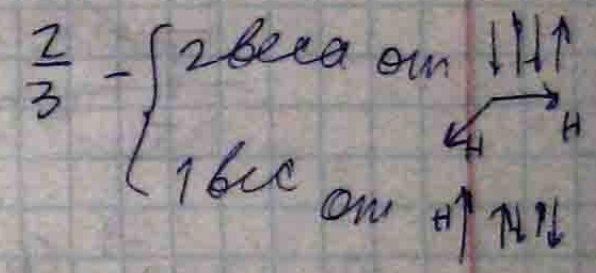
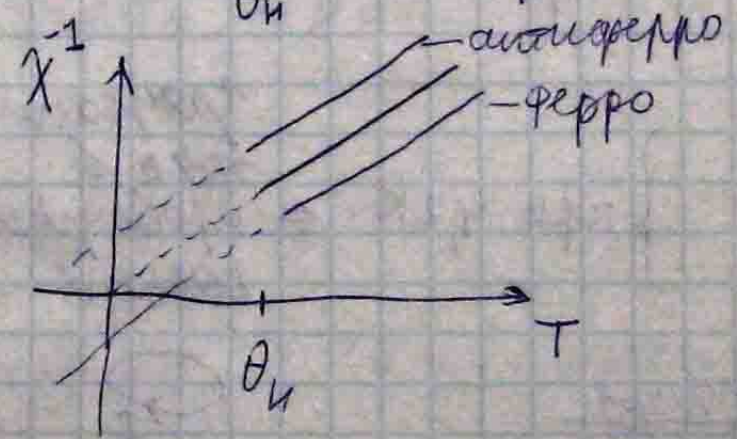
критер. T-ра - T-ра Нелля (Θ_N)
 антиферромагн. упоряд-ть. ($\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$)
 удвоение периода крист. решетки.

магнетон. магнито нет. ($\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$)

$T < \Theta_N$ - упоряд
 $T > \Theta_N$ - нетупоряд



магнитная χ -восприимчив.



удвоение периода решетки на решетке и бозона (спин не релаксируется).

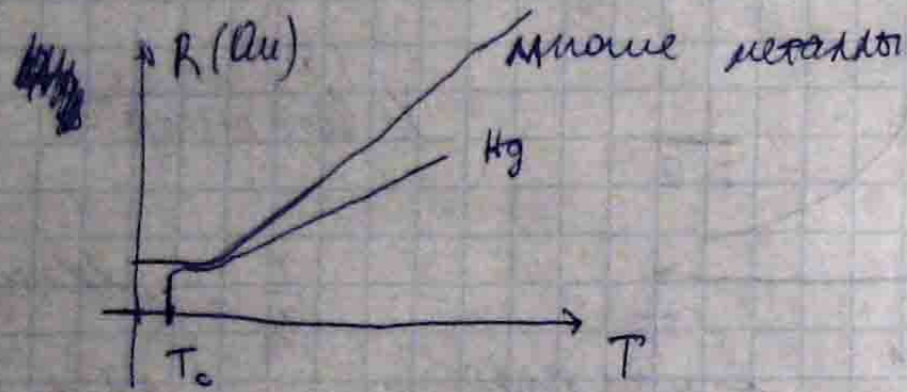
нужны все нерешеточные частицы со спином
 (для кубового проникновения) (для брагговского)
 нейтрон.

при $T < \Theta$:

- а) $\uparrow^H \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ $H_{||}$ малые отклонения влиют
- б) $\uparrow^H \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ H_{\perp} отклонения сильно влияют

① Сверхпроводимость (1911, Камерлинг-Оннес)
Жидкий He

$T_{\text{крит He}} = 4,2 \text{ K}$ - жидкий "холодильник"



$\rho_{\text{Cu}} \sim 10^{-9} \text{ Ом}\cdot\text{см}$
 $\rho < 10^{-25} \text{ Ом}\cdot\text{см}$

при 4,2 K. ← замыкание тока в кольце проводимости

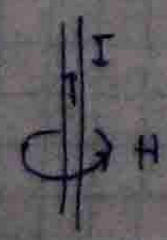
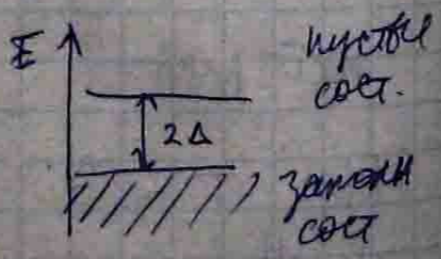


