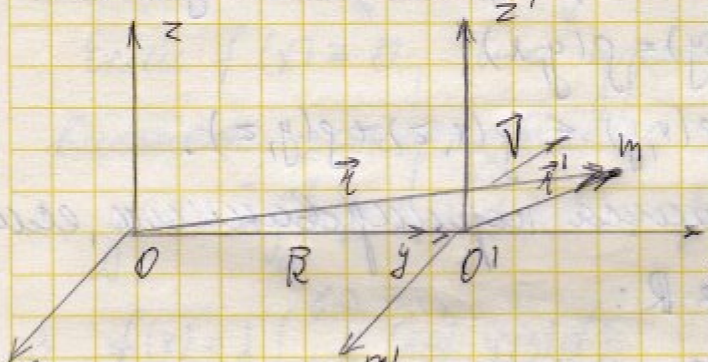
Теоретическая механика.

$\boxed{1.}$ а) Инвариантность уравнений Ньютона относительно преобразований Галилея.



Пусть одна из систем отсчёта (СО) движется относительно другой с постоянной скоростью $\vec{V}$.

Запишем ур-я Ньютона в одной из систем:

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}$$

для перехода в другую СО воспользуемся преобразованием Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \overset{= const.}{\vec{R}} + \vec{V}t. \;\Big|\; \frac{d^2}{dt^2}$$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,'$. Так как масса инвариантна при переходе из одной системы в другую, получаем $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Т.е. уравнения движения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

б) Ковариантность уравнений движения относительно преобразований Лоренца.

Четырёхмерное уравнение движения в пространстве Минковского:

$$\frac{d}{d\tau} p^{\nu} = \mathcal{F}^{\nu},$$

где p^{ν} — четыре-вектор импульса, $\mathcal{F}^{\nu}$ — четыре-вектор силы.

Уравнения называются ковариантными, если их левые и правые части преобразуются одинаковым образом при преобразованиях Лоренца. Это значит, что левые и правые части должны быть соответственно либо скалярами, либо 4-векторами, либо тензорами одинакового ранга.

Значит записанное уравнение движения является ковариантным.
Осталось определить p^i и $\mathcal{F}^i$, если преобразования Лоренцовские.

Ур-я. движения так-же можно записать в компонентах:

$$m_0 \frac{dU^i}{d\tau} = F^i$$

Перейдём от собственного времени τ к обычному $dt = \gamma d\tau$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

$$m_0 \frac{dU^i}{d\tau} = m_0 \gamma \frac{dU^i}{dt}$$

Тогда уравнения для $i = 1, 2, 3$ принимают вид:

$$m_0 \gamma \frac{dU^\alpha}{dt} = F^\alpha$$

Если положить $F^\alpha = \gamma \mathcal{F}^\alpha$, где $\mathcal{F}^\alpha$ - компоненты обычной трёхмерной силы, то наши уравнения будут близки к Ньютоновским уравнениям.

$$m_0 \gamma \frac{dU^\alpha}{dt} = \mathcal{F}^\alpha \gamma;$$

$$\frac{d}{dt}(m_0 U^\alpha) = \mathcal{F}^\alpha, \quad \text{где } m_0 U^\alpha = p^\alpha$$

$$p^i = \left\{ \frac{\varepsilon}{c}; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}.$$

Т.е. при импульсе $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, ур-я. движения частицы ковариантны отн-но. преобразований Лоренца.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \vec{F}.$$ и справа и слева 3-вектор.

См. В. А. Угаров „Специальная теория относительности" стр. 99-100.

$\boxed{2}$. а) Закон сохранения импульса.

Уравнения движения $\forall\, \vec{F}$:

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. Домножим на $\vec{n}$ - некоторое неподвижное направление в пространстве.

$\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{n}) = (\vec{F}\vec{n})$ - не зависит от вида импульса (рел. или нерел.).

Если $(F\vec{n}) = 0$, то $\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{n}) = 0 \Rightarrow (\vec{p}\vec{n}) = const$.

Если это справедливо $\forall\, \vec{n} \Rightarrow \vec{p} = const$, в этом случае $\vec{F} = 0$.

б) Закон сохранения момента импульса.

Запишем ур-я. дв-я. в виде:

$$\dot{p}_\beta = F_\beta \iff \frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta) - \dot{x}_\alpha p_\beta = x_\alpha F_\beta$$

Для релят. и нерелят. механики

$\dot{x}_\alpha p_\beta = p_\alpha \dot{x}_\beta$ - симм. тензор.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x_\alpha p_\beta - x_\alpha F_\beta = \frac{d}{dt} x_\beta p_\alpha - x_\beta F_\alpha$$

$\frac{d}{dt}(x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = x_\alpha F_\beta - x_\beta F_\alpha$ — тензорная форма закона изменения момента импульса частицы.

Любому антисимметричному тензору второго ранга можно поставить в соотв. дуальный (псевдо) вектор: например по ф-ле:

$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$; $L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3$; $L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$. $M_1 = x_2 F_3 - x_3 F_2$; $M_2 = x_3 F_1 - x_1 F_3$; $M_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1$. Или можно записать:

$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}]$; $M = [\vec{r}\,\vec{F}]$. Из ур-й следует, что $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$. Аналогично а) домножим на $\vec{n}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}\vec{n}) = (\vec{n}\vec{M}), \text{ если } (\vec{M}\vec{n}) = 0, \text{ то}$$

$\vec{L}\vec{n} = \text{const}$. В частности $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$, такая ситуация имеет место при движении в центральном поле.

в) Закон сохранения энергии.

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, домножим скалярно на $\vec{v}$:

$(\dot{\vec{p}}\,\vec{v}) = (\vec{F}\,\vec{v}) = \dot{E}_k$

Т.к. $\vec{p} = m\vec{v}$, то $(\dot{\vec{p}}\vec{v}) = m(\dot{\vec{v}}\vec{v}) = \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt}E_k \Rightarrow$

$\Rightarrow E_k \equiv T = \frac{mv^2}{2}$

В рел. механике:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (\vec{v}\dot{\vec{p}}) = m\left(\vec{v}\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= m\left[\frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2\frac{1\cdot 2\left(-\frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{c^2}\right)}{2\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2}\right] =$$

$$= m\left[\frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v^2}{c^2}\frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = m(\vec{v}\dot{\vec{v}})\left(\frac{c^2(1-\beta^2)+v^2}{c^2(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= m(\vec{v}\dot{\vec{v}})\frac{c^2-v^2+v^2}{c^2(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В обоих случаях $\dot{T} = (\vec{v}\vec{F})$.

Представим силу в виде суперпозиции потенциальной, диссипативной и гироскопической сил:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \vec{F}^d + \vec{F}^g.$$

Тогда $\dot{T} = (\vec{v}\vec{F}) = -v^\alpha\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + (\vec{F}^d\vec{v}) + (\vec{F}^g\vec{v})$

Полная энергия $E = T + U$.

$$\frac{dU}{dt} = \partial_t U + (\vec{v}\vec{\nabla})U.$$

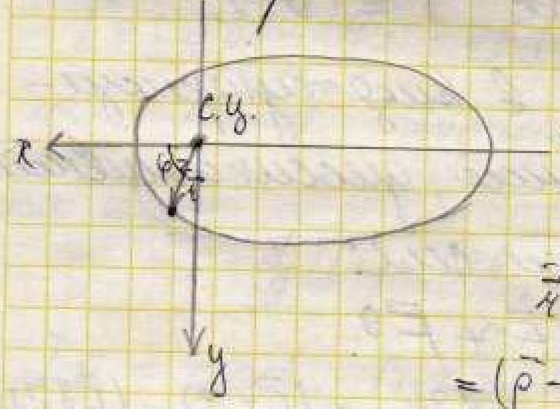
$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F}\vec{v}) + \partial_t U + (\vec{v}\vec{\nabla})U = \partial_t U + (\vec{F}^d\vec{v}) +$$

$+ (\vec{F}^g\vec{v}) \Rightarrow$, что полная энергия системы не изменяется, если потенциал не зависит от времени явно, отсутствуют гироскопические и диссипативные силы.

$\boxed{3}$ Законы Кеплера:

1° частица в центральном гравитационном поле движется по эллиптической орбите, причём силовой центр находится в одном из фокусов эллипса.

2° $\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\dot{\vec{r}}] = \frac{L}{2m}$ = конст. — секторная скорость.



$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho^2}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi =$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi =$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\underbrace{\rho^2\dot{\varphi}}_{\sigma_0})\vec{e}_\varphi .$$

Т.к. $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(2\sigma_0) = 0$, то

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} \;;\; \ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\dot{\varphi} .$$

$$\dot{\rho} = \frac{2\sigma_0}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -2\sigma_0\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\ddot{\rho} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right). \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right)\vec{e}_\rho.$$

Рассмотрим уравнение эллипса с полуосями a и b:

$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}; \quad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}; \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{(2\sigma_0)^2}{p\rho^2}\vec{e}_\rho.$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -m\frac{\alpha}{\rho^2}\vec{e}_\rho} \quad \alpha = \frac{(2\sigma_0)^2}{p} = const.$$

$\boxed{4}$ Обобщённо потенциальные силы.

$$\dot{p}_\alpha = F_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \text{ или } \frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\alpha} = F_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$L_0 = \frac{mv^2}{2}$, или $= -mc^2\gamma^{-1}$.

