Теоритический минимум по теоритической механике (допуск к экзамену).

Кинематика.

1. Выражение для радиус вектора и скорости точки в (a) декартовых, (b) цилиндрических, (c) сферических координатах.

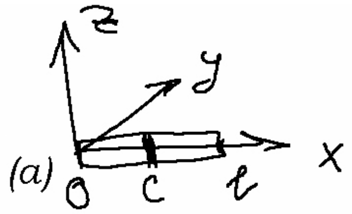
(a) Радиус-вектор: $\vec{r} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$; Скорость: $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$;
(b) Радиус-вектор: $\vec{r} = \rho\,\vec{e_\rho} + 0\,\vec{e_\varphi} + z\,\vec{e_z}$; Скорость: $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \dot{z}\,\vec{e_z}$;
(c) Радиус-вектор: $\vec{r} = r\,\vec{e_r} + 0\,\vec{e_\theta} + 0\,\vec{e_\varphi}$; Скорость: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$;
(*) Ускорение в декартовых: $\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$; Ускорение в цилиндрических ($x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z$): $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\ddot{\varphi})\,\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})\,\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$;
Ускорение в сферических ($x = r\sin\theta\cos\varphi;\ y = r\sin\theta\sin\varphi;\ z = r\cos\theta;$):
$\ddot{\vec{r}} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin\theta)]\,\vec{e_r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta]\,\vec{e_\theta} + [2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta]\,\vec{e_\varphi}$;

2. Тензор инерции. Главные моменты инерции простейших тел: (a) стержень, (b) диск, (c) шар.

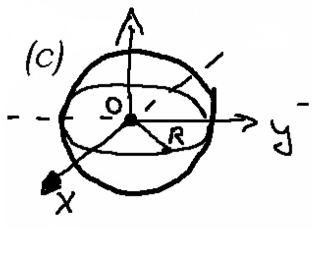
Тензор инерции — тензорная величина, связывающая момент импульса тела и кинетическую энергию его вращения с его угловой скоростью: $L_i = \sum\limits_j I_{ij}\omega_j$;
$E_{kin\ rot} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{ij}\omega_i I_{ij}\omega_j$, где I — тензор инерции, $\vec{\omega}$ — угловая скорость, $\vec{L}$ — момент импульса. В явном виде: $I_{ij} = \sum\limits_k m_k(x_l^2\delta_{ij} - x_i x_j)$, $i, j = 1, 2, 3.$; $I_{ij} = \int\limits_V \rho(x_l^2\delta_i j - x_i x_j)dV$,
$x_l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Или $I_{ij} = \sum\limits_k m_k \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}$;

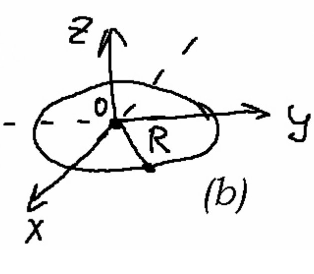
$$I_{ij} = \int\limits_V \rho \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} dV;$$

(a) $I_{ij}(0) = \dfrac{Ml^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_{ij}(c) = \dfrac{Ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



(b) $I_{ij}(0) = \dfrac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; Относительно оси z перпендикулярн. диску: $I_{zz} = \dfrac{MR^2}{2}$



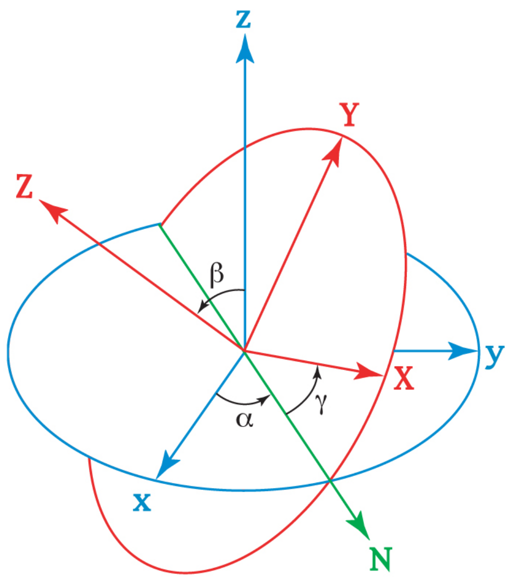


(c) $I_{ij}(0) = \dfrac{2MR^2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Кинетическая энергия твёрдого тела. Углы Эйлера.