Свойства сверхпроводимости
1) $\rho \sim 0$ при $I < I_c(T, H)$

2) эффект Мейснера

$B = 0$ в объеме при $H < H_c \Rightarrow \chi = -\frac{1}{4\pi}$

3) В квант-рых экспериментах при $T < T_c$ выявл-ся щель в спектре 2Δ



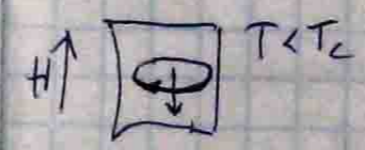
от. большие поля H (от тока в самом) нарушают упоряд. подавление

Зак. Вигенана - Франца
Me: больше электропровод → больше ~~теплопровод~~ теплопровод.
сверхпр: щель Δ релакс. времени теплопровод.

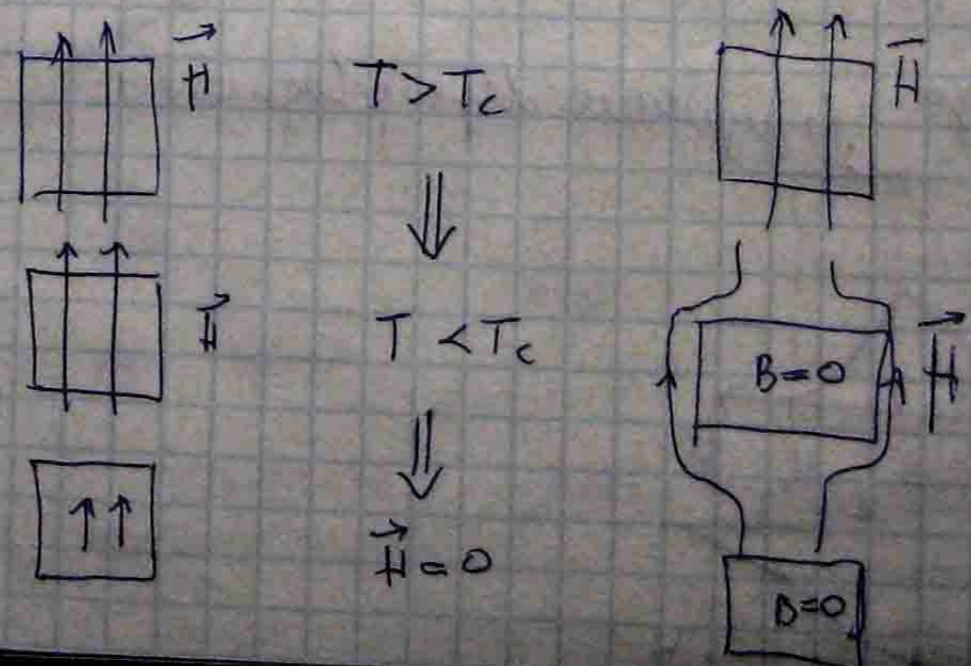
4) большие токи подавляют эффект Мейснера

Идеальный проводник (ИП)
 $T < T_c \Rightarrow \rho = 0$

Сверхпр. (СП)
 $T < T_c \Rightarrow \rho = 0$



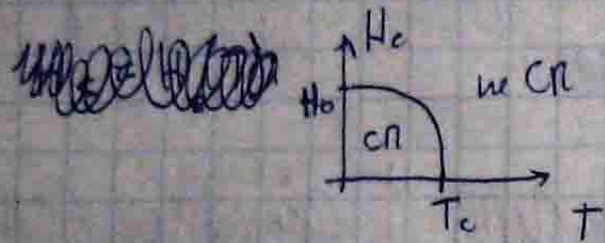
поток $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \rightarrow I$ компенсирует $\frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow H = 0$ внутри
все время, пока ток не затухает.