Однако для пот. сил

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(L_0 - L)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial(L_0 - L)}{\partial q_\alpha} = F_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$L_0 - L \equiv U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = F_\alpha.$ — обобщённо потенциальные силы.

$$F_\alpha = \frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\beta - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}.$$

Так как $F_\alpha = F_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, не зависит от $\ddot{\vec{r}}$, значит $\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\cancel{a_\alpha(\vec{q}, t)} = -a_\alpha(\vec{r}, t). \Rightarrow$

$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = u(\vec{r}, t) - a_\alpha(\vec{r}, t)\dot{q}_\alpha$ (суммирование по повторяющимся индексам).

$$L = L_0 - u(\vec{r}, t) + a_\alpha(\vec{r}, t)\dot{q}_\alpha .$$

$$F_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial a_\beta}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta = -\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\beta\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial q_\alpha} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta}\right); \quad \vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a} \Leftrightarrow b_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial a_\gamma}{\partial q_\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} u - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + [\dot{\vec{r}}\,\vec{b}]$$

Пусть теперь $u(\vec{r}, t) = e\varphi$; $a_\alpha = \frac{e}{c}A_\alpha$, где e – заряд; φ, $\vec{A}$ скалярный и векторный потенциалы соответственно, тогда

$$\vec{F} = -e\vec{\nabla}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\,\operatorname{rot}\vec{A}] =$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}, \operatorname{rot}\vec{A}].$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{лор} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\,\vec{H}].$$

Заметим, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \forall\varphi$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{H} = 0.$

1-я пара уравнений Максвелла:

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ $\quad L_{эм} = L_0 - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A}).$

$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$

$\boxed{5}$ ФЛ определена с точностью до полной производной по времени от скалярной функции об. координат и времени, т. е. УЛ для систем с ФЛ $L' = L + \frac{d}{dt}f(q,t)$ совпадают с УЛ для ФЛ L.

$$\Delta.\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d}{dt}f(q,t)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{df}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)}_{0} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j}}_{\tilde{f}(q,t)} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} = 0$$

$\blacktriangle$.

Запишем ФЛ частицы в э/м. поле: $L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v}) - e\varphi$.

Калибровочные преобразования:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha(\vec{r},t) \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\vec{r},t)}{\partial t} \end{cases}$$

$$L' = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}'\vec{v}) - e\varphi' =$$

$$= L + \frac{e}{c}(\vec{\nabla}\alpha, \vec{v}) + \frac{e}{c}\frac{\partial\alpha(\vec{r},t)}{\partial t} = L +$$

$$+ \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = L + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\alpha(\vec{r},t). \Rightarrow$$

$$= \frac{d}{dt}f(\vec{r},t).$$

$\Rightarrow$ калибровочные преобразования не меняют ур-й Лагранжа.

$\boxed{6}$. а) Так как поле консервативно, то ФЛ в одномерном случае:

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$. Из ФЛ видно, что $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Пусть $Q^d = 0$, тогда

$E = const. = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow \int dt = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}.$$

$$t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} + const$$

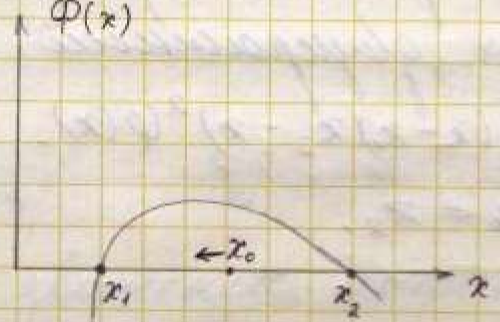
$$\Phi(x) \equiv \frac{2}{m}(E - V(x)) \; ; \; \dot{x} = \pm\sqrt{\Phi(x)}$$

$x \in Re \Rightarrow \Phi(x) \geq 0. \Rightarrow E \geq V(x)$ — условие классически допустимой области движения.

<u>Случай 1.</u> Случай двух простых корней.

Пусть $\Phi(x) = (x - x_1)(x_2 - x)\,\varphi(x)$

$\varphi(x)>0 \quad x_1<x_0<x_2.$



$\dot x\big|_{t=t_0}<0$

t_1 – момент достижения x_1.

$$t_1 = t_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)\varphi(x)}}$$

$x \to x_1$

$$I \sim \int^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x_1}} \sim (x-x_1)^{\frac{1}{2}}\Big|^{x_1} < \infty.$$

в точке x_1 $E = V(x)$.

$$\dot x\big|_{x=x_1}=0 . \quad x(t_1+\Delta t) = \underbrace{x(t_1)}_{x_1} + \underbrace{\dot x\big|_{t=t_1}}_{0}\Delta t +$$

$$+\frac{1}{2}\ddot x\big|_{t=t_1}(\Delta t)^2 + \dots = \left[\ddot x = -\frac{1}{m}\frac{dV(x)}{dx}\right] =$$

$$= x_1 + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}\right)\Big|_{t=t_1} = \left[\frac{d\Phi(x)}{dx} = -\frac{2}{m}\frac{dV}{dx}\right] =$$

$$= x_1 + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dx}\right)\Big|_{t=t_1}}_{>0\ (\Phi\ \text{з. возр.})} \Rightarrow$$ x_1 – точка поворота. $E = V(x)$. Аналогично для x_2. Движение финитное, периодическое.

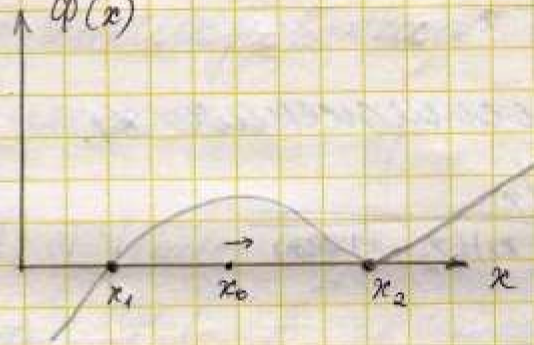
$$T = t_{x_1\to x_2} + t_{x_2\to x_1} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} - \int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} =$$

$$= 2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = 2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}.$$

Случай 2. Случай кратного корня.

Пусть $\Phi(x)$ имеет двукратный корень x_2. $\Phi(x) = (x-x_1)(x_2-x)^2\varphi(x)$.

$\varphi(x) > 0$. $x_1 < x_0 < x_2$.



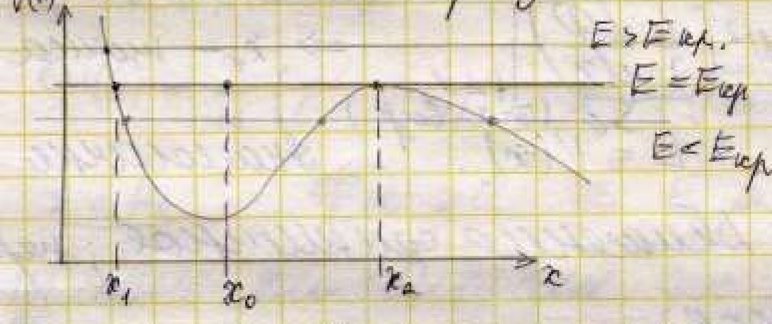
t_2 – момент достижения x_2.

$$t_2 = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)^2\varphi(x)}}.$$

при $x \to x_2$ $I \sim \int^{x_2} \frac{dx}{x_2 - x} \sim \ln(x_2 - x)\Big|^{x_2} \to \infty$

$\Rightarrow$ движение финитное, но непериодическое.

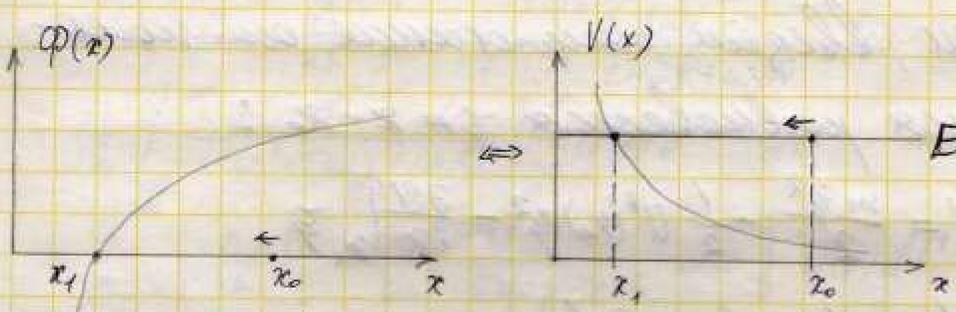
Эквивалентное представление:



Случай 3. Одного простого корня.

$\Phi(x) = (x-x_1)\varphi(x)$. $\varphi(x) > 0$

$x_0 > x_1$.



движение инфинитно.

б) Если E близка к V_{min}, то расстояние между точками поворота мало, следовательно малой становится и амплитуда колебаний. В этом случае точка движется в окр-ти точки x_0 и мы можем заменить $V(x)$ разложением,

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots,$$

$V'(x_0)=0$, x_0 — т.у.р. (точка уст. равновесия). $V''(x_0)>0$, т.к. $V(x_0)$ — min. Тогда

ФЛ: $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2$.

в) Теперь рассм. одномерное движение ч. в поле $U(x)$ под действием внеш. поля $U^e(x,t)$. Мы будем рассматривать, так же, действие силы $\vec{F}^d = -\varkappa\dot{x}$, $\varkappa>0$, тогда:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) - U^e(x,t) \simeq \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x_0) -$$
$$- \underbrace{U'(x_0)}_{=0}(x-x_0) - \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2 - U_0^e(x_0,t) - \left.\frac{\partial U^e}{\partial x}\right|_{x_0}(x-x_0)$$

Или, введём отклонение от положения равновесия $\xi = x - x_0$;

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2 - \frac{\partial U^l}{\partial x}\Big|_{x_0}\xi.$$

УЛ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = -\varkappa\dot{\xi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\ddot{\xi} + U''(x_0)\xi + \frac{\partial U^l}{\partial x}\Big|_{x_0} = -\varkappa\dot{\xi}$$

$$\ddot{\xi} + k\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\frac{1}{m}\frac{\partial U^l}{\partial x}\Big|_{x_0}; \quad k = \frac{\varkappa}{m} = 2\gamma;$$

$\omega_0^2 = \frac{U''}{m}. \quad -\frac{\partial U^l}{\partial x}\Big|_{x=x_0}\frac{1}{m} \equiv Q(t). \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = Q(t)$. Рассм. $Q(t) \equiv 0$.

