

Барсукова Мария
207 группа
2010/2011 уч. год

Оптика
Русаков Вячеслав Сергеевич
Андреев Павел Александрович

08.02.11
Лекция 1

//genphys.phys.msu.ru/rusakov

Предмет изучения - изучение,
распространение и
взаимодействие света
с веществом.

Свет - электромагнитная волна,
для которой существует
возможность сформировать
изображение

$$\lambda \quad 10^1 - 2 \cdot 10^6 \text{ нм} \quad 2 \cdot 10^6 \text{ нм} \quad 2 \text{ мкм}$$

УФ - ультрафиолетовая область

ИК - инфракрасная область

В - видимая область 380 - 760 нм

$$\lambda \sim 600 \text{ нм} \\ \nu \sim 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

Разделы оптики:

1. Геометрическая
2. Физическая
3. Физическая
 - 3.1. Волновая
 - 3.2. Квантовая
 - 3.3. Неинтерференционная
 - 3.4. Статистическая
 - 3.5. Сильная
 - 3.6. Нелинейная
 - 3.7. Кристалло- и металло-

и др.

1. Интерференция на мыльных пленках

Интерференция - изменение распределения интенсивности света в результате взаимодействия пучков

2. Дифракция на решетке

Дифракция - перераспределение интенсивности волновых пучков, вызванное отклонением от законов геометрической оптики.

3. Поляризация

Кристаллы $CaCO_3$ (ишандский шпат) - двойное лучепреломление

4. Лазер импульсного действия (линейное воздействие)

Свет переносит импульс и энергию

5. Дисперсия - показатель преломления (скорость в среде) зависит от частоты света.

Пространственное разделение пучка белого света.

Глава 1. Электромагнитная теория света

К основным ур. электродинамики относятся полевые уравнения и материальные уравнения

§1 Уравнения Максвелла и материальные уравнения

Электростатическая теорема Гаусса $\text{div } \vec{D} = \rho$ ρ - объемная плотность свободных зарядов*

Теорема Гаусса для магнитного поля $\text{div } \vec{B} = 0$

Теорема о циркуляции для эл. поля $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Максвелл 1856) \vec{E} - вектор напряженности

Теорема о циркуляции для магн. поля $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (Максвелл 1852) \vec{H} - вектор магнитного поля

* свободные заряды - заряды, способные перемещаться в веществе. Заряды, связанные с атомами, молекулами, кристаллической решеткой, не участвуют в образовании внешнего поля.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} (\text{СИ}) \right\}$$

$$\left\{ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (\text{СИ}) \right\} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \quad \vec{j} - \text{вектор намагниченности среды}$$

$\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{H}_0$ - полевые (сильные) векторы
 $\vec{P}, \vec{j}, \vec{j}_0$ - вспомогательные векторы
 \vec{M}, \vec{M}_0 - материальные векторы

Материальные векторы характеризуют оптик среды и воздействие

\vec{D}, \vec{H} - материально-полевые векторы

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D}$$

$$\text{rot } \vec{E} = [\nabla \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ } ϵ - электрическая проницаемость
 $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ } μ - магнитная проницаемость

Условия справедливости мат. ур.

1. неподвижная среда
2. линейная среда (оптик среда на воздействие описывается линейно-связанными векторами)
3. изотропная среда (изотропный оптик: $\epsilon, \epsilon_0, \mu, \mu_0$ - скалярные величины $\rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$ и $\vec{B} \parallel \vec{H}$)
4. безвихревая среда (высшей и однородной оптик)

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{r})$$

5. локальность (оптик определяется силовым воздействием в той же самой точке пространства, что и воздействие)

$\epsilon, \mu = \text{const}(\vec{r}) \rightarrow$ однородная среда

§2. Вольтовое уравнение. Принцип суперпозиции.

Рассмотрим однородную $\{ (1)-(5) \}$ и диэлектрическую $\rho=0, \vec{j}=0$ среду, а также безвихревую

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{array} \right.$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = [\nabla[\nabla \vec{E}]] = \nabla(\nabla \vec{E}) - \vec{E}(\nabla, \nabla) = \nabla(\nabla \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\{ (\nabla, \nabla) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu \text{rot } \vec{H}) = -\mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu_0 \mu} \Delta \vec{E}}$$

векторное волновое уравнение

аналогично для $\vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{I}$.

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{f}$$

$$\vec{f} = \{ \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{P}, \vec{I} \}$$

однородное линейное дифференциальное уравнение

Принцип суперпозиции.

Полевой / материальный / материально-полевой вектор волны \vec{f} равен сумме этих полевых / материальных / м-и векторов каждой волны в отдельности

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i$$

Электромагнитные волны распространяются независимо друг от друга (в условиях изотропности и однородности)

§3. Бегущие электромагнитные волны. Скорость света.

Уравнение Максвелла

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu \epsilon_2 \mu_0} = \frac{c^2}{\epsilon_1 \mu} = \frac{c^2}{n^2}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_1 \mu}$$

ф-на Максвелла

3.1. Плоские волны
Общая формула. Форма волны. Волновой фронт.
 $\frac{\partial E_x}{\partial t} = v^2 \Delta E_x$ $\alpha = \{x, y, z\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \Delta f$$

Скалярное волновое уравнение f на ось α .

Пусть $f = f(t, z)$, тогда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$f(t, z) = f(t \mp z/v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''(t, z) = f''(t \mp z/v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(\mp \frac{1}{v})^2 = \frac{1}{v^2} f''(t \mp z/v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$f(t \mp z/v)$ - решение

Волновой фронт - поверхность, состоящая из точек пространства, в которых $f(t \mp z/v) = \text{const}$ в некоторый момент времени

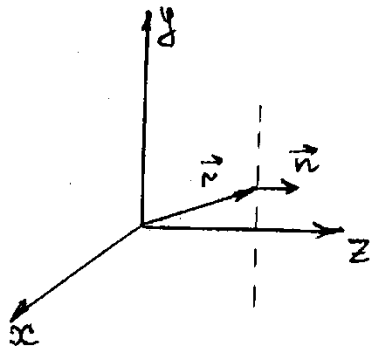
$t \mp z/v = \text{const}$ - волновой фронт плоской волны

$$dt \mp \frac{dz}{v} = 0 \rightarrow \frac{dz}{dt} = \pm v$$

v - скорость распространения волны

Форма волны - функция координаты z (в значении t)

Неуменьшение формы световой волны при ее распространении в н-ве



$\pm z = \vec{n} \cdot \vec{r}$
 (знак направления \vec{n} и номер знака \pm определяют направление \vec{n} относительно направления z)

$$f(t, x, y, z) = f(t \mp z/v)$$

↓

$$f(t, \vec{r}) = f(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v})$$

Гармоническая волна. Фазовый фронт (фронт волны). Комплексное представление

В случае плоских волн зададим граничные условия:

$$f(t, x, y, z=0) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

полная фаза

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

для видимого диапазона $T \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ c}$

$$f(t, x, y, z) = a \cos(\omega t \mp \frac{\omega}{v} z + \varphi_0)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

волновое число

$$f(t, x, y, z) = a \cos(\omega t \mp kz + \varphi_0)$$

kz - набег фазы

$\mp kz + \varphi_0 \equiv \varphi(z)$ начальная фаза в зависимости от точки наблюдения

Фазовый фронт (фронт волны) - поверхность, состоящая из точек изостранства, в которой волна (световое возмущение) имеет одинаковую фазу (т.е. поверхность одинаковой фазы)

Известно Эйлер: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $i \equiv \sqrt{-1}$

$$\cos\alpha = \text{Re}(e^{i\alpha})$$

$$f(t, \vec{r}) = a \cos(\omega t - k \cdot \vec{n} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

некоординатная запись плоской волны, распространяющейся в направлении \vec{n} .

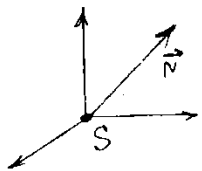
$$-k \vec{n} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = \varphi(\vec{r})$$

$$f(t, \vec{r}) = a \text{Re} \left[e^{i(\omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} \right] = \text{Re} \left[a e^{i\varphi(\vec{r})} e^{i\omega t} \right]$$

$$\hat{f}(t, \vec{r}) \equiv \underbrace{A(\vec{r})}_{= a e^{i\varphi(\vec{r})}} e^{i\omega t}$$

комплексное представление светового возмущения / для плоской волны /

3.2. Сферические волны Общее решение



$r \geq |\vec{r}|$
Волновой фронт сферической волны - сфера.

$$f(t, \vec{r}) = f(t, r) = \frac{1}{r} f(t - r/v)$$

Гармоническая волна. Комплексное представление

$$f(t, r_0) = \frac{a}{r_0} \cos(\omega t + \varphi_0 \mp k r_0)$$

$$f(t, r) = \frac{a}{r} \cos(\omega t \mp k r + \varphi_0) \quad \text{уравнение гармонической сферической волны}$$

- кр. волны, энергия $\propto 1/r^2$

$$f(t, r) = \frac{a}{r} \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t \mp k r + \varphi_0)} \right]$$

$$\hat{f}(t, r) = A(r) e^{i\omega t}, \quad A(r) = \frac{a}{r} e^{i\varphi(r)}$$

$$f(t, r) = \operatorname{Re}[\hat{f}(t, r)]$$

Сферическая волна / малые волны
Плоская волна / большие волны

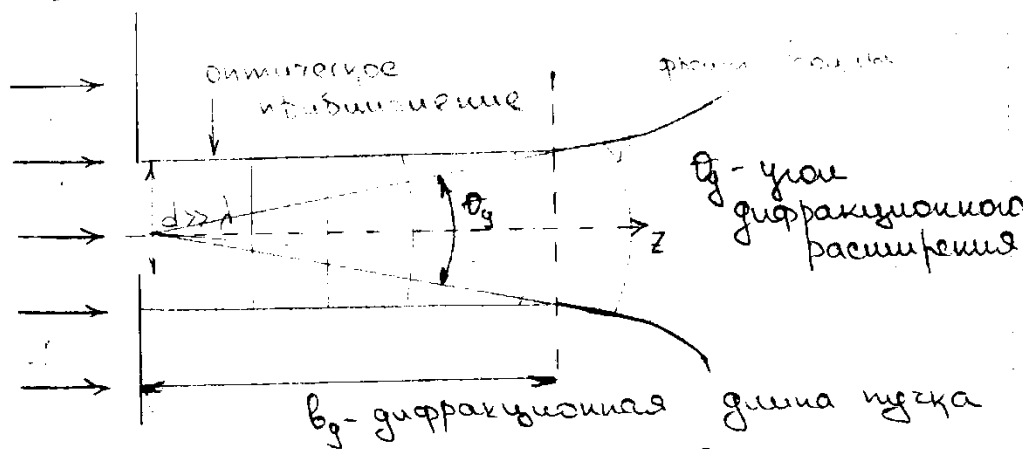
3.4. Световые лучи и пучки. Можно считать реальными волнами

Реальные волны модулированные во времени и пространстве, а также ограничены.

Световой луч - световая волна, модулированная в пространстве с масштабом модуляции $d \gg \lambda \approx 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

Световой пучок - световая волна, модулированная во времени с масштабом модуляции $\tau \gg T \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$

4.3. Квазиплоская гармоническая волна



$$\theta_g \approx \lambda/d$$

$$b_g \approx \frac{d^2}{4\lambda}$$

при $z < b_g$ поперечные р-ры пучка практически не меняются

$z \ll b_g$ ближняя зона дифракции
(зона геометрической оптики)

$z \gg b_g$ дальняя зона дифракции

Рассмотрим волну в ближней зоне

н.у. $f(t, x, y, z) = a(x, y) \cos(\omega t - \underbrace{kz}_{=0} + \varphi_0)$

↓
амплитуда
зависит от x, y

$f(t, x, y, z) = a(x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$

$z \ll b_g$

- квазиплоская волна

Рассмотрим волну в дальней зоне

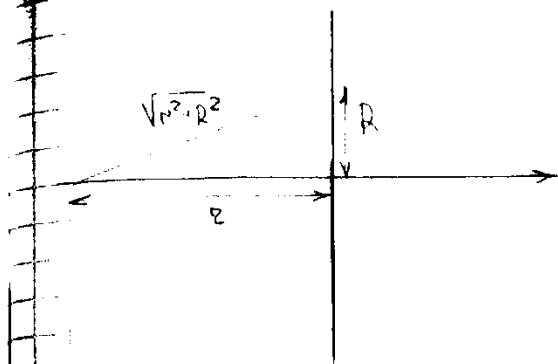
$z \gg b_g$

$R \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \ll \underbrace{D_g z}_{\text{поперечный п-р луча}} = \frac{\lambda z}{d}$

$f(t, r) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$

$f(t, r, \varphi, \vartheta) = \frac{a(\varphi, \vartheta)}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) \quad (R \approx D_g z)$

- квазисферическая волна



$\Delta r = \sqrt{z^2 + R^2} - z$

$k \Delta r \ll \pi$

$\Delta r \ll \lambda/2$

$R \ll z$

$\Delta r \approx z \sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2} - z = z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2\right) - z = \frac{1}{2} \frac{R^2}{z} \ll \frac{\lambda}{2}$

$R \ll \sqrt{\lambda z}$

сферическая волна
описывается
плоской волной

Оценка: $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

$d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

$b_g = \frac{d^2}{4\lambda} = 12,5 \text{ м}$

$r(z) = 20 \text{ см} \gg b_g$

$\frac{\lambda z}{d} = D_g z \gg R$ сферическая волна,
иначе ($R \sim D_g z$) квазисферическая

$\frac{\lambda z}{d} \approx 2 \text{ см}$

$R \ll \sqrt{\lambda z} = 1 \text{ см}$ плоская волна

4.2. Квазиармонические волны

Рассмотрим волну, ограниченную во времени.

$$f(t, x, y, z) = a(t, x, y) \cos(\omega t + \varphi_0(t))$$

$\tau \gg T$

$$z \ll b_g \quad z \geq 0$$

$$f(t, x, y, z) = a\left(t - \frac{z}{v}, x, y\right) \cos\left(\omega t - kz + \varphi_0\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

квазиплоская квазиармоническая волна

$$z \gg b_g$$

$$R \sim \sqrt{z} \quad R = \frac{1}{2} \tau \quad \text{квазисферическая квазиармоническая волна}$$

$$f(t, r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r} a\left(t - \frac{r}{v}, \varphi, \theta\right) \cos\left(\omega t - kr + \varphi_0\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)$$

$$R \ll \sqrt{z} \quad R = \frac{1}{2} \tau \quad \text{сферическая квазиармоническая волна}$$

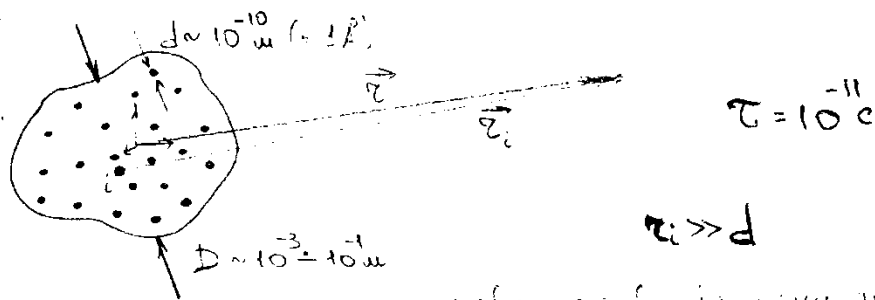
$$f(t, r) = \frac{a\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \cos\left(\omega t - kr + \varphi_0\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)$$

$$R \ll \sqrt{\lambda r} \quad \text{квазиармоническая плоская волна}$$

$$f(t, z) = a\left(t - \frac{z}{v}\right) \cos\left(\omega t - kz + \varphi_0\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

4.3. Случайно модулированные волны

Рассмотрим макроскопический источник света, состоящий из большого числа микроскопических источников света.



$$f(t, \vec{r}) = \sum_i \frac{a_i}{r_i} \cos(\omega t - k z_i + \varphi_{0i}) = \frac{1}{r} \sum_i a_i \cos(\omega t - kr + \varphi_{0i})$$

$r \gg D \gg d$

a_i и φ_{0i} — быстро меняющиеся случайные величины

$$= \frac{1}{r} \tilde{a} \cos(\omega t - kr + \tilde{\varphi}_0) \quad \text{случайно модулированная волна}$$

§5. Свойства плоских волн

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E}(t, \vec{N}) = \vec{E}\left(t - \frac{N}{v}, \vec{N}\right)$$

$$\vec{B}(t, \vec{N}) = \vec{B}\left(t - \frac{N}{v}, \vec{N}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}'$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial z} \\ E'_x & E'_y & E'_z \end{vmatrix}$$

т.к. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{E}' \left(-\frac{1}{v}\right)$

$$+\frac{1}{v} [\vec{n}, \dot{\vec{E}}] = -\dot{\vec{B}}$$

$$[\vec{n}, \dot{\vec{E}}] = v \dot{\vec{B}}$$

$$\downarrow \text{интегрирование} \\ [\vec{n}, \vec{E}] = v \vec{B}$$

аналогично:

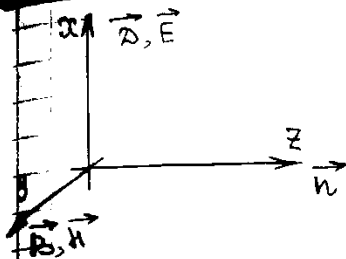
$$[\vec{n}, \dot{\vec{H}}] = -\dot{\vec{D}} v$$

5.1. Ориентация

и взаимосвязь полевых векторов

$$[\vec{n}, \vec{E}] = v \vec{B}$$

$$[\vec{n}, \vec{H}] = -v \vec{D}$$



$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$(\vec{E}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}), \vec{n})$ - правая тройка векторов.

Э/м волны поперечные

$$\left. \begin{aligned} E(t, \vec{r}) &= v B(t, \vec{r}) \\ H(t, \vec{r}) &= v D(t, \vec{r}) \end{aligned} \right\} \text{из условия векторности электромагнитного поля}$$

$$E_x(t, \vec{r}) = v B_y(t, \vec{r})$$

$$H_y(t, \vec{r}) = -v D_x(t, \vec{r})$$

Задание одно вектора определяет все остальные векторы

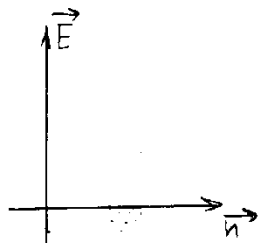
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$$

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E(t, \vec{r}) = \sqrt{\mu_0 \mu} H(t, \vec{r})$$

$$E(t, \vec{r}) = v B(t, \vec{r})$$

5.2. Плоскость поляризации

Плоскость поляризации - плоскость, образованная напряженностью э/м поля и единичным вектором, задающим направление распространения э/м волны.



(\vec{E}, \vec{n})

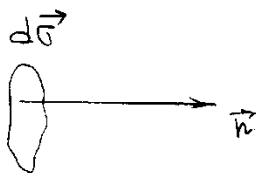
Ориентация н.п. не меняется в процессе распространения \geq /и волн у линейных (можно поляризованных) волн

Рассмотрим суперпозицию линейных волн, распространяющихся в одном направлении

Линейная
Эллиптическая
Круговая (циркулярная) } поляризации

Лазерное излучение - линейно поляризованный свет

§ 6. Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны



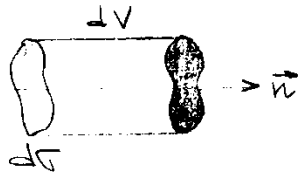
Энергия, переносимая волной за единицу времени через единицу площади (перпендикулярно направлению распространения волны) - ΔW

6.1. Вектор Умова-Тойнмена. Плотность света

$$dV = dS \cdot v \cdot dt$$

$$dW = \omega dS \cdot v \cdot dt$$

↑ плотность энергии



Плотность потока энергии S

$$S \equiv \frac{dW}{dt \cdot dS} = \omega \cdot v$$

$$\vec{S} \equiv S \cdot \vec{n} = \omega \vec{v} \quad \text{вектор Умова-Тойнмена (1874)}$$

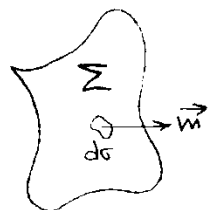
Для \geq /и волн:

$$S = \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{H}}{2} = \epsilon_0 \epsilon \frac{E^2}{2} + \mu_0 \mu \frac{H^2}{2} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 =$$

$$= \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E H = \frac{1}{v} E H$$

$$S = \omega v = E H$$

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] \quad \text{вектор Умова-Тойнмена (1884)}$$



произвольная замкнутая поверхность

dS - произвольный малый элемент н.п. \vec{n} , нормаль

$$d\vec{S} \equiv dS \vec{n}$$

н.в.!

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{S} = S \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$
(не $d\vec{S} \cdot \vec{n}$
не $\frac{dS}{dV}$)

$$[W] = \text{Дж}$$

$$[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

$$[\Phi] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$$

$$E(t, \vec{r}) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi_0)$$

$$\vec{S} = \omega \vec{v} = \epsilon \epsilon_0 E^2(t, \vec{r}) \vec{v}$$

$$S = \epsilon_0 \epsilon v E^2(t, \vec{r})$$

$$S = S(t, \vec{r})$$

N.B.
→

$$\tau_p \rightarrow \begin{cases} 0, 1 \text{ с} & \text{время} \\ 10^{-2} - 10^{-4} \text{ с} & \text{разрешения (регистрация)} \\ 10^{-10} \text{ с} \text{ (} 10^{-12} - 10^{-14} \text{) с} & \text{периода} \end{cases}$$

$$\tau_p \gg T$$

$$I \equiv \langle S \rangle_{\tau_p} \quad \text{плотность потока (среднее значение) по времени разрешения - интенсивность.}$$

$$I = \epsilon_0 \epsilon v \langle E^2(t, \vec{r}) \rangle = \frac{\epsilon_0 \epsilon v}{2} E_0^2$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 \epsilon v}}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \ll 1 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon v \approx \text{Const} \rightarrow$$

$$I = E_0^2 \cdot \text{Const}, \quad \text{Const} = \frac{\epsilon_0 \epsilon v}{2}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon v}{2}} \approx \frac{1}{377} \text{ [СИ]}$$

$$E_0 \approx \sqrt{3754 \cdot I}$$

$$\epsilon, \mu \approx 1$$

6.2. Энергетика световых пучков и световых импульсов.

Рассмотрим описание квазимонохроматических волн (для пучков)

$$E(t, \vec{r}) = E_0(x, y) \cos(\omega t - k z + \varphi_0)$$

Рассмотрим описание квазимонохроматических, квазипериодических волн (для импульсов)

$$E(t, \vec{r}) = E_0\left(t - \frac{z}{v}, x, y\right) \cos\left(\omega t - k z + \varphi_0\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

пучок

$$I = \epsilon_0 \epsilon v \langle E^2(t, \vec{r}) \rangle = \frac{\epsilon_0 \epsilon v}{2} E_0^2(x, y)$$

импульс

$$I = \frac{\epsilon_0 \epsilon v}{2} E_0^2\left(t - \frac{z}{v}, x, y\right)$$

$$\tau \gg \tau_p \gg T$$

X-ки пучка \bar{P} мощность, S площадь поперечного с.

$$\bar{P} = \iint_{-S}^S I dx dy = I_{\text{эфф}} \cdot S$$

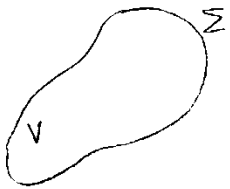
$$I_{\text{эфф}} = \frac{\bar{P}}{S}$$

X-ки импульса W, S, τ время существования

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{-S}^S I dx dy dt = I_{\text{эфф}} \cdot S \cdot \tau$$

$$I_{\text{эфф}} = \frac{W}{S \tau}; \quad \bar{P} = \frac{W}{\tau}$$

6.3. Закон изменения энергии электромагнитного поля.



проводящая среда ($j \neq 0$)
 j - токи проводимости (амперы)

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\frac{\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}}{\text{div} [\vec{E} \vec{H}]} = - \vec{H} \frac{\partial B}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial D}{\partial t} - \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{j}}_{-q}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = q + \text{div } \vec{S}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$\iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} d\sigma$ - энергия волны, покидающей объем V через поверхность Σ .

∂ -н изменение энергии э/м поля

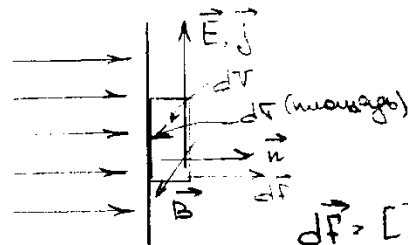
§7. Давление и плотность импульса электромагнитной волны.

1873 год Рухе : радиометрические силы.

1899 год Лебедев : доказательство давления света на твердые тела

1907 год Лебедев : док-во давления света на газы (док-во корпускулярной природы света)

Рассмотрим плоскую э/м волну:



$$\vec{j} \cdot \lambda \vec{E}$$

$$\vec{j} dV$$

$$d\vec{F} = [\vec{j} \vec{B}] dV = \vec{j} B \vec{n} dV = \left\{ \begin{array}{l} \text{э/м поле} \\ \text{применяется} \\ \text{для волны} \end{array} \right. = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{v} dV \vec{n} = \frac{\partial Q}{\partial t} \vec{n}$$

$d\vec{F}$ - сила, действующая в соосъемлющем объеме dV

$$d\vec{F} = S d\sigma \frac{\vec{n}}{v}$$

S - плотность потока энергии

Сила на элемент n -ны единицы площади:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{F}}{d\sigma} = \frac{S}{v} \vec{n} = \frac{\vec{S}}{v} = \frac{\omega \vec{n} v}{v} = \omega \vec{n}$$

Давление

$$\tau_p \gg \tau$$

$$\langle \vec{P} \rangle = \langle \frac{S}{v} \vec{n} \rangle = \frac{\langle I \rangle}{v} \vec{n} = \langle \omega \rangle \vec{n}$$

Изменение импульса волны равно
импульсу силы, с которой
волна действует на среду

$$d\vec{G} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot dt = \frac{d\vec{P}}{v} \vec{n} dt$$

импульс силы

$$dG \cdot v dt = dV$$

$$\frac{d\vec{G}}{dV} \equiv \vec{g} = \frac{1}{\int v dV} \int \frac{d\vec{P}}{v} \vec{n} dV = \frac{\int \vec{P}}{v^2 \vec{n}} = \frac{\omega}{v^2} \vec{n}$$

импульс волны (объемная плотность)

$$\langle \vec{g} \rangle = \frac{\langle \omega \rangle}{v} \vec{n} = \frac{I}{v^2} \vec{n}$$

Фотон - квант света (квант э/м волны)

$$E_\gamma = h\nu, \quad h = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$

фотон - пространственная в объеме и
в пространстве э/м волна
 τ - продолжительность по времени
 σ - поперечное сечение

$\frac{E_\gamma}{\tau \sigma v}$ - средняя энергия в
единице объема

$$g_\gamma = \frac{E_\gamma}{v} \vec{n} = \frac{h\nu}{v} \vec{n} = h\vec{k} \text{ - импульс фотона}$$

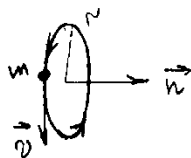
$$k = \frac{\omega}{v} \text{ волновое число}$$

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} \text{ волновой вектор}$$

§8. Давление световой волны
на поверхность тела. см. с. 111

§9. Момент импульса световой
волны.

Рассмотрим мат. точку, движ. по окр-ти r



$$\vec{L}_m = [\vec{r} \vec{p}] = m v r \vec{n} = \frac{m v^2}{\omega} \vec{n}$$

$$m v^2 \sim E$$

момент импульса

для единицы объема: $\vec{l} = \frac{\omega}{\omega} \vec{n} =$

момент импульса
на единицу объема
поперечного сечения
(только для э/м волн)

$$= \frac{S}{\omega v} \vec{n} = \frac{\vec{S}}{\omega v}$$

$$\langle \vec{l} \rangle = \frac{I}{\omega v} \vec{n} = \frac{I \vec{n}}{\omega v} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{I}{\omega^2} \vec{k}$$

для лево-
(циркулярно)
поляризованной
световой
волны (см. с. 111)

\vec{l} - момент импульса световой
волны (объемная плотность)

момент
импульса
фотона

$$\vec{l}_\gamma = \frac{E_\gamma}{\omega} \vec{n} = h \vec{n}$$

собственный момент
количества движения
(спин фотона) ($= \pm h$)

знак: "+" - левополяризованная волна, "-" - правополяризованная волна.

$$\vec{l} = \pm \frac{\omega}{v} \vec{n} = \pm \frac{S}{\omega v} \vec{n}$$

спин кривой
поляризации

Для линейно поляризованной волны момент импульса равен нулю (можно представить как суперпозицию двух волн с одинаковой амплитудой левополяризованной и правополяр.)