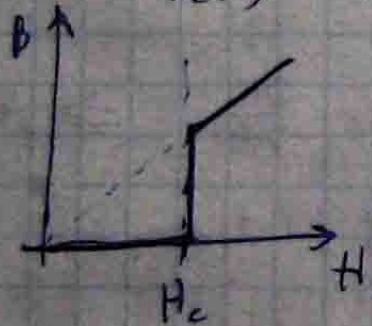
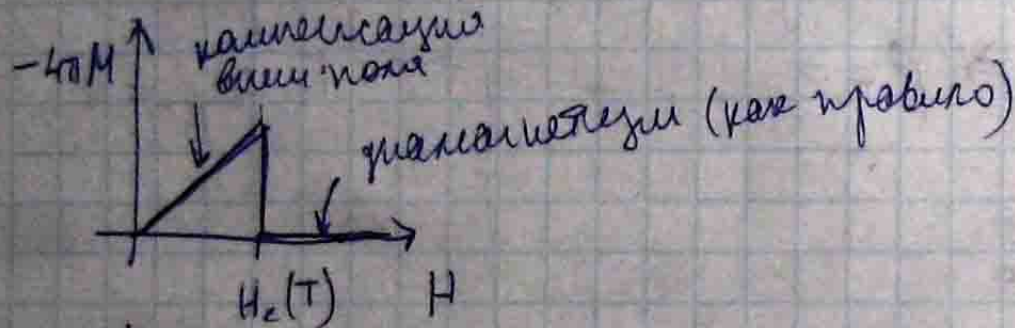
Может, эффект Хейшера - не просто эффект СП.

Типы СП:

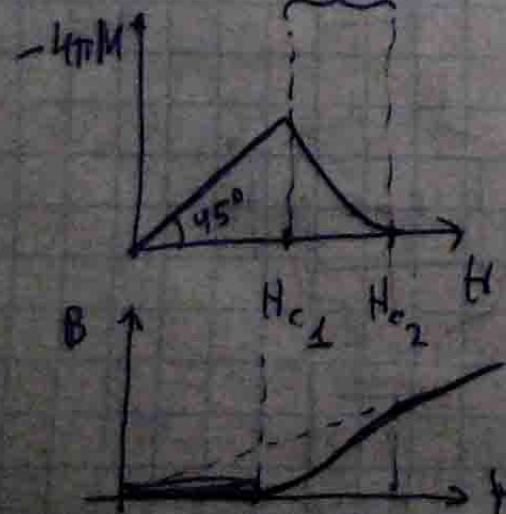
1) I рода $T_c = \text{const} < T_c$ $H < H_c \rightarrow$ СП
 $H > H_c \rightarrow$ нет СП.



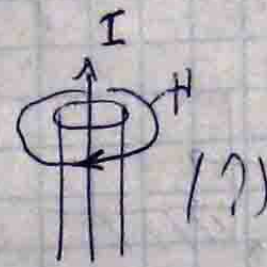
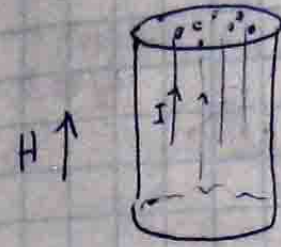
$H_c = H_c(T)$



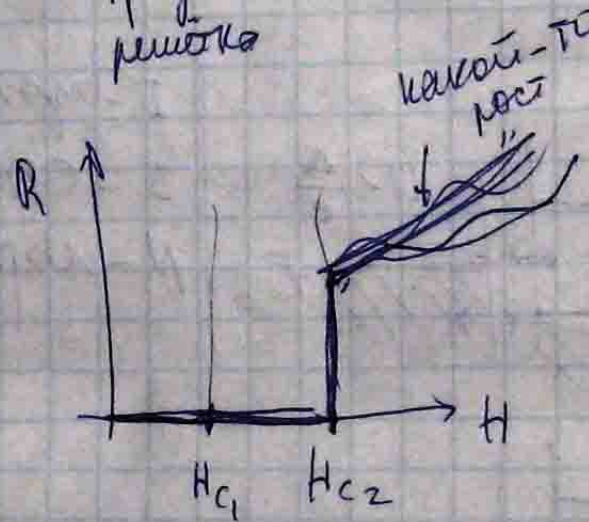
2) II рода разрушение сверхпроводимости.



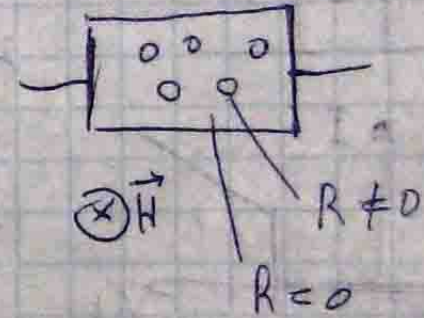
проникновение маг. поля в СП в виде вихрей (А.А. Абрикосов, конец 1950-е)