Ищем решение в виде $\xi = Ae^{-i\omega t} \Rightarrow$

$A(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = 0$

ХУ: $\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \qquad \omega_{1,2} = -i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} =$

$= -i\gamma \pm \Omega, \; \Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \; \omega_0^2 > \gamma^2. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Решение однородного уравнения имеет вид: $\xi = \mathrm{Re}(A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t}) =$

$= e^{-\gamma t}\,\mathrm{Re}(A_1 e^{-i\Omega t} + A_2 e^{i\Omega t}) =$

$= e^{-\gamma t}(A_1\cos\Omega t + A_2\sin\Omega t) = e^{-\gamma t}a\cos(\Omega t + \alpha)$.

Преобразуем $Q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$;

$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)e^{i\omega t}dt$.

$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega. \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi(\omega)(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2) = Q(\omega)$

$$\Rightarrow \xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}\, Q(\omega)}{(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}\, d\omega}{(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t')\, e^{i\omega t'}\, dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}\, d\omega \right\} Q(t')\, dt'$$

Обозначим величину в фигурных скобках как $G(t-t')$. – функция Грина. $\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')\, Q(t')\, dt'$.

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega_0 - 2i\omega\gamma - \omega^2)}\, d\omega =$$

$$= +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega-\omega_1} - \frac{1}{\omega-\omega_2}\right) \times$$

$\times \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_1 - \omega_2}\, d\omega$. $\omega_{1,2}$ – корни х.у.

Если $t - t' \geq 0$, то ~~нужн~~ контур следует брать в нижней полуплоскости, тогда $G(t-t') = \frac{1}{2\Omega}\left[e^{-i\omega_1(t-t')} - e^{-i\omega_2(t-t')}\right] =$

$= e^{-\gamma(t-t')}\, \frac{\sin \Omega(t-t')}{\Omega}$.

Если $t - t' < 0$, то контур берём в верхней полуплоскости, в ней нет особых точек $\Rightarrow G(t-t') \equiv 0$. $\Rightarrow$

$$G(t-t') = \begin{cases} e^{-\gamma(t-t')}\, \frac{\sin \Omega(t-t')}{\Omega}, & t - t' \geq 0 \\ 0, & t - t' < 0. \end{cases}$$

$\boxed{7}$ а) Рассмотрим систему из двух взаимодействующих частиц во внешнем поле, тогда:

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) -$$

$$- U_1(\vec{r}_1, t) - U_2(\vec{r}_2, t).$$ [Предположим, что внешнее поле зависит от времени через зависимость координат третьей частицы, не включённой в систему, тогда $U_1(\vec{r}_1, t) + U_2(\vec{r}_2, t) = U_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + U_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|)$.] — ерунда!

Если учесть, что при $n=3$ должен соблюдаться произвол относительно нумерации частиц, то:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} +$$

$$+ \frac{m_3 v_3^2}{2} - U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) - U_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) - U_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|) -$$

$$- U_1(\vec{r}_1, t) - U_2(\vec{r}_2, t) - U_3(\vec{r}_3, t)$$

В случае N частиц:

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j v_j^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^{N} U_{jk}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} U_j(\vec{r}_j, t).$$

Пусть $\vec{F}_j'$ силы не включённые в L, тогда УЛ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} = \vec{F}_j^{(l)}$$

$$m\ddot{\vec{r}}_j = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}\sum_{k=1}^{N} U_{kj}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|) - \frac{\partial U_j}{\partial \vec{r}_j} + \vec{F}_j^{(l)}.$$

а) <u>Закон сохранения импульса:</u>

$$\sum_{j=1}^{N}\dot{\vec{p}}_j = -\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial U_{jk}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|)}{\partial \vec{r}_j} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U_j}{\partial \vec{r}_j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j^{(l)}$$

$$\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial U_{jk}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|)}{\partial \vec{r}_j} = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{N}\frac{\partial U_{jk}}{\partial \vec{r}_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{N}\frac{\partial U_{kj}}{\partial \vec{r}_k} \overset{*}{=}$$

$$U_{jk} = U_{kj};\quad \frac{\partial U_{jk}}{\partial \vec{r}_j} = U'_{jk}\frac{\partial|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}{\partial \vec{r}_j};$$

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial \vec{r}_k} = -U'_{jk}\frac{\partial|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}{\partial \vec{r}_k} \Rightarrow \frac{\partial U_{jk}}{\partial \vec{r}_j} = -\frac{\partial U_{jk}}{\partial \vec{r}_k}$$

$$\partial\vec{r}_k = -\partial\vec{r}_j.$$

$\overset{*}{=} 0$. Тогда $\frac{d}{dt}\sum_j \vec{p}_j = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U_j}{\partial \vec{r}_j} + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j^{l}$; $\vec{P} = \sum_{j=1}^{N}\vec{p}_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = -\sum\frac{\partial U_j}{\partial \vec{r}_j} + \sum\vec{F}_j^{l} \Rightarrow$$

$\Big(\ \vec{P} = \sum m_j \dot{\vec{r}}_j(t) =$ (теорема о среднем) $=$
$= \dot{\vec{r}}_m \sum_j m_j = \vec{v}_m m$, m - суммарная масса.$\Big)$

$\Rightarrow$ Полный импульс системы сохраняется, если сумма внешних сил равна нулю.

б) <u>Закон сохр. и изм. полной энергии системы:</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} = \vec{F}_j.$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} U_{ik}(|\vec{r}_i-\vec{r}_k|) - \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_i, t).$$

Домножим на $\vec{v}_i$ и просуммируем:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) - \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial t}}_{\frac{dL}{dt}} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i \vec{v}_i) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - L\right)\right\} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i \vec{v}_i).$$

$\{\ \} \equiv \mathcal{E}^{об}$ – обобщённая энергия.

Т.е. закон изменения энергии:

$$\dot{\mathcal{E}}^{об} = -\frac{\partial L}{\partial t} + (\vec{F}_i \vec{v}_i).$$

в) Закон изменения момента импульса.

$$\begin{cases} \dot{p}_{i\alpha} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + F_{i\alpha}^{e} & \Big| \cdot x_{i\beta} \to \sum_i \\ p_{i\alpha} = m_i \dot{x}_{i\alpha} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} x_{i\beta} p_{i\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i\beta} p_{i\alpha} = -\sum_{i,k} x_{i\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + \sum_{i=1}^{N} x_{i\beta} F_{i\alpha}^{e}.$$

$$\sum_{i,k} x_{i\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(x_{i\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + x_{k\beta}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{k\alpha}}\right) = \left\{\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = -\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{k\alpha}}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(x_{i\beta}-x_{k\beta})\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,k} U'_{ik} \frac{(x_{i\beta}-x_{k\beta})(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})}{|\vec{r}_i-\vec{r}_k|},$$

$$\left\{\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = U'_{ik}\frac{\partial(|\vec{r}_i-\vec{r}_k|)}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})}{|\vec{r}_i-\vec{r}_k|}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} x_{\nu\beta} p_{\nu\alpha} - \sum_{\nu=1}^{N} \dot{x}_{\nu\beta} p_{\nu\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{\nu, k}^{N} U_{\nu k}' \frac{(x_{\nu\alpha} - x_{k\alpha})(x_{\nu\beta} - x_{k\beta})}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_k|} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} x_{\nu\beta} F_{\nu\alpha}^{l}. \qquad \alpha \leftrightarrow \beta.$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{N}(x_{\nu\alpha} p_{\nu\beta} - x_{\nu\beta} p_{\nu\alpha})}_{L_\gamma} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N}(x_{\nu\alpha} F_{\nu\beta}^{l} - x_{\nu\beta} F_{\nu\alpha}^{l})}_{M_\gamma}$$

$$\dot{L}_\gamma = M_\gamma. \qquad \vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}\,]; \ \vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}^{l}].$$

г) уравнение Мещерского.

$m = m(t)$ – непр. ф-я. В момент t

$$\vec{P}(t) = m\vec{v}.$$

$$\vec{P}(t+dt) = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|\vec{v}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = m d\vec{v} + |dm|(\vec{v}_1 - \vec{v})$$

$$\dot{\vec{P}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{|dm|}{dt}\vec{u}, \quad \vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}. \quad \frac{dm}{dt} < 0.$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ex} \Rightarrow m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ex} + \underbrace{\frac{dm}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v})}_{\text{реактивная сила.}} -$$

– ур-е. Мещерского.

Если $\vec{u} = const$ $\vec{F}^{ex} = 0$, то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{m\,dt}\vec{u}$$

$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}\ln\frac{m_0}{m}$ – ур-е. Циолковского.

$\boxed{8}$. В системах частиц, совершающих финитное движение, устанавливается соотношение между средним по времени значением полной кин. энергии системы и энергией взаимодействия.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} x_{i\beta} p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i\beta} p_{i\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U'_{ik} \times$$

$$\times \frac{(x_{i\alpha}-x_{k\alpha})(x_{i\beta}-x_{k\beta})}{|\vec{r}_i-\vec{r}_k|} + \sum_{i=1}^{N} x_{i\beta} F^{l}_{i\alpha}.$$

Домножим на $\delta_{\alpha\beta}$ и просуммируем:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{p}_i) - \sum_{i=1}^{N}(\vec{v}_i\vec{p}_i) = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U'_{ik}\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_k)^2}{|\vec{r}_i-\vec{r}_k|} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{F}^{l}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{p}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^{\,2} = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U'_{ik}|\vec{r}_i-\vec{r}_k| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{F}^{l}_i)$$

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,dt.$$

Т.к. первое слагаемое является производной по времени от ограниченной функции, что ~~оно~~ усреднение его по времени дает ноль.

$$-\overline{\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\frac{\partial T}{\partial\vec{v}_i}} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i,k=1}^{N} U'_{ik}|\vec{r}_i-\vec{r}_k|} + \overline{\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\vec{F}^{l}_i)}$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial T}{\partial v_j} = 2\overline{T} \Rightarrow$$

$$-2\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{j,k}^{N} U'_{jk}\,|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} + \overline{\sum_{j}^{N} (\vec{r}_j \vec{F}_j^{e})}$$

$$\boxed{\overline{E_k} = \overline{T} = +\frac{1}{4}\overline{\sum_{j,k}^{N} U'_{jk}\,|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} + \frac{1}{2}\overline{\sum_{j}^{N} (\vec{r}_j \vec{F}_j^{e})}}$$ –

вириал Клаузиуса.