Для эллиптической поляризации волны рассматривается "часть" энергии, соответствующая только круговой поляризации. (Суперпозиция двух волн с круговой поляризацией одинаковой амплитудой и линейно поляризованной волны с другой амплитудой)

$$\vec{l}_c = \pm \frac{\omega_0}{\omega} \vec{n}$$

Оценка напряженности электрического поля, интенсивности и давления световых волн.

Световая волна:

$$I = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$$

$$E_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \epsilon}} I_{\text{эфф}} = 10^3 \text{ В/м}$$

$$\langle p_n \rangle = \frac{I}{c} (1+R) \cos^2 \theta = 10^{-5} \text{ Па}$$

Глава 2. Метод спектрального описания волновых пакетов

§1. Суть и основы метода.

Любое световое поле можно представить в виде суперпозиции элементарных волн, в частности плоских гармонических волн (принцип суперпозиции + преобр. Фурье)

§2. Преобразование Фурье

2.1. Интеграл и коэффициенты Фурье
Впервые Фурье применил интегральные преобразования для задач теплопроводности.

Для абсолютно интегрируемой функции на всем интервале:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) d\omega$$

$$a = a(\omega), b = b(\omega)$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$a(\omega) = a(-\omega) \text{ четная}$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$b(\omega) = -b(-\omega) \text{ нечетная}$$

$$a(\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$b(\omega=0) = 0$$

2.2. Спектральная амплитуда, фаза и неопределенность, комплексная спектральная амплитуда и их свойства.

$$f(\omega) \equiv \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad \text{спектральная амплитуда}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) (\cos \varphi(\omega) \cos \omega t + \sin \varphi(\omega) \sin \omega t) d\omega$$

$\varphi(\omega)$ спектральная фаза

$$\varphi(\omega): \begin{cases} \cos \varphi(\omega) = \frac{a(\omega)}{f(\omega)} \\ \sin \varphi(\omega) = \frac{b(\omega)}{f(\omega)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-\omega) = f(\omega) \geq 0 \\ -\varphi(-\omega) = \varphi(\omega) \end{cases}$$

$$f(\omega=0) = |a(\omega)|$$

$$\varphi(\omega=0) = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ \pi, & a < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

$$f(i\omega) \equiv a(\omega) - ib(\omega) \quad \text{комплексная спектральная амплитуда}$$

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega t - i \sin \omega t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{прямо-образ } f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega + \underbrace{\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t - i\varphi(\omega)} d\omega$$

$$f(i\omega) = a(\omega) - ib(\omega) = f(\omega) (\cos \varphi(\omega) - i \sin \varphi(\omega)) = f(\omega) e^{-i\varphi(\omega)}$$

мощь:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Свойства

$$f^*(i\omega) = (a(\omega) - ib(\omega))^* = a(\omega) + ib(\omega) = a(-\omega) - ib(-\omega) = f(-i\omega)$$

$$1. f(t) = f(-t): \quad b(\omega) = 0, \\ f(\omega) = |a(\omega)|, \quad f(i\omega) = a(\omega), \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & a(\omega) > 0 \\ \pi, & a(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$2. f(t) = -f(-t): \quad a(\omega) = 0, \\ f(\omega) = |b(\omega)|, \quad f(i\omega) = -ib(\omega), \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2, & b(\omega) > 0 \\ -\pi/2, & b(\omega) < 0 \end{cases}$$

спектральная неопределенность $|f(i\omega)|^2 = f^2(\omega)$ рассмотреть спектр

11
5 §3. Свойства преобразования Фурье.

3.1. Суперпозиция функций

$$f(t) = \sum_j \alpha_j f_j(t)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_j \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega)$$

3.2. Сдвиги во времени

$$f(t) = f(t \pm t_0)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau \mp t_0)} d\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega)$$

m.e. $F(\omega) = |F(i\omega)| = f(\omega)$

$$|F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0$$

3.3. Изменение масштаба времени

$$f(t) = f(\alpha t)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\frac{\omega}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} f(i\frac{\omega}{\alpha})$$

$$F(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} f(\frac{\omega}{\alpha})$$

спектральная амплитуда

$$|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} |f(i\frac{\omega}{\alpha})|^2$$

спектральная мощность

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega) + \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \pi, & \alpha < 0 \end{cases}$$

3.4. Соотношение между шириной спектра и шириной функции

$\Delta t, \Delta \omega$
↑ ширина спектра
↑ ширина функции

$$\Delta \omega \approx \frac{1}{\Delta t}$$

чем шире функция, тем уже спектр, и наоборот. for ex. n.3.3. соотношение выводится.

интегральное определение ширины спектра

$$\Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(t=0)}$$

$$\Delta \omega = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) d\omega}{a(\omega=0)}$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt} = 2\pi$$

из Фурье-преобразования

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

3.5. Сдвиг спектра по частоте

$$F(t) = f(t) \cos \omega_0 t$$

$$\downarrow \tau \gg T_0 \quad \downarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

квазиармоническая функция

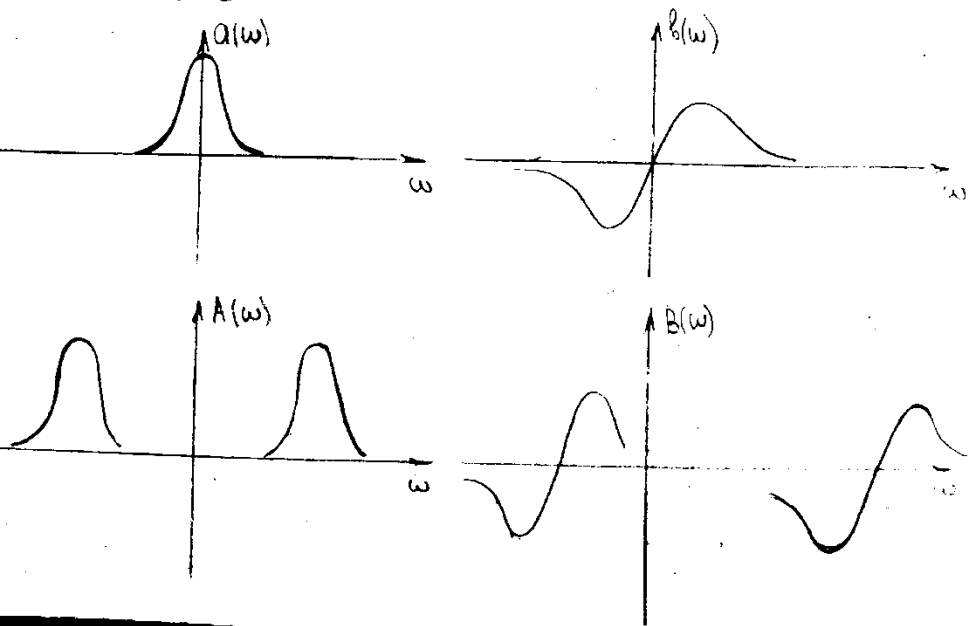
$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(i(\omega - \omega_0)) + f(i(\omega + \omega_0)) \right]$$

ω_0 -несущая частота (частота гармонических колебаний)

$$\omega \geq 0$$



$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\tau} \ll \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 \quad \text{где } \omega_0 \text{ квазиармонической функции}$$

$$F(i\omega) = \frac{1}{2} f(i(\omega - \omega_0))$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} f(\omega - \omega_0)$$

$$|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{4} |f(i(\omega - \omega_0))|^2$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega - \omega_0)$$

3.6. Теорема Планшереля (1910)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

доказ-во

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)^* dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(i\omega) e^{-i\omega t} dt d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega, \quad \text{что} \end{aligned}$$

§4. Примеры преобразования Фурье

см. сайт

4.1. Гармоническое колебание

4.2. Треугольный импульс и чирп-волна

4.3. Экспоненциальный импульс (ф-я Лоренца) и слабо затухающая волна

§5. Спектральная плотность интенсивности.

н. Диаметр зерн. на расстоянии $\gg \lambda$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega$$

5.1. Световой импульс

$\tau, E(t) \in [0, \tau]$

Длина импульса

$$\int_0^{\tau} E^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega$$

$$I = \frac{\epsilon_0 \epsilon V}{3\pi r} \langle E^2(t) \rangle \rightarrow \langle E^2(t) \rangle$$

$\tau \ll \tau_p$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} E^2(t) dt = \frac{1}{\pi \tau} \int_0^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi \tau} d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

$S(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi \tau}$

спектральная плотность интенсивности

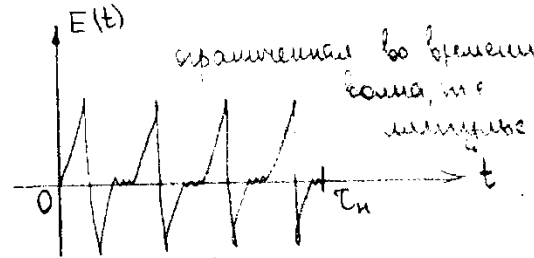
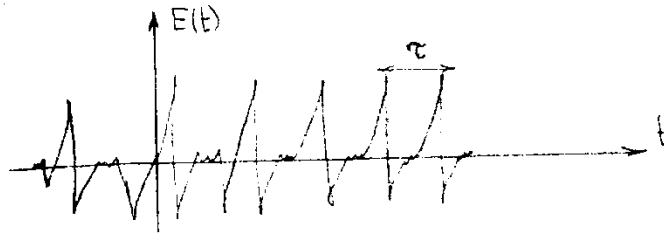
$$dI = S(\omega) d\omega$$

5.2. Непрерывное стационарное излучение.

$T \ll \tau_p \ll \tau_H$

$\tau_p \gg \tau$

$$\tau = 10^{-8} - 10^{-10}$$



$$E_H(t) = \begin{cases} E(t), & t \in [0, \tau_H] \\ 0, & t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$$

$$S_H = \frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi \tau}$$

$$\int_0^{\tau_H} E^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E_H(i\omega)|^2 d\omega$$

Энергия, излучаемая в течение τ_H
 $\rightarrow \sim \tau_H$

при $\tau_H \rightarrow \infty$ $\int_0^{\tau_H} E^2(t) dt \rightarrow \infty$
 N.B! стационарная форма

$$\lim_{\tau_H \rightarrow \infty} \frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi \tau_H} = S(\omega)$$

с-ка без объема

$I = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$

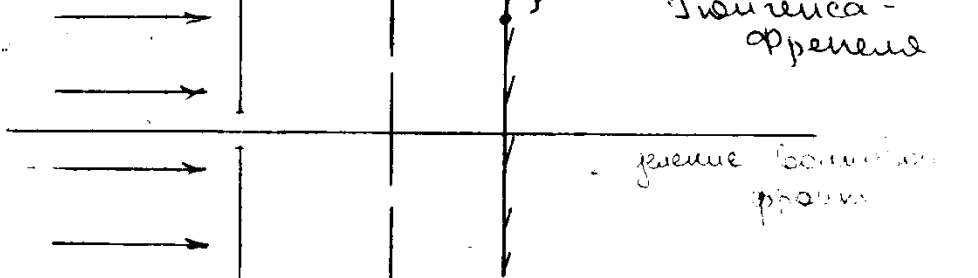
5.3. Совокупность разбросанных по времени световых импульсов или пятен

Глава 3. Интерференция света

§1. Интерференция и когерентность.
 Интерференция - явление пространственного перераспределения интенсивностей в результате взаимодействия (наложения) волн.

Когерентные волны - волны, способные к интерференции.

§1.1. Схема интерферометра Юнга. Принцип Гюйгенса - Френеля

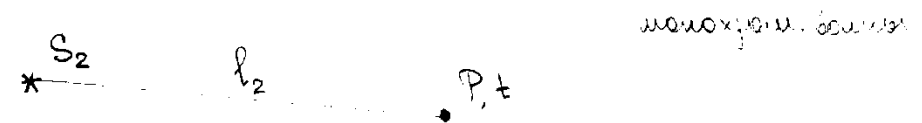


678. Гюйгенс: любая точка фронта волны является источником (вторичным) сферических волн, накладывая эти волн дает изображение фронта волны в следующий момент.

1816. Френель: вторичные волны когерентны, т.е. дают интерференционную картину (на экране) при наложении.
 Волновое поле есть результат интерференции вторичных волн.

Интерферометр Льюиса. Принцип Гюйгенса - Френеля

§1.2. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции



$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t)$$

$$I(t) = \langle \vec{E}^2(t) \rangle = \langle E_1^2(t) + E_2^2(t) + 2\vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \rangle = I_1(t) + I_2(t) + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

1) $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ (соответственно ортогональные плоскости поляризации)

$\rightarrow I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ нет интерференции

2) $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ / * интерференционный член *
 - есть интерференция (двухволновая интерференция)

Юнг: когерентность э/и волн (1817, экв.)

Основное уравнение двухволновой интерференции

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2\langle E_1(t) E_2(t) \rangle$$

§2. Интерференция монохроматических волн

2.1. Уравнение интерференции и ее порядок.

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2} \cos(\omega t + \varphi_{0,1,2} - k r_{1,2})$$

$k = \frac{\omega}{v}$; $\varphi_{0,1,2} = k r_{0,1,2}$

$$2\langle E_1(t) E_2(t) \rangle = 2a_1 a_2 \langle \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \rangle =$$

$$= a_1 a_2 \langle \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos \Delta\varphi \rangle$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -k(l_2 - l_1) + \underbrace{\varphi_{02} - \varphi_{01}}_{\Delta\varphi_0}$$

$$\Delta l = l_1 - l_2$$

$$\Delta\varphi = k\Delta l + \Delta\varphi_0$$

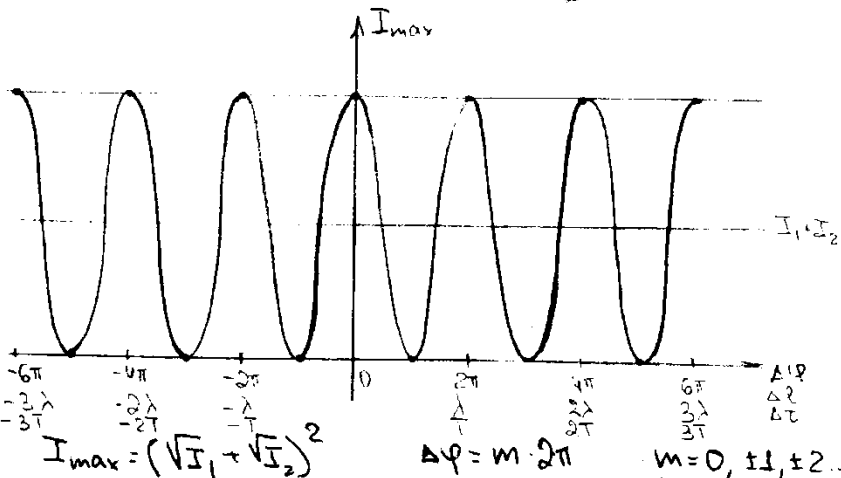
$$\langle \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle = 0$$

$$I_{1,2} = \langle E_{1,2}^2(t) \rangle = \frac{a_{1,2}^2}{2}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

$\tau_p \gg T$ статистическая картина

2.2. Интерференционная картина и функция видности.



$$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
↑ порядок интерференции

$$2m\pi \cdot \Delta l_{max} = k \Delta l_{max} = \omega \Delta t_{max}$$

$$\Delta l_{max} = m\lambda; \quad \tau_{max} = mT$$

Δt - время задержки

1911 Майкельсон: видность интерференционной картины

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$V(P) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

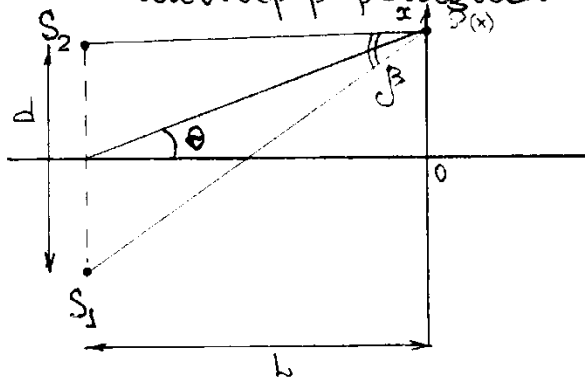
$$V \neq V(m, \Delta\varphi, \Delta l, \Delta\tau)$$

↓ с суммированием точек к точке P

$$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

2.3. Линейная и угловая видность интерференционных полос.



$L \gg d, x$

β - угол сходимости интерферирующих волн

$$\beta = \frac{d}{L}$$

$$\begin{cases} l_2^2 = L^2 + (x - \frac{d}{2})^2 \\ l_1^2 = L^2 + (x + \frac{d}{2})^2 \end{cases}$$

$$2\Delta l \cdot L \approx l_1^2 - l_2^2 = 2xd$$

$$\Delta l = x \frac{d}{L} = x\beta$$

$$\frac{\Delta x_{\max}}{h} = \Delta v_{\max} = m \lambda$$

линейная функция
интерференционной
полосы

$$\Delta x = \frac{\lambda}{d} h$$

оценка

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$d = 0,2 \text{ мм} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$h = 6 \text{ м}$$

$$\Delta x = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 6 = 18 \text{ мм}$$

$$\Delta \theta \approx \frac{\Delta x}{h}$$

угловая функция
интерференционной
полосы

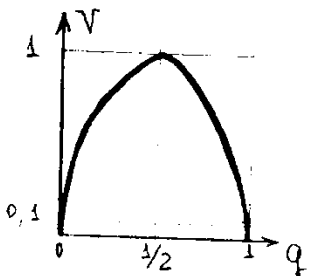
$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{d}$$

best scriptum (2.2)

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = 2\sqrt{q(1-q)}$$

$$q = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

относительная доля
интерференционных волн



$$q \approx \frac{1}{2} \pm \frac{\delta}{2}$$

наблюдение интерференции

§3. Интерференция квазиоднохроматического света.

3.3. Уравнение интерференции и условие интерференции.

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}(t) \cos(\omega_0 t - k_0 l_{1,2} + \varphi_{0,1,2}(t))$$

$$\tau \gg T_0$$

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2 \langle a_1(t) a_2(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)) \rangle =$$

$$= I_1(t) + I_2(t) +$$

$$+ \langle a_1(t) a_2(t) [\cos(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + \cos(\Delta\varphi(t))] \rangle =$$

$$= I_1(t) + I_2(t) + \langle a_1(t) a_2(t) \cos(\Delta\varphi(t)) \rangle$$

общая форма уравнения интерференции для случая квазиоднохроматических волн.

$$\tau \gg T_0 \rightarrow \text{невозм.}$$

время измерения

1. $\tau_p \ll \tau$

$$\tau \approx 10^{-8} - 10^{-10} \text{ с}; \tau_p \approx 10^{-10} - 10^{-12} \text{ с}$$

→ динамическая интерференционная картина

2. $\tau_p \gg \tau$

$$\max(\delta(\Delta\varphi(t))) = \max(\delta(\Delta\varphi_0(t))) < \tau$$

ограниченное изменение разности фаз - условие наблюдения интерференции

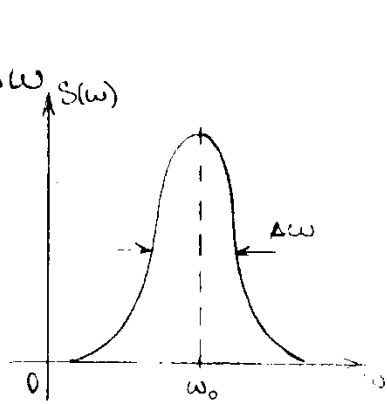
3.2. Спектральное описание и уравнение в частоте и интегральное представление.

$$I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

$$dI_0 = S(\omega) d\omega$$

$$dI_{1,2} = \alpha_{1,2} S(\omega) d\omega$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{I_0}$$



$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 \cdot dI_2} \cos \Delta\varphi$$

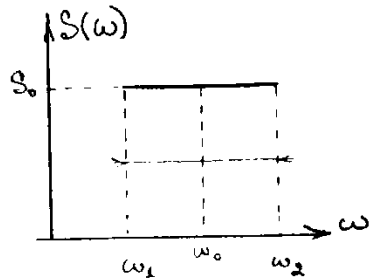
$\Delta\varphi = k\Delta l = \omega\Delta\tau$

$$dI = dI_1 + dI_2 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} S(\omega) \cos(\omega\Delta\tau) d\omega$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{I_0} \int S(\omega) \cos(\omega\Delta\tau) d\omega$$

уравнение двухволновой интерференции квазиодноцветного света в частотном представлении.

3.3. Функция выности, время и ширина полосок интерференции.



$$I_0 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = S_0 \Delta\omega$$

$$S_0 = \frac{I_0}{\Delta\omega}$$

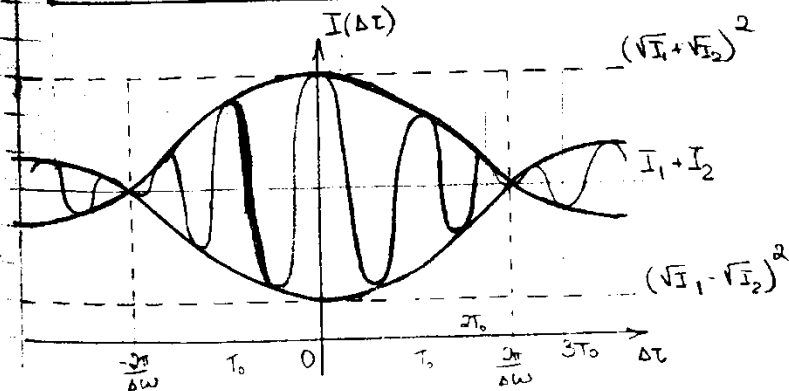
ω_0 - результирующая частота

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{I_0}{\Delta\omega} \cos(\omega\Delta\tau) d\omega = I_0 \frac{\sin(\omega_2 \Delta\tau) - \sin(\omega_1 \Delta\tau)}{\Delta\omega \Delta\tau}$$

$$= I_0 \frac{\cos(\omega_0 \Delta\tau) \sin\left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}}$$

$$= I_0 \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}\right) \cos(\omega_0 \Delta\tau)$$

$$I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}\right) \cos(\omega_0 \Delta\tau)$$

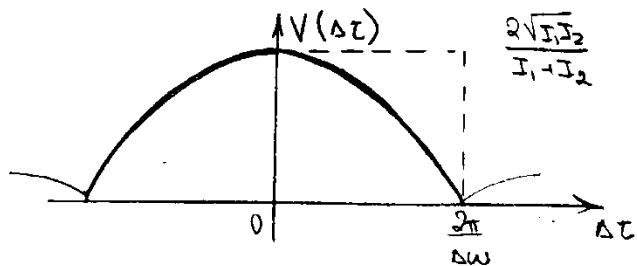


$$\frac{\Delta\tau \Delta\omega}{2} = \pi$$

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \gg \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

Функция видности

$$V(\Delta\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2} \right) \right|$$



Максимальное время задержки, при котором еще наблюдается интерференционная картина - время когерентности

$$\tau_k \equiv \max(\Delta\tau) \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx \tau$$

аналогично

$$l_k \equiv \max(\Delta l) = v \max(\Delta\tau) = v \cdot \tau_k \approx \tau v = l_{\text{конт}}$$

длина когерентности

$\Delta l = v \cdot \Delta\tau$ разность хода

длина контура

$$m_{\max} \equiv \frac{\tau_k v}{T_0 v} \approx \frac{l_{\text{конт}}}{\lambda_0}$$

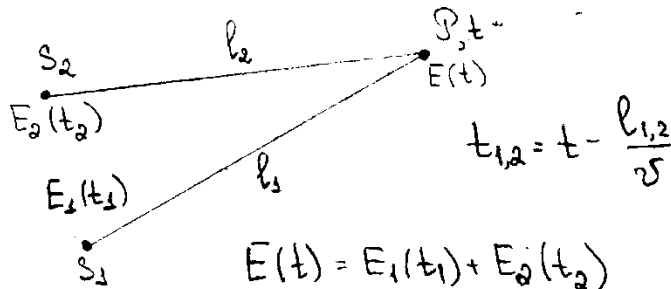
максимальный порядок интерференции (max число максимумов)

$$\tau_k = m_{\max} T_0$$

$$l_k = m_{\max} \lambda_0$$

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

3.4. Временное описание и уравнение интерференции. Функция корреляции и ее свойства.



$$\Delta\tau = t_2 - t_1 = \frac{l_1 - l_2}{v} = \frac{\Delta l}{v}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta\tau$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\langle E_1(t_1) E_2(t_2) \rangle}_{\text{функция (взаимной) пространственно-временной корреляции двух колебаний в точках 1 и 2 в моменты времени t_1 и t_2}}$$

функция (взаимной) пространственно-временной корреляции двух колебаний в точках 1 и 2 в моменты времени t_1 и t_2

$$B_{12}(t_1, t_2) = \langle E_1(t_1) E_2(t_2) \rangle$$

1) стационарный случай:

$$I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\langle E_1(t) E_2(t + \Delta\tau) \rangle}_{B_{12}(\Delta\tau)}$$

$B_{12}(\Delta\tau)$ - ф-я взаимной корреляции двух колебаний, отстоящих друг от друга на $\Delta\tau$ в стационарном случае

2) колебания порождают сигнал точкой пространства

$$E_{1,2}(t) = \sqrt{I_{1,2}} E_0(t)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{I_0}$$

$$I_1 + I_2 + 2 \langle E_0(t) E_0(t + \Delta\tau) \rangle = \frac{V I_1 I_2}{I_0}$$

B - ф-я временной (авто-) корреляции колебаний в одной и той же точке пр-ва, отстоящих друг от друга на время задержки $\Delta\tau$

$$I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{B(\Delta\tau)}{I_0}$$

Свойства $B(\Delta\tau)$

1. $B(\Delta\tau=0) = I_0$

2. $B(-\Delta\tau) = B(\Delta\tau)$ четная

$$B(-\Delta\tau) = \langle E_0(t) E_0(t - \Delta\tau) \rangle = \langle E_0(t + \Delta\tau) E_0(t) \rangle = B(\Delta\tau)$$

3. $B(\Delta\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

4. $B(\Delta\tau) = I_0 \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right) \cos(\omega_0\Delta\tau)$

- 4.1. осциллирующая (нему T_0)
- 4.2. убывающая (нему T_k)

3.5. Функция временной корреляции совокупности случайно разбросанных во времени гашаковых световых импульсов

см. с. 111

3.6. Теорема Винера - Хинчина

$$B(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\Delta\tau) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \cos(\omega\Delta\tau) d(\Delta\tau)$$

м. Винера - Хинчина

б) связь между $B(\Delta\tau)$:

$$B(\Delta\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\Delta\tau) d\omega \quad (1)$$

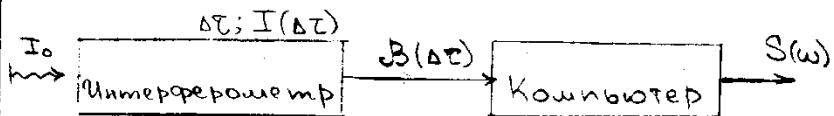
$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \exp(i\omega\Delta\tau) d(\Delta\tau) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \exp(i\omega\Delta\tau) d(\Delta\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta\tau) \cos(\omega\Delta\tau) d(\Delta\tau) + i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta\tau) \sin(\omega\Delta\tau) d(\Delta\tau) = 0$$

3.7. Поле в Фурье спектрокопии.
Разрешающая способность Фурье-спекрометра.