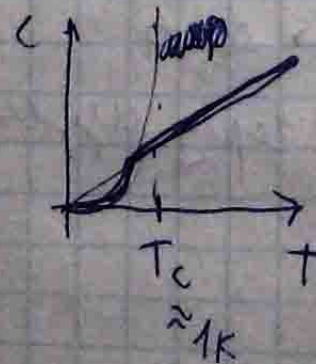
отталкивание вихрей друг от друга



$H_c < H < H_{c2}$ структура H число "0" растёт



Al: $T_c \sim 1K, H > H_c$

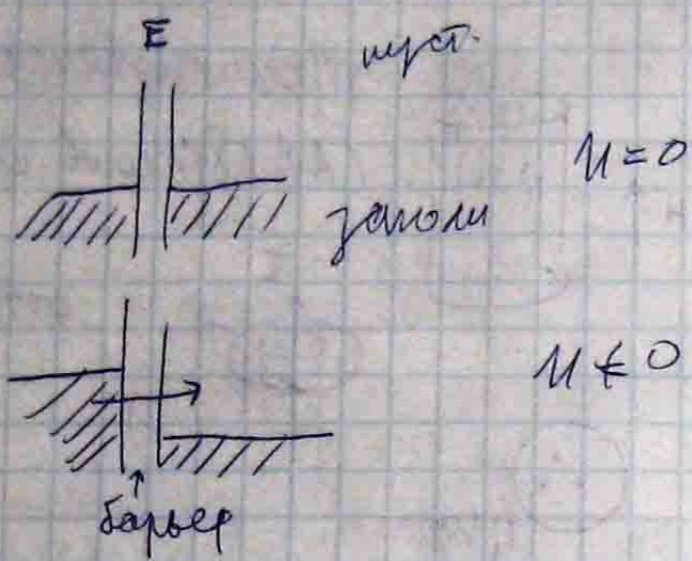
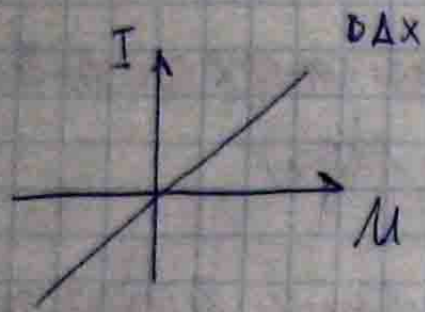


C - теплоёмкость

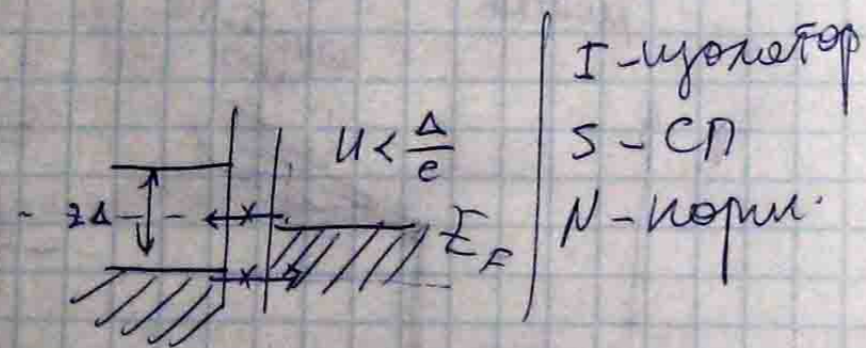
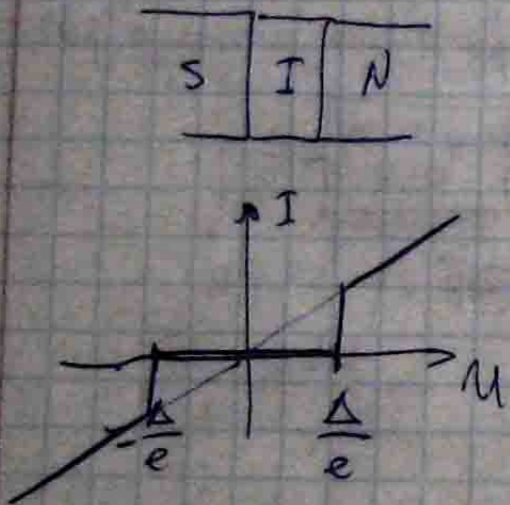
$T \downarrow \Rightarrow$ узел \uparrow