Пусть U_{jk} – однородная функция по $|\vec{r}_j - \vec{r}_k|$ степени n, тогда по теореме Эйлера об однородных функциях: $\sum\limits_{j,k} U'_{jk}\,|\vec{r}_j - \vec{r}_k| = \sum\limits_{j,k} n U_{jk}$

$$\overline{T} = +\frac{1}{4} n \overline{\sum_{j,k} U_{jk}} + \frac{1}{2}\overline{\sum_{j} (\vec{r}_j \vec{F}_j^{e})}.$$

Если $F_j^{e} = 0$, то придём к обычной теореме о вириале:

$U = \frac{1}{2}\sum\limits_{j,k} U_{jk} \Rightarrow 2\overline{T} = +n\overline{U}$. В случае кулоновского потенциала $n = -1$:

$$2\overline{T} = -\overline{U}.$$

$\boxed{9}$ Рассм. систему частиц, находящуюся в поле, взаимодействующих между собой, а также с частицами некоторых других систем.

$f_\alpha(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = 0$ – ур-е связи

1\.
$f_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = 0$ – стационарные связи.

2\. $f_i(\vec{r}_i, t) = 0$ – голономная связь.

Пусть $\vec{R}_i$ – сила взаимодействия i-ой частицы с остальными.

Тогда $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i'$.

Имеем систему ~~двух~~ уравнений:

$$\begin{cases} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i' & i = \overline{1,N} \\ f_\alpha(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0 & \alpha = \overline{1,k} \end{cases}$$

Представим $\vec{R}_i$ в виде двух слагаемых: $\vec{R}_i' = \vec{R}_i + \vec{F}_i^d$.

$\vec{R}_i'$ так делится на слагаемые, чтобы $\vec{R}_i$ была силой реакции идеальных связей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_i \delta\vec{r}_i) = 0. \quad \delta\vec{r}_i = \{\delta x_{i1}; \delta x_{i2}; \delta x_{i3}\}.$$

Проварьируем уравнения связи: (связи голономные): $f_\alpha(t, \vec{r}_i) = 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_\alpha \delta\vec{r}_i = 0$$

Умножим на произв ф-ю λ_α и просуммируем: $\sum_{i=1}^{N} \delta\vec{r}_i \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha = 0$

Т.к. $\sum\limits_{i}(\vec{R}_i \delta \vec{r}_i) = 0$, то можем записать: $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i - \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha)\delta \vec{r}_i = 0$. λ_α – неопределённый множитель Лагранжа. Выберем k штук λ_α: коэф. при всех зависимых вариациях были равны нулю. Тогда в уравнении останется $3N-k$ слагаемых, с независимыми множителями. Коэффициенты при остальных вариациях, очевидно, равняются нулю $\Rightarrow$ $\vec{R}_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \\ f_\alpha(\vec{r}_i, t) = 0. \end{cases}$$

– ур-я Лагранжа 1-го рода.

Изменение полной энергии системы:

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^d \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i \vec{v}_i)$$

Если связи идеальны, то $\vec{R}_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i \vec{v}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(\vec{\nabla}_i f_\alpha \dot{\vec{r}}_i) = -\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$

$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \dot{\vec{r}}_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$, т.к. $\dot{f}_\alpha = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^d \vec{v}_i) + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}.$$

$\boxed{10}$ Рассмотрим уравнения движения:

$$m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i' + \vec R_i \quad \Big|\cdot \delta \vec r_i \to \sum_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i\ddot{\vec r}_i - \vec F_i')\,\delta\vec r_i = \sum_{i=1}^{N} \vec R_i\, \delta \vec r_i$$

Т.к. связи идеальные, то

$$\sum_i \vec R_i\,\delta\vec r_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}(\vec F_i' - m_i\ddot{\vec r}_i)\,\delta\vec r_i = 0 -$$

ур-я Даламбера.

$$\delta A = \sum_i \vec F_i\, \delta\vec r_i = \sum_i \vec F_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha\, \delta q_\alpha \qquad Q_\alpha = \sum_i \vec F_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_\alpha} \text{ — обоб-}$$

щенная сила.

Для выбора q_i необходимым условием является: $\det\left\|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right\| \neq 0$

$$\sum_i m_i\ddot{\vec r}_i\,\delta\vec r_i = \sum_i m_i \frac{d\dot{\vec r}_i}{dt}\,\delta\vec r_i =$$

$$= \sum_i m_i\frac{d\dot{\vec r}_i}{dt}\sum_\alpha \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha = \sum_i\sum_\alpha m_i \frac{d\dot{\vec r}_i}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha$$

$$\sum_i m_i \frac{d\dot{\vec r}_i}{dt}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\vec r}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\right]$$

$$\dot{\vec r}_i = \frac{\partial\vec r_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k}\,\dot q_k$$

$$\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial\dot q_\alpha} = \frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\,; \quad \frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_k \frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\alpha\,\partial q_k}\,\dot q_k +$$

$$+ \frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\alpha\,\partial t} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}$$

$$\sum_i m_i \frac{d\dot{\vec r}_i}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial\dot q_\alpha}\right) -\right.$$

$$\left. - \dot{\vec r}_i\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial q_\alpha}\right]$$

$$\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\ ;\ \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i,\alpha} m_i \delta q_\alpha \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \delta q_\alpha \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]$$

$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ – кинетическая энергия частицы.

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \delta q_\alpha \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right] = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \ \forall \alpha. \quad Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

Пусть $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{p} + \vec{F}_i^{d}$

Пот. сила: $\vec{F}^{p} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U$,

U – потенциальная энергия.

$\vec{F}^{p} = \vec{F}^{p}(\vec{r}, t) \Rightarrow U = U(\vec{r}, t)$.

$\vec{F}_i^{p} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{d} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}}_{\equiv\, Q_\alpha^{d}}$$

Q_α^{d} – об. дис. сила.

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^{d}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^{d}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv 0$, т.к. $U = U(\vec{r}, t)$. $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{d} \ ;\ L = T - U.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^d \;;\; \alpha = \overline{1,s}.$$

$\boxed{11}$. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определённые положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot q, q, t)\,dt$$

имел наименьшее возможное значение. L – ф-я Лагранжа, S-действие.

Пусть $q = q(t)$ – ф-я, для которой S имеет минимум. Это значит, что $S \uparrow$ при замене $q \to q + \delta q$, $\delta q(t)$ – мала. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

Проварьируем действие:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\,dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q \right) dt = 0$$

$$\delta \dot q = \frac{d}{dt}\delta q.$$

Проинтегрируем второй член по частям:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\, dt = 0,$$

т.к. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \Rightarrow$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q\, dt = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по основной лемме вариационного исчисления получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

При наличии s степеней свободы должны независимо варьироваться s различных функций $q_i(t)$. Тогда получаем s уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad i = \overline{1,s}.$$

$\boxed{12.}$ ФЛ в инерциальной СО для системы взаимодействующих частиц: $L = \sum\limits_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{N} U_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|) - \sum\limits_{i=1}^{N} U_i(\vec r_i, t).$

Рассмотрим СО S', которая движется относительно S по закону ~~к~~ $\vec r_0 = \vec r_0(t)$, и ~~на~~ с угловой скоростью $\vec\omega(t)$.

Координаты одной и той же частицы $\vec{r}_i$ в S и $\vec{r}_0'$ в S' связаны ф-лой:

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_0' = \vec{r}_0(t), \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_0' \Rightarrow \vec{r}_0 - \vec{r}_k = \vec{r}_0' - \vec{r}_k'.$$

Значит $U_{0k}(|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|) = U_{0k}(|\vec{r}_0' - \vec{r}_k'|)$, т.е. потенциальная энергия взаимодействия не изменяется при переходе в другую СО. $\frac{d}{dt} \to \frac{d}{dt} + [\vec{\omega}, \ldots]$

Преобразования скорости:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0' + \vec{V} + [\vec{\omega}(t), \vec{r}_0']$$

$$\vec{v}_0^{\,2} = \vec{V}^2 + \vec{v}_i'^{\,2} + [\vec{\omega}, \vec{r}_0']^2 + 2\vec{v}_0'\{\vec{V} + [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']\} +$$

$$+ 2\vec{V}[\vec{\omega}\,\vec{r}_i'] = \vec{V}^2 + \vec{v}_0'^{\,2} + [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']^2 + 2\vec{V}\{\vec{v}_0' + [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']\} +$$

$$+ 2\vec{v}_i'[\vec{\omega}\,\vec{r}_0']$$

$$\parallel$$

$$-2\vec{r}_0'[\vec{\omega}\,\vec{v}_0']$$

$$L = \underline{\frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{V}^2} + \frac{1}{2}\sum_0 m_0 \vec{v}_0'^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_0 m_0 [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']^2 +$$

$$+ \sum_0 m_0 \vec{V}\{\vec{v}_0' + [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']\} - \sum_i m_0 \vec{r}_0'[\vec{\omega}\,\vec{v}_0'] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{0j}(|\vec{r}_0' - \vec{r}_j'|) - \sum_0 U_0(\vec{r}_0(t) + \vec{r}_0', t)$$

$$\vec{V}\{\vec{v}_0' + [\vec{\omega}\,\vec{r}_0']\} = \vec{V}\{\vec{v}_0(t) - \vec{V}\} =$$