$T = \dfrac{M\dot{\vec{R}}_0^2}{2} + \sum\limits_k \dfrac{m_k}{2}[\vec{\Omega}\times\vec{r_k}]^2 + [\dot{\vec{R}}_0\times\vec{\Omega}]\sum\limits_k m_k\vec{r_k}$; где $\dot{\vec{R}}_0$ — радиус вектор начала подвижной системы координат в лабораторной системе координат, Ω — угловая скорость вращения твёрдого тела; Причем, первое слагаемое — кинитическая энергия поступательного движения, второе — вращательного, а третье — смешанный член. Если твёрдое тело представить как дискретную систему материальных точек с массами m_k

и радиус векторами $\vec{r_k}$ и начало подвижной системы координат поместить в центр инерции твёрдого тела, то $T_z = 0$, следовательно: $T = \dfrac{M\dot{\vec{R}}_0^2}{2} + \sum\limits_k \dfrac{m_k}{2}[\vec{\Omega} \times \vec{r_k}]^2 = \dfrac{M\dot{\vec{R}}_0^2}{2} + \dfrac{1}{2} I_{ij}\Omega_i\Omega_j$



Углы Эйлера — три угла последовательных поворотов при переходе от одной декартовой системы координат к другой: Угол α между осью x и линией узлов — угол прецессии. Угол β между осями z и Z — угол нутации. Угол γ между осью X и линией узлов — угол собственного вращения. Такие повороты некоммутативны и конечное положение системы зависит от порядка, в котором совершаются повороты. В случае углов Эйлера производится сначала поворот на угол α вокруг оси z, потом поворот на угол β вокруг оси N, и последним поворот на угол γ вокруг оси Z. При этом угол $\beta \in [0, \pi]$, а углы $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi)$. (Повороты по α, γ в соответствии с правилом правого винта.)

Механика Лагранжа.

1.Уравнения Лагранжа II рода (в том числе при наличии диссипативных сил). Алгоритм вычисления обобщенной диссипативной силы.

Если голономная механическая система описывается лагранжианом $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, то уравнения Лагранжа второго рода имеют вид $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d$, где Лагранжиан представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий системы: $L = T - U$, а обощенная диссипативная сила: $Q_i^d = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \vec{F_\alpha^d} \dfrac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i}$, причем $\vec{F_\alpha^d}$ — диссипативная сила (например, сила трения) и $i = \overline{1, s}$ (s — число степеней свободы механической системы $s = 3N - k$, N — количество материальных точек системы, k - количество удерживающих связей за исключением избыточных).

Аналитический алгоритм. Т.к $\vec{r_\alpha} = x_\alpha \vec{i} + y_\alpha \vec{j} + z_\alpha \vec{k}$, то $Q_i^d = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \left(F_{\alpha_x}^d \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + F_{\alpha_y}^d \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} + F_{\alpha_z}^d \dfrac{\partial z_\alpha}{\partial q_i} \right)$,

Пусть системе сообщается такое возможное перемещение при котором изменяется только одна обобщённая координата, а другие не варьируются, тогда $Q_i^d = \dfrac{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \partial A(\vec{F_\alpha^d}) \right) q_i}{\partial q_i}$, где A работа сил действующих на систему, определённую на перемещающейся точке приложения этих сил, соответствующая вариации только i-ой обобщённой координаты.

2.Обобщенный импульс (определение). Закон сохранения обобщенного импульса.