Способ измерения щели - туннельный эффект

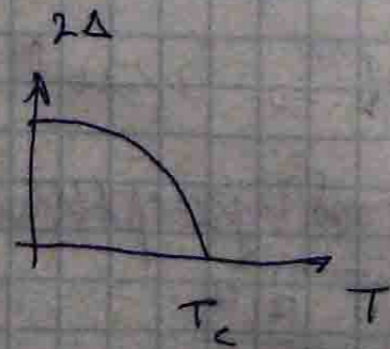
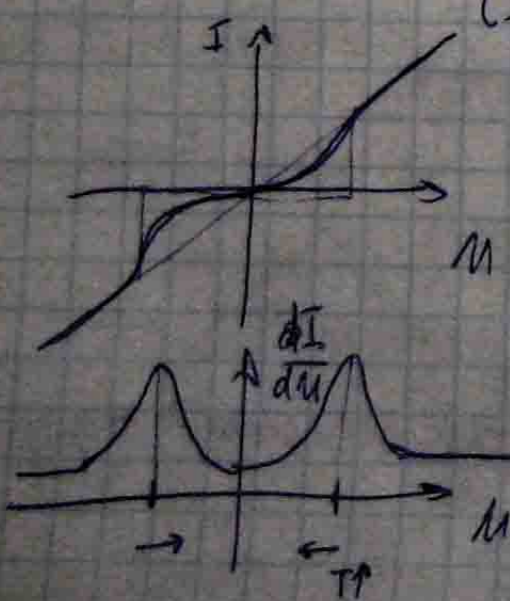




б) малые T:



с ростом T: $\Delta \downarrow$, при $T = T_c \rightarrow \Delta = 0$
 термич. возбужд. перу узла



теория Бозе-Эйнштейна
 4) Конденсат Бозе-Эйнштейна
 2 вида н-ноб $\rightarrow n_s$
 $\rightarrow n_n$

$n_s \rightarrow n, T \rightarrow 0$
 $n_s \rightarrow 0, T \rightarrow T_c$

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$$

$\vec{j} = -e \vec{v}_s n_s$ - плот тока

и Паравек: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \vec{B} \right) = 0 \quad (1) \quad \frac{d}{dt} \Rightarrow$$

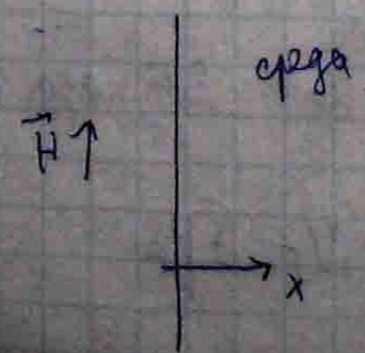
$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2) \quad \text{rot } + \dots \vec{B} = \vec{C}$$

- микромагн.

$$(1) \stackrel{\frac{d}{dt}=0}{=} (2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B} \quad (3)$$

- глв СП. $\vec{C} = 0$
 более



$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(x) = B(0) e^{-\frac{x}{\Lambda}}$$

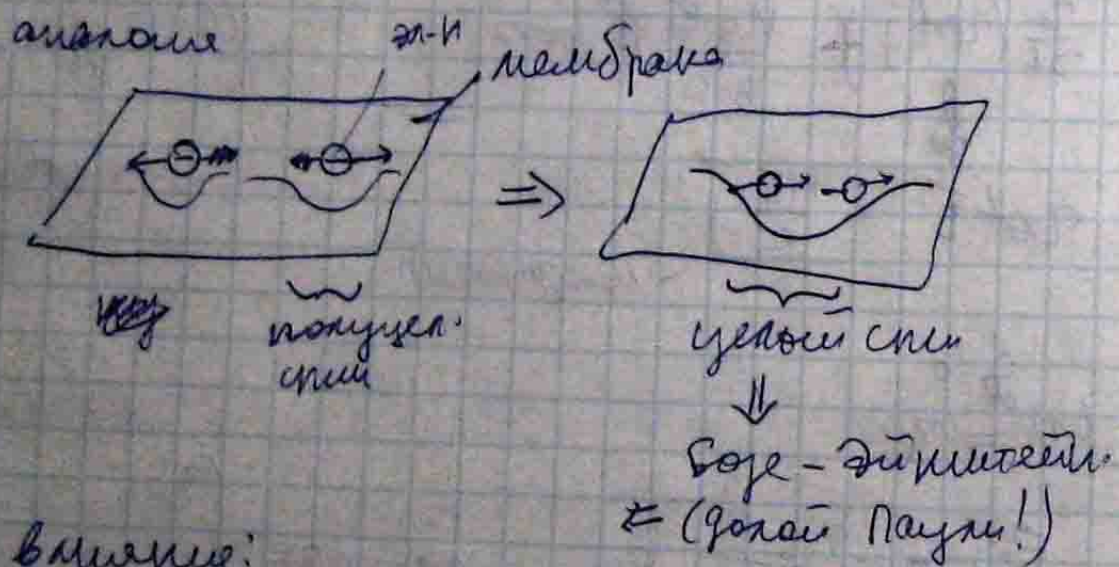
Λ - глубина проникновения маг. поля в СП.

$$\Lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}$$

$$\Lambda \sim 10^2 \div 10^3 \text{ \AA}$$

① Микроскопич. теория объяснения СП (Купер, Шрифер Шрифер и ...)