$$B(\Delta\tau) = \frac{I(\Delta\tau) - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} I_0$$

↑ можем быть отнесены к корреляционной функции



$$\Delta\tau > \Delta\tau_{max}$$

$$B(\Delta\tau) = 0$$

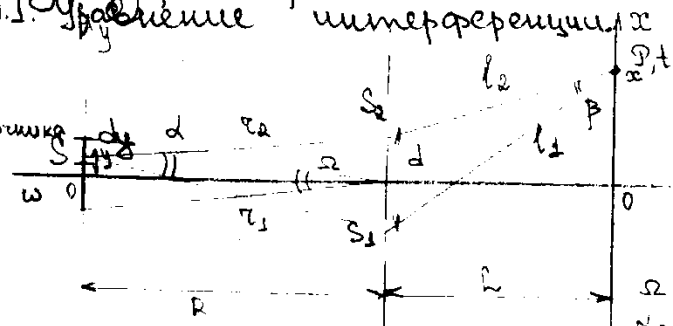
$$\tau_k = \max(\Delta\tau), \quad \Delta\tau > \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\tau_{max} > \frac{2\pi}{\Delta\omega_{min}}$$

Разрешающая способность

$$R \stackrel{def}{=} \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{\omega_0 \cdot \Delta\tau_{max}}{2\pi} = \frac{\Delta\tau_{max}}{T_0} = \frac{\Delta l_{max}}{\lambda_0} \approx \frac{1 \mu}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6$$

§4. Пространственная когерентность.
4.1. Условие интерференции



$$R \gg d, s$$

$$h \gg x, d$$

$$\Delta\varphi = k(\Delta z + \Delta l) =$$

$$= k(\alpha y + \beta x)$$

α - угловая апертура
β - угол интерференции

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2} \cos(\underbrace{k\alpha y + k\beta x}_{\Delta\varphi})$$

s-p-при установка

$$dI_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{s} dy$$

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{s} \cos(k\alpha y + k\beta x) dy$$

$$I = \int_S dI = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \left[\frac{\sin(\frac{k\alpha S}{2} + k\beta x)}{k\alpha S} - \frac{\sin(-\frac{k\alpha S}{2} + k\beta x)}{k\alpha S} \right] =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{\sin \frac{k\alpha S}{2}}{\frac{k\alpha S}{2}} \cos(k\beta x) =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Sinc}\left(\frac{k\alpha S}{2}\right) \cos(k\beta x)$$

$$\beta x = \Delta l$$

$$k\Delta l = \frac{\omega}{v} \Delta l = \omega \Delta\tau$$

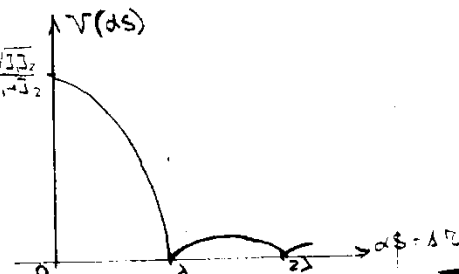
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Sinc}\left(\frac{k\alpha S}{2}\right) \cos(\omega \Delta\tau)$$

4.2. Рунгуна бугнаси, уру и рагуру когерентности.

$$V(\alpha S) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \text{Sinc}\left(\frac{k\alpha S}{2}\right) \right|$$

$$\frac{k\alpha S}{2} = \pi \quad \alpha S = 1$$

$$(V=0)$$



Условие интерференции (наблюдения интерференционной картины)

$$\frac{k\alpha S}{\alpha} < \pi$$

$$\frac{\alpha S}{\lambda} = \frac{dS}{R\lambda} < 1$$

$$\boxed{\frac{S \cdot d}{R\lambda} < 1}$$

(1) Максимальное расстояние между вторичными источниками, при котором еще наблюдается интерференция - радиус (ширина) когерентности.

$$d < \frac{R\lambda}{S} = \frac{\lambda}{\alpha} \equiv d_k$$

(2) Максимальный угловой размер источника, при котором еще наблюдается интерференция - углы когерентности

$$\Omega < \frac{\lambda}{S} \equiv \Omega_k$$

(3) Максимальный линейный поперечный размер источника, при котором еще наблюдается интерференция

$$S < \frac{R\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\alpha} = S_{\max}$$

(4) $\alpha < \frac{\lambda}{S} \equiv \alpha_{\max}$ максимальный угол интерференции

Оценка.

$$R = 2 \text{ м}$$

$$d = 0,2 \text{ мм} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$S_{\max} = \frac{R\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм}$$

4.3. Звездный интерферометр Майкельсона

1868 Пузо

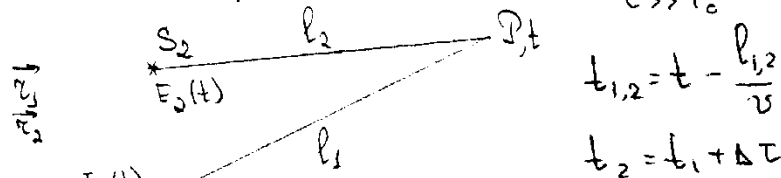
(Герм.)

1920 Майкельсон

(Франция)

(см. сайт)

4.4. Комплексные функции корреляции и степень когерентности.



$$t_{1,2} = t - \frac{l_{1,2}}{v}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

Будем рассматривать квазимонохроматические волны:

$$E_{1,2}(t_{1,2}) = a_{1,2}(t_1, t_2) \cos(\omega_0 t_{1,2} + \varphi_{0,1,2}(t_1, t_2))$$

см 3.4.3

τ - характерная длительность

$$\hat{E}_{1,2}(t_{1,2}) = a_{1,2}(t_1, t_2) \exp[i\varphi_{0,1,2}(t_1, t_2)] \exp[i\omega_0 t_{1,2}]$$

$$I = \langle E^2(t) \rangle^{\text{Re}(\hat{E})}$$

$$\hat{E}(t) = \hat{E}_1(t_1) + \hat{E}_2(t_2)$$

$$\langle \hat{E}^2(t) \rangle = \langle \hat{E}^{\dagger}(t) \hat{E}(t) \rangle = 0$$

$$I = \left\langle \left(\frac{\hat{E}(t) + \hat{E}^{\dagger}(t)}{2} \right)^2 \right\rangle = \langle 2\hat{E}(t)\hat{E}^{\dagger}(t) \rangle \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \langle \hat{E}(t)\hat{E}^{\dagger}(t) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle (\hat{E}_1(t_1) + \hat{E}_2(t_2)) (\hat{E}_1^*(t_1) + \hat{E}_2^*(t_2)) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \hat{E}_1(t_1) \hat{E}_1^*(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{E}_2(t_2) \hat{E}_2^*(t_2) \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle \hat{E}_1(t_1) \hat{E}_2^*(t_2) + \hat{E}_2^*(t_1) \hat{E}_1(t_2) \rangle =$$

$$= I_1 + I_2 + \text{Re} \langle \hat{E}_1(t_1) \hat{E}_2^*(t_2) \rangle$$

$\hat{\Gamma}_{12}(t_1, t_2)$ комплексная ф.-я пространственно-временной корреляции

Стационарный случай (стационарное излучение)

$$I = I_1 + I_2 + \text{Re} \langle \hat{E}_1(t) \hat{E}_2^*(t + \Delta\tau) \rangle$$

$$\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \langle a_1(t) a_2(t + \Delta\tau) \exp[-i\Delta\varphi_{0,2}(t, \Delta\tau)] \rangle \exp(-i\omega_0\Delta\tau)$$

- комплексная ф.-я пространственно-временной корреляции.

Комплексная степень пространственно-временной когерентности

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) \equiv \frac{\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) e^{(-i\omega_0\Delta\tau + i\psi_{12}\Delta\tau)} e$$

степень пространственно-временной когерентности

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) \cos(\omega_0\Delta\tau - \psi_{12}(\Delta\tau))$$

$$B_{12}(\Delta\tau) \equiv \langle E_1(t) E_2(t + \Delta\tau) \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + 2B_{12}(\Delta\tau)$$

$$B_{12}(\Delta\tau) = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)]$$

Пример

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (\text{одна точка})$$

$$t_1 = t_2 \quad \Delta\tau = 0$$

$$\hat{E}_{1,2}(t) = \sqrt{\alpha_{1,2}} \hat{E}_0(t)$$

$$\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \langle \hat{E}_0(t) \hat{E}_0^*(t) \rangle = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \cdot 2I_0 = 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) = \frac{\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = 1 \quad \text{две волны абсолютно когерентны}$$

$$B_{12}(\Delta\tau) = \sqrt{I_1 I_2}$$

Рассмотрим $\hat{E}_{1,2}(t_{1,2}) = \sqrt{\alpha_{1,2}} \hat{E}_0(t_{1,2})$

$$\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \langle \hat{E}_0(t) \hat{E}_0^*(t + \Delta\tau) \rangle$$

$\hat{\Gamma}(\Delta\tau)$ - комплексная ф.-я временной корреляции.

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) = \frac{1}{2I_0} \hat{\Gamma}(\Delta\tau) = \hat{\gamma}(\Delta\tau) \quad \text{комплексная степень временной когерентности}$$

Временное коррелирующая и коррелирующая

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma(\Delta\tau) \cos(\omega_0 \Delta\tau - \psi(\Delta\tau))$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}\right) \cos(\omega_0 \Delta\tau)$$

$$\gamma(\Delta\tau) = \left| \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega \Delta\tau}{2}\right) \right|$$

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma(\Delta\tau)$$

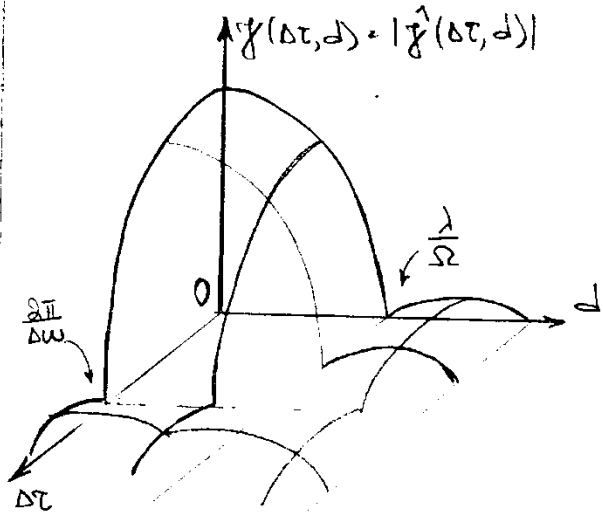
Однородное и узкополосное световое поле.

$$\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) \rightarrow \hat{\Gamma}(\Delta\tau, d)$$

↑ время задержки ↑ расстояние между источниками ↑ ширина фронта

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) \rightarrow \hat{\gamma}(\Delta\tau, d)$$

$$|\hat{\gamma}(\Delta\tau, d)| = |\hat{\gamma}(\Delta\tau, d)|$$



Характерные особенности методов реализации двухволновой интерференции (см. сайт)

§5. Основные схемы двухволновой интерференции

5.1. Метод генерации волнового фронта.

Характерные особенности метода. Схема Юна. Реализация метода (см. сайт)

5.2. Метод генерации амплитуды. Характерные особенности метода. Прографаевская маска. Оптический гребень пути и фазовый ход.

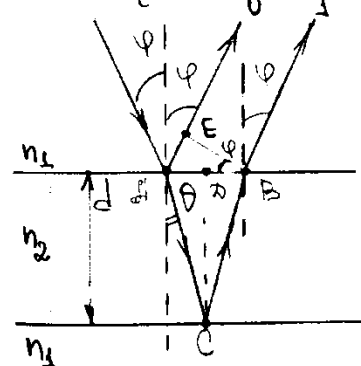
$$k\ell = \frac{\omega}{v} \ell = \frac{\omega}{c} (n\ell) = k_0(n\ell) \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

↑ оптическая длина пути (в вакууме)

$$\Delta\varphi = k\Delta\ell = k_0(n\Delta\ell)$$

↑ оптическая фазовый ход в вакууме

Плоскопараллельная маска



$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\cos\theta \approx \frac{1}{10} \approx \cos\theta$$

$$\Delta = 2n_2 \frac{d}{2\cos\theta} - 2n_1 d \sin\varphi \cdot \tan\theta =$$

$$= \frac{2n_2 d}{\cos\theta} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \sin\varphi \sin\theta\right) = 2n_2 d \cos\theta$$

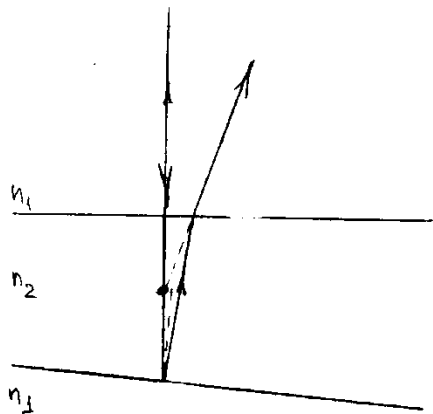
$$\Delta = 2n_2 d \cos\theta \pm \frac{\lambda}{2}$$

- " $n_2 > n_1$, + " $n_1 > n_2$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_0 \Delta)$$

$$\Delta = m\lambda_0$$

$$m = \frac{2n_2 d \cos\theta}{\lambda_0} = \frac{2d \cos\theta}{\lambda} \quad \text{— граница области действия } n_2$$

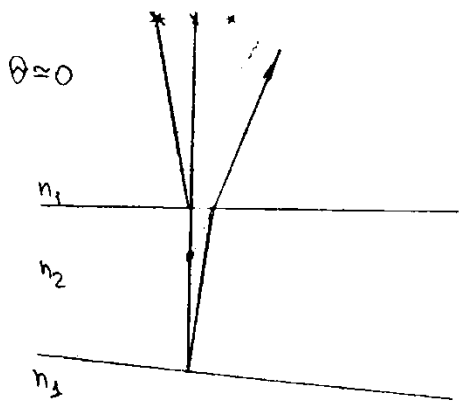


полосы равной интенсивности

$$\Delta = 2n_2 d + \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\text{при } \Delta = m\lambda_0 \text{ max}$$

полосы равной яркости



$$\delta(\Delta) = 2n_2(\delta d \cos\theta - d \sin\theta \delta\theta)$$

$$\delta d = 0, \delta\theta \ll 1, \sin\theta \delta\theta \approx 0$$

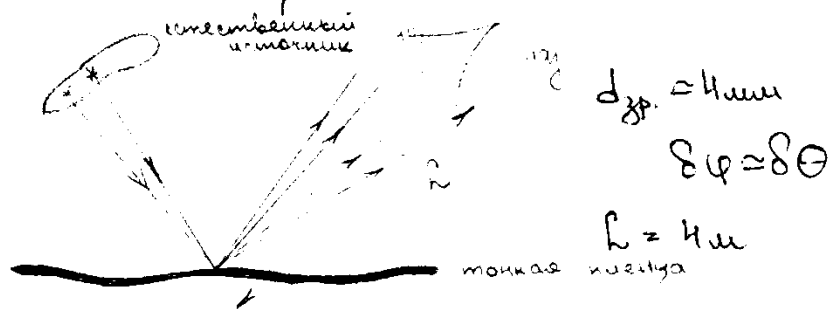
→ (2)

1. картинка показывается в самой темной
2. движение источника увеличивает интерференцию

5.3. Интерференция при естественных условиях в точках мезокла.

$$\Delta\omega \sim \omega_0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ s \sim R \end{array} \right\} \text{ естественные условия}$$

точка мезокла: $d \sim m_{\max} \lambda_0 \approx 5 \text{ мкм}$



$$d_{\text{эф.}} = 4 \text{ мкм}$$

$$\delta\varphi = \delta\theta$$

$$L = 4 \text{ м}$$

точка мезокла

$$\delta(\Delta) = 2n_2 \left(\frac{\delta d \cos\theta}{\approx 0} - d \sin\theta \delta\theta \right)$$

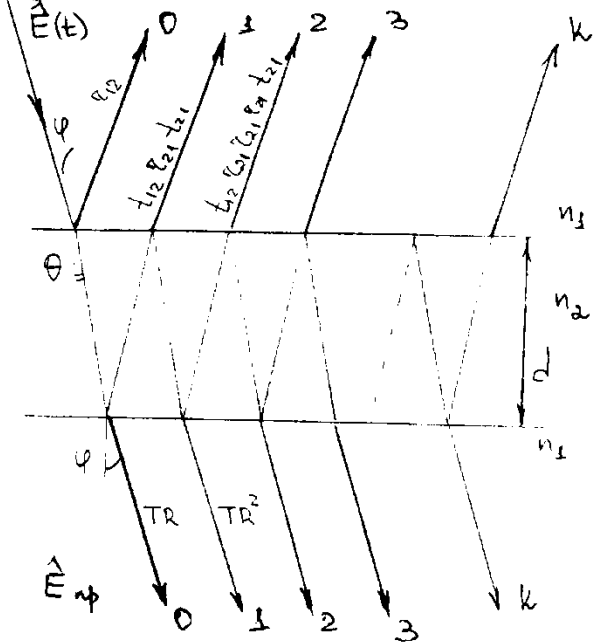
$$|\delta\Delta| = 2 \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4} \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

$$\frac{\lambda_0}{2} \approx 0,3 \cdot 10^{-6} = 30 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

→ все лучи, попадающие в зрачок, дают усиленную интерференционную картину (не обратную от всех точек источника)

Интерферометр Майкельсона	1881
Интерферометр Жамейна	1856
Интерферометр Наха-Цингера	1891-1892

6. Множественная интерференция



6.1. Уравнение множественной интерференции формулы Дюфу

при малых R рассматривают отраженные лучи 1, 2 и пренебрегают...

при R ≈ 1 рассматривают все лучи

Коэффициенты отражения и преломления

r_{12}, r_{21}
 t_{12}, t_{21}

$R = r_{12} = -r_{21}, |r_{12}|^2 = |r_{21}|^2$
 $T = t_{21} \cdot t_{12}$

$\hat{E}_0 = \hat{E}(t) t_{12} e^{-i\varphi} t_{21} = \hat{E}(t) T e^{-i\varphi}$

$\varphi = k_0 n_2 \frac{d}{\cos \theta} = \frac{2\pi n_2 d}{\lambda_0 \cos \theta} = \frac{2\pi d}{\lambda \cos \theta}$

$\hat{E}_1 = \hat{E}(t) t_{12} e^{-i\varphi} r_{21} r_{12} t_{21} = \hat{E}(t) T e^{-i\varphi} R e^{-i\varphi}$

...
 $\hat{E}_k = \hat{E}(t) T e^{-i\varphi} (R e^{-i\varphi})^k$

$\varphi = k_0 \Delta = k_0 2n_0 d \cos \theta = \frac{4\pi n_0 d}{\lambda_0} \cos \theta = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \theta$

$\hat{E}_{imp} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k = \hat{E}(t) T e^{-i\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} (R e^{-i\varphi})^k = \hat{E}(t) T e^{-i\varphi} \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}}$

$I_{imp} = \frac{1}{2} \langle \hat{E}(t) \hat{E}^*(t) \rangle = I \frac{T^2}{(1 - R e^{-i\varphi})(1 - R e^{+i\varphi})} = I \frac{T^2}{1 - R(e^{-i\varphi} + e^{+i\varphi}) + R^2} = I \frac{T^2}{1 - 2R \cos \varphi + R^2} = I \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

$I_{comp} = IR \frac{(1 - (R+T))^2 + 4(R+T) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

T + R = 1 (нет поглощения) →

$I_{imp} = I \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$
 $I_{comp} = I \frac{4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

формулы Дюфу

Множественная интерференция:

1. интерференция Фабри-Перо
2. машина Куншера-Берке

3.11
3.10

$$I_{np} (\Phi = m \cdot 2\pi \pm \frac{\delta_{np}}{2}) = \frac{1}{2} I \quad \downarrow \text{по } \Phi \text{ } \delta_{np}$$

$$\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R(\frac{\delta_{np}}{4})^2} = \frac{1}{2}$$

$$(1-R)^2 = R \cdot \frac{\delta_{np}^2}{4}$$

$$\delta_{np} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

ширина максимумов
где n — номер максимума
при $R \rightarrow 1$ $\delta_{np} \rightarrow 0$

$$\delta_{sup} = 2\pi - \delta_{np}$$

при $R \rightarrow 1$ $\delta_{sup} \rightarrow 2\pi$

Резкость $P \equiv \frac{2\pi}{\delta_{np}}$

$$P_{np} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

при $R \rightarrow 1$ $P_{np} \rightarrow \infty$
при $R \rightarrow 0,9$ $P_{np} \approx 30$
при $R \rightarrow 0,99$ $P_{np} \approx 150$

$$P_{sup} = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{np}}$$

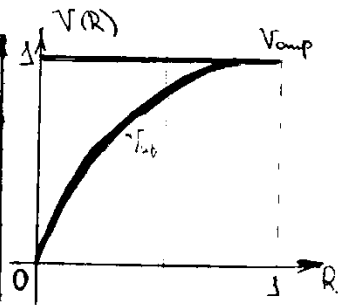
при $R \rightarrow 1$ $P_{sup} \rightarrow 1$

Вузность

$$V(R) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$V_{sup}(R) = 1$$

$$V_{np}(R) = \frac{1 - \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2} = \frac{2R}{1+R^2}$$



Глава 4. Дифракция света.

Дифракция - явление отклонения законов распространения света от законов геометрической оптики

1818 год - Френель - первое объяснение

1665 год - Гримальди - первое описание

1882 год - Зургоф - первое мат. описание

§1. Дифракционный интеграл Френеля.

§1.1. Принцип Гюйенса - Френеля и дифракционный интеграл Гюйенса Френеля.

①

*
S

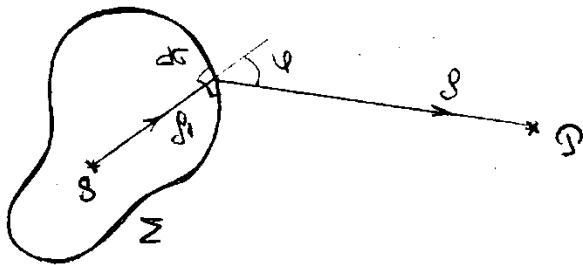
$$E(t, r) = a_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi_0)}{r}$$

$$\hat{E}(t, r) = a_0 e^{i\varphi_0} \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\omega t} = A(r) e^{i\omega t} = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\omega t}$$

$A(r)$ — комплексная амплитуда

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \langle \hat{E}(t, r) \hat{E}^*(t, r) \rangle = \frac{1}{2} |A(r)|^2 = \frac{a_0^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{r}\right)^2$$

②



угол дифракции - угол между исходным лучом и лучом дифрагировавшей волны

$$A_{\Sigma} = A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1}$$

$$A(P) = \int_{\Sigma} A_{\Sigma} \frac{e^{-ikr}}{r} k(\varphi) d\sigma =$$

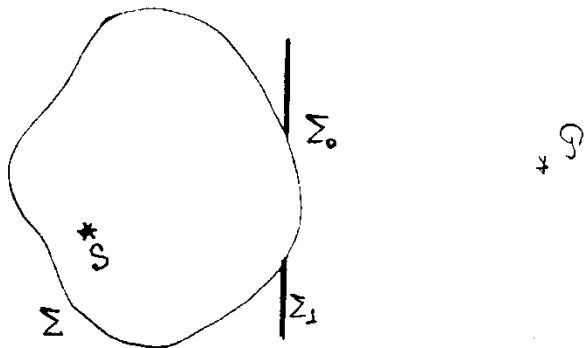
$$= \int_{\Sigma} A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} k(\varphi) d\sigma$$

зависимость от угла дифракции

любое коэффициент (коэф. наклона)

$$A(P) = \int_{\Sigma} A_0 e^{-ikr_1} e^{-ikr} \frac{k(\varphi)}{r_1 r} d\sigma$$

дифракционный интеграл Френеля



Комплексная амплитуда волнового излучения в области отрезка части светящейся n-ти равна A_{Σ}

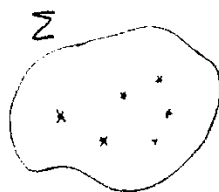
$$\left. \begin{aligned} A_{\Sigma_0} &= A_{\Sigma} \\ A_{\Sigma_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{гипотеза Френеля}$$

(в оптич. приближении)

$$\rightarrow A(P) = \int_{\Sigma_0} + \int_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_0} A_{\Sigma} \frac{e^{-ikr}}{r} k(\varphi) d\sigma$$

$$1. A(P) = A_{\Sigma} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{-ikr}}{r} k(\varphi) d\sigma$$

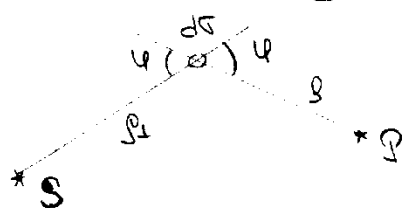
$$2. A_{\Sigma} k(\varphi) = \sum_j A_{\Sigma}^j k(\varphi_j)$$



1.2. Свойства дифракционного интеграла Френеля

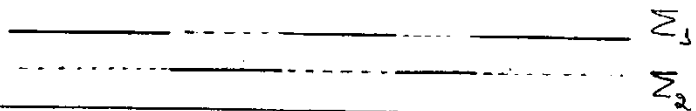
1. Теорема обратности (взаимности) Гельмгольца

$$A_S(P) = A_P(S)$$



2. Принцип дополнительности Бабине.

Рассмотрим два дополнительных друг к другу края (прозрачные части щели совпадают с непрозрачными краями)



$$A_0(P) = A_{\Sigma_1}(P) + A_{\Sigma_2}(P)$$

§2. Метод зон Френеля.

1. В качестве светящегося n -ти выбирается фронт волны
2. Разбиваем светящуюся n -ти на зоны Френеля

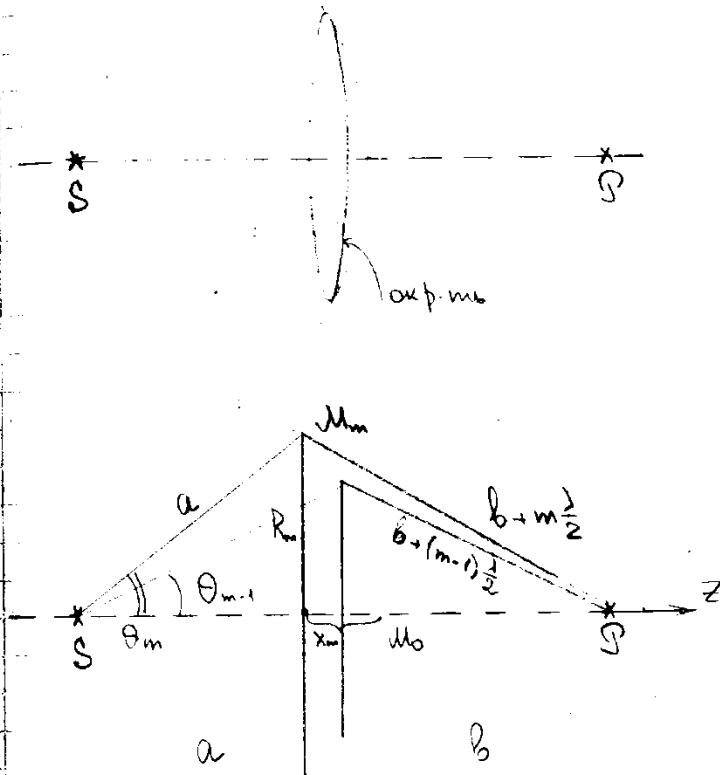
Зоны Френеля - такие области светящегося поверхности, для которых расстояние от краевых точек которых до точки наблюдения есть величина постоянная, а разность расстояний от краев соседних зон до точки наблюдения $\frac{\lambda}{2}$

3. $K(\varphi=0) = K_{\max}$

$K(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0$ ← неверное предположение Френеля

Складываем возмущения от каждой зоны.