Если движение описывается обобщенными координатами то производные лагранжевой функции по обобщенным скоростям $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ называются обобщенными импульсами. Их производные $\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{L}{q_i} + Q_i^d$, таким образом обобщенный импульс сохраняется, т.е.

$\dfrac{dp_i}{t} = 0$, если функция Лагранжа явно не зависит от q_i и соответствующая обобщенная диссипативная сила $Q_i = 0$.

3. Обобщенная энергия (определение). Закон сохранения обобщенной энергии.

Обобщенная энергия по определению $\varepsilon^{\text{об}} = \sum\limits_{i=1}^{s} \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum\limits_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - L$; Её производная $\dfrac{d\varepsilon^{\text{об}}}{dt} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{s} \dot{q}_i Q_i^d$ т.е. обобщённая энергия сохраняется, если функция Лагранжа явно не зависит от времени и отсутствуют диспативные силы.

Механика Гамильтона.

1. Функция Гамильтона (определение). Интегралы движения.

Функция Гамильтона, или Гамильтониан — функция, выражающая обощённую энергию $H = \varepsilon^{\text{об}}(q_i, \dot{q}_i \to p_i, t) = \{\sum\limits_{i=1}^{s} p_i q_i - L\}\big|_{\dot{q} \to \dot{q}(q,t)}$ т.е. $H(p,q)$ или $H(p,q,t)$ где $p = (p_1, p_2, ..., p_s)$ — полный набор обобщенных импульсов, описывающий данную систему (s — число степеней свободы), $q = (q_1, q_2, ..., q_s)$ — полный набор обобщенных координат.

Интегралы движения — функции времени, координат и скоростей точек, которые при движении механической системы сохраняют постоянные значения, определяемые начальными условиями. 1-ые интегралы — интегралы движения содержащие скорости точек, 2-ые интегралы — такие функции времени координат точек и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения.

Закон сохранения Гамильтониана(обобщённой энергии): $H = H_0 = \text{const}$, если $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$, $Q_i^d = 0$; Закон сохранения обобщенного импульса $p_i = p_0 = \text{const}$, если $\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = 0$; $Q_i^d = 0$.

2.Канонические уравнения Гамильтона (в том числе при наличии диссипативных сил).

Уравнения Гамильтона (также называемые каноническими уравнениями) — система дифференциальных уравнений: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d$; эта система состоит из $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка ($i = \overline{1, s}$).

3. Скобки Пуассона (определение, свойства). Фундаментальные скобки Пуассона.

Скобками Пуассона называется выражение для двух функций канонических переменных: $[f_1, f_2] = \sum\limits_{i=1}^{s} \left\{ \dfrac{\partial f_1}{\partial q_i}\dfrac{\partial f_2}{\partial p_i} - \dfrac{\partial f_1}{\partial p_i}\dfrac{\partial f_2}{\partial q_i} \right\}$; Его свойства: $[f_1, f_1] = 0$; $[f_1, f_2] = -[f_2, f_1]$;

$[f_1, (f_2 + f_3)] = [f_1, f_2] + [f_1, f_3]$; $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}[f_1, f_2] = \left[\dfrac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right] + \left[f_1, \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\right]$;

$[f_1, (f_2, f_3)] = [f_1, f_2]f_3 + [f_1, f_3]f_2$; $\quad [f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$ последнее свойство называется тождеством Пуассона. Фундаментальные скобки Пуассона — скобки от самих канонических переменных: $[q_i, q_j] = 0$; $[p_i, p_j] = 0$; $[p_i, q_j] = \delta_{ij}$, где $i, j = \overline{1, s}$.

4. Нахождение интегралов движения по функции Гамильтона.