1. Возможно эфф. протекание тока отталки. частиц.



Внимание:

- мембраны
- групп $N-2$ эк-нов.

~~описание~~ описание всех эк-нов ВФ пара эк-нов

$$\Delta = \delta E = \sqrt{\frac{p^2}{2m}} = \frac{p_F}{m} \delta p_F = v_F \delta p_F$$

(p_F - импульс Ферми)

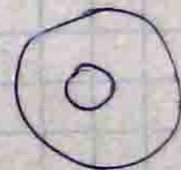
$$\xi_0 \sim \frac{\hbar}{\delta p} \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta} \sim \frac{1}{k_F} \frac{\epsilon_K}{\Delta} \sim 10^3 \text{ \AA} \quad \text{- неуп-тб парон}$$

Область неупределенности ξ_0 наоборот от нуля ~~на~~ пар эк-нов.

Рассеяние ^{пар} невозможно (~~не~~ приведет к уменьшению энергии пары всех пар)

\Downarrow сопротивление $R=0$.

Сверхпровод. кольца



$$\Phi = \frac{n \hbar c}{2e} = n \Phi_0 \quad n = 0, 1, \dots$$

квант маг. потока



$$I = I_0 \frac{\sin \frac{n \Phi}{\Phi_0}}{\frac{n \Phi}{\Phi_0}} \quad \text{- туннельн. ток через катушку (стандарт Флюксоидона)}$$

ККВИИ - определение маг. потока.

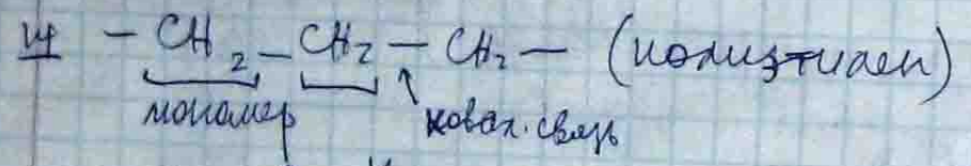
$$\omega_J = \frac{2eV}{\hbar} \quad \text{- осцилляции напряжения (местная эфф. Флюксоидона)}$$

Физика высококонденсированных полимеров =

лек 15
13.12

= Физика полимеров

Полимер-это, состоящий из макромолекул



$N \sim 10^3 - 10^4$ - полимер

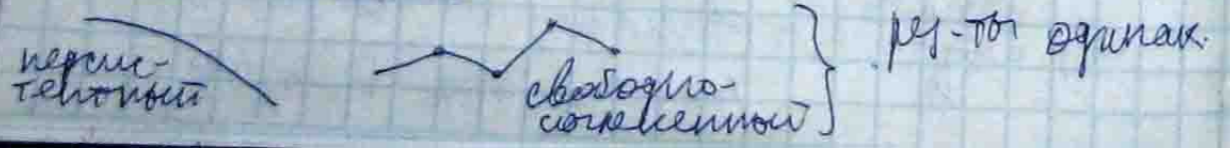
$N \sim 10^{10}$ - ДНК ($l \sim 1 \mu$)
число мономеров

Полимеры ~~молекулы~~ молекулы гибкие
 сворачиваются в клубки. (углы связей переменны $\sim 10^\circ$)
 гибкая связь (постоянная)

Св-во:

1. цепное строение
2. число мономеров велико
3. гибкость

Виды гибкости:



Гомополимер: все звенья одинак.
 Гетерополимер: звенья различаются

Виды структур:



Упорядоченность маловероятна

Возможна кристаллизация в отдельных областях



"Твердое состояние"

Состояние полимеров

- 1) частично кристаллическое (сшитый)
- 2) стеклообразное
- 3) высокоэластичное (для сетки)
- 4) вязко-текучее (молекулы друг относительно друга перемещаются)