2.3. Радиус и площадь зоны.



$$R_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = (b_m + \frac{m\lambda}{2})^2 - (b + x_m)^2$$

$$2ax_m = b_m\lambda + (\frac{m\lambda}{2})^2 - 2bx_m$$

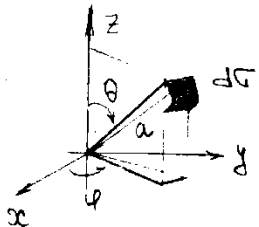
$$(\frac{m\lambda}{2})^2 \ll b_m\lambda \rightarrow \frac{m\lambda}{4} \ll b, m \ll \frac{4b}{\lambda} \approx \frac{4 \cdot 4}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 32 \cdot 10^6$$

$$\rightarrow x_m = m\lambda \frac{b}{2(a+b)}$$

$$x_m = m \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \frac{4}{2 \cdot 8} = 0,125 \cdot m \text{ (мм)}$$

$$R_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = 2ax_m - x_m^2 = 2ax_m$$

$$R_m = \sqrt{m \lambda \frac{ab}{a+b}} \leftarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$



$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} \int_0^{2\pi} dS = a^2 2\pi (-\cos \theta_m + \cos \theta_{m-1}) = \\ &= 2\pi a^2 \left(-\frac{a-x_m}{a} + \frac{a-x_{m-1}}{a} \right) = \\ &= 2\pi a (x_m - x_{m-1}) = \\ &= 2\pi a \frac{\lambda b}{2(a+b)} \end{aligned}$$

N.B! площадь зон Френеля не забудем от номера зоны
 (→ ширина от краевых зон ~ равна)

2.2. Число Френеля. Условия перехода от волновой к геометрической оптике.

N-число зон Френеля (гейсбурговских)

$$\tau_0 = R_N = \sqrt{N \lambda \frac{ab}{a+b}} \rightarrow N = \frac{\tau_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

радиус отверстия

$$|A(P)| = |A_1(P)| - |A_2(P)| + |A_3(P)| - \dots$$

→ ширина от i-x зоны Френеля

$$\begin{aligned} \rightarrow |A(P)| &= |A_1(P)| - \frac{|A_1(P)| + |A_3(P)|}{2} + \\ &+ |A_3(P)| - \frac{|A_3(P)| + |A_5(P)|}{2} + |A_5(P)| - \dots = \\ &= \begin{cases} N\text{-четн:} & \frac{|A_1(P)|}{2} - \frac{|A_{N+1}(P)|}{2} \\ N\text{-нечетн:} & \frac{|A_1(P)|}{2} + \frac{|A_N(P)|}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

при $N \gg 1$

$$|A(P)| = |A_0(P)| = \frac{|A_1(P)|}{2}$$

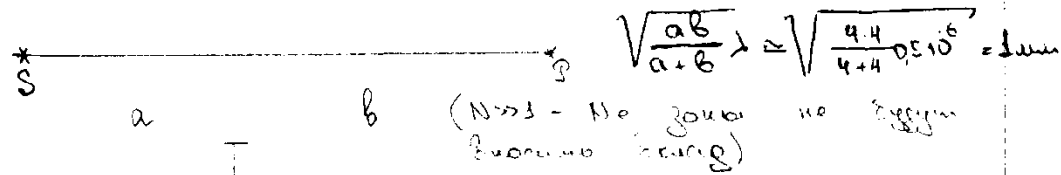
нем важна 2

$$I_0(P) = \frac{I_1(P)}{4}$$

$$N = \frac{\tau_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Условие $N \gg 1$ - условие перехода к геометрической оптике

$$\tau_0 \gg \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda$$

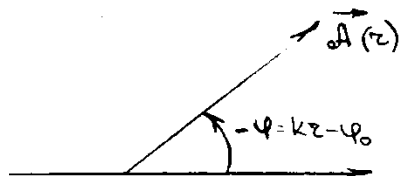


$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \gg \frac{1}{\tau_0^2} \quad \left(\frac{1}{a} \gg \frac{1}{\tau_0^2} > \frac{1}{b} \gg \frac{1}{\tau_0^2} \right) \gg \frac{\tau_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

§3. Метод векторных диаграмм.

$$A(z) \rightarrow \vec{A}(z)$$

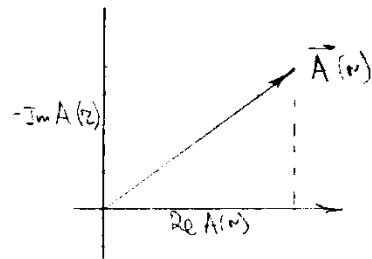
$$|A(z)| = |\vec{A}(z)|$$



$$A(z) = |A(z)| e^{i\varphi(z)}$$

$$\varphi(z) = -kz + \varphi_0$$

надеи фазы



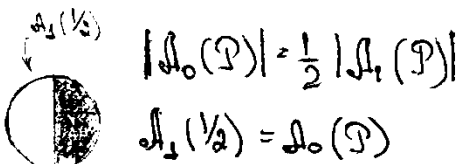
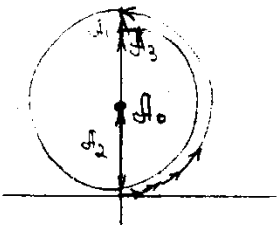
$$\{A_j(z)\} \rightarrow \{\vec{A}_j(z)\}$$

$$\sum_j \alpha_j A_j(z) = \sum_j \alpha_j \vec{A}_j(z)$$

3.1. Случай Френеля.

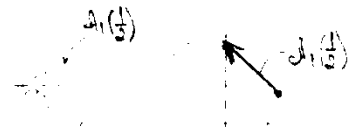


Элементарные зоны - элементы зон Френеля, для которых расстояния от краев (соседних) до точки наблюдения есть величина постоянная и $\ll \lambda/2$

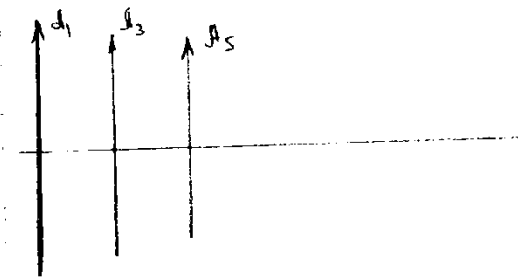
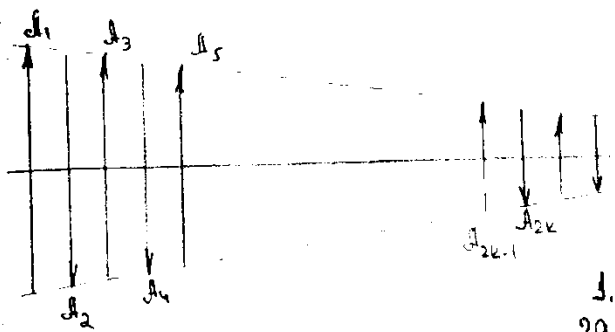


$$|A_0(P)| = \frac{1}{2} |A_1(P)|$$

$$A_1(1/2) = A_0(P)$$



§2. Зонные пластинки Амплитудная и фазовая зонные пластинки. Фокусы зонной пластинки.

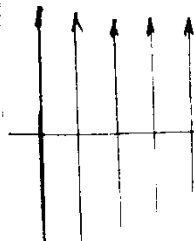


1. Сопре!
закрывает все четные (или нечетные) зоны

(амплитудная зонная пластинка)

$$|A_{uz}| = \frac{N}{2} \left(\frac{|A_1| + |A_N|}{2} \right) \xrightarrow{N \gg 1} |A_{uz}| \approx \frac{N}{2} \cdot \frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2} |A_0|$$

$$I_{uz} = \frac{N^2}{4} I_0$$



$$|A_\varphi| = N \frac{|A_1| + |A_N|}{2} \xrightarrow{N \gg 1} |A_\varphi| = N \cdot |A_0|$$

$$I_\varphi = N^2 I_0$$

2. Буг!
все четные (или нечетные) зоны "перевернуть"
(уменьшение фазы на π)
(фазовая зонная пластинка)

$$R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \text{const} \quad (N = \text{const} \text{ - условие согласования геометрии})$$

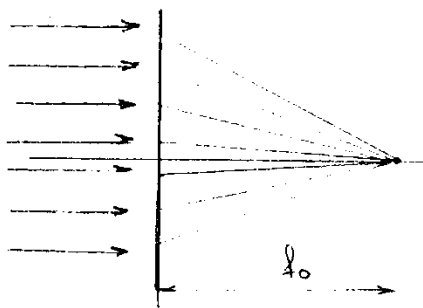
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda N}{r_0^2} = \frac{1}{r_0^2/N\lambda}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

при $a \rightarrow \infty$ $f_c \rightarrow b$

$$\rightarrow f_c = \frac{r_0^2}{N\lambda}$$

фокусе зонной пластинки



$$f_k = \frac{f_0}{2k+1}$$

$$A_{fk} = \frac{A_{f_0}}{2k+1}$$

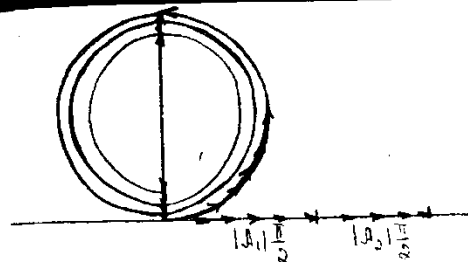
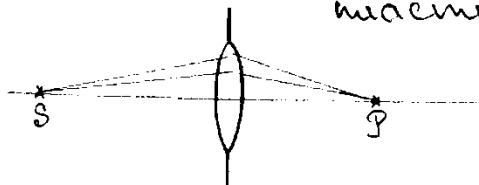
$$I_{fk} = \frac{I_{f_0}}{(2k+1)^2}$$

Зонная пластинка действует как линза, у которой бесконечно много фокусов

$$I_{f_0} = N^2 I_0, \quad I_{fk} = \frac{N^2}{(2k+1)^2} I_0$$

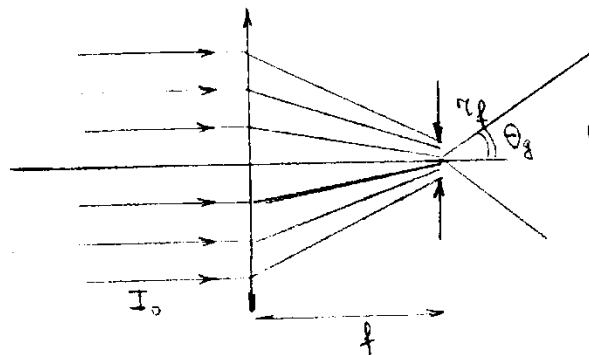
$$f_0 = \frac{r_0^2}{N\lambda} \approx \frac{36 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 9 \mu$$

3.3. Линза как оптимальная зонная пластинка.



$$|A_n| = N \cdot |A_0| \frac{\pi}{2} \downarrow$$

$$I_f = \left(\frac{N\pi}{2} \right)^2 I_0$$



$$\pi r_0^2 I_0 = \pi r_f^2 I_f$$

$$r_f = r_0 \sqrt{\frac{I_0}{I_f}} = r_0 \frac{2}{\pi N} =$$

$$= r_0 \frac{2\lambda f}{\pi r_0^2} = \frac{4f}{\pi r_0} \lambda \approx \lambda$$

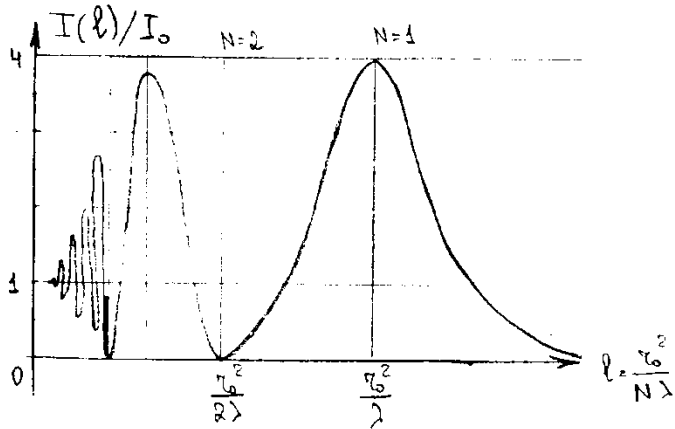
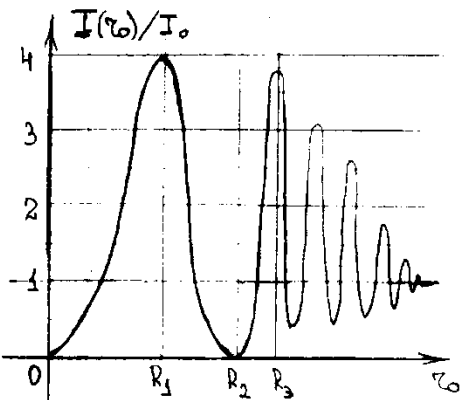
$$\theta_f \approx \frac{r_0}{f} = \frac{2\lambda}{\pi r_0 f} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{df} \approx \frac{\lambda}{df}$$

§4. Простейшие дифракционные задачи

4.1. Дифракция на круглой отверстии

$$R_m = \sqrt{m \lambda} \frac{ab}{a+b} \quad l \equiv \frac{ab}{a+b} \text{ - приведенная длина}$$

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r_0^2}{2l} \quad \rightarrow \quad l = \frac{r_0^2}{2N}$$

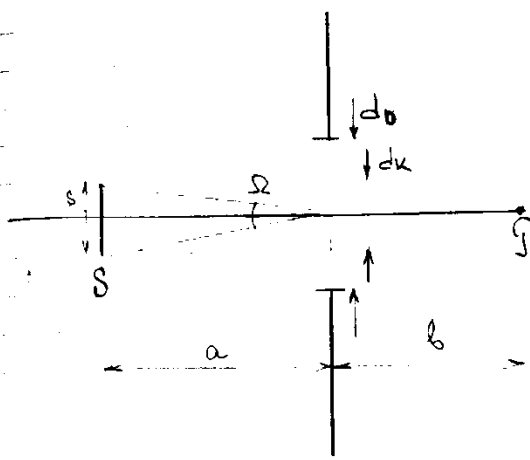


$$l = \frac{ab}{a+b}$$

$$R_m = \sqrt{m \lambda} l$$

$$\begin{aligned} a &\rightarrow S \\ b &\rightarrow S \\ l &\rightarrow b \\ l &\rightarrow a \end{aligned}$$

4.2. Условия пространственно-временной когерентности



d_k - ширина когерентности

$$d < d_k = \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\lambda}{\theta} a$$

$$s < \frac{\lambda a}{d_0} \approx \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \mu$$

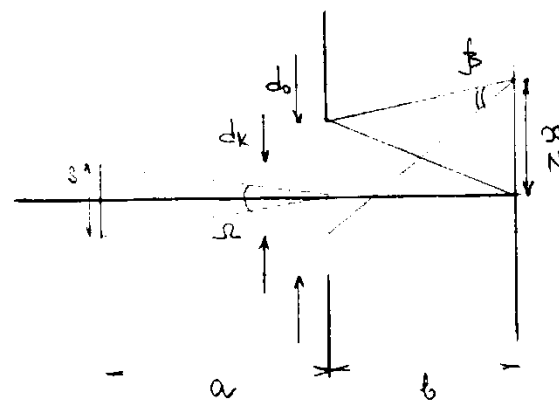
Разность фаз $\Delta \phi = N \frac{\lambda}{2}$

$$N \frac{\lambda}{2} < l_k = v \tau_k$$

$$= v \frac{2\pi}{\Delta \omega} \frac{1}{T} = \lambda \frac{\omega}{\Delta \omega}$$

$$\boxed{\frac{\Delta \omega}{\omega} < \frac{2}{N}} = \frac{2 \lambda ab}{r_0^2 (a+b)}$$

где λ - длина волны излучения



$$\frac{d_0}{b} x = \beta x < l_k = \lambda \frac{\omega}{\Delta \omega}$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} < \frac{\lambda b}{d_0 x} \approx 0,2$$

$$\frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}$$

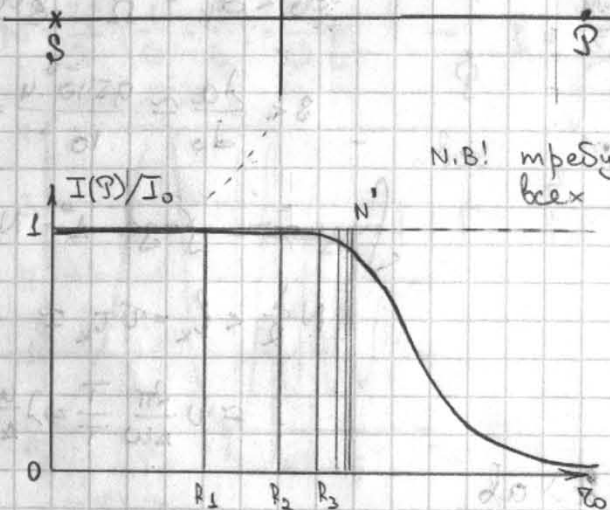
4.3. Дифракция на кривом экране Теория Пуассона

$$N' = \frac{z_0^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{l}$$

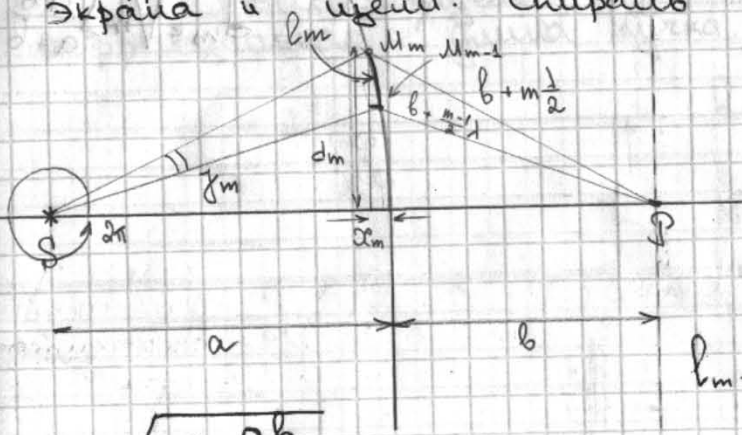
$$R_m = \sqrt{m\lambda l}$$

N' -число
закрывает
зону Френеля

N.B! требуется когерентность
всех точек вие груза z_0



4.4. Дифракция на крае полубесконечного экрана "узкий". Спираль Корно



$$d_m = \sqrt{m\lambda} \frac{ab}{a+b}$$

мощность лучи

$$G_m = \frac{4\pi a^2}{2\pi} \gamma_m = 2a^2 \frac{\gamma_m}{a} =$$

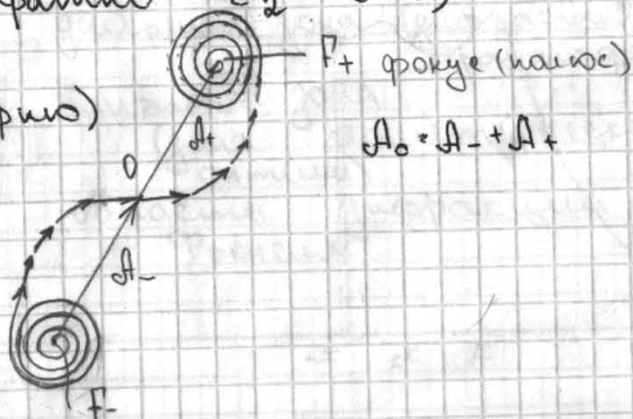
$$= 2a\gamma_m = 2a(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) \sqrt{\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

$$G_1 : G_2 : G_3 : G_4 : G_5 : \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : 0,24 : \dots$$

при $a \rightarrow \infty$ лучи переходят в плоские
лучи шириной l_m .

разделим каждую лучку на элементарные
лучи (расстояние между зонами
крайне мало $\epsilon \frac{\lambda}{2}$ $\epsilon \rightarrow 0$)

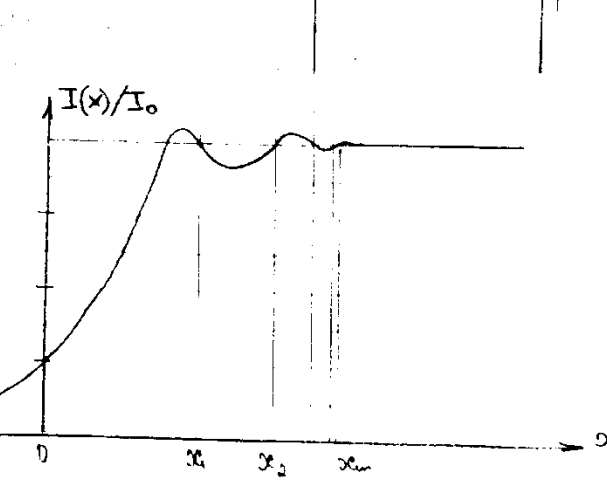
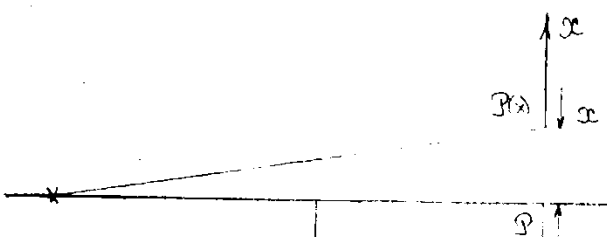
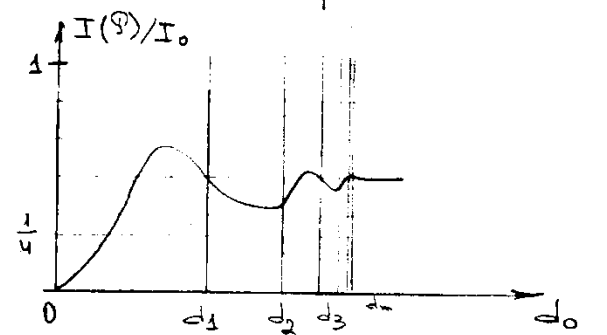
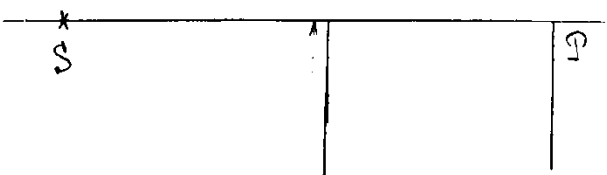
Кривоугол
(спираль Корно)



$$A_0 = A_- + A_+$$

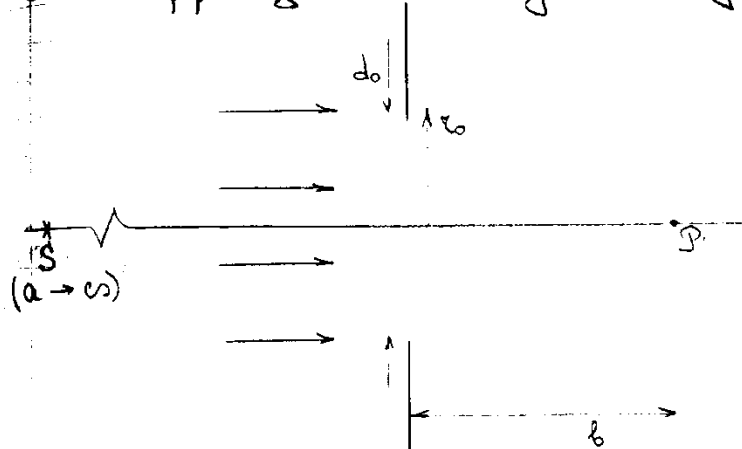


$$d_m = \sqrt{m \lambda \frac{ab}{a+b}}$$



$$x_m = \frac{d_m}{a} (a+b)$$

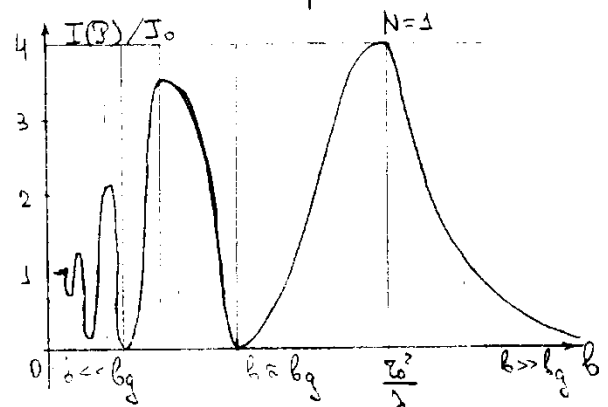
§5 Ближняя и дальняя зона дифракции
5.1. Дифракционная зона узка. Зоны дифракции



$$R_m = \sqrt{m \lambda b}$$

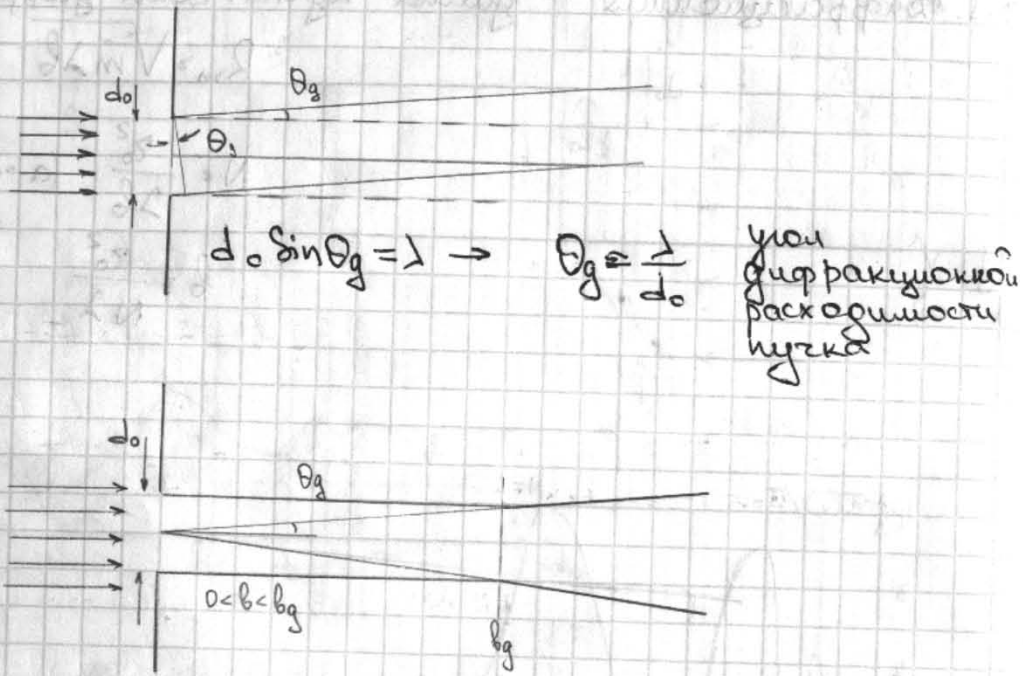
$$N = \frac{z_0^2}{\lambda b} \quad (a \rightarrow \infty)$$

$$b = \frac{z_0^2}{N \lambda}$$

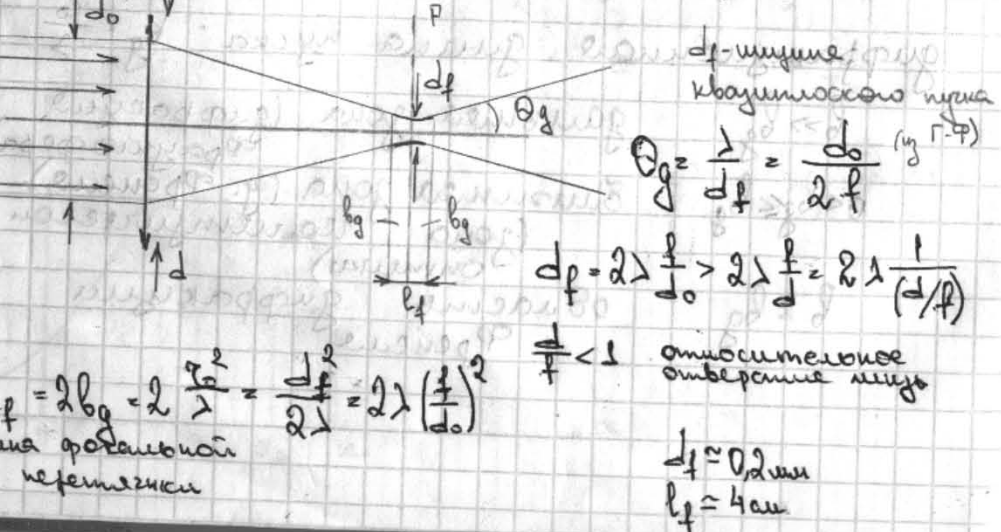


дифракционная зона узка $b_g = \frac{z_0^2}{\lambda}$
 $b \gg b_g$ дальняя зона (дифракция Фраунгофера)
 $a < b \ll b_g$ ближняя зона (зона геометрической оптики)
 $b \approx b_g$ область дифракции Френеля

5.2. Дифракционная расходимость пучка в галвней зоне



5.3. Фокусировка света как дифракционное явление. Относительное отверстие линзы, длина фокальной поверхности.