Для того чтобы некоторая функция $f(q, p, t)$ представляла собой первый интеграл уравнений $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$\dfrac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$; где операция $[f, H]$ — скобки Пуассона. Теорма Пуассона: Если функции $f_1(q, p, t)$ и $f_1(q, p, t)$ являются первыми интегралами канонических уравнений $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, то и $[f_1, f_2]$ также будет интегралом этих уравнений, т.е. $[f_1, f_2] = C$. Если функция Гамильтона явно от времени не зависит, а $f(q, p, t)$ интеграл системы канонических уравнений, тогда можно утверждвть что частные производные $f(q, p, t)$ по времени являются интегралами канонических уравнений т.е. $\dfrac{\partial^n f}{\partial t^n} = C_n$. (где n целое). Эти интегралы могут оказаться новыми интегралами, независимыми от исходного.

5. Метод Гамильтона - Якоби для нахождения закона движения системы.

Пишем гамильтониан, меняем $p_i \to \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, где $S = S(q_1, ..., q_s, t)$ — функция действия. Составляем уравнения Гамильтона-Якоби: $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H(p_i \to \dfrac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t) = 0$. Ищем полный интеграл этого уравнения $S = S(q_1, .., q_s, t, \alpha_1, ..., \alpha_s)$, α_i — произвольная постоянная. По теореме Якоби, из соотношений $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$; $\beta_j = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_j}$; $(i, j = \overline{1, s})$ находим обобщенные импульсы $p_i = p(q_i, t, \alpha_i)$ и координаты $q_i = q(t, \alpha_i, \beta_i)$, причем произвольные постоянные α_i, β_i находим из начальных условий.

Центральное поле.

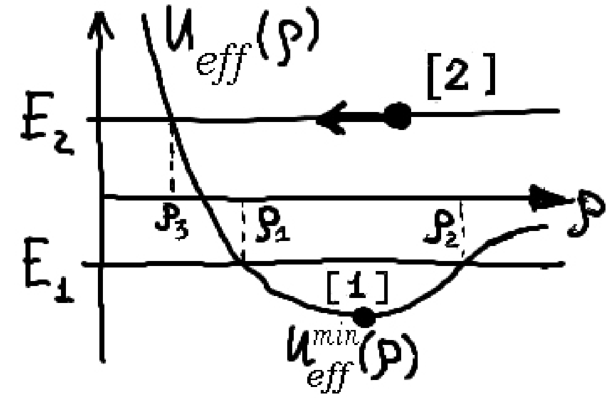
1. Функции Лагранжа и Гамильтона для частицы с массой m, движущейся в центральном поле. Уравнения движения и интегралы движения. Плоскость Лапласа. Эффективная потенциальная энергия.

$L = \dfrac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$, $H = \dfrac{1}{2m}\vec{p}^2 + U(r)$. Траектория движения частицы в центральном поле целикомлежит в одной плоскости — плоскости Лапласа, перпендикулярной моменту $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, т.е. $(\vec{r}\vec{M}) = 0$. Вводим в этой плоскости полярные координаты: $L = \dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho)$, $H = \dfrac{1}{2m}(p_\varphi^2 + \dfrac{1}{\rho^2}p_\varphi)^2 + U(\rho)$. (1): $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ $\varepsilon^{\text{об}} = \dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho) = E_0$ — интеграл движения. (2): $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ и $\dfrac{\partial H}{\partial \varphi = 0} \Rightarrow$ $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = p_{\varphi_0}$ — интеграл движения $\Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{p_{\varphi_0}}{m\rho^2}$; $\dot{\rho} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}(E_0 - U_{eff}(\rho))}$, где $U_{eff}(\rho) = U(\rho) + \dfrac{p_{\varphi_0}^2}{2m\rho^2}$ — эффективная потенциальная энергия. Уравнение для ρ можно решить в квадратурах $t - t_0 = \pm\displaystyle\int\limits_{\rho_0} \dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff}(\rho))}}$

2. Движение в поле $U = \alpha/r$ при различных знаках постоянной α. Уравнение траектории, законы Кеплера.

Законы Кеплера: 1-ый: Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. 2-ой:Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади. (Планеты движутся с постоянной секторной скоростью $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$ =const.) 3-ий: Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет. Справедливо не только для планет, но и для их спутников. $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$, где T_1 и T_2 — периоды обращения двух планет вокруг Солнца, а a_1 и a_2 — длины больших полуосей их орбит.