$$= \vec{V}\left\{\frac{d\vec{r}_0}{dt} - \vec{V}(t)\right\} = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{r}_0\vec{V}) - \vec{r}_0\dot{\vec{V}} - \vec{V}^2}$$

$$-\vec{r}_0\dot{\vec{V}} = -\vec{r}_0\dot{\vec{V}} - \vec{r}_0'\dot{\vec{V}}. \Rightarrow \quad \text{убираем в ФЛ.}$$

$$\boxed{L = -\dot{\vec{V}}}\sum_0 m_0 \vec{r}_0' + \frac{1}{2}\sum_0 m_0 \vec{v}_0'^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_0 m_0 \times$$

$$\times\left(\vec{\omega}^2 \vec{r}_0'^{\,2} - (\vec{\omega}\,\vec{r}_0')^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{0,j} U_{0j}(|\vec{r}_0' - \vec{r}_j'|) - \sum_0 U_0 +$$

$$+ \sum_0 m_0 \vec{v}_0'[\vec{\omega}\,\vec{r}_0'].$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec v_i'} - \frac{\partial L}{\partial \vec r_i'} = \vec F_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec v_i'} = m_i \vec v_i' + m_i[\vec\omega\, \vec r_i'] = m_i(\vec v_i' + [\vec\omega\, \vec r_i']).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec r_i'} = -m_i\dot{\vec V} + \frac{1}{2} m_i\left(2\omega^2 \vec r_i' - 2\vec\omega(\vec\omega\, \vec r_i')\right) +$$

$$+ m_i[\vec v_i'\, \vec\omega] - \frac{\partial}{\partial \vec r_i'}\sum u_{ij}(|\vec r_i' - \vec r_j'|) - \frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i'}$$

сила Кориолиса ц.б. сила

$$\underline{m_i\dot{\vec v}_i'} = -2m_i[\vec\omega\, \vec v_i'] - m_i[\vec\omega[\vec\omega\, \vec r_i']] - m_i[\dot{\vec\omega}, \vec r_i'] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \vec r_i'}\sum_j u_{ij}(|\vec r_i' - \vec r_j'|) - \frac{\partial U_i}{\partial \vec r_i'}(\vec r_0 + \vec r_i, t) + \vec F_i - m_i\dot{\vec V} +$$

$\boxed{13}$. Теорема Нётер.

Если действие системы $S[q(t)]$ инвариантно относительно непрерывного преобразования координат и/или времени, образующих r-параметрическую группу, то система имеет r интегралов движения.

Δ $\quad q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \delta q_i(t)$

$$t \to t' = t + \delta t$$

$$\delta q_i(t) = \bar\delta q_i + \dot q_i \delta t$$

$\bar\delta$ – ~~полная~~ вариация формы.

$$\delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(q(t), \frac{dq}{dt}, t\right)$$

$$dt' = \left|\frac{dt'}{dt}\right| dt = \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) dt$$

$$L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) = L\left(q'(t), \frac{dq'(t)}{dt}, t\right) +$$

$$+ \frac{dL}{dt}\delta t$$

$$L\left(q'(t), \frac{dq'(t)}{dt}, t\right) = L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) +$$

$$+ \bar\delta L$$

$$\bar\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\bar\delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\bar\delta \dot q_i =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\bar\delta q_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\bar\delta q_i\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}(L\delta t) + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\bar\delta q_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\bar\delta q_i\right)\right].$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\bar\delta q_i\right] = 0$$ (по условию).

$$\bar\delta q_i = \delta q_i - \frac{dq_i}{dt}\delta t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right]\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right] =$$

$$= 0.$$

Т.к. t_1 и t_2 произвольные, то

$$\frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right)\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right] = 0$$

$$[\;]\big|_{t_1} = [\;]\big|_{t_2} = const.$$

$$\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right)\delta t - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,\delta q_i = const$$

Пусть $\delta t = \sum_{a=1}^{r} \left.\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0} \delta\lambda_a$, λ_a - параметр преобразования.

$$\delta q_i(t) = \sum_{a=1}^{r} \left.\frac{\partial f_i(q(t),\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0} \delta\lambda_a$$

$$\sum_{a=1}^{r} \frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right)\left.\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0} - \right.$$

$$\left. - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left.\frac{\partial f_i(q(t),\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0}\right]\delta\lambda_a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right)\left.\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left.\frac{\partial f_i(q(t),\lambda)}{\partial \lambda_a}\right|_{\lambda=0}\right] = 0 \qquad \blacktriangle$$

$\boxed{14}$ Центрально-симметричным называется поле, в котором сила, действующая на частицу:

а) зависит только от расстояния до силового центра;

б) направлена вдоль линии, соединяющей силовой центр и частицу.

Утв.: $\forall$ ц.с. поле является потенциальным: $\vec F = -\nabla V$, причём $V = V(r)$.

Δ $\nabla V = \frac{\partial}{\partial \vec r} V(r) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial \vec r} = V'\frac{\partial\sqrt{\vec r^2}}{\partial \vec r} =$

$= V'\frac{\vec r}{r} \overset{\text{д.б.}}{=} -\vec F = -F(r)\frac{\vec r}{r} \Rightarrow V'(r) = -F(r).$ $\blacktriangle$

$\Rightarrow \forall F(r) \quad \exists V(r): \quad V(r) = -\int F(r)\,dr.$

$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\dot{\vec{r}}]$ ~~$= m[\vec{r}, \frac{d}{dt}\vec{r}] = m\frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{r}] - m[\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}]$~~

$\frac{d}{dt}\vec{L} = m[\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}]^0 + m[\vec{r}\ddot{\vec{r}}] = \{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) =$

$= F(r)\frac{\vec{r}}{r}\} = [\vec{r}\,\vec{r}]\frac{F(r)}{r} = 0 \Rightarrow$

$\vec{L} = const$

$(\vec{L}\vec{r}) = m([\vec{r}\dot{\vec{r}}]\vec{r}) = -m([\vec{r}\vec{r}]\dot{\vec{r}}) = 0 =$

$= L_x x + L_y y + L_z z$ — ур-е. плоскости $\Rightarrow$ движение в ц.с. поле происходит в плоскости, которая называется плоскостью Лапласа $\Rightarrow$

$s = 2.$

Для нахождения закона движения запишем ФЛ в полярных координатах:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - V(\rho)$$

1) $E = const = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + V(\rho)$

$E = E|_{t=t_0}$.

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = const = p_\varphi$

$p_\varphi = p_\varphi|_{t=t_0}$.

$\vec{L} = m[\vec{r}\dot{\vec{r}}] = m\rho^2\dot{\varphi}[\vec{e}_\rho \vec{e}_\varphi] = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow$

$\Rightarrow p_\varphi = L_z$.

Секторная скорость $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot\varphi = \frac{1}{2}\frac{L_z}{m} = \mathrm{const}$.

$$E = \frac{m\dot\rho^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot\varphi^2}{2} + V(\rho)$$

$$\dot\varphi = \frac{L_z}{m\rho^2}$$

$$E = \frac{m\dot\rho^2}{2} + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + V(\rho)$$

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L_z^2}{2m\rho^2} - V(\rho)\right)}$$

Если (+), то движение от СЦ, если (−), то движение к СЦ.

$$dt = \pm\int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

$$V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \equiv V_{eff}(\rho)$$

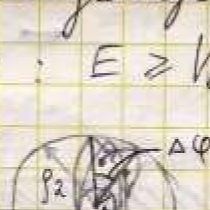
$$t - t_0 = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}$$

$$\frac{\dot\rho}{\dot\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}{L^2/m\rho^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int_{\rho_0}^{\rho_0} \frac{L\,d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}$$

Условие классически допустимой области движения: $E \geq V_{eff}(\rho)$.

1) 



$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{1\to2} + \Delta\varphi_{2\to1}$$

$$\Delta\varphi = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{L\,d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(\rho))}} - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{L\,d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff})}} =$$

$$= 2\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{L\,d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(\rho))}}.$$

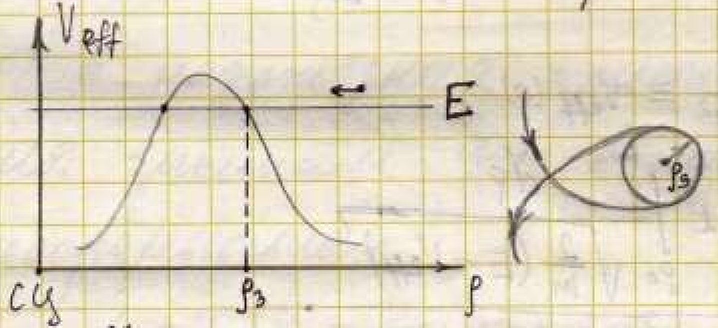
Условие замкнутости траектории: $\exists n \in \mathbb{Z}$: за n полных оборотов полное изменение угловой переменной $\Delta\varphi n \sim 2\pi$, т.е. если $\exists n, k \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta\varphi n = 2\pi k.$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{L\,d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(\rho))}} = \frac{\pi k}{n}$$

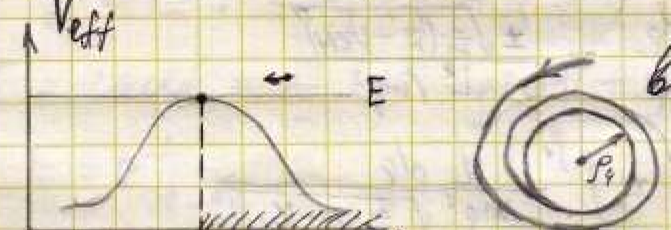
ρ_1, ρ_2 — точки поворота.

2)



рассеяние.

3)



выход на орбиту.