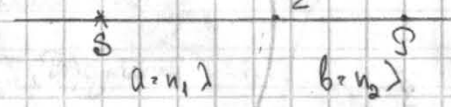
§6. Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

24.03.11
Лекция 12

6.1. Степень точности положения функции Юлиуса - Френеля.

(1) $K(\varphi) \quad [K(\varphi)] = \pi^{-1}$
 $K(\varphi > \frac{\pi}{2}) = 0$
 $\varphi \uparrow: K(\varphi) \downarrow$

(2) $A_z = A_0 \frac{e^{-ika}}{a} = \frac{A_0}{a}$
 $A_P = A_0 \frac{e^{-ik(a+b)}}{a+b} = \frac{A_0}{a+b}$
 $A_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$



$A_z(P) \neq A(P)?$

$\uparrow A_z(P)$

A_z

6.2. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца - Кирхгофа.

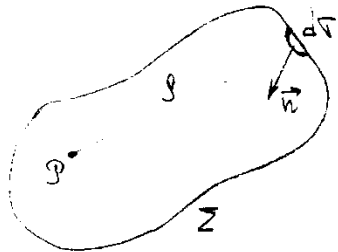
$\frac{\partial^2 \hat{E}(t, \vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \hat{E}(t, \vec{r})$

$\hat{E}(t, \vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}$

$-\omega^2 A(\vec{r}) e^{i\omega t} = v^2 e^{i\omega t} \Delta A(\vec{r})$

$(\Delta + k^2)A(\vec{r}) = 0$

Гр. Гельмгольца
 $k = \frac{\omega}{v}$

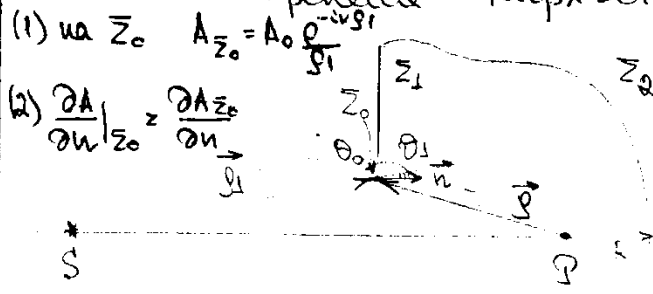


$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(A_z \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial A_z}{\partial n} \right) dS$$

теорема Гельмгольца-Кирхгофа (интегральная)

формулы Кирхгофа

6.3. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа.



(1) на Σ_0 $A_{\Sigma_0} = A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1}$

(2) $\frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n}$

формулы
 $R = \text{шир}(P, \Sigma_0) \rightarrow \infty$
 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_0$

$r_1, r_2 \gg \lambda$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \frac{-ikr e^{-ikr} - e^{-ikr}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{e^{-ikr}}{r} (ik + \frac{1}{r}) \frac{\partial r}{\partial n} \approx -\frac{e^{-ikr}}{r} ik \frac{\partial r}{\partial n} = -ik \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta$$

$\{ k = \frac{2\pi}{\lambda}, r \gg \lambda \rightarrow \frac{1}{r} \ll \lambda \}$

формулы Кирхгофа

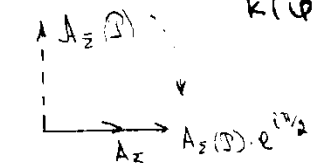
(3) $A_{\Sigma_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_1} = 0$
 (4) $A_{\Sigma_2} \rightarrow 0, \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_2} = 0$

тогда: $\frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n} = A_0 \left(ik \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \cos \theta_1 \right)$

ага, в соответствии с интегральной теоремой Гельмгольца-Кирхгофа

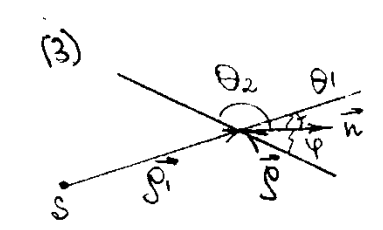
$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ A_0 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} (-ik \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta) - \frac{e^{-ikr}}{r} A_0 (-ik \cos \theta_1) \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right\} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ikr}}{r} ik (\cos \theta_1 - \cos \theta) dS =$$

$$= \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{i}{2} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{k(r)}$$



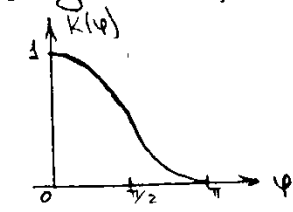
(1) $i = e^{i\psi/2}$

(2) $[k(\theta_1, \theta)] = i^{-1}$



$\theta_2 - \theta_1 + \psi = \pi$
 $\psi = \pi + \theta_1 - \theta$

где ψ Френеля (из 1-го) $\theta_1 = 0 \rightarrow \psi = \pi - \theta, \theta_2 = \pi - \psi$



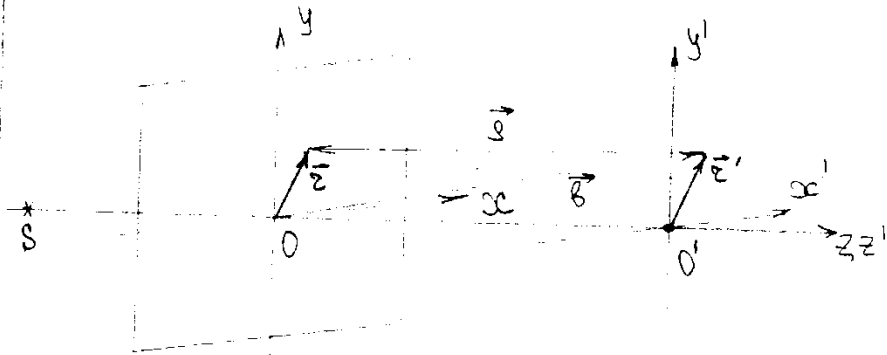
$k(\theta_1, \theta) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \psi)$

Параболическое приближение \rightarrow
 $\theta_1 = 0, \theta = \pi, \varphi = 0$ (прямая линия)

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma = \text{[у граничных условий]}$$

$$= \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} A_z \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma \quad (\text{где прямых линий})$$

6.4. Приближения Френеля и Фраунгофера



$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma$$

(1) приближение Френеля

$$-\vec{\rho} = \vec{b}_0 - (\vec{z} - \vec{z}') \quad (\vec{z} = z)$$

$$\rho^2 = b_0^2 + (\vec{z} - \vec{z}')^2$$

$$b_0 \gg |\vec{z} - \vec{z}'|$$

$$\rightarrow \rho = \sqrt{b_0^2 + (\vec{z} - \vec{z}')^2} \approx b_0 + \frac{(\vec{z} - \vec{z}')^2}{2b_0}$$

$$A(P) \approx \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} \frac{e^{-ikb_0} e^{-ik \frac{(\vec{z} - \vec{z}')^2}{2b_0}}}{b_0} d\sigma$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{-ik \frac{(\vec{z} - \vec{z}')^2}{2b_0}} d\sigma =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{-ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2b_0}} dx dy$$

(2) приближение Фраунгофера

$$b \gg b_0 \gg b_0 \approx \frac{z_0^2}{\lambda} \gg \frac{z^2}{\lambda} \quad b \gg \frac{z^2}{\lambda}, \quad b \gg \pi$$

$$\frac{z^2}{b} \ll \lambda$$

$$\rightarrow -\vec{\rho} = \vec{b} - \vec{z}$$

$$\rho^2 = b^2 - 2\vec{b}\vec{z} + z^2 \rightarrow \rho = b - \frac{\vec{b}\vec{z}}{b} + \frac{z^2}{2b} \quad (\text{пренебрегаем } \frac{z^2}{2b})$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{\rho} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{ik \frac{\vec{b}\vec{z}}{b}} e^{-ik \frac{z^2}{2b}} d\sigma =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{ik \vec{z}} d\sigma = \left\{ \frac{\vec{b}}{b} = \vec{k} \text{ (Фраунгофер)} \right\}$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{ik \frac{\vec{z}\vec{z}'}{b}} d\sigma$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{b} &= \vec{b}_0 + \vec{z}' & \vec{b}_0 &= \vec{z} \\ \vec{b}\vec{z} &= \frac{1}{2} \vec{z}\vec{z}' & \vec{b}_0 &= \vec{z} \end{aligned} \right.$$

\vec{k} координатной представляем:

$$\vec{k}\vec{z} = k_x x + k_y y, \quad d\sigma = dx dy$$

$$\vec{z}\vec{z}' = x x' + y y', \quad d\sigma = dx dy$$

Комплексная спектральная амплитуда пространственной амплитуды

6.5. Дифракция в плоской зоне как пространственное преобразование Фурье.

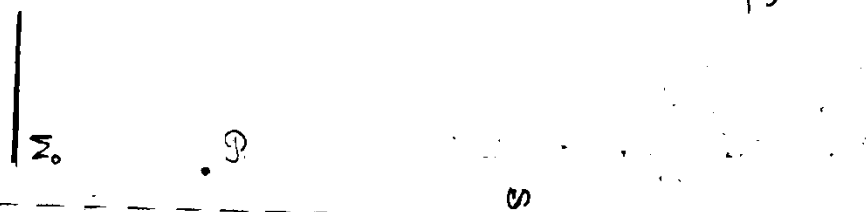
$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikz}}{b} \iint_{-\infty}^{\infty} A_z e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$A(k_x, k_y)$ - комплексная пространственная амплитуда

k_x, k_y - пространственные частоты

$$I(P) = \frac{1}{2\lambda^2} |A_z(i k_x, i k_y)|^2$$

пространственная спектральная мощность интенсивности в сечении узла (уловой спектр)



$$A_z(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(i k_x, i k_y) e^{-ikz} dk_x dk_y$$

$$A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(i k_x, i k_y, z) e^{-ikz} dk_x dk_y$$

$$(\Delta + k^2)A(x, y, z) = 0$$

$$\underbrace{(k^2 - k_x^2 - k_y^2)}_{k_z^2 \text{ - проекция } k^2 \text{ на } z} A_z(i k_x, i k_y, z) e^{-ikz} + \frac{\partial^2 A_z(i k_x, i k_y, z)}{\partial z^2} e^{-ikz} = 0$$

$$A_z(i k_x, i k_y, z) = \underbrace{A_z(i k_x, i k_y)}_{A_z(z=0)} e^{-k_z z}$$

Разложение узла по мощностям болам

$$A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(i k_x, i k_y) e^{-ikz} dk_x dk_y$$

$$\vec{E}(t, \vec{z}) = \underbrace{A(\vec{z})}_{A_0 e^{-ikz}} e^{-i\omega t}$$

уравнение плоской волны

$$f(t) \xrightarrow{\Delta t} f(i\omega) \xrightarrow{\Delta \omega} |f(i\omega)|^2$$

$\Delta \omega \Delta t = 2\pi$

$$A_z(x, y) \xrightarrow{l_{xy}} A_z(i k_x, i k_y) \xrightarrow{\substack{\text{уловой} \\ \text{спектр}}} |A_z(i k_x, i k_y)|^2$$

Δk_{xy}

$$\Delta k_{xy} l_{xy} = 2\pi$$

улова спектра $\Delta k_{xy} \approx \frac{2\pi}{l_{xy}}$

$$k_{xy} = k \sin \theta_{xy}$$

$$\Delta k_{xy} = k \cos \theta_{xy} \Delta \theta_{xy}$$

улова спектра (улова спектра)

$$\Delta \theta_{xy} \approx \frac{2\pi \lambda}{l_{xy} 2\pi \cos \theta_{xy}} \approx \frac{\lambda}{l_{xy}}$$

константа Буге

§7. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах.

- 7.1. Дифракция на плоской поверхности
- 7.2. Дифракция на круглой поверхности
- 7.3. Дифракционные решетки

Функция (комплексный коэффициент) пропуска (отражение) классификация дифракционных решеток.

комплексный коэффициент пропуска / отражения $t(x,y) = \frac{A_z(x,y)}{A_{0z}(x,y)}$

$t(x + n_x dx, y + n_y dy) = t(x,y)$
 $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ в пределах грани dx, dy - период повторности N_x, y - число периодов

$N_x dx = b_x$
 $N_y dy = b_y$ } - период дифракционной решетки

$t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\varphi(x,y)}$

Типы дифракционных решеток

1. пропускающая (пропускает, пропускает)
2. отражающая (отражает, отражает)
3. амплитудная $t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\varphi(x,y)}$, $\varphi(x,y) = 0$
4. фазовая $t(x,y) = \exp(-i\varphi(x,y))$, $|t(x,y)| = 1$, $\varphi(x,y) \neq 0$
5. амплитудно-фазовая $t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\varphi(x,y)}$, $|t(x,y)| \neq 1$, $\varphi(x,y) \neq 0$.

Одномерная решетка. Фактор многоугольной интерференции

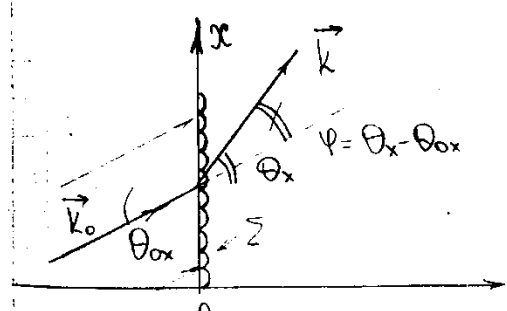
$$A(\varphi) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_z(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \rightarrow$$

$t(x,y) \rightarrow t(x)$ одномерная решетка

одномерный дифракционный элемент $A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}\lambda b} e^{-ikb} \int_{-b}^b A_z(x) e^{ik_x x} dx$

$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$A_z(x) = A_{0z}(x) t(x)$



$A_{0z}(x) = A_0 e^{-ik_{0x} x}$

N - число периодов решетки, попадающих в зону, покрытую волной b - расстояние от $z=0$ до $z=b$

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}\lambda b} e^{-ikb} \int_0^b A_0 e^{i(k_x - k_{0x})x} t(x) dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}\lambda b} A_0 \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)d}^{jd} t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx = -\{g = x - (j-1)d\} =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2} \lambda b} e^{-ikb} \sum_{j=1}^N \int_0^d t (q + (j-1)d) e^{i(kx - k_0x)j} \cdot \exp(i(kx - k_0x)(j-1)d) dt$$

$A_1(P) = A_1(k_x)$ импульс

$$= A_1(k_x) \underbrace{\sum_{j=1}^N e^{i(kx - k_0x)d(j-1)}}_{h(N, k_x)}$$

$$S_N = a_1 \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (2.1)$$

$h(N, k_x)$ - фактор множительной интерференции

$$h(N, k_x) = \frac{1 - \exp(i(k_x - k_0x)Nd)}{1 - \exp(i(k_x - k_0x)d)} =$$

$$= e^{i \frac{(k_x - k_0x)(N-1)d}{2}} \frac{e^{-x} - e^{+x}}{e^{-x} - e^{+x}} \downarrow -2i \sin()$$

$$h(N, k_x) = e^{i(N-1)\xi_x^d} \frac{\sin(N\xi_x^d)}{\sin(\xi_x^d)} = h(N, \xi_x^d)$$

$$\xi_x^d = \frac{k_x - k_0x}{2} d$$

непрерывная функция ξ_x^d
дискретная функция ξ_x^d

$$I(P) = I(k_x) = \frac{1}{2} |A(k_x)|^2 = I_1(k_x) \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2(\xi_x^d)} = I_1(k_x) H(N, \xi_x^d)$$

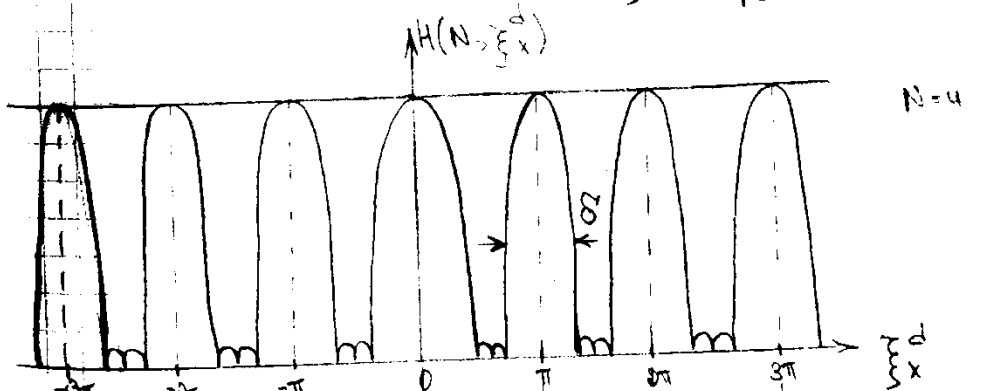
$$H(N, \xi_x^d) = \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2(\xi_x^d)}$$

$\varphi = 0$ ξ_x^d

max $H_{max} = N^2$, $\xi_x^d = m \cdot \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$

min $H_{min} = 0$, $N \xi_x^d = k\pi$, $k = 1, 2, \dots, N-1, N+1$

$$\xi_x^d = \frac{k\pi}{N}$$



$$\xi_x^d = \frac{k_x - k_0x}{2} d = k \frac{\sin \theta_x - \sin \theta_0x}{2} d =$$

$$= \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta_x - \sin \theta_0x) \rightarrow m\pi \rightarrow \sin(\theta_x) - \sin(\theta_0x)$$

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_x - \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_0x$$

главная мина на 1/2 высоты
 мина на 1/2 высоты максимумов

$$\min \xi_x = \frac{k}{N} \pi$$

$$\delta(\xi_x) = \frac{\pi}{N} = \frac{k}{2} d (\delta(\sin \theta_x - \sin \theta_{0x})) = \frac{\pi}{N}$$

$$\delta(\sin \theta_x - \sin \theta_{0x}) = \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\cos \theta_x \delta \theta_x = \frac{\lambda}{Nd}$$

→ главная мина

$$\delta \theta_x = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_x} \approx \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\sin \theta_x - \sin \theta_{0x} = m \frac{\lambda}{d}$$

$$2 \cos \frac{\theta_x + \theta_{0x}}{2} \sin \frac{\theta_x - \theta_{0x}}{2} = m \frac{\lambda}{d}$$

условие: разности

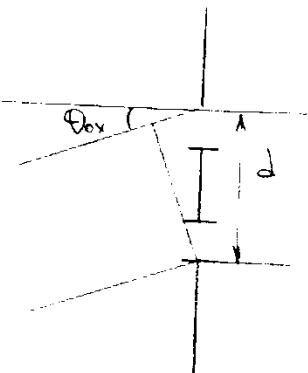
главн

наше → d

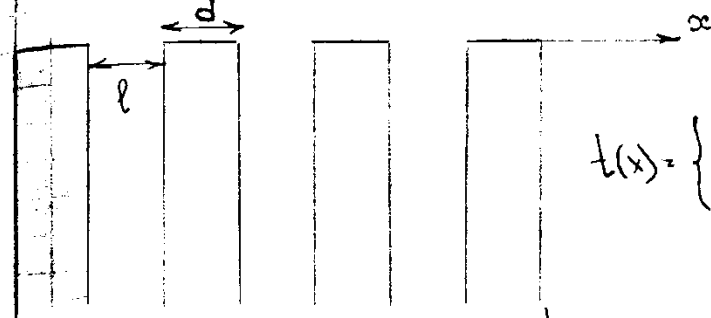
$$\varphi \cos \theta_{0x} = m \frac{\lambda}{d} \quad (\theta_x = \theta_{0x})$$

$\varphi \ll 1$ - угол дифракции ($\varphi = \theta_x - \theta_{0x}$)

$$\varphi = m \frac{\lambda}{d \cos \theta_{0x}}$$



Полупроводниковая решетка



$$t(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq l \quad (+j-1)d \\ 0 & l < x < l + d \quad (+j-1)d \end{cases}$$

$$A_1(P) = A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2} \lambda b} e^{-ik_b h} \int_0^l t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= A \frac{e^{il(k_x - k_{0x})} - 1}{i(k_x - k_{0x})} = A \frac{e^{il(k_x - k_{0x})/2}}{(k_x - k_{0x})/2} \cdot \frac{l}{l}$$

$$= l \sum_x = \frac{k_x - k_{0x} l}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2} \lambda b} e^{ik_b h} A_0 l e^{i \xi_x l} \text{sinc}(\xi_x l)$$

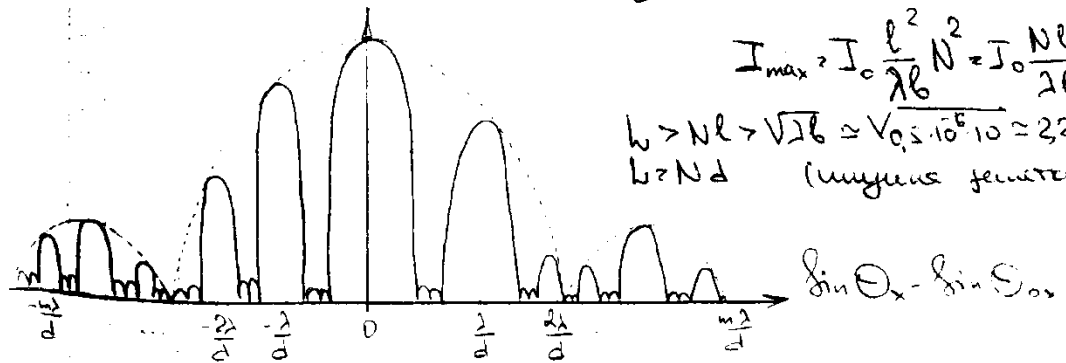
$$I_1(k_x) = \frac{1}{2} |A_1(k_x)|^2 = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \xi_x l$$

$$I(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2(\xi_x l) \frac{\sin^2(N \xi_x d)}{\sin^2(\xi_x d)}$$

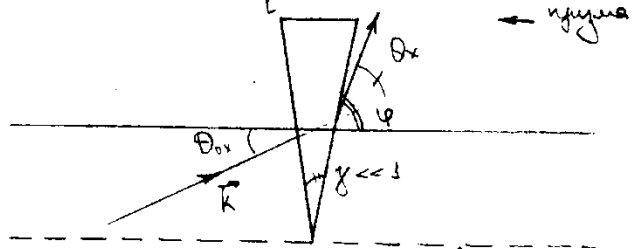
$$I_{\max} = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} N^2 = I_0 \frac{N l^2}{\lambda b}$$

$$l > N l \Rightarrow \sqrt{\lambda b} \approx \sqrt{0.5 \cdot 10^5 \cdot 10} \approx 22 \mu\text{m}$$

$l > N d$ (узкая решетка)



Фазовая решетка



$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}b} e^{-ikb} \int_0^l \frac{e^{-i\varphi(x)}}{t(x)} e^{ix(k_0 - k_x)} dx$$

формулу из предыдущего

$$\varphi(x) = k d = k \frac{(n-1)d}{\cos \theta_0 x} \quad x = k d x$$

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}b} e^{-ikb} A_0 e^{i \frac{k_x - k_0 x}{2} l} \text{sinc} \left(\frac{k_x - k_0 x - k d}{2} l \right)$$

комплексная интенсивность интерференционной картины:

$$I_1(x) = I_0 \frac{l^2}{2b} \text{sinc}^2 \left(\frac{k_x - k_0 x - k d}{2} l \right)$$

$$\frac{k_x - k_0 x - k d}{2} l = \frac{kl}{2} (\sin \theta_x - \sin \theta_0 - \alpha)$$

$$m_0 = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{(n-1)d}{\lambda \cos \theta_0} \approx 15 \div 20$$

7.4 Дифракция на многомерных периодических структурах.

Двумерная структура. Прямоугольные дифракционные решетки.

$$A_z(x, y) = A_{0z}(x, y) \cdot t(x, y)$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda b} e^{-ikb \cos \theta} \iint_{-b}^b t(x, y) A_0 e^{i(k_x - k_{0x})x} e^{i(k_y - k_{0y})y} dx dy$$

$$A_{0z}(x, y) = A_0 \exp(-i(k_{0x}x + k_{0y}y))$$

$$t(x, y) = t(x) t(y) \leftarrow b \text{ двумерная решетка } t(x) t(y)$$

возможные функции

$$A(P) = \frac{i}{\lambda b} e^{-ikb \cos \theta} A_0 \int_{-b}^b t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx \int_{-b}^b t(y) e^{i(k_y - k_{0y})y} dy =$$

$$= A_1(k_x, k_y) h(N_x, \xi_x) h(N_y, \xi_y)$$

там где h — функция (комплексная) ...

$$\xi_{x,y} = \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} d_{x,y}$$

$$I(P) = I(k_x, k_y) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = I_1(k_x, k_y) H(N_x, \xi_x) H(N_y, \xi_y)$$

$H = |h|^2$ интерференционный множитель

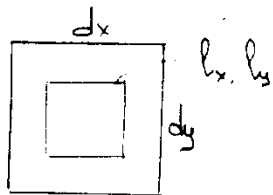
$$H(N_x, \xi_x) = \frac{\sin^2(N_x \xi_x)}{\sin^2(\xi_x)}, \quad H(N_y, \xi_y) = \frac{\sin^2(N_y \xi_y)}{\sin^2(\xi_y)}$$

$$H(N_x, N_y, \xi_x, \xi_y) = H(N_x, \xi_x) H(N_y, \xi_y)$$

$$\begin{cases} \sin \theta_x - \sin \theta_{0x} = m_x \frac{\lambda}{d_x} \\ \sin \theta_y - \sin \theta_{0y} = m_y \frac{\lambda}{d_y} \end{cases}$$

направление совпадающее с направлением дифракционной максимуму.

$$I_1(k_x, k_y) = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{2b} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\xi_x \right) \text{sinc}^2 \left(\xi_y \right)$$

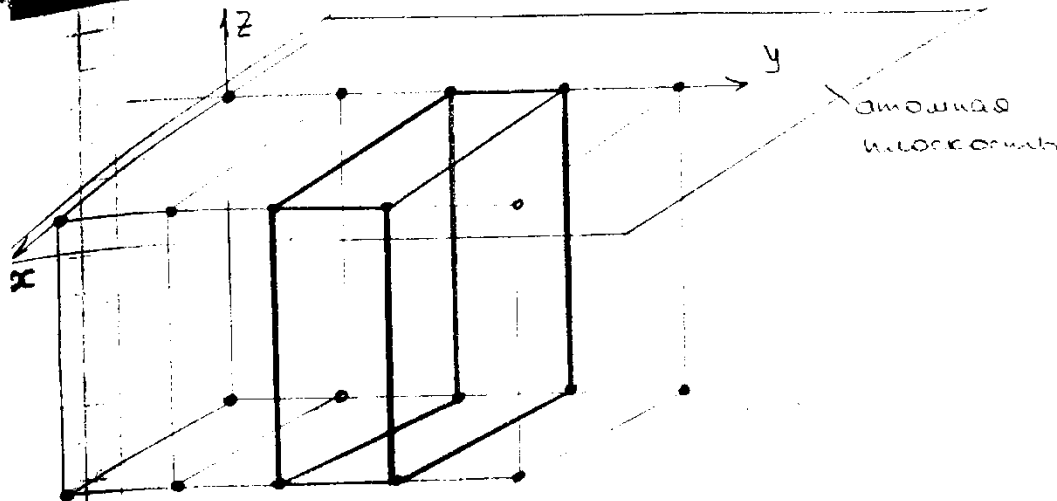


$$\xi_{x,y} = \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y}$$

Н.В! пространственная периодичность в двух направлениях определяет направление на максимумы, амплитуда одной периода определяет интенсивность каждого максимума.