Эластичность

$$\sigma = \frac{f}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

E - модуль Юнга

- $E = 10^{11} \div 10^{12}$ Па - кристаллы
- $E = 10^{10} \div 10^{11}$ Па - кварц, стекло
- $E = 10^9 \div 10^{10}$ Па - полимер, стекло
- $E = 10^8 \div 10^9$ Па - частично кристаллическая аморфная резина
- $E < 10^8$ Па - резина

① Простейший объект - идеальный упругий полимерный клубок. (в растворителе)

Пренебрегаем взаимод. удаленных частей (объемом взаимод). $\left\{ \begin{array}{l} E_{ковал} \sim 1 \text{ эВ} \\ E_{объемн} \sim 0,1 \text{ эВ} \\ \text{некорр.} \end{array} \right.$

Предположение

Аналогия конфигураций клубка и траектории броуновского движения



$$R = l \sqrt{N} \left[V(t_2 - t_1) \right]^{1/2}$$

$$R = \sqrt{(\bar{R}_2 - \bar{R}_1)^2}^{1/2}$$

теория Эйнштейна для броунов. движ.

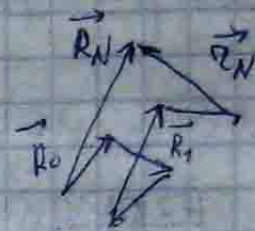
$$R = L = V(t_2 - t_1) \Rightarrow R = (lL)^{1/2}$$

l - характер размер.

много начальных и концов
гипотеза цепочки
вырабатывается

$$\frac{R}{L} \sim L^{-1/2}$$

$$\vec{R}_N = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i = \vec{R}_{N-1} + \vec{r}_N$$



$$R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2 \vec{R}_{N-1} \vec{r}_N + r_N^2 = R_{N-1}^2 + 2 R_{N-1} l \cos \varphi_N + l^2$$

презрение по всем возм. φ_N : $2 \cos \varphi_N \rightarrow 0$

$$R_N^2 = R_{N-1}^2 + l^2$$

по индукции?

$$R_N^2 = N l^2 = L l \Rightarrow$$

$$\boxed{R = (L l)^{1/2}}$$

- характер размер макромолекулы

$$R = N^{1/2} l$$

$$V \sim R^3 \sim N^{3/2} l^3 \quad \text{- объем}$$

$$\boxed{c^* = \frac{N}{V} = l^{-3} N^{-1/2}} \quad \text{- концентрация эквивалентов}$$

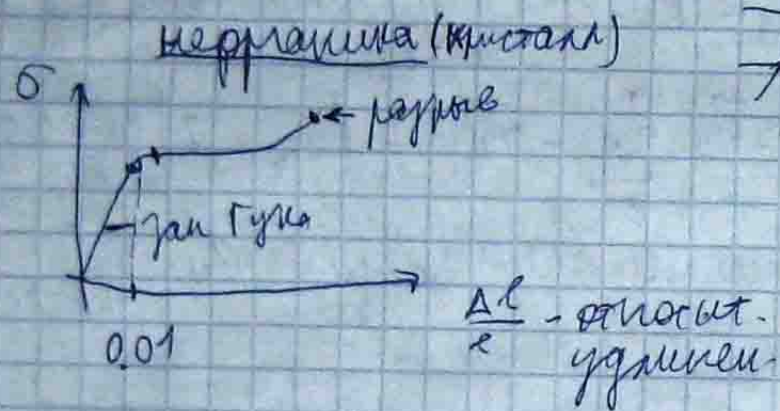
Вероятность линейной конфигурации, не расст. между началом и концом $R = L$

$$P_N(R) = \varphi e^{-\frac{3R^2}{2Nl^2}}$$



Это характеры разрыв полимер клубков

① Эластичность



суть:



идеальный полимер клубок без объема вращений

Принцип Больцмана:

если число ~~микро~~ ^{микро} состояний Ω зависит от макросостояния

$\Omega \sim P_N(R)$

$S = k \ln \Omega$ - энтропия системы
 $U_{эфф} = -TS$ - энергия состояния

$S(R) = k \frac{3R^2}{2Nl^2} + const.$

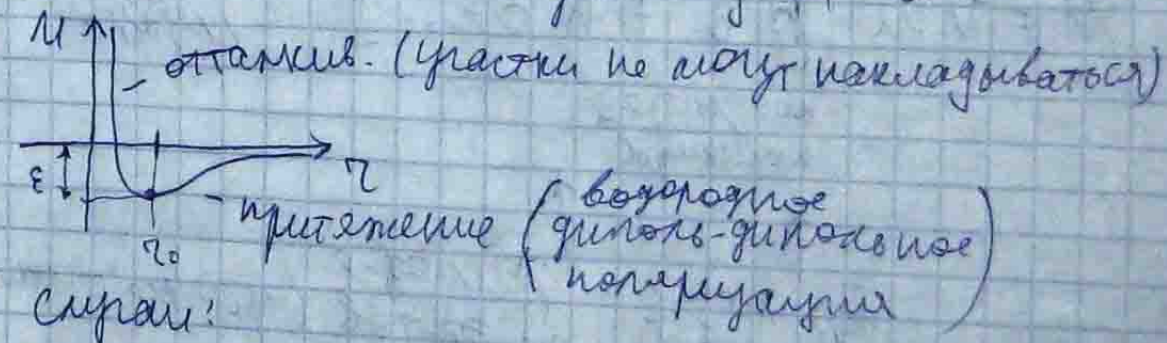
$F = U + U_{эфф} = U - TS$ - свободная энергия

Даже без совершения работы переход системы в наименее вероятное состояние требует энергии.

$\vec{f} = \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{3kT}{Nl^2} R$

$\frac{R}{R_0} \equiv \lambda$ (относ. удлинение) $\sigma(\lambda) = kT \nu^* (\lambda - \lambda^{-2})$ - для идеального полимера клубка

Учёт обобщённого вращений - U :



Сфера

Т↓: $kT \ll \epsilon$ - притяжение

Т↑: $kT \gg \epsilon$ - отталкивание (притяжение не заметно)

Т↑: $\langle R^2 \rangle \sim N$

$\langle R^2 \rangle \sim N^{3/5}$

- 3-мерн. сфера
набухает

$\alpha^2 \equiv \langle R^2 \rangle$

коэфф. набухания $\langle R_0^2 \rangle$ - идеальный размер кубика

$\langle R_0^2 \rangle = N l^2 \Rightarrow \alpha^2 \sim N^{1/5}$ - 3-мерн. сфера

$\alpha^2 \sim N^{1/2}$ - 2-мерн. сфера

Виртуальное разложение:

$$U = V kT \left[N^2 B + N^3 C + \dots \right]$$

концентрация
полимера

- вирт. энергия
кубика

↑
время-ε
2х эл-тов

↑
время-ε
3х эл-тов

(тройное столкновение)

B - второй виртуальный коэф., $B = B(T)$

$\epsilon \ll kT \quad B > 0 \rightarrow U > 0$

$\epsilon \gg kT \quad B < 0 \rightarrow U < 0$

$B(T=0) = 0$

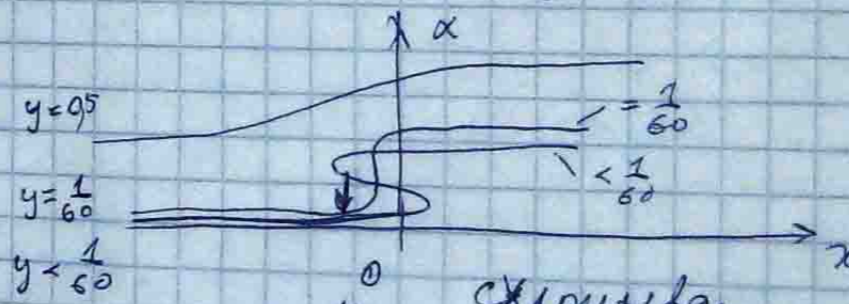
размер кубика как у идеального.

$$F(\alpha) = \underbrace{kT \left(\alpha + \alpha^{-2} \right)}_{\text{энтальпийный член}} + \underbrace{\frac{kT B N^{1/2}}{l^3 \alpha^3}}_{\text{(виртуальной) член}} + \underbrace{kT \frac{C}{l^6 \alpha^6}}_{\text{член выш. поряд.}}$$

$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^5 - \alpha = x + y \alpha^{-3}$

$\left(x = k_1 B \frac{N^{1/2}}{l^3}, y = \frac{k_2 C}{l^6} \right)$

α - относ. удлинение относительно идеального



↓
T = θ
Тра Флори

схлопывание
шарика
тройной бражкой энтальпий
противобудит выт.

① Вязкая упругость полимеров.

$t < \tau$

↑
характер. время

- время воздействия



время, за которое происходит
защип одной макромолекулы через
другую.

модель релаксации (зрентинина)