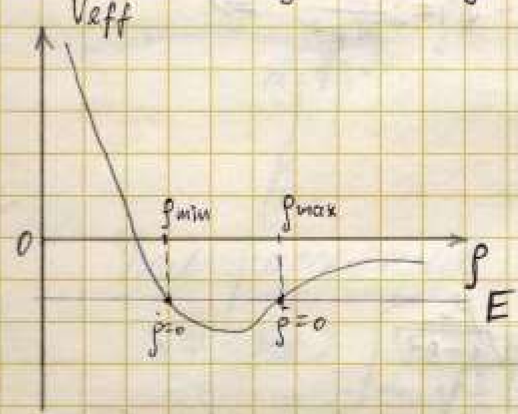
$t \to \infty$

4)

падение на силовой центр.

15 Задача Кеплера. $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$.

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$



$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L\, d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}$$

$$\frac{1}{\rho^2} d\rho = -d\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad \frac{1}{\rho} = u$$

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E + \alpha u - \frac{L^2}{2m}u^2\right)}} =$$

$$= \mp \int_{\frac{1}{\rho_0}}^{\frac{1}{\rho}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2}u - u^2}}$$

$$\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2}u - u^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2$$

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \int_{\frac{1}{\rho_0}}^{\frac{1}{\rho}} \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}\right) - \left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} =$$

$$= \arccos \left. \left(\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} \right) \right|_{\rho_0}^{\rho} \Rightarrow$$

$$\rho(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Если ввести $\frac{L^2}{m\alpha} = p_0$ – параметр, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет.

$p_0 = \frac{b^2}{a}$; $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$; a – большая полуось эллипса, b – малая.

Если $E < 0$, то $\varepsilon < 1$ $\Rightarrow$ траектория движения будет эллипсом.

$$\sigma = \frac{S}{T} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \quad . \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{L}{2m} = const.$$

$$S_{эл.} = \pi a b$$

$$a = \frac{p_0}{1-\varepsilon^2} \; ; \; b = \frac{p_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

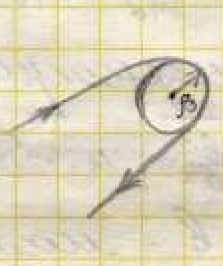
$$T = \frac{S}{\sigma} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sigma}$$

$$a = \frac{p_0}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \, . \; |E| = \frac{\alpha}{2a}$$

$$1-\varepsilon^2 = \frac{2|E|L^2}{m\alpha^2} = \frac{L^2}{ma\alpha}$$

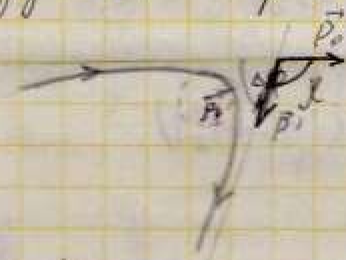
$$T = 2\pi a^2\sqrt{\frac{m^2}{L^2}\cdot\frac{L^2}{ma\alpha}} = 2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

$\boxed{16}$. В центральном поле притяжения $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$ инфинитное движение будет происходить, если $E \geq 0$, причём: 1) если $E = 0$, то $\varepsilon = 1$ и $\rho = \frac{p_0}{1+\cos(\varphi-\varphi_0)}$ — траектория является параболой:



$\rho_з$ — точка поворота.

2) Если $E>0$, то $\varepsilon>1$ и траектория будет гиперболой:



$\rho_ч$ – точка поворота.

Угол рассеяния:

$$\Delta\varphi = 2\int_{\rho_{min}}^{\infty}\frac{\frac{L}{m\rho^2}d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff})}}$$ – угол поворота

χ – угол рассеяния.

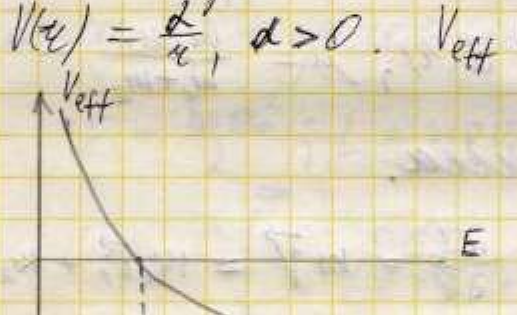
$$\chi = \pi - 2\int_{\rho_{min}}^{\infty}\frac{\frac{L}{m\rho^2}d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff})}}$$

$$\Delta\varphi = 2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \arccos\alpha = \begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}, & 0<\alpha\le 1\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}, & -1\le\alpha<0\end{cases}$$

$$\underline{\chi = \pi - 2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{2E}{m}}}.$$

Рассмотрим поле отталкивания:

$V(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha>0$. $V_{eff}(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2} \ge 0$



При $E>0$ будет инфинитное движение.

$$\rho = \frac{p}{-1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}. \quad \varepsilon>1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ траектория является гиперболой.

$$\underline{\chi = 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{2E}{m}}}.$$

$\boxed{17}$ Задача двух тел.

Запишем ФЛ двух взаимодействующих частиц:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

УЛ:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}. \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m} \end{cases}, \quad m = m_1 + m_2, \ \vec{R} \text{ — радиус-вектор ЦМ.}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 \\ m\dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \dot{\vec{R}} := \vec{V} \\ \dot{\vec{r}} := \vec{v} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m\vec{V}^2}{2} + \frac{\mu \vec{v}^2}{2} - U(r), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ —}$$

— приведённая масса.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{ЦМ} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}} = m\vec{V} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 =$$

$= \text{const}$. Если мы поместим начало СО в центр масс, то $\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{V} = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}$$

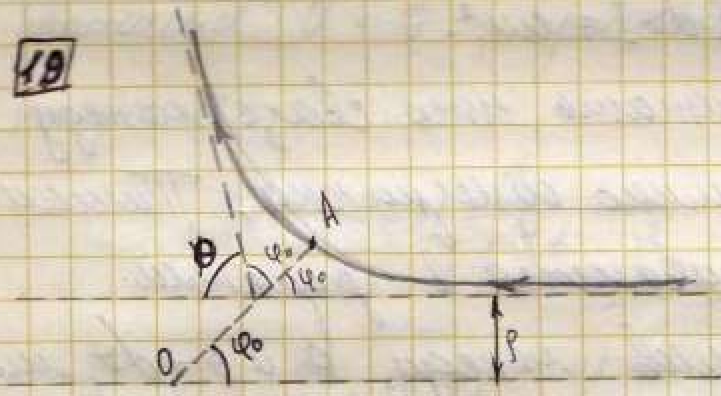
$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ — уравнение движения квазичастицы в центральном поле.

$$t + t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})}}$$

$$V_{eff} = U(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L^2\, d\rho}{\mu\rho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})}}.$$

$\boxed{18}$



Угол отклонения частицы $\theta = |\pi - 2\varphi_0|$.

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(L/r^2)\, dr}{\sqrt{2m\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

r_{min} — корень $E - V_{eff} = 0$.

v_∞ — скорость частицы на бесконечности, ρ — прицельный параметр.

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2};\ L = m\rho v_\infty. \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r^2\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2U/(mv_\infty^2)}}$$

dN — число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между θ и $\theta + d\theta$. Введём отношение: $d\sigma = \frac{dN}{n}$, где n – число частиц, проходящих в единицу времени через единичную площадку поперечного сечения пучка. $d\sigma$ – эффективное сечение рассеяния. $[d\sigma] = см^2$.

Будем считать, что связь между θ и ρ – взаимно однозначна. Таким образом рассеиваются в заданный интервал углов между θ и $\theta + d\theta$ лишь те частицы, которые летят с прицельным параметром в интервале $(\rho(\theta), \rho(\theta) + d\rho(\theta))$. Число таких частиц равно произведению n на площадь кольца между окружностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, т.е. $dN = 2\pi \rho \, d\rho \, n \Rightarrow$

$$d\sigma = 2\pi \rho \, d\rho = 2\pi \rho \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta.$$

Телесный угол между конусами с углами раствора θ и $\theta + d\theta$ есть $d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta \Rightarrow$

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega$$

$\boxed{18}$

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E - U - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} =$$

$$= \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\rho^2/r^2 - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$

Положим $U = \frac{\alpha}{r}$, проинтегрировав получим:

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\,tg^2\,\varphi_0$. Или вводя угол рассеяния $\varphi_0 = \frac{\pi-\theta}{2} \Rightarrow$

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\,ctg^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\rho^2}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}$$

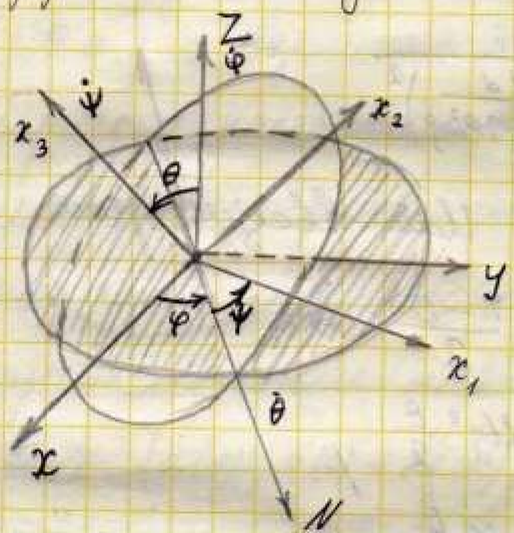
$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$\cancel{d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\,d\Omega}$$

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$ — формула

Резерфорда.

$\boxed{20}$. Для описания движения твёрдого тела можно пользоваться тремя координатами его центра инерции и какими-либо тремя углами, определяющими ориентацию осей движущейся системы координат относительно неподвижной системы. В качестве этих углов часто оказываются удобными углы Эйлера.



N – линия узлов: линия пересечения подвижной плоскости x_1x_2 и неподвижной XY.