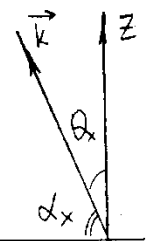
Трёхмерная структура. Уравнение Лауэ. Условие Брэгга-Вульфа. Понятие о рентгеноструктурном анализе

для монокристалла периодов $d_{x,y,z} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
 $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ } → для видимого света дифракция не наблюдается.



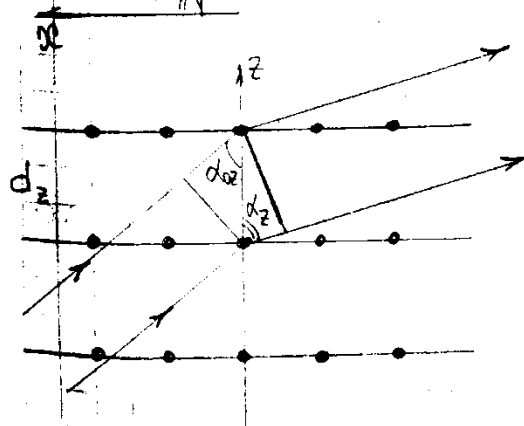
$$\begin{cases} \sin \theta_x - \sin \theta_{0x} = m_x \frac{\lambda}{d_x} \\ \sin \theta_y - \sin \theta_{0y} = m_y \frac{\lambda}{d_y} \end{cases}$$

$$\theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{x,y}$$



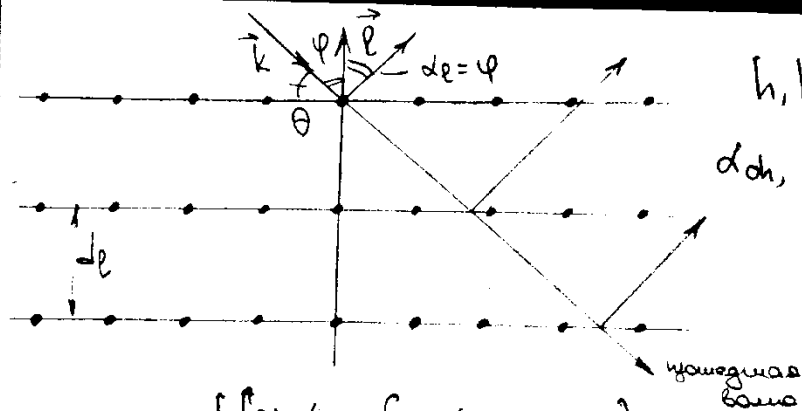
$$\begin{cases} \cos \alpha_x - \cos \alpha_{0x} = m_x \frac{\lambda}{d_x} \\ \cos \alpha_y - \cos \alpha_{0y} = m_y \frac{\lambda}{d_y} \end{cases}$$

уп-ние Лауэ



$$\begin{aligned} \Delta &= d_z \cos \alpha_z - d_z \cos \alpha_{0z} = \\ &= m_z \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_z - \cos \alpha_{0z} &= m_z \frac{\lambda}{d_z} \\ \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z &= 1 \end{aligned}$$



h, k, l
 d_{oh}, d_{ok}, d_{ol}

для прошедшей волны

$$\begin{cases} \cos \alpha_h - \cos \alpha_{oh} = m_h \frac{\lambda}{d_h} \\ \cos \alpha_k - \cos \alpha_{ok} = m_k \frac{\lambda}{d_k} \\ \cos \alpha_l - \cos \alpha_{ol} = m_l \frac{\lambda}{d_l} \end{cases}$$

для отраженных волн

$$\begin{cases} \cos \alpha_h - \cos \alpha_{oh} = 0 \\ \cos \alpha_k - \cos \alpha_{ok} = 0 \\ \cos \alpha_l - \cos \alpha_{ol} = m_l \frac{\lambda}{d_l} \end{cases}$$

условие наблюдения максимума, порожденной отраженной волной от системы атомных плоскостей:

$$2d \cos \varphi = m \lambda$$

уравнение Брэгга-Вульфа

$$2d \sin \theta = m \lambda$$

θ - угол скольжения, φ - угол падения

$$(\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi)$$

2θ - угол дифракции

§8. Анализ, преобразование и синтез световых полей.

В силу линейности и однородности среды; линейности и однородности уравнений Максвелла любую волну можно разложить в суперпозицию плоских гармонических волн.

Используя трансформацию каждой отдельной волны в результате взаимодействия со средой, а затем рассматривая суперпозицию полученных плоских гармонических волн, можно получить результат взаимодействия исходной волны в пространстве.

(в различных случаях φ - фаза каждого из волновых векторов k может отличаться от 0 из-за дифракции в границах зон)

2.1. Основные характеристики спектральных приборов.

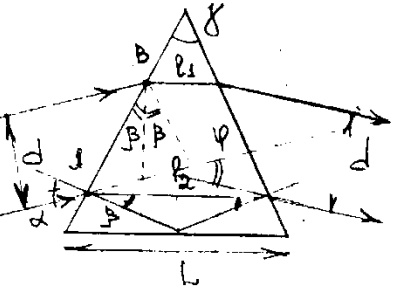
(см. сайт)

Спектральный прибор - прибор для разложения светового поля на монохроматические составляющие в спектр (с пространственным разделением волн с помощью угловой дисперсии)

Аналоговая функция $I(\rho)$ - "отклик" прибора на монохроматическое излучение - ретифицируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения.

8.2. Дисперсионные, дифракционные и интерференционные спектральные приборы.

Тризма



$$\frac{dn}{d\lambda} \neq 0$$

φ - угол отклонения

$$\gamma = 2\beta \rightarrow \beta = \frac{\gamma}{2}$$

$$\varphi = 2(\alpha - \beta) \rightarrow \alpha = \frac{\varphi}{2} + \beta = \frac{\varphi + \gamma}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

$$\frac{\sin(\frac{\varphi + \gamma}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}} = n$$

$$\gamma = \text{const}$$

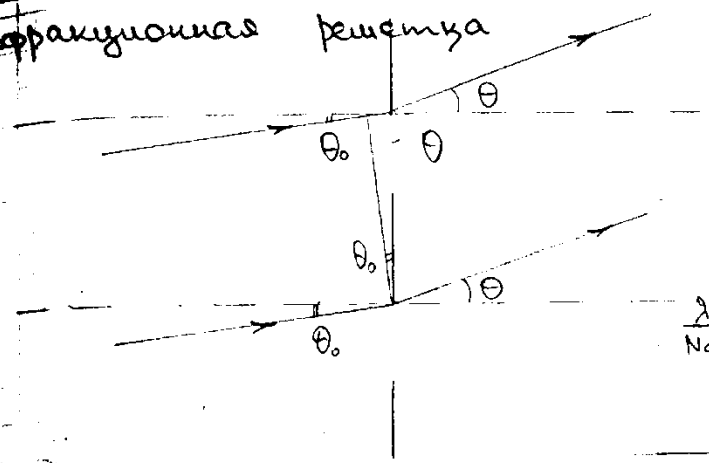
$$\frac{\cos(\frac{\varphi + \gamma}{2})}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos(\frac{\varphi + \gamma}{2})} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha} \frac{dn}{d\lambda} =$$

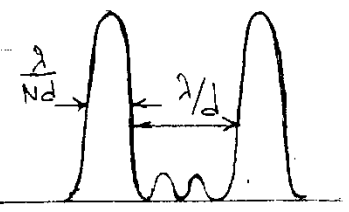
$$= 2 \frac{l_2 - l_1}{2AB} \cdot \frac{AB}{\frac{d}{\cos^2 \alpha}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta \rho}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

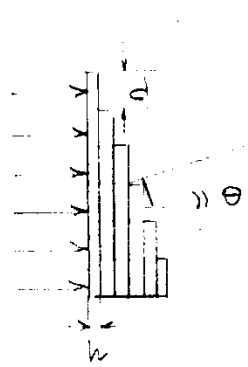
Дифракционная решетка



$$\Delta = d(\sin \theta - \sin \theta_0)$$



Экран Майкельсона

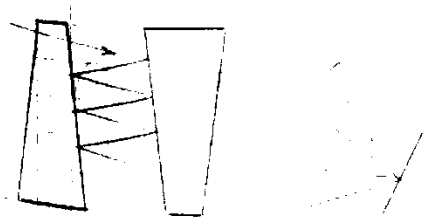


$$\Delta = nh + d \sin \theta - h \cos \theta$$

Микрообновное интерферометр

интерферометр Фабри-Перо

масштаб Ламбера-Терке



Интерферометр Майкельсона (см. сайт)

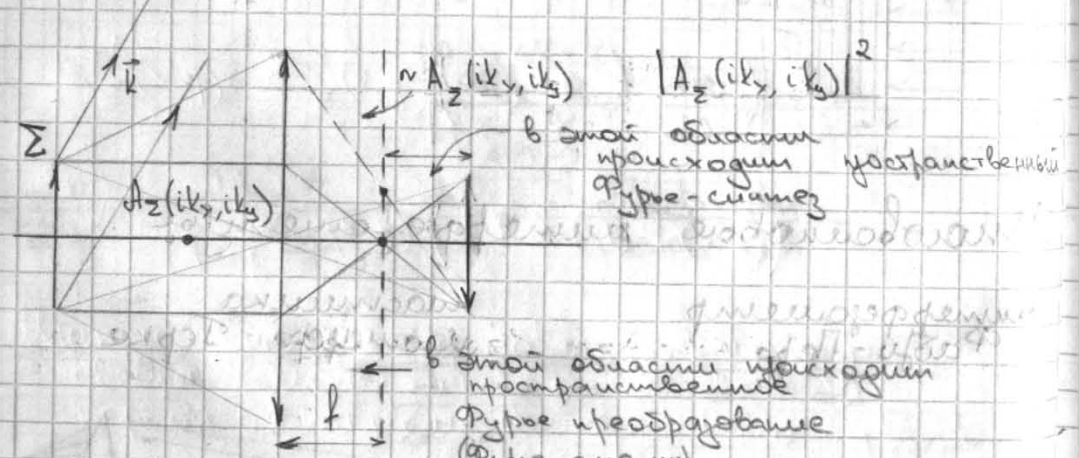
8.3. Основы дифракционной теории формирования изображений АФДде. Пространственная фильтрация изображений. Опыт АФДде-Портера.

$$A_z(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-s}^s A_z(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y$$

$$A(\rho) = A(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e}{b} \iint_{-s}^s A_z(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$A_z(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-s}^s A_z(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$



Механизм формирования изображений АФДде между анализом и синтезом возможно добавить фильтрацию

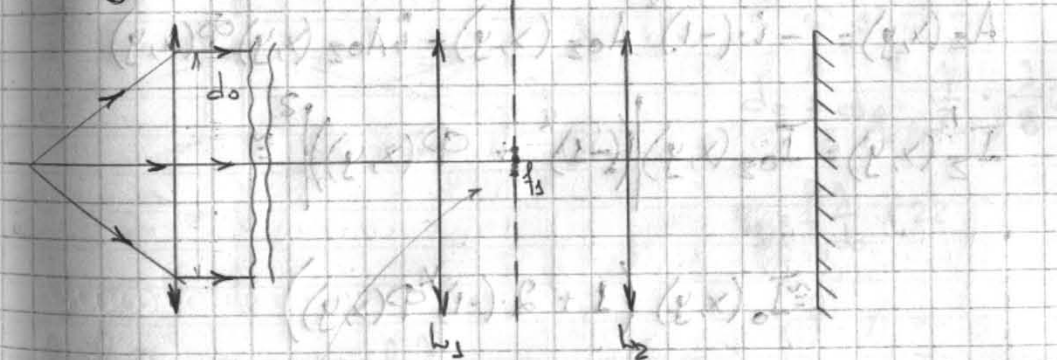
8.4. Специальные методы наблюдения фазовых объектов.

функция пропускания $t(x, y) = |t(x, y)| e^{-i\Phi(x, y)}$
 $|t(x, y)| = 1$
 $\Phi(x, y) \neq 0, \Phi(x, y) \ll 1$

$$A_z(x, y) = A_{oz}(x, y) t(x, y) \cong A_{oz}(x, y) \{1 - i\Phi(x, y)\} = A_{oz}(x, y) - iA_{oz}(x, y)\Phi(x, y)$$

$$I_z(x, y) = I_{oz}(x, y) (1 + \Phi^2(x, y)) \cong I_{oz}(x, y)$$

Метод менискоидной линзы. Круговое Зюппе

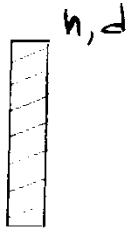


r_0 световой круговой Зюппе
 $r_0 = 1,22 \frac{\lambda}{2} f$, $r_0 = 1,22 \frac{\lambda}{2} f$

$$A'_z(x, y) = A_{oz}(x, y) - iA_{oz}(x, y)\Phi(x, y)$$

$$I'_z(x, y) = I_{oz}(x, y) \Phi^2(x, y)$$

Метод фазового контраста.
Световой и темный фазовый контраст.



$$\Delta\varphi = k_0 \Delta = k_0 (n-1) d = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) d = \frac{2k+1}{2} \pi$$

$$d = \frac{2k+1}{4(n-1)} \lambda_0$$

$$e^{-i\Delta\varphi} = \underbrace{\cos(\Delta\varphi)}_{=0} - i \sin(\Delta\varphi) = -i \cdot (-1)^k$$

$$A_z'(x, y) = -i \cdot (-1)^k A_{0z}(x, y) - i A_{0z}(x, y) \Phi(x, y)$$

$$I_z'(x, y) = I_{0z}(x, y) \left| \left((-1)^k + \Phi(x, y) \right) \right|^2 \approx$$

$$\approx I_0(x, y) \left(1 + 2 \cdot (-1)^k \Phi(x, y) \right)$$

Увеличиваемость преобразованная
света увеличивается
первой ступенью фазового контраста

$$k: 2 \rightarrow I_z'(x, y) = I_0(1 + 2\Phi(x, y)) \text{ - световой фазовый контраст (малое увеличение световой фазы)}$$

$$k: 2 \rightarrow I_z'(x, y) = I_0(1 - 2\Phi(x, y)) \text{ - темный фазовый контраст (большое увеличение фазы)}$$

8.5. Роль дифракции в приборе, формирующем изображение инвариантное преобразование разрешающая способность прибора. $\delta\theta$ - минимальное угловое расстояние между точками, при котором эти точки еще различимы - т.е. угловое разрешение

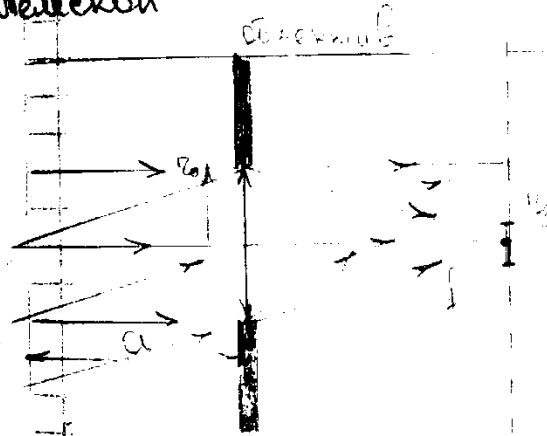
δL - предел линейного разрешения прибора

$R = \frac{1}{\delta L}$ - разрешающая способность

$$R = \frac{1}{\delta\theta}$$

Инвариант преобразования
инвариант точки
и расстояния изображения

Телевизор



$$a \gg \frac{\tau_0^2}{\lambda}$$

$$d_0 \leq d_g = \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\lambda}{8}$$

$$\tau_g = f \frac{\lambda}{d_0} = 1,22$$

$$f \cdot \theta \geq \tau_g = 1,22 f \frac{\lambda}{d_0}$$

$$\theta \geq 0,61 \frac{\lambda}{\tau_0} = \delta\theta$$

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{\tau_0}{0,61 \lambda}$$

$$\tau_0 = 2 \text{ см}, \lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$$

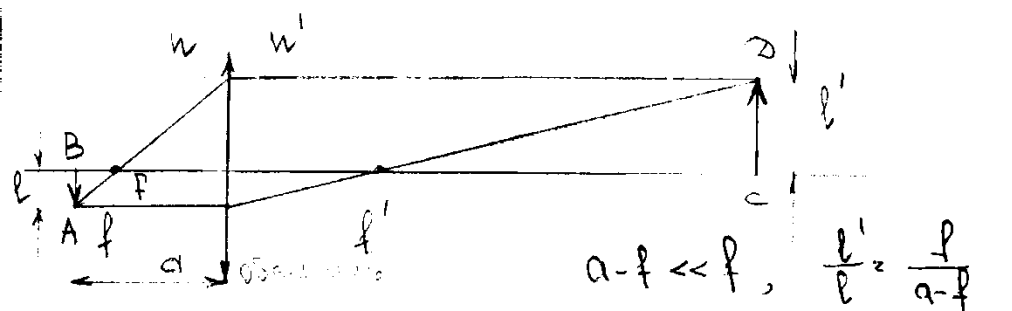
$$R \approx 7 \cdot 10^6 \text{ лог}^{-1}$$

$$\delta\theta = 0,03''$$

$$\text{кач } \tau_0 = 2 \text{ см}$$

$$\delta\theta = 30''$$

Микроскоп. Уравнение лучей АБВ.
 Коэффициент и коэффициент
 освещенности. Числовая апертура
 объектива. Увеличение



$$a - f \ll f, \quad \frac{l'}{l} = \frac{f}{a - f}$$

Любые две сопряженные точки соединяются
 лучами, разность хода между которыми
 равно нулю

l мало (разность хода соопр.
 точкам равна нулю) и сопр.

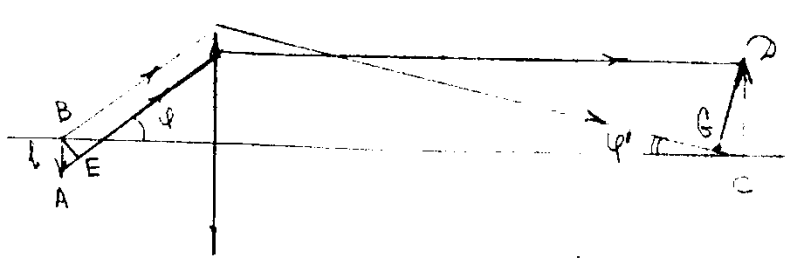
$$\Delta(AFD) - \Delta(BFC) \ll \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\Delta(AF) + \Delta(FD) - \Delta(BF) - \Delta(FC) \ll \frac{\lambda_0}{2}$$

$$n \left\{ \sqrt{l^2 + (a-f)^2} - (a-f) \right\} \ll \frac{\lambda_0}{2}$$

$$l \ll (a-f)$$

$$\frac{l^2}{2(a-f)} \ll \frac{\lambda_0}{2} n = \frac{\lambda_0}{2} \rightarrow l \ll \sqrt{2(a-f)\lambda_0} \ll (a-f)$$



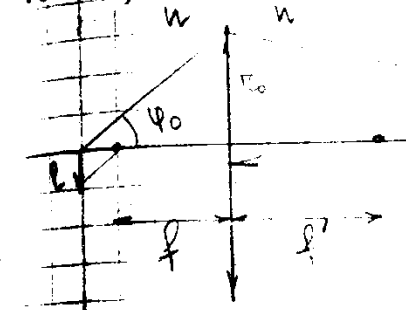
b > a

$$\Delta(AED) = \Delta(BGC)$$

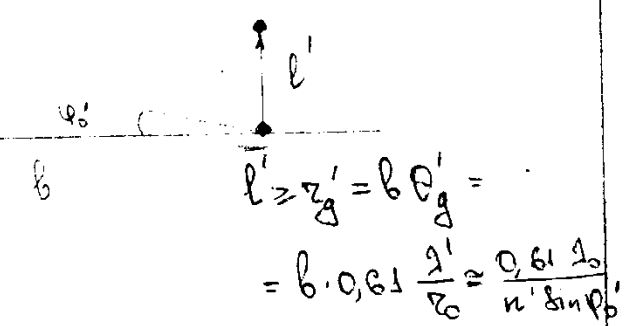
$$\Delta(AE) + \Delta(ED) = \Delta(BG) + \Delta(GC)$$

$$n \cdot l \cdot \sin \varphi = n' \cdot l' \cdot \sin \varphi'$$

Корректированное, освещенное



Ур-ние лучей АБВ
 (маленький угол $\Delta \ll \lambda_0 - \lambda$)



$$n' l' \sin \varphi_0 \geq 0,61 \lambda_0$$

$$n l \sin \varphi_0 \geq 0,61 \lambda_0$$

$$l \geq \frac{0,61 \lambda_0}{n \sin \varphi_0} = \delta l$$

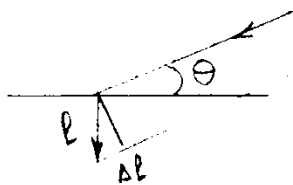
$$\delta l = \frac{1}{\delta l} = \frac{n \sin \varphi_0}{0,61 \lambda_0}$$

$n \sin \varphi_0$ - числовая апертура объектива

$$\delta l \approx \frac{0,61 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 0,5} = 0,4 \text{ мкм} \approx 0,8 \lambda_0$$

Увеличение увеличивает угловую
 разрешающую способность
 объектива

Конструктивное освещение



$\odot \rightarrow$ Директивная функция

$$\Delta\varphi = \cos\Delta = \cos n \delta l = \cos n l \sin\theta$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

min: $\Delta\varphi = (2k+1)\pi, k=0,1,\dots$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n l \sin\theta = (2k+1)\pi$$

$$l = \frac{2k+1}{2n \sin\theta} \lambda_0 = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

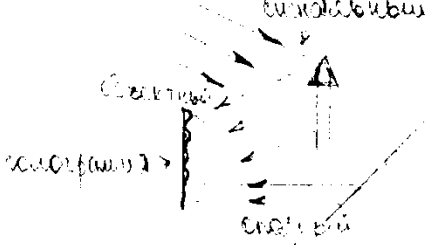
$$\sin\theta = \frac{2k+1}{2l} \lambda < 1$$

$$l > \frac{2k+1}{2} \lambda \geq \frac{\lambda_0}{2n}$$

$$\delta l = \frac{\lambda}{2n} = 0,33 \lambda_0$$

8.6. Запись и восстановление светового поля - голография.

- 1-я идея: 1920 год Менислав Вольфке (Тайвань)
- 1948 год венгерский ученый (ж.н. 1961) (2х мерная голография) - Демис Лабор
- 3х мерная голография - Демесюк (СССР) 1962



$$A(x,y) = A_0 \cos + A_{0n}$$

$$I(x,y) = I_0 \cos + I_{0n} + \frac{1}{2}(A_0 A_{0n}^* + A_0^* A_{0n})$$

$$A'(x,y) = A_{0n} t(x,y) = A_{0n} (1 - \alpha I(x,y)) =$$

$$= A_{0n} - A_{0n} \alpha [I_0 \cos + I_{0n} + \frac{1}{2}(A_0 A_{0n}^* + A_0^* A_{0n})]$$

$$= A_{0n} (1 - \alpha (I_0 \cos + I_{0n})) - \frac{\alpha}{2} A_0^* A_{0n}^2 - \frac{\alpha}{2} A_0 \cos A_{0n} A_{0n}^*$$

Дифракционная решетка (суперструктура)

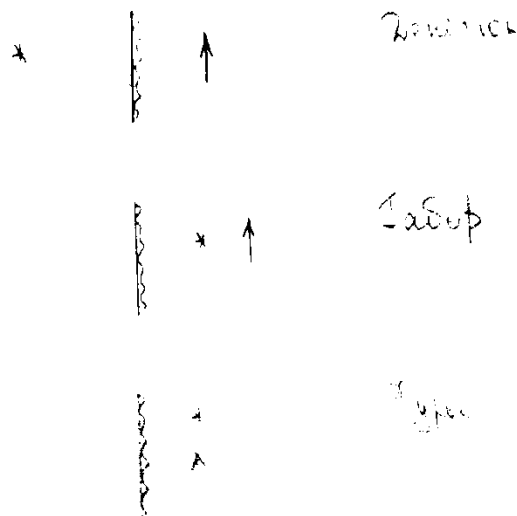
интерференция

$$= A_0 \cos + I_{0n}$$

конструкция голограммы

Классификация голограмм

- по форме рассеивающей среды (соответственно двумерная и трехмерная)
- расположение объекта и опорного излучения



Глава 5. Распространение света в веществе.

$$\vec{F}_c = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_v = q[\vec{v}_q \cdot \vec{B}]$$

$$\frac{F_v}{F_c} = \frac{q \cdot v_q B \sin(\vec{v}_q \cdot \vec{B})}{qE} \approx \frac{v_q}{E/B} \approx \frac{v_q}{c} \ll 1$$

§1. Дисперсия и поляризация света

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \leftarrow \text{вектор поляризации}$$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V} = \sum_j N_j \vec{P}_j = N \vec{p}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \quad \text{для угловой сферы} \quad \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E}$$

§2. Поляризуемость молекулы и вектор поляризации. Формула Лоренца-Кларуца.