$U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, тогда $U_{eff}(\rho) = \dfrac{\alpha}{\rho} + \dfrac{p_{\varphi_0}^2}{2m}\dfrac{1}{\rho^2}$, т.к. при $\rho > 0$: $\dfrac{1}{\rho^2} > \dfrac{1}{\rho}$; при $\rho \to \infty$: $\dfrac{1}{\rho^2} < \dfrac{1}{\rho}$, чтобы $\dot{\rho} \in \Re$ энергия $E > U_{eff}$ $\Rightarrow$ область возможных движений [1] и [2] (см. рисунок). Рассмотрим [1]: $E = E_1 < 0 \Rightarrow \rho \in (\rho_1, \rho_2) \Rightarrow$ Движение финитное периодическое между окружностями радиусов ρ_1, ρ_2. [2]: $E = E_2 > 0 \Rightarrow \rho \geq \rho_3 \Rightarrow$ движение инфинитное — рассеянное на силовом центре.



К задаче Кеплера:

Задача Кеплера $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$, $(\alpha > 0)$, $\rho(\varphi) = \dfrac{p_0}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$, где $p_0 = \dfrac{p_{\varphi_0}^2}{m\alpha}$ — параметр, $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EP_{\varphi_0}^2}{m\alpha^2}}$ — эксцентриситет. При $\varepsilon = 0 \Rightarrow \rho(\varphi) = p_0$, $E = U_{eff}^{min}$ — окружность. При $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow U_{eff}^{min} < E_1 < 0$ $(\rho_1 < \rho < \rho_2)$ — эллипс. При $\varepsilon = 1 \Rightarrow E_2 = 0$ $(\rho > \rho_3)$ — парабола. $\varepsilon > 1 \Rightarrow E_3 > 0$ $(\rho > \rho_4)$ — гипербола.

3. Задача двух тел: функции Лагранжа и Гамильтона, интегралы движения. Функции Лагранжа и Гамильтона для случая гравитационного взаимодействия между телами.

$L = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \dfrac{M}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$, $H = \dfrac{1}{2(m_1+m_2)}(\vec{P}_{\vec{R}})^2 + \dfrac{1}{2M}P_r^2 + \dfrac{1}{2Mr^2}P_\varphi^2 + U(r)$, где $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведённая масса, $\vec{R}$ — радиус–вектор центра масс, $\vec{r}$ — относит. радиус вектор частиц. Интегралы дижения: (1) $\vec{P}_{\vec{R}} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}$ =const — импульс центра масс. (2) $P_\varphi = Mr^2\dot{\varphi}$ =const — момент импульса. (3) $\varepsilon^{\text{об}} = \varepsilon^{\text{полн}} = \dfrac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$ =const — обобщенная энергия (в данной задаче совпадает с полной энергией). $P_r = M\dot{r}$ — обобщённый импульс. r, φ — полярные координаты в плоскости Лапласа, в которой происходит движение. Для слчая гравитационного взаимодействия: $U(r) = -\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r}$.

В релятивистском и нерелятивистском случае записать функции Лагранжа, Гамильтона, уравнение Гамильтона-Якоби и интегралы движения для следующих систем:

1. частица с массой m в однородном поле тяжести;

$L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$; $L = mc^2\Big[\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}\Big]$

2. частица с массой m и зарядом e в произвольном электромагнитном поле E(r, t), H(r, t) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля (общие формулы);

3. частица с массой m и зарядом e в однородных полях: магнитном H_o, электрическом E_o. Скалярный и векторный потенциалы для постоянных и однородных электромагнитных полей;

4. частица с массой m на сфере радиуса R в однородном поле тяжести;

5. частица с массой m в центральном поле (двух и трехмерный случай);

6. одномерный гармонический осциллятор;

7. частица на поверхности $z = f(x, y)$ в заданных электромагнитных и гравитационных полях.