$\dot\theta$ направлена по линии узлов (правило правого винта). ⇒ Проекции на оси подвижной системы: θ - угол нутации

$$\dot\theta_1 = \dot\theta\cos\psi;\ \dot\theta_2 = -\dot\theta\sin\psi;\ \dot\theta_3 = 0.$$

Очевидно, что $N \perp x_3$ и $N \perp Z$.

$$\dot\varphi_1 = \dot\varphi\sin\psi\sin\theta;\ \dot\varphi_2 = \dot\varphi\cos\psi\sin\theta;$$

$\dot\varphi_3 = \dot\varphi\cos\theta$. φ – угол прецессии

$\dot\psi$ направлена вдоль x_3 ⇒ $\dot\psi_3 = \dot\psi$, $\dot\psi_{1,2} = 0$. ψ - угол собственного вращения

$\theta \in [0;\pi]$; $\varphi, \psi \in [0; 2\pi]$.

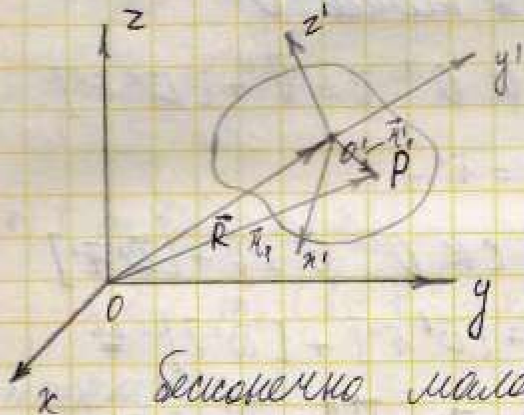
Запишем компоненты угловой скорости как функции углов Эйлера и их производных по времени:

$$\Omega_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi.$$

$$\Omega_2 = \dot\varphi \cos\psi \sin\theta - \dot\theta \sin\psi$$

$$\Omega_3 = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi$$

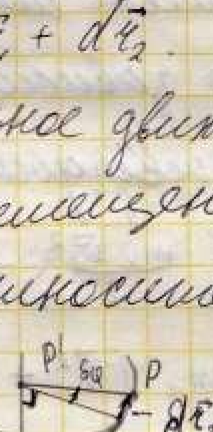
21 Возьмём неподвижную СК O и СК жёстко связанную с твёрдым телом O'.



Бесконечно малое перемещение твёрдого тела, любой его точки P можно записать как $d\vec r_p = d\vec r_1 + d\vec r_2$.

$d\vec r_1 = d\vec R$ – поступательное движение тела, $d\vec r_2$ – б.м. перемещение при чистом вращении относительно некоторой оси.

$$d\vec r_2 = [\delta\vec\varphi\, \vec r']$$



$|d\vec r_2| = |PP'|\,\delta\varphi$

$|PP'| = |\vec r'| \sin\theta$

$|d\vec r_2| = |\vec r'|\,\delta\varphi \sin\theta$

$\delta\vec\varphi = \delta\varphi\,\vec n,\ |\vec n| = 1.$

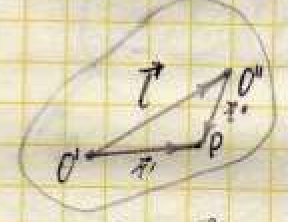
$d\vec{r} = d\vec{R} + [\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}\,'] \;\Big|\; \frac{1}{dt}$

$\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ – скорость P относительно неподвижной СК.

$\dot{\vec{R}} \equiv \vec{V}$ – скорость поступательного движения тела.

$\frac{\delta\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} = \omega\vec{n}$ – вектор угловой скорости. $\quad \vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega}\,\vec{r}\,']$

Выберем иную СК, жёстко связанную с твёрдым телом в точке O''



т. P с СК O'': $\vec{v} = \vec{V}'' + [\vec{\omega}''\,\vec{r}\,'']$

$\vec{r}\,' = \vec{r}\,'' + \vec{l}$

т. P в СК O': $\vec{v} = \vec{V}' + [\vec{\omega}'\,\vec{r}\,']$

$$\vec{v} = \vec{V}' + [\vec{\omega}'\,\vec{r}\,'] = \vec{V}' + [\vec{\omega}'\,\vec{r}\,''] + [\vec{\omega}'\,\vec{l}] \overset{д.б.}{=}$$
$$= \vec{V}'' + [\vec{\omega}''\,\vec{r}\,''] \Rightarrow \vec{\omega}'' = \vec{\omega}', \; \vec{V}'' = \vec{V}' + [\vec{\omega}'\,\vec{l}] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{\omega}$ имеет абсолютный смысл, т.е. не зависит от выбора СК, связанной с твёрдым телом. д.б. – должно быть.

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2} = \left[\dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{v}_\alpha = \vec{V} + [\vec{\omega}\,\vec{r}_\alpha\,']\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{V}^2 + 2(\vec{V}[\vec{\omega}\,\vec{r}_\alpha\,']) + [\vec{\omega}\,\vec{r}_\alpha\,']^2\right)$$

Выберем начало O' в ЦМ:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\vec{V}[\vec{\omega}\,\vec{r}_\alpha\,']) = \sum_{\alpha=1}^{N} (m_\alpha \vec{r}_\alpha\,'[\vec{V}\vec{\omega}]) = [\vec{V}\vec{\omega}]\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\,' = 0$$

$M := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha.$

$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{V}^2 = \frac{M\vec{V}^2}{2}$ – кинетическая энергия центра масс.

$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha [\vec{\omega}\vec{r}'_\alpha]^2 = \left\{ [\vec{a}\vec{b}]^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 \right\} =$

$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\vec{\omega}^2 \vec{r}'^2_\alpha - (\vec{\omega}\vec{r}'_\alpha)^2) = \left\{ \vec{\omega}^2 = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\omega_i; (\vec{\omega}\vec{r}'_\alpha)^2 = \right.$

$\left. = \sum_{i=1}^{3}\omega_i x'_{\alpha i} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\sum_{i=1}^{3}\omega_i\omega_i \vec{r}'^2_\alpha - \sum_{i,j}\omega_i x'_{\alpha i} \cdot \right.$

$\left. \cdot\, \omega_j x'_{\alpha j} \right] = \left\{ \sum_{i=1}^{3}\omega_i\omega_i = \sum_{i,j}\omega_i\omega_j\delta_{ij} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \cdot$

$\cdot \sum_{i,j} \left\{ \omega_i\omega_j\delta_{ij}\vec{r}'^2_\alpha - \omega_i\omega_j x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j} m_\alpha \omega_i\omega_j \cdot$

$\cdot\, (\delta_{ij}\vec{r}'^2_\alpha - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}).$

$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\delta_{ij}\vec{r}'^2_\alpha - x'_{\alpha i} x_{\alpha j}) = I_{ij}$ – тензор инерции.

$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha [\vec{\omega}\vec{r}'_\alpha]^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j.$

$$T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j$$

$L = T - U(\vec{r}, t) = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j - U(\vec{r}, t)$. ω_i можно раскрыть через углы Эйлера.

$\boxed{22}$. Тензор инерции:

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\delta_{ij}\vec{r}'^2_\alpha - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j})$$

При смене ориентации системы O'

в O'' $x'_{\alpha i}$ преобразуется по закону:

$x''_{\alpha i} = a_{ij} x'_{\alpha j}$, $\vec{r}'^2_\alpha$ - не меняется при поворотах $\Rightarrow$ При поворотах системы:

$I'_{ij} = a_{ik} a_{jm} I_{km}$, т.е. I_{ij} - тензор второго ранга.

Св-ва:

1) $I_{ij} = I_{ji}$

2) Тензор аддитивен - для системы тел равен сумме тензоров для подсистем.

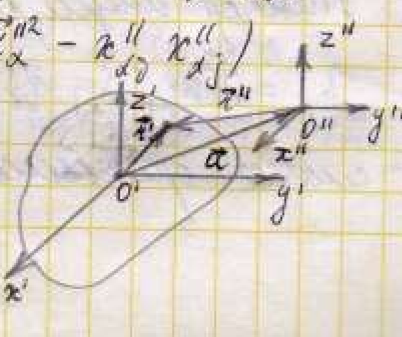
3) Его компоненты зависят от ориентации и выбора координатной системы.

Получим формулу для преобразования тензора инерции при параллельном переносе координатных осей. Пусть начало координат первой системы совпадает с ЦМ, а начало второй смещено на $\vec{a}$:

$$I^{(ЦМ)}_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}'^2_\alpha - x'_{i\alpha} x'_{j\alpha})$$

$$I''_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}''^2_\alpha - x''_{i\alpha} x''_{j\alpha})$$

$$\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{a}$$



$\vec{r}_\alpha''^2 = \vec{r}_\alpha'^2 - 2(\vec{r}_\alpha' \vec{a}) + \vec{a}^2$; $x_{\alpha i}'' x_{\alpha j}'' = (x_{\alpha i}' - a_i)(x_{\alpha j}' - a_j) =$
$= x_{\alpha i}' x_{\alpha j}' - a_j x_{\alpha i}' - a_i x_{\alpha j}' + a_i a_j$.

$$J_{ij}'' = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}_\alpha''^2 - x_{\alpha i}'' x_{\alpha j}'') = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \cdot$$
$$\cdot (\delta_{ij} (\vec{r}_\alpha'^2 - 2(\vec{r}_\alpha' \vec{a}) + \vec{a}^2) - x_{\alpha i}' x_{\alpha j}' + a_j x_{\alpha i}' + a_i x_{\alpha j}' +$$
$+ a_i a_j)$. Так как O' – находится в ц.м., то $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha' = M \vec{r}_{цм} = 0$; $\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha i}' = M x_{цм}' = 0 \Rightarrow$

$$J_{ij}'' = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}_\alpha'^2 - x_{\alpha i}' x_{\alpha j}') + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\delta_{ij} \vec{a}^2 -$$
$$- a_i a_j) = \underline{J_{ij}^{(цм)} + M (\delta_{ij} \vec{a}^2 - a_i a_j)}. \quad M = \sum_\alpha m_\alpha$$

Теперь приведём тензор инерции к диагональному виду. Т.к. J_{ij} – симметричный тензор второго ранга, то его можно привести к диагональному виду. Заметим, что если x_i – вектор, то $J_{ij} x_j$ – тоже вектор, то есть оператор $\hat{J}$ любому вектору $\vec{x}$ ставит в соответствие ~~опер~~ вектор $\hat{J}\vec{x}$, если этот новый вектор: $\hat{J}\vec{x} = \lambda \vec{x}$, то $\vec{x}$ – СВ, а λ – СЗ оператора $\hat{J}$. $J_{ij} x_j = \lambda x_i$.
СВ определены с точностью до произвольного инвариантного множителя, поэтому можем домножить на $\frac{1}{|\vec{x}|}$, тогда $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ – единичный СВ.

Для нахождения $\vec{n}$, нужно решить задачу на СВ и СЗ оператора $\hat{J}$ с матрицей J_{ij}.

$$(\hat{J}-\lambda\hat{E})\vec{n}=0 \text{ или } (J_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0.$$

Эта однородная СЛАУ имеет нетривиальное решение $\Longleftrightarrow \det\|J_{ij}-\lambda\delta_{ij}\|=0$.

Это кубическое уравнение относительно λ имеет только вещ. корни. Пусть $J_3 \equiv J_{33}$ — СЗ, тогда $J_{ij}n_j^{(3)}= J_3 n_i^{(3)}$. Ось z' системы O' направим вдоль $\vec{n}^{(3)}$, в ней $\vec{n}^{(3)}=\{0,0,1\}$. $J_{33}=J_3$, $J_{23}=J_{13}=0$.

Если $\vec{n}\perp\vec{n}^{(3)}$, то $\hat{J}\vec{n}\perp\vec{n}^{(3)}$. Рассмотрим множество векторов: $\vec{n}\perp\vec{n}^{(3)}$. На этом множестве можно поставить двумерную задачу на СЗ и СВ. Находим СЗ J_2 и $\vec{n}^{(2)}$, направляем вдоль $\vec{n}^{(2)}$ ось y'. То же и для J_1, $\vec{n}^{(1)}$ и x'. Т. о. мы приводим тензор инерции к диагональному виду:

$$J_{ij}=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0\\ 0 & 0 & J_3\end{pmatrix}.$$

[23] Запишем уравнения движения:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d'\vec{P}}{dt} + [\vec{\omega}\vec{P}] = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d'}{dt} + [\vec{\omega}, \_].$$

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{\omega}\vec{L}] = \vec{M}, \quad \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] \text{ — момент}$$

сил. $\frac{d'}{dt}$ — дифференцирование в подвижной СК, поэтому можно проецировать уравнения на оси системы.

$$\begin{cases} M(\dot{V}_1 + \omega_2 V_3 - \omega_3 V_2) = F_1 \\ M(\dot{V}_2 + \omega_3 V_1 - \omega_1 V_3) = F_2 \\ M(\dot{V}_3 + \omega_1 V_2 - \omega_2 V_1) = F_3 \end{cases}$$

Предполагая оси системы O' выбранными по главным осям инерции, то $L_1 = I_1\omega_1$, $L_2 = I_2\omega_2$; $L_3 = I_3\omega_3$.

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) = M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) = M_3 \end{cases} \text{ — уравнения Эйлера.}$$

Симметричное свободное твердое тело: $I_1 = I_2$; I_3.

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_1) = 0 \\ I_1\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_1\omega_3 \Big| \cdot i \end{aligned}$$

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_1+i\omega_2) = \Omega(-\omega_2+i\omega_1)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_1+i\omega_2) = i\Omega(\omega_1+i\omega_2)$$

$$\omega_3 = const$$

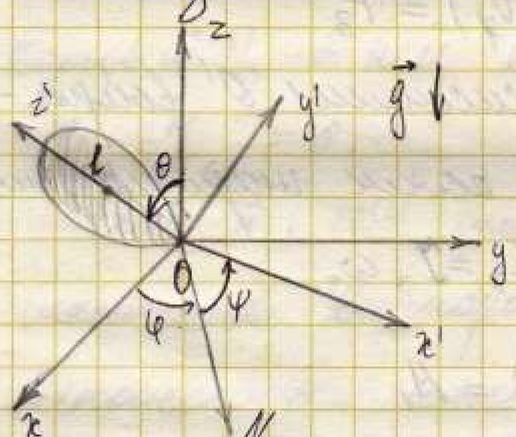
$$\omega_1+i\omega_2 = Ae^{i\Omega t} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = A\cos\Omega t\ ;\ \omega_2 = A\sin\Omega t.$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2 = 1.$$

Ω – частота прецессии.

$\boxed{24}$ Выберем начало координат обеих СК в неподвижной точке волчка.



$$l = z'_{цм}$$

$$z_{цм} = l\cos\theta$$

$$x_{цм} = l\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = -l\sin\theta\sin\varphi$$

$$y_{цм} = -l\sin\theta\cos\varphi$$

$$L = T-U \qquad T = T_{цм} + T_{вр}$$

$$T_{цм} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_{цм}^2+\dot{y}_{цм}^2+\dot{z}_{цм}^2\right)$$

$$\dot{x}_{цм} = -l\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - l\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot{y}_{цм} = -l\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi + l\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{z}_{цм} = -l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T_{цм} = \frac{ml^2}{2}\left\{(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)^2 + \right.$$

$$\left. + (\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)^2+\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$

$$T_{зм} = \frac{ml^2}{2}\left\{ \dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cancel{2\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi} + \dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \right.$$

$$+ \dot\theta^2\cos^2\theta\cos^2\varphi - \cancel{2\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\sin\theta}\cos\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\sin^2\varphi +$$

$$\left. + \dot\theta^2\sin^2\theta \right\} = \frac{ml^2}{2}\left\{ (\dot\theta^2\cos^2\theta + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \dot\theta^2\sin^2\theta \right\} =$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right).$$

$$T_{вр} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right)$$

$J_1 = J_2;\ J_3.$ $\qquad T_{вр} = \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2$

$$\omega_1 = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi + \dot\theta(-\sin\psi)$$

$$\omega_3 = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta$$

$$T_{вр} = \frac{1}{2}J_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta\sin^2\psi + \cancel{2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\sin\psi\cos\psi} + \right.$$

$$+ \dot\theta^2\cos^2\psi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\psi \cancel{- 2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi} +$$

$$\left. + \dot\theta^2\sin^2\psi\right) + \frac{1}{2}J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}J_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{J_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

$$U = mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{J_1 + ml^2}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{J_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 -$$

$$- mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = const$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{J_1 + ml^2}{2}\cdot 2\dot\varphi\sin^2\theta + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta = const$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = const$$

$$E = \frac{J_1 + ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{J_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 +$$

$$+ mgl\cos\theta = \text{const}.$$

$$p_\varphi = (J_1 + ml^2)\dot\varphi\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta$$

$$p_\psi = J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)$$

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{(J_1 + ml^2)\sin^2\theta}$$

$$\dot\psi = \frac{p_\psi}{J_3} - \cos\theta\,\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{(J_1 + ml^2)\sin^2\theta}$$

$J_1' := J_1 + ml^2$ – момент инерции относительно точки неподвижной.

Исключая $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ из E получаем:

$$E' = \frac{J_1'}{2}\dot\theta^2 + U_{эф}(\theta), \text{ где}$$

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl, \quad U_{эф}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2J_1'\sin^2\theta} -$$

$$- mgl(1 - \cos\theta).$$

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{2}{J_1'}\left(E' - U_{эф}\right)}$$

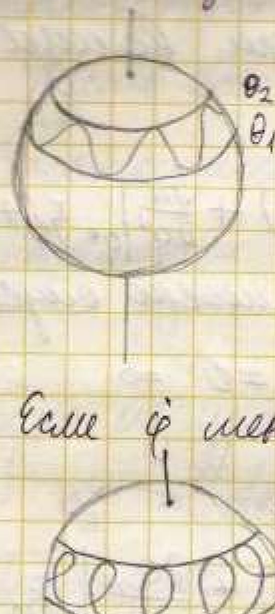
$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{J_1'}\left(E' - U_{эф}(\theta)\right)}}$$

Область изменения угла θ определяется условием $E' \geq U_{эф}(\theta)$.

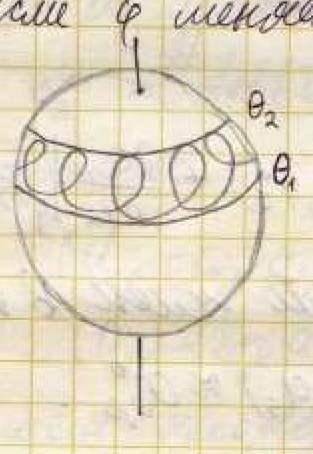
$U_{эф}(\theta) \to \infty$, $\theta = 0, \pi$, если $p_\varphi \neq p_\psi$, а в промежутке между ними проходит через минимум. Поэтому

$E' = U_{эф}(\theta)$ имеет два корня, определяющих предельные углы θ_1 и θ_2 наклона оси волчка к вертикали.

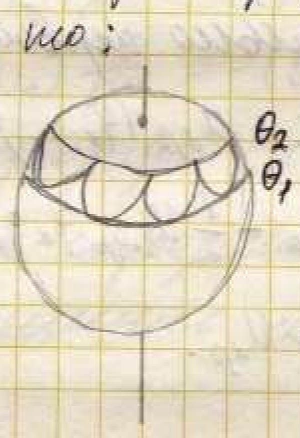
Знак $\dot{\varphi}$ может меняться, а может оставаться неизменным в интервале от θ_1 до θ_2, ~~вдо~~ зависимости от $p_\varphi - p_\psi \cos\theta$. Если $\dot{\varphi}$ не меняет знак, то ось волчка прецессирует монотонно, одновременно совершая колебания (нутацию).



Если $\dot{\varphi}$ меняет знак, то:



Если θ_1 или θ_2 совпадает с нулем разности $p_\varphi - p_\psi \cos\theta$, то:



$\boxed{25}$ ФЛ консервативной