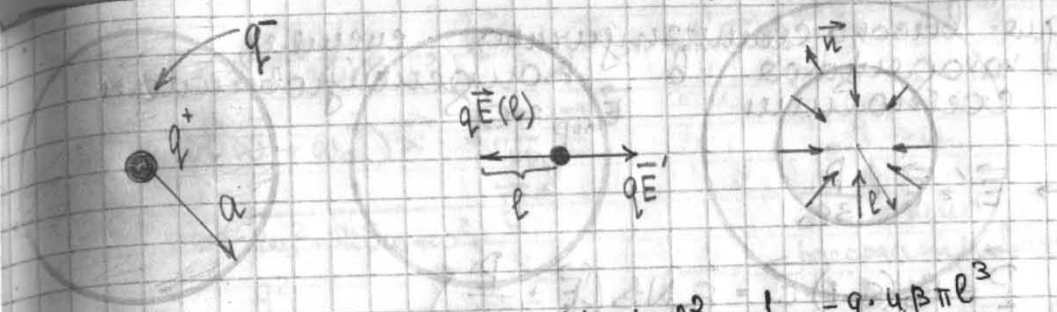
$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j$$

$$D_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$$

Узонарное в-во может быть "поглощено" как из узонарных, так и из аизонарных молекул.

$$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}' \quad \vec{E}' \neq \vec{E}$$

$$[\beta] = \frac{[P]}{[\epsilon_0][E']} = \frac{K_1 \cdot \omega \cdot K_2 \cdot \omega^2 K_1}{K_1^2 \cdot \omega} = \omega$$



$$-E(l) \cdot 4\pi l^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{-q \cdot 4\pi l^3}{4\pi a^3}$$

$$E(l) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{l}{a^3} = E'$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (4\pi a^3) \vec{E}' = \epsilon_0 \beta \vec{E}'$$

$$\beta = 4\pi a^3 \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-30} = 10^{-29} \text{ м}^3 \quad \text{поляризуемость}$$

$$\vec{P} = N \vec{p}$$

1. равномерный газ

$$\vec{E}' \approx \vec{E}$$

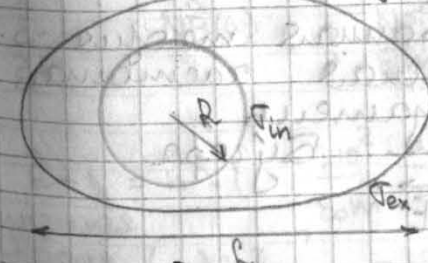
$$P = N \vec{p} = N \epsilon_0 \beta \vec{E}' \approx \epsilon_0 (N \beta) \vec{E} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$$

$$\alpha = \epsilon - 1 = N \beta \approx 10^{25} \cdot 10^{-29} = 10^{-4}$$

2. плотная среда

концентрированный диэлектрик!

$$R \gg a, R \ll l$$



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ex} + \vec{E}_{in} + \vec{E}_{ip}$$

\vec{E} поле внутри диэлектрика

\vec{E}_{in} поле Лоренца (поле, создаваемое на поверхности n-ми диэлектрика при однородной поляризации)

$$\vec{E}_{in} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

для высокоэнергетических элементов, находящихся в конденсированном состоянии $\vec{E}_{\text{вп}} \approx 0$

$$\rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\underbrace{\epsilon - 1}_{\alpha}) \vec{E} = \epsilon_0 N \beta \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 N \beta \left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0 (\epsilon - 1)} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N\beta}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Ф-иа} \\ \text{Лоренца - Клаузиуса} \\ \text{Лоренц - Лоренца} \end{array}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$

немагнитные среды: $\mu \approx 1 \rightarrow n = \sqrt{\epsilon}$

тогда:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\beta}{3}$$

1.2. Классическая электромагнитная теория дисперсии. Плазменная частота. Комплексный показатель преломления. Закон Бюгера.

$$m \ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x} + qE'$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E'$$

$$S = \frac{q}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \vec{E}'(t, \vec{r}) = A'(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2) \vec{x} = \frac{q}{m} \vec{E}'$$

$$\vec{x} = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} \vec{E}'$$

$$\vec{P} = q \vec{x} = \frac{q^2}{m} \frac{\vec{E}'}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} = \epsilon_0 \beta \vec{E}'$$

$$\beta(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$1. \beta \uparrow \uparrow E'$$

$$2. \beta(\omega), \vec{P}(\omega), \vec{D}(\omega) = N\beta \vec{E}$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N\beta}{3} \rightarrow \epsilon - 1 \approx N\beta$$

$$n = n(\omega)$$

$$3. \hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon(\omega) - i\epsilon'(\omega)$$

$$\hat{n}(\omega) = n(\omega) - i n'(\omega)$$

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n} = k - ik'$$

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{v}, \quad k' = \frac{\omega}{c} n'$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N\hat{\beta}(\omega)}{3} = \frac{1}{3} \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\hat{\epsilon} - 1 = \hat{n}^2 - 1 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}}$$

$1 \gg a$
 \vec{r} можно рассматривать не как радиус-вектор электрона, а как радиус-вектор атома

$$\frac{\hat{\epsilon}-1}{\hat{\epsilon}+2} = \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2} = \omega_n^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$E(t, z) = A(z) e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t - k'z)} = A_0 e^{i(\omega t - kz)} e^{-k'z}$$

увеличение длины волны
в фазе и амплитуде

$$k' = \frac{\omega}{c} n'$$

$$I(t, z) = I_0 e^{-2k'z} = I_0 e^{-2\frac{\omega}{c} n'z} \quad \text{з-н Бугера}$$

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c} n'(\omega) \quad \text{линейный коэффициент затухания}$$

линейный коэффициент затухания

$$\hat{n}^2 - 1 \approx 2(\hat{n} - 1) = \omega^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

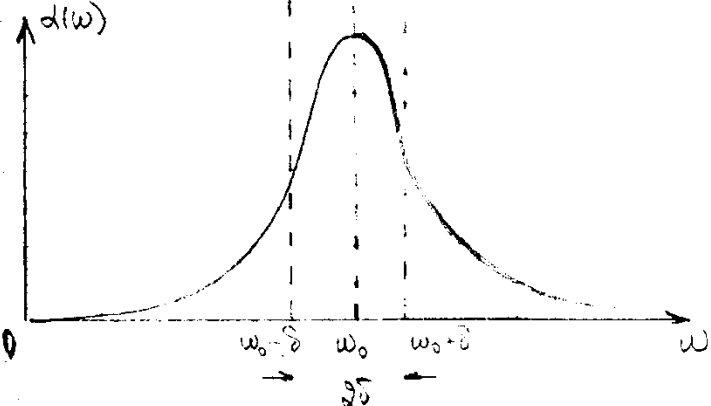
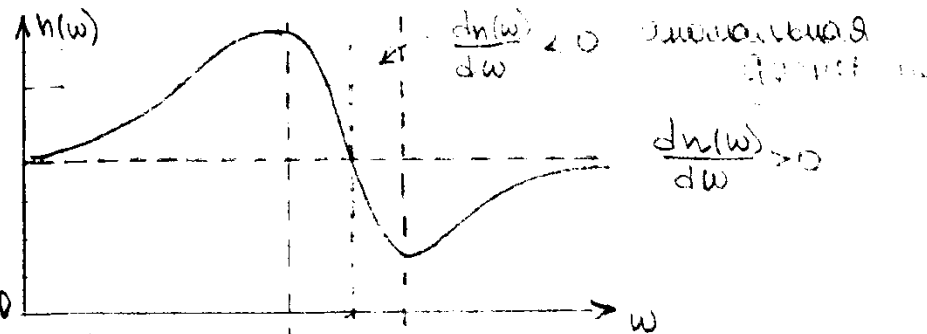
$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_n^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega_n^2}{2} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$n(\omega_0 \rightarrow 0) = 1 + \frac{\omega_n^2}{2\omega_0^2}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{\omega_n^2}{2} \cdot \frac{1}{2\delta}$$

$$\delta \ll \omega_0$$



1.3. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная ф-ла Делюэра.

$$\vec{P} = \sum_j N_j \vec{p}_j = \epsilon_0 \sum_j N_j \beta_j \vec{E}$$

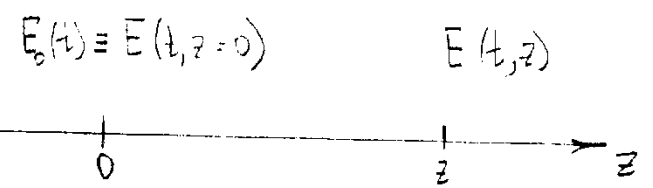
$$\hat{\epsilon} - 1 = \sum_j N_j \beta_j = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i2\delta_j \omega} = \omega_n^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i2\delta_j \omega}$$

$$f_j = \frac{N_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j} \cdot \frac{\epsilon_0 m}{N q^2} \sim \frac{m}{m_j} \quad \text{ф-ла Делюэра}$$

классическая формула

$$R = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \frac{M}{\rho} = \frac{N B M}{3 \rho} = \frac{N A B}{3} \neq f(\rho)$$

2.4. Распространение световой волны в диспергирующей среде $k(\omega)$



Фурье-анализ, спектральное преобразование и Фурье-интеграл световой волны.

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

$\Delta\omega: \tau \approx 2\pi$
 $\Delta\omega \ll \omega_0$
(узкополосная волна)
 $\tau \gg T_0$

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega) e^{-ik(\omega) \cdot z}$$

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega, z) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-ik(\omega)z} e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega$$

$$k(\omega) \approx k_0 + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)^2$$

- (1) $k'_0 \gg \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)$: диспергирующая среда 1-го порядка
- (2) $k'_0 \sim \frac{1}{4} k''_0 \Delta\omega$: диспергирующая среда 2-го порядка

$$(1) k'_0 \gg \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)$$

$$\Delta\omega \ll 4 \frac{k'_0}{k''_0} \quad k'_0 \gg \sim \frac{1}{4} k''_0 \Delta\omega$$

$$(2) k'_0 \sim \frac{1}{4} k''_0 \Delta\omega$$

распространяющаяся световая волна. Скорость (для носителя) и групповая скорость (для огибающей) различны.

Фазовая и групповая скорости.

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-ik_0 z} e^{-ik'_0(\omega - \omega_0)z} e^{i\omega(t-t')} d\omega dt'$$

$$= e^{-i(k_0 - k'_0 \omega_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t'-k'_0 z)} d\omega \right\} dt'$$

$$= e^{-i(k_0 - k'_0 \omega_0)z} E_0(t - k'_0 z)$$

$$I(t, z) = \frac{1}{2} |E(t, z)|^2 = I_0(t - k'_0 z)$$

интенсивность не меняется с зрением

$$\delta(t - k'_0 z) = 0 \quad (\text{одномерное уравнение движения})$$

$$v_0 \equiv \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{1}{k'_0} = \frac{d\omega}{dk} |_{\omega = \omega_0}$$

Групповая скорость распространения узкополосной волны в диспергирующей среде 1-го порядка — скорость движения огибающей; скорость переноса энергии и импульса.

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)} = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega} k(\omega) = \frac{1}{c} n(\omega) + \frac{\omega}{c} \frac{d}{d\omega} n(\omega)$$

$$u(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v(\omega)}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

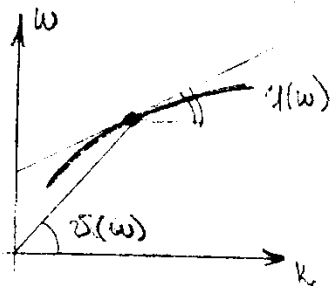
для нормальной дисперсионной среды $\frac{dn}{d\omega} > 0 \Rightarrow$

$$u(\omega) \leq v(\omega)$$

числовая фаза

$$u(\omega) \leq c$$

$v(\omega)$ - фазовая скорость (скорость соответствующих спектральных компонент)



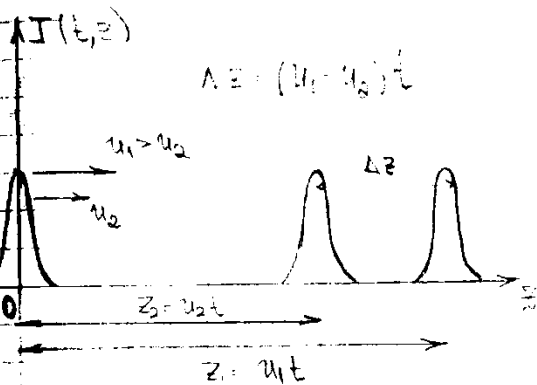
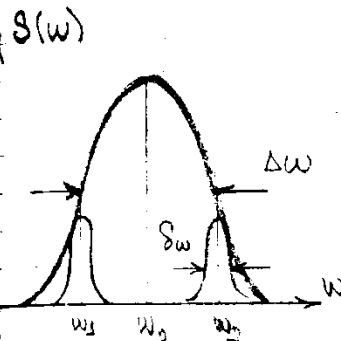
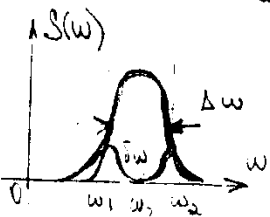
не путать с групповой скоростью, которая является скоростью распространения энергии

Дисперсионное расщепление волновых пакетов. Дисперсионная группа светового импульса.

дисперсионная среда 2-го порядка

$$k_0'' \approx \frac{k_0''}{4} \Delta\omega$$

представим импульс как совокупность узкополосных импульсов $\Delta\omega$ на частотах ω_1 и ω_2 , для которых $k_0'' \gg \frac{k_0''}{4} \Delta\omega$ (г.с.1н)



$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 u_2} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) z_1 = (k_2' - k_1') z_1 \approx k_0'' \Delta\omega z_1 = \frac{2\pi k_0''}{\tau} z_1 \rightarrow \tau$$

$$z_{\text{групп.}} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''}$$

расстояние в направлении распространения импульса на котором дисперсионность импульса увеличивается в 2 раза - дисперсионная длина импульса

$z \gg z_{\text{групп.}}$ - дальняя область дисперсии

$$\tau = 10^{-12} \text{ с}, k_0'' \approx 3 \cdot 10^{-26} \frac{\text{с}^2}{\text{м}} \rightarrow z_{\text{групп.}} \approx 5 \text{ м}$$

р-ла Рэлея

$$\omega = k(\omega) v(\omega)$$

$$u(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = v(\omega) + k(\omega) \frac{dv}{dk}$$

$$k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda(\omega)}$$

$$dk(\omega) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u(\omega) = v(\omega) - \lambda(\omega) \frac{d\lambda}{d\lambda}$$

формула Рэлея

§2. Амперские явления на границе раздела изотропных диэлектриков.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$$

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau}$$

$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$$

$$\vec{H}_{2\tau} = \vec{H}_{1\tau}$$

$$[\vec{n} \vec{E}] = \nu \vec{B}$$

$$[\vec{n} \vec{H}] = \nu \vec{D}$$

(3) и (4)

см. сайт.

2.1. Законы отражения и преломления света

2.2. Формулы Френеля

2.3. Эффект Брюстера

2.4. Явления полного внутреннего отражения

2.5. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

§3. Распространение волн в анизотропных средах.

3.1. Описание гуденбургских свойств анизотропных сред. Главные гуденбургские оси.

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \alpha_{ij} E_j$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

негустер

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$D_i = \epsilon_0 E_i + \epsilon_0 \sum_j \alpha_{ij} E_j = \epsilon_0 \sum_j (\delta_{ij} + \alpha_{ij}) E_j =$$

$$= \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

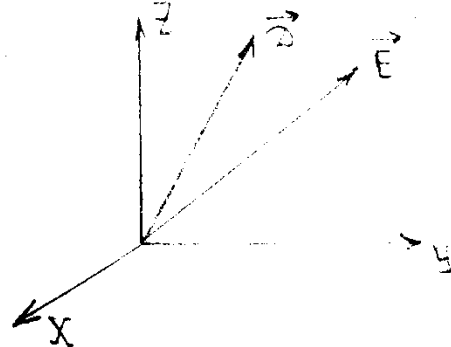
главные гуденбургские оси кристалла =
главные направления кристалла =
собственные оси тензора: $\{X, Y, Z\} = I$

$$\epsilon_{I3} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\}$ - главные диэлектрические проницаемости

$$D_I = \epsilon_0 \epsilon_I E_I$$

$$I = \{X, Y, Z\}$$



3.2. Плоские электромагнитные волны в изотропной среде.

Структура световой волны при изотропии, нормаль и луч фазовая и лучевая скорости.

$$f(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = 0$$

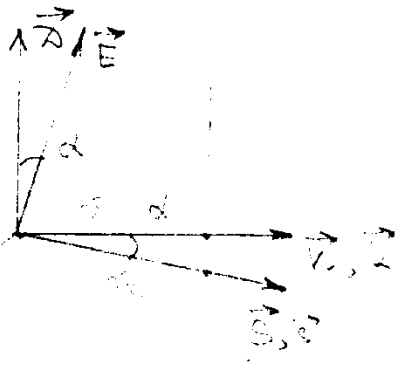
$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

$$[\vec{n} \cdot \vec{E}] = v \vec{B}$$

$$[\vec{n} \cdot \vec{H}] = -v \vec{D}$$

рассматриваем среду $\mu \approx 1$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$



немагнитоактивные

где $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

α - угол изотропии

$\vec{S} = \frac{\vec{r}}{S}$ вектор-луч

перенос энергии осуществляется в направлении $\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$

Лучевая скорость - скорость переноса энергии (\rightarrow импульса) плоской э/м волны

$$\vec{v}_g = v_g \vec{S}$$

$$v = v_g \cos \alpha$$

v - фазовая скорость
 v_g - лучевая скорость

Лучевые скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормаль.

$$[\vec{n} \cdot \vec{E}] = v \vec{B}$$

$$[\vec{n} \cdot \vec{H}] = -v \vec{D}$$

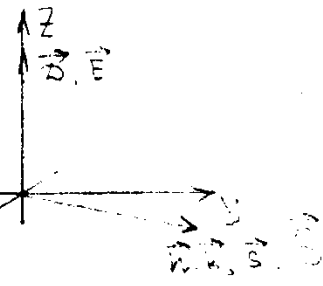
$$v \vec{D} + \frac{1}{\mu_0 v} [\vec{n} [\vec{n} \cdot \vec{E}]] = 0$$

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = 0$$

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{E}) - \vec{E} = 0$$

$$D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z$$

$$D_{x,y} = 0; E_{x,y} = 0$$



$$\mu_0 v_z^2 D_z + 0 - E_z = 0 \rightarrow v_z^2 = \frac{1}{\epsilon_z \mu_0 \epsilon_z} = \frac{c^2}{\epsilon_z}$$

н.в. индекс ϵ_z зависит от направления распространения волны (не изотропия)

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{c}{n_z}$$

аналогично

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} = \frac{c}{n_x}$$

$$v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} = \frac{c}{n_y}$$

v_x, v_y, v_z - главные скорости оптически анизотропной среды.

$$v_I = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_I}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_I}} = \frac{c}{n_I}$$

запишем ур-ние $\mu_0 v^2 \vec{\Delta} + \vec{n}(\vec{n} \vec{E}) - \vec{E} = 0$ в проекциях на главные диэлектрические оси:

$$\mu_0 v^2 \Delta_I + n_I (\vec{n} \vec{E}) - E_I = 0$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_I v^2 E_I - E_I + n_I (\vec{n} \vec{E}) = 0$$

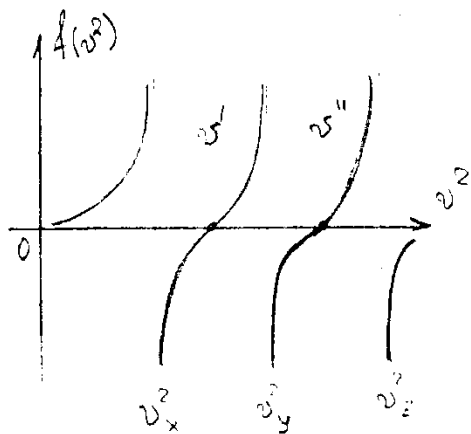
$$-n_I (\vec{n} \vec{E}) + (1 - \frac{v^2}{v_I^2}) E_I = 0$$

$$\sum_I \frac{n_I^2 (\vec{n} \vec{E})}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} - \sum_I n_I^2 E_I = 0$$

$$\sum_I \frac{n_I^2 \frac{v^2}{v_I^2}}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} = 0$$

$$\sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2} = 0$$

$$f(v^2) = \sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2}$$



Эта функция имеет полюсы в точках v_x^2, v_y^2, v_z^2

$$\mu_0 v^2 \Delta^2 - \vec{E} \Delta = 0$$

$$v^2 = \sum_I \frac{\epsilon_I \Delta_I}{\mu_0 \Delta^2} = \sum_I v_I^2 \left(\frac{\Delta_I}{\Delta}\right)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 v'^2 \vec{\Delta}' + \vec{n}(\vec{n} \vec{E}') - \vec{E}' &= 0 \\ \mu_0 v''^2 \vec{\Delta}'' + \vec{n}(\vec{n} \vec{E}'') - \vec{E}'' &= 0 \end{aligned} \right\} \vec{\Delta}''$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 v'^2 \vec{\Delta}' \vec{\Delta}'' - \vec{E}' \vec{\Delta}'' &= 0 \\ \mu_0 v''^2 \vec{\Delta}'' \vec{\Delta}' - \vec{E}'' \vec{\Delta}' &= 0 \end{aligned} \right\} -$$

$$\mu_0 (v'^2 - v''^2) \vec{\Delta}' \vec{\Delta}'' = 0$$

$$\vec{E}' \vec{\Delta}'' = \sum_I (\epsilon_I' \epsilon_I) E_I'' = \sum_I \Delta_I' E_I'' = \vec{\Delta}' \vec{E}''$$

если $v' \neq v''$ $\vec{\Delta}' \perp \vec{\Delta}''$

Уравнение Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча

$$[\vec{D} [\vec{n} \vec{E}]] = v \vec{B}$$

$$[\vec{E} [\vec{n} \vec{H}]] = -v \vec{D}$$

$$\vec{n} (\vec{S} \vec{E}) - \vec{E} (\vec{S} \vec{n}) = v [\vec{S} \vec{B}]$$

$$\vec{n} (\vec{S} \vec{H}) - \vec{H} (\vec{S} \vec{n}) = -v [\vec{S} \vec{D}]$$

$$\vec{S} \vec{n} = \cos \alpha = \frac{v}{v_s}$$

$$v = v_s \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\vec{E} \cdot \frac{1}{v_s} &= [\vec{S} \vec{B}] \\ \vec{H} \cdot \frac{1}{v_s} &= [\vec{S} \vec{D}] \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{v_s} \vec{E} = -[\vec{S} [\vec{S} \vec{D}]] \mu_0 v_s$$

$$\frac{1}{\mu_0 v_s^2} \vec{E} + \vec{S} (\vec{S} \vec{D}) - \vec{D} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 v^2 &\rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2} \\ \vec{n} &\rightarrow \vec{v} \\ \vec{E} &\rightarrow \vec{D} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n} (\vec{n} \vec{E}) - \vec{E} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0 v_s^2} \vec{E} + \vec{S} (\vec{S} \vec{D}) - \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_I \frac{S_I^2 v_I^2}{v_s^2 - v_I^2} = 0 \quad \vec{S}: v_s', v_s''$$

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2 \quad \vec{E}' \perp \vec{E}'' \quad (v_s' \neq v_s'')$$

Эллипсоид лучевых скоростей.

Оптическая осев.

Классификация анизотропных сред.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v_s^2} &= \sum_I \frac{1}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2 \\ X_I &= v_s \frac{E_I}{E} \end{aligned} \right\} \sum_I \frac{X_I^2}{v_I^2} = 1$$

Эллипсоид лучевых скоростей

$$\vec{R} = v_s \frac{\vec{E}}{E}$$

$$R = v_s$$

Вектор скорости волны распространяется в направлении нормали к поверхности эллипсоида в данной точке.

Оптические оси кристалла (анизотропной среды) - направления, перпендикулярные плоскостям, делящим в сечении эллипсоида окружность

1. Двухосные анизотропные среды
2. Одноосные анизотропные среды
3. Эллипсоид - сфера. (полная симметрия) (изотропной кристалл)

3.4. Лучевая поверхность и ее сечение. Фронт волны. Направление нормали и лучей.

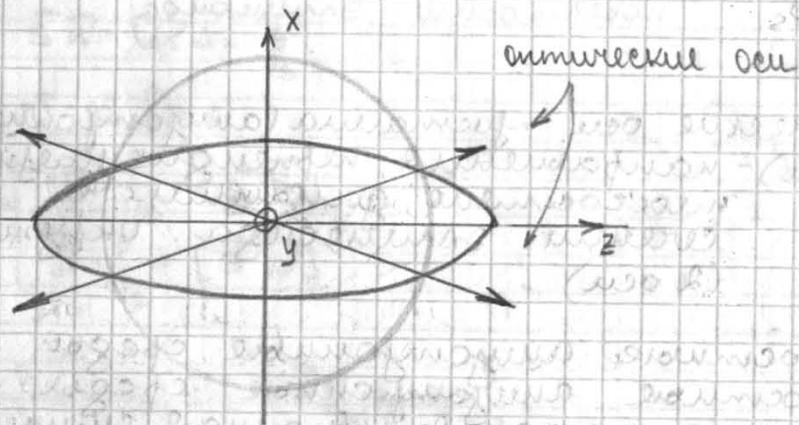
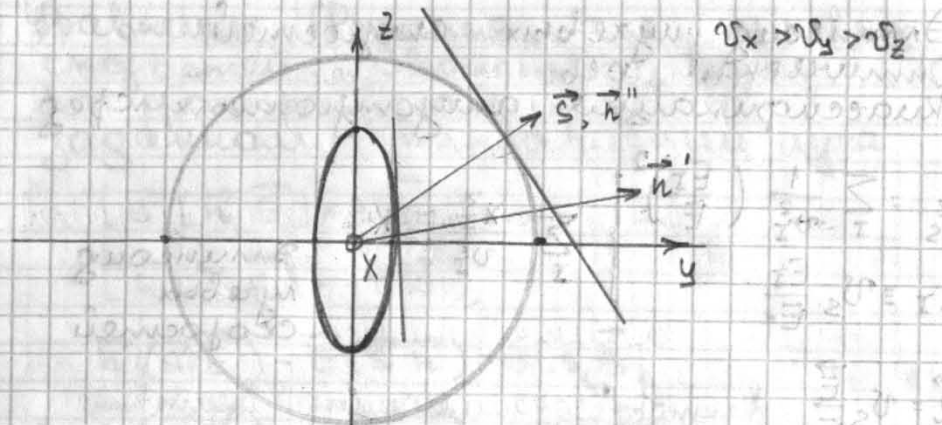
$$v_s^2 \sum_I \frac{S_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0$$

$\sum \frac{X_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0$ двухосная (сампересекающаяся) поверхность

$$X_I = v_s S_I$$

$$\vec{R} = v_s \vec{S} = \vec{v}_s$$

Лучевая n-ть - поверхность светового возмущения (допускает пересечение) для волн, распространяющихся в направлении нормали к поверхности эллипсоида в данной точке.



§ 5. Симметричные свойства одноосевых кристаллов.

$v_x \neq v_y = v_z$

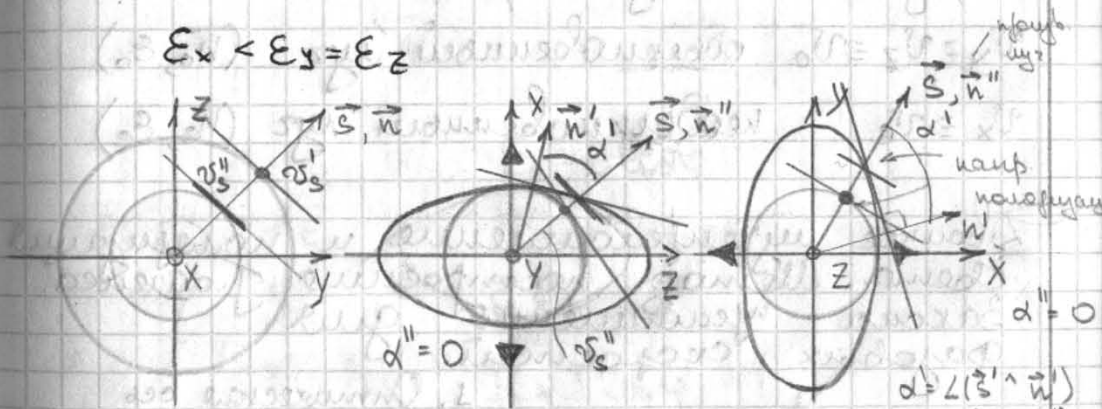
Ось z является осью вращения симметричного

анизотропного и положительных кристаллов, сечение уровней сферический.

$v_x > v_y = v_z$ отрицательный кристалл

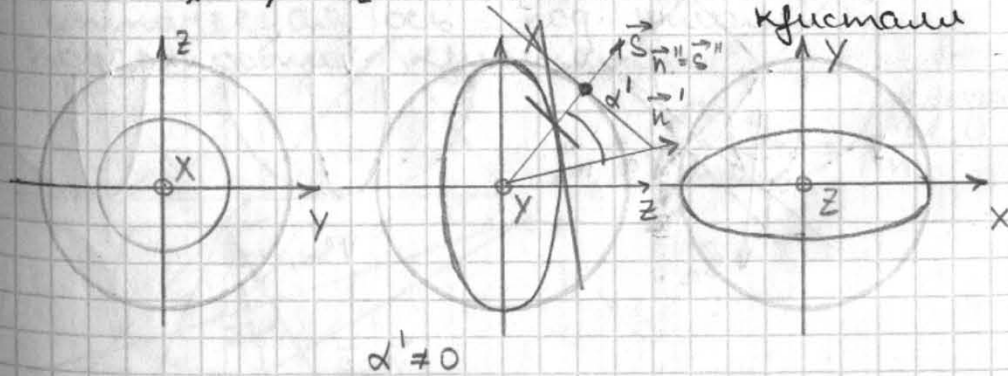
$n_x < n_y = n_z$

$\epsilon_x < \epsilon_y = \epsilon_z$



$\alpha' = \angle(\vec{n}' \wedge \vec{n}'')$
 $\alpha'' = \angle(\vec{n}'' \wedge \vec{n}''')$
 $\vec{n}' \perp \vec{n}'' \perp \vec{n}'''$

$v_x < v_y = v_z$ положительный кристалл



Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенный лучи.
 Взаимная ориентация фазовой и лучевой поверхности.

Полюса обыкновенного луча перпендикулярна главной плоскости.

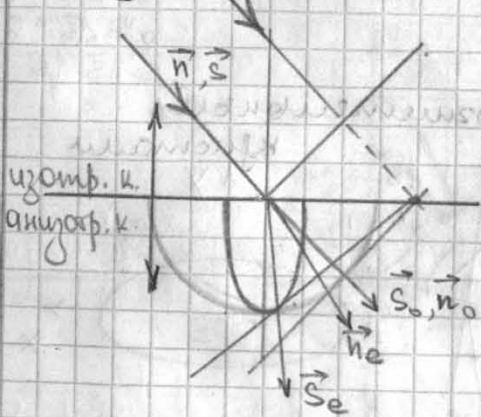
Скорость необыкновенного луча зависит от ориентации в пр-ве; его поляризация лежит в главной плоскости.

фазовая и лучевая

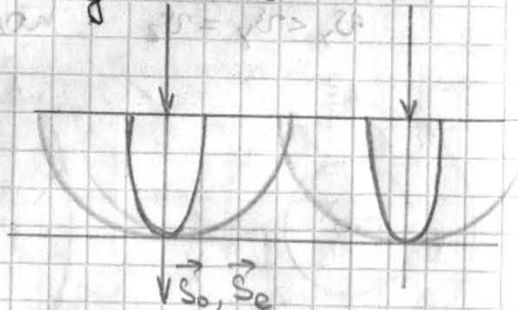
$v_y = v_z \equiv v_o$ обыкновенный луч (n_o, ϵ_o)

$v_x \equiv v_e$ необыкновенный луч (n_e, ϵ_e)

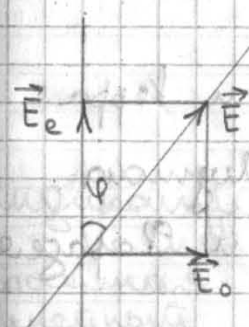
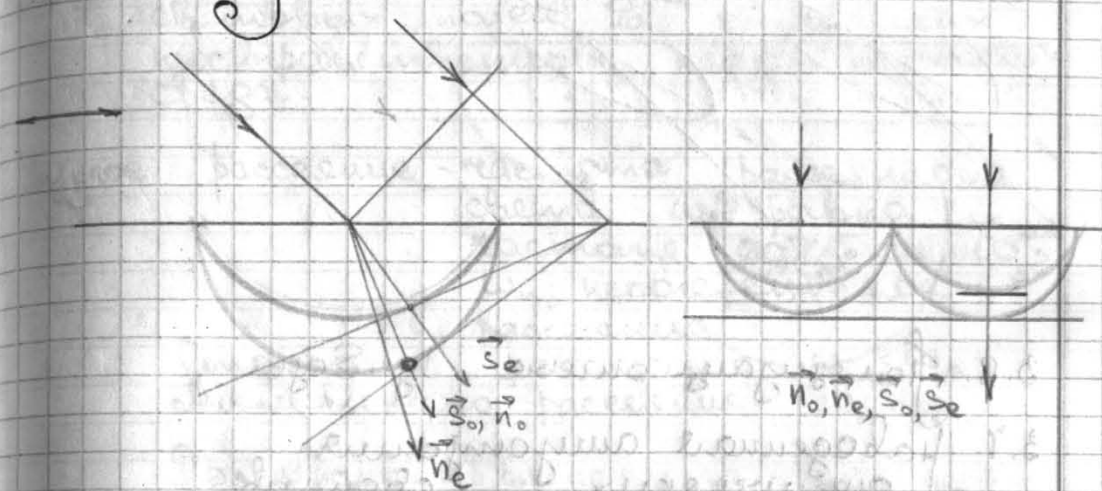
Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса. Законы преломления для фазовых скоростей.



1. Оптическая ось перпендикулярна n-ли кристалла



2. Оптическая ось параллельна поверхности кристалла.
 3-й закон Френеля.



$$E_e = E \cos \varphi$$

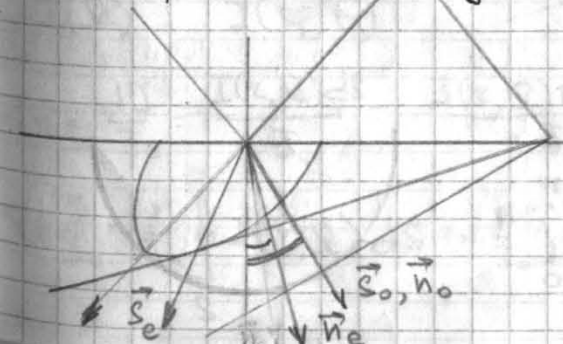
$$E_o = E \sin \varphi$$

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_o$$

$$I_e = I \cos^2 \varphi$$

$$I_o = I \sin^2 \varphi$$

3. Оптическая ось под углом к поверхности кристалла



$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_{t,o,e}} = \frac{n_{o,e}}{n_i}$$

§4. Рассеяние света
 Рассеяние света - возбуждение (уменьшение) световых полей на оптических неоднородностях среды.

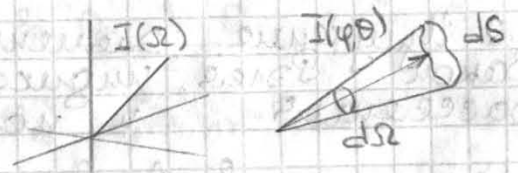
Упругое рассеяние - частота рассеянного света ω_p равна частоте падающего ω_n ; неупругое рассеяние.
 Стоксово рассеяние $\omega_p < \omega_n$
 Антискотсово рассеяние $\omega_p > \omega_n$
 Рэлеевское рассеяние - упругое когерентное рассеяние света на оптических неоднородностях, размеры которых $n \ll \lambda$

4.1. Индикатриса рассеяния, дифференциальный коэффициент рассеяния, коэффициент ослабления интенсивности, линейный коэффициент рассеяния

$$I(r, \Omega) \equiv I(r, \varphi, \theta)$$

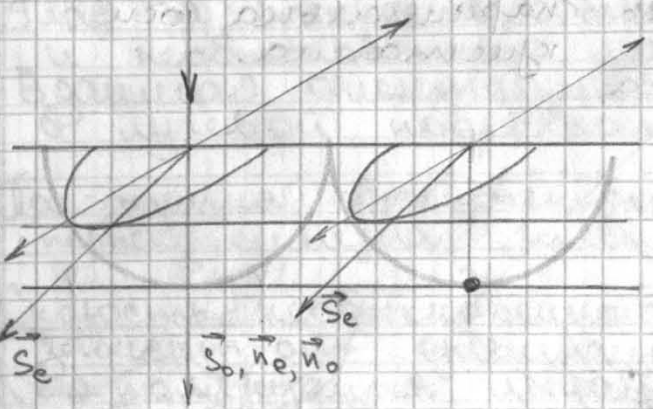
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$I(\Omega) \quad I(\varphi, \theta)$$



$$\Delta \sigma \equiv \frac{d\sigma}{I_0} = \frac{I(r, \Omega) d\Omega}{I_0} = \frac{I(r, \Omega) r^2 d\Omega}{I_0} \quad [d\sigma] = m^2$$

$$\Delta \Sigma \equiv \frac{\Delta \sigma}{I_0} = \frac{1}{I_0} \oint_S I(r, \Omega) d\Omega = \frac{1}{I_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I(r, \Omega) r^2 d\Omega = \oint \Delta \rho d\Omega$$



3.6. Плазменные кристаллы

3.7. Проведенная аннотация оптических свойств.

Фотонность

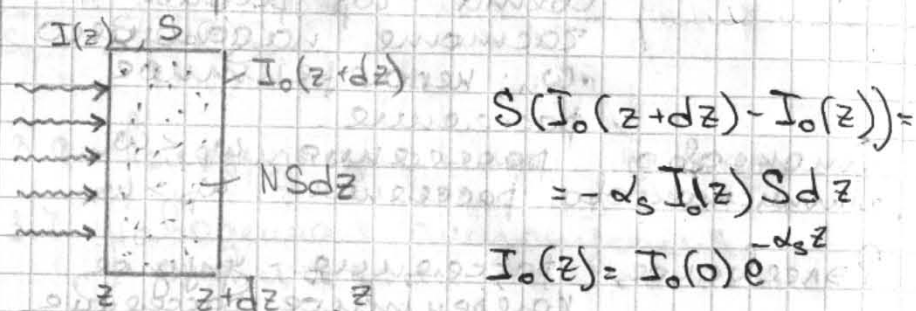
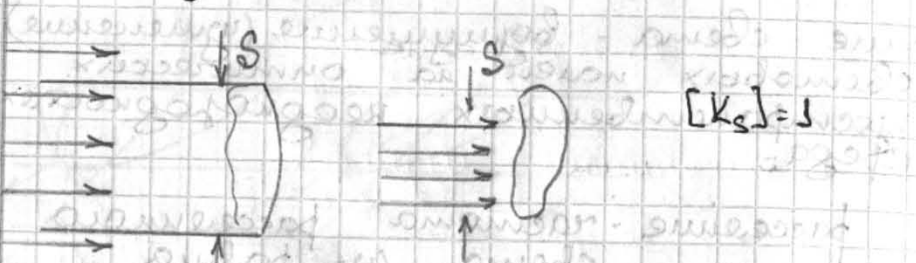
Эффекты Стокельса и Керра

Эффект Коттон-Мутона

Эффекты Зеемана и Фарадея

см. сайт.

$$K_s = \frac{J}{I_0} = \frac{J}{I_0 \cdot S} = \frac{J}{S}$$



$$S(I_0(z+dz) - I_0(z)) = -\alpha_s I_0(z) S dz$$

$$I_0(z) = I_0(0) e^{-\alpha_s z}$$

$$\alpha_s I_0(z) S dz = I_0(z) \sigma N S dz$$

$$\alpha_s = N \sigma$$

$$[\alpha_s] = \text{m}^{-1}$$

$$\alpha_s = 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^{-1}$$

$$\alpha_s = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{m}^{-1}$$

$$1/\alpha_s \approx 200 \text{m}$$

$$1/\alpha_s = 40 \text{km}$$

4.2. Излучение элементарного рассеивателя. Закон Рэлея, угловая зависимость рассеяния и поляризация

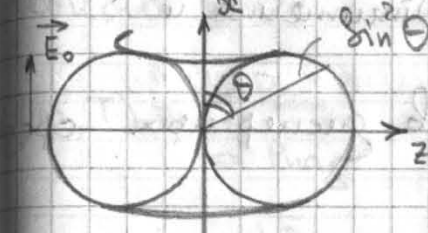
$$r \ll \lambda, r \ll z \quad (r \sim 1 \mu, \lambda \sim 10^{-6} - 10^{-7} \text{m}, z \sim 10^{-10} - 10^{-9} \text{m})$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}] (t - r/c)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c} [\vec{n} \times \dot{\vec{A}}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] (t - r/c)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{\vec{p}} \sin \theta$$

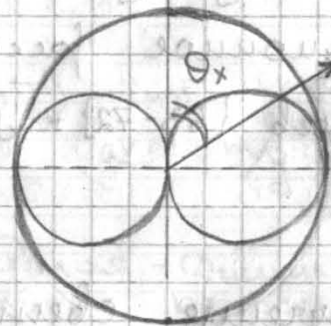
$$J = \langle E^2 \rangle = \frac{\omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \overline{\vec{p}^2} \sin^2 \theta$$



$$2. J \propto \omega^4$$

$$3. \vec{E} \perp (\vec{n}, \vec{E}_0)$$

$$I_0/2$$



$$J(\theta_z) = \frac{\omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \overline{\vec{p}^2} \frac{1 + \cos^2 \theta_z}{2}$$

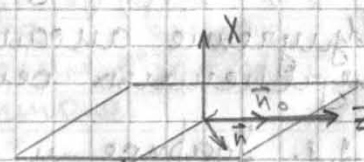
$$I_0/2$$

$$I_x \sim \sin^2 \theta_x \cdot \frac{1}{2}$$

$$I_y \sim \frac{1}{2} \sin^2 \theta_y$$

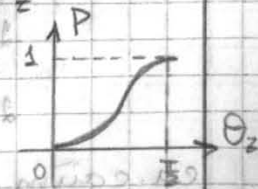
$$I = I_x(\theta_x) + I_y(\theta_y) \sim \frac{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta_z}{2}$$

$$\vec{n} = (\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z), \quad \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$



$$\frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \frac{I_x(\theta_x) - I_y(\theta_y)}{I_x(\theta_x) + I_y(\theta_y)} = \frac{1 - \cos^2 \theta_z}{1 + \cos^2 \theta_z}$$

$$\theta_x = \pi/2, \quad \theta_y = \theta_z = \pi/2$$



4.3. Молекулярное рассеяние света.

Статистическая теория рассеяния

Формулы Динштейна и Рэлея

4.4. Рассеяние Рэлея в дисперсных средах.

4.5. Рассеяние Ми.

4.6. Рассеяние Магдальштата-Бриллюэна (точка структура линии Рэлея).

4.7. Комбинационное рассеяние.

см. сайт + Мамбеев {63-72} + Алексеевич {128-151}

Глава 6. Излучение света.

§1. Классическая модель затухающего дипольного осциллятора.

1.1. Оценка времени затухания.

1.2. Естественная форма и ширина линии излучения.

§2. Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов.

2.1. Узкое и доплеровское уширение спектральной линии.

2.2. Положение об однородном и неоднородном уширении.

см. сайт.

3. Тепловое излучение.

3.1. Излучательная способность и ее соотношение с чернотой тела.

и поглощательная способность и их модель абсолютно

$$d(\omega, T) = \frac{d\bar{P}_{\text{нов}}}{d\bar{P}_{\text{абс}}}$$

$[\alpha] = 1$
поглощательная сн-ть

$$E(\omega, T) = \frac{d\bar{P}_{\text{изл}}}{d\Omega d\nu}$$

$[E] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$
излучательная сн-ть

$$\frac{E(\omega, T)}{d(\omega, T)} = \rho(\omega, T) - \text{интensity излучения в точке тела (для } m/g \text{ вещества)}$$

3.2. Формула Рэлея-Джинса.

3.3. Ограниченность классической теории излучения.

3.4. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина.

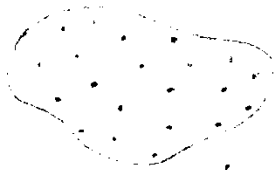
§1. Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами.

1.1. Квантовые свойства света. Фотоэлектрический эффект. Эффект Комптона.

1.2. Квантовые свойства атомов, постулат Бор

см. сайт.

4.3. Двухуровневая система



$N = \text{const}$

Характеристики стационарного состояния.

n, W_n, N_n, α_n

$$\sum_n N_n = N \neq f(t)$$

1. Переход из перенасыщенной n состояния в основное m происходит мгновенно

2. Существует вероятность перехода α_n из перенасыщенного n состояния в основное, другое, которое не зависит от того сколько времени атом находится в этом состоянии.

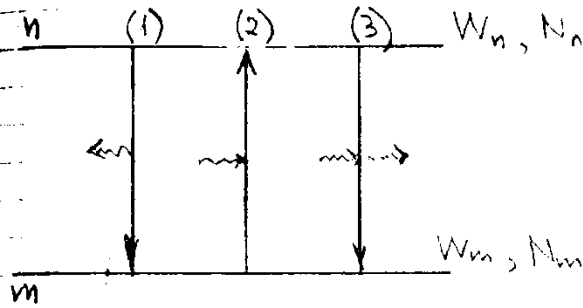
$$p_n(t+dt) = p_n(t) (1 - \alpha_n dt)$$

$$p_n(t) = \frac{p_n(0)}{1} e^{-\alpha_n t} \rightarrow p_n(t) = e^{-\alpha_n t}$$

$$N_n(t) = N_n(0) e^{-\alpha_n t}$$

Типы радиационных переходов
- Коэффициенты Эйнштейна

1. Спонтанное излучение
2. Принуденное
3. Вынужденное излучение



Излучение макроскопической системы
Фотонное излучение

$$h\omega_{nm} = W_n - W_m$$

$$P_{n,m}^{sp(1)} = A_{n,m} N_n h\omega_{nm}$$

$$P_{m,n}^{sp(2)} = B_{m,n} N_m h\omega_{nm} u(\omega_{nm})$$

$$P_{n,m}^{sp(3)} = B_{n,m} N_n h\omega_{nm} u(\omega_{nm})$$

$$[P] = \frac{2\pi h^3}{15 c^3}$$

$$[A_{nm}] = c^{-1}$$

$$A_{nm} = \alpha_n$$

$$[A_{nm} N_n] = \frac{1}{\omega^3 c}$$

где α_n — коэффициент радиационного перехода

Для системы, описанной на предыдущей странице
 $\omega_i < \omega_n$

$$d_n = \sum_i A_{ni}$$

$B_{mn} N_n u(\omega_{nm})$ - число актов поглощения/испускания в единицу времени.

$$[B_{mn} N_n u(\omega_{nm})] = \frac{1}{4^3 e}$$

$$[B_{mn} \cdot u(\omega_{nm})] = \frac{1}{e}$$

Взаимодействие с излучением при периодическом равновесии.



в соответствии с функцией детального равновесия (в случае м/г равновесия):

$$\bar{P}_{mn}^n = \bar{P}_{nm}^{en} + \bar{P}_{nm}^{bu}$$

$$B_{mn} N_m u(\omega_{nm}) = A_{nm} N_n + B_{nm} N_n u(\omega_{nm})$$

Взаимосвязь коэффициентов симметрии.

$$u(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m - B_{nm} N_n} = \frac{A_{nm}/B_{mn}}{\frac{B_{nm} N_n}{B_{mn} N_m} - 1}$$

$kT \gg \hbar \omega_{nm}$ (классический предел)

$$u(\omega_{nm}) = \frac{\omega_{nm}^2}{\pi^2 c^3} kT \quad \text{Ф-ла Планка}$$

$$N_m = N \frac{g_m \exp(-\frac{W_m}{kT})}{Z}$$

$$Z = \sum_i \exp(-\frac{W_i}{kT}) = \sum_m g_m \exp(-\frac{W_m}{kT})$$

$$N_n = N \frac{g_n}{Z} \exp(-\frac{W_n}{kT})$$

$$u(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm}/B_{mn}}{\frac{B_{mn} g_m}{B_{nm} g_n} e^{\frac{\hbar \omega_{nm}}{kT}} - 1}$$

$\hbar \omega \rightarrow \infty, u(\omega_{n,m}) \rightarrow \infty$

$$B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$$

$kT \gg \hbar \omega$

$$u(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm}}{B_{mn}} \frac{kT}{\hbar \omega_{nm}} = \frac{\omega_{nm}^2}{\pi^2 c^3} kT$$

$$\frac{A_{nm}}{B_{mn}} = \frac{\hbar \omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3}$$

Формула Планка

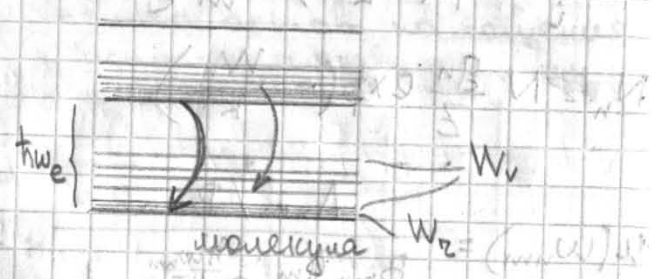
$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar \omega}{kT}) - 1}$$

Формула Вина, закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина

У.В. Кошут спектральной линии с.с.с.с.с.

§5. Многоуровневые системы

5.1. Энергетическая структура атомов, молекулы и твердых тел

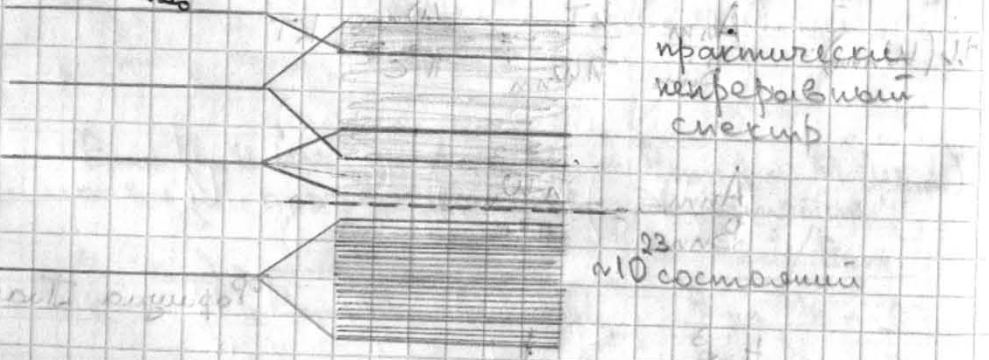


$W_v = h \omega_v (v + \frac{1}{2})$, $v = 0, 1, 2, \dots$ колебательное возбуждение

$W_z = \frac{J^2}{2I_0}$, $J_z = \sqrt{z(z+1)} \hbar$, $z = 0, 1, 2, \dots$ вращательное

→ носителя (квазиэнергетическое распределение)

$W_z = \frac{z(z+1) \hbar^2}{2I_0}$



Энергия Ферми - максимальная энергия, которой может обладать электронная система при 0K

5.2. Явление лэмберт-Ливинга

Определение и виды лэмберт-Ливинга
Механизмы и свойства

Квантовый и энергетический выходы, тушение лэмберт-Ливинга

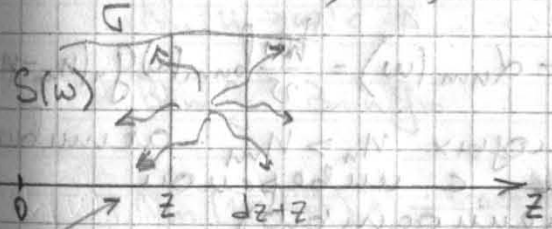
ср. ситм.

5.3. Резонансное усиление света

n, W_n, N_n

линейный коэффициент поглощения и инверсная заселенность энергетических уровней

m, W_m, N_m



$dS(\omega) \Gamma = (p_{nm}^{cn} + p_{nm}^{bu} - p^n) \Gamma dz$

$dS(\omega) = (a_{nm}(\omega) N_n + b_{nm}(\omega) N_m u(\omega) - b_{mn}(\omega) N_m u(\omega)) \hbar \omega dz$

$S(\omega) = \Gamma u(\omega)$

$dS(\omega) = \frac{\hbar \omega}{\Gamma} S(\omega) [\frac{a_{nm} N_n \Gamma}{S(\omega)} + b_{nm} N_n - b_{mn} N_m] dz$

после поглощения j-кванта (в случае спонтанного излучения) излучение равновероятно во всех направлениях

$$\rightarrow dS(\omega) = -d_{nm}(\omega) S(\omega, z) dz$$

$$d_{nm}(\omega) = \frac{h\omega}{25} (b_{mn} N_m - b_{nm} N_n)$$

$$S(\omega, z) = S_0(\omega) e^{-d_{nm}(\omega) z}$$

$$d_{nm}(\omega) = \frac{h\omega}{25} b_{nm} g_n \left(\frac{b_{mn} N_m g_m}{b_{nm} g_n g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right)$$

$$d_{nm}(\omega) = \frac{h\omega}{25} b_{nm} g_n (n_m - n_n)$$

$$n_{m,m} \equiv \frac{N_{n,m}}{g_{n,m}} \quad \text{одномерная}$$

распределенность

коэффициент усиления $\beta_{n,m}(\omega) = -d_{nm}(\omega) = \frac{h\omega}{25} b_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m)$

среды, где концы $n_n > n_m$ - активная (среды с инверсией заселенностью)

$$N_{n,m} = \frac{N}{Z} g_{n,m} \exp\left(-\frac{W_{n,m}}{kT}\right)$$

$$\frac{N_m}{N_n} = \exp\left(\frac{h\omega_{nm}}{kT}\right) > 1$$

Воздействие светового потока на заселенность уровней

Будем рассматривать стационарный случай, т.е. $\frac{dN_n}{dt} = 0$ (состояние равновесия)

$$0 = \frac{dN_n}{dt} = -A_{nm} N_n - B_{nm} N_n u(\omega_{nm}) + B_{mn} N_m u(\omega_{nm})$$

$$N = \text{const} \rightarrow N_m = N - N_n$$

$$\rightarrow N_n = \frac{B_{mn} u(\omega_{nm})}{A_{nm} + (B_{nm} + B_{mn}) u(\omega_{nm})} N$$

1. $u(\omega_{nm}) = 0$

$$N_n(u=0) = 0$$

$$N_m(u=0) = N$$

активна в основном состоянии

2. $u(\omega_{nm}) \rightarrow \infty$

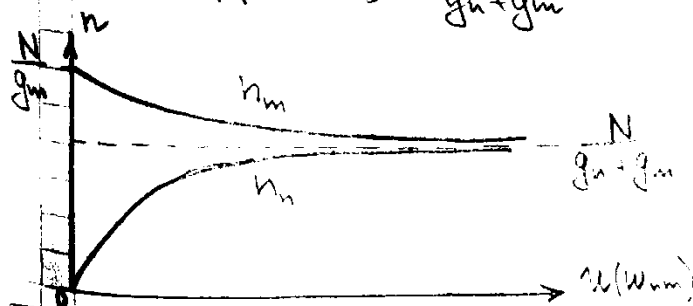
$$N_n(u \rightarrow \infty) = \frac{B_{mn} N}{B_{nm} + B_{mn}} = \frac{g_n N}{g_n + g_m}$$

$$B_{nm} g_n = B_{mn} g_m$$

$$N_m(u \rightarrow \infty) = \frac{B_{nm} N}{B_{nm} + B_{mn}} = \frac{g_m N}{g_n + g_m}$$

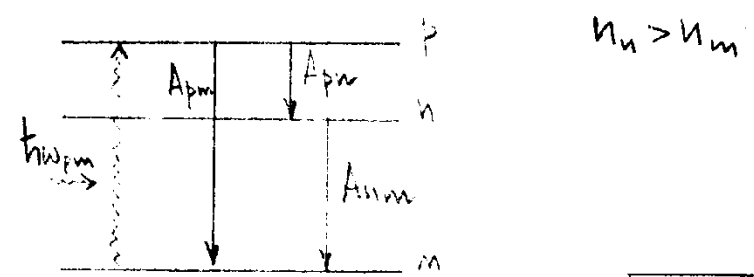
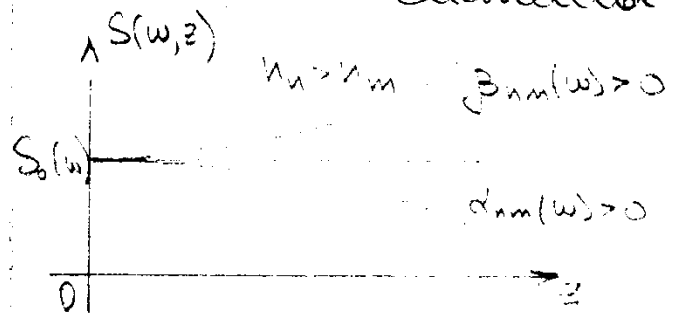
$$n_n(u \rightarrow \infty) = \frac{N}{g_n + g_m}$$

$$n_m(u \rightarrow \infty) = \frac{N}{g_n + g_m}$$



1955 Прохоров и Басов - трехуровневый метод получения инверсной заселенности

Получение инверсной заселенности с помощью трехуровневой системы



Необходимое условие: $A_{pn} g_p > A_{nm} g_n$

перевод системы в состояние р-каатка $p \sim 10^{-8}, n \sim 10^{-3}$

Н.В. Излучение когерентное!

6. Лазеры - устройство и принцип работы.

10.05 Акку

6.1. Принципиальная схема лазера. Условия стационарной инерации

$n_n = \frac{N_n}{g_n} > n_m = \frac{N_m}{g_m}$ среда с инверсной заселенностью

$\beta_{nm}(\omega) = \frac{h\nu\omega l}{v} \sigma_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m)$

$S(\omega, z) = S_0(\omega) e^{\beta_{nm}(\omega) z}$

Условия стационарной инерации:

1. Баланс амплитуд
2. Баланс фаз

6.2. Продольные и поперечные моды. Спектральный состав излучения. Ширина полосы усиления

6.3. Синхронизация мод, генерация сверхкоротких импульсов.

6.4. Характеристики лазеров

Рубиновый лазер

Гелий-неоновый лазер

CO₂-лазер

Лазеры на органических красителях

и сайт.

§7. Дециметровые оптические системы.

7.1. Палеоразация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения.

7.2. Среда с квадратичной нелинейностью. Оптическое детектирование и генерация гармоник.

7.3. Среда с кубической нелинейностью. Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник.

см. сайт.

833-50-70 (83-82)

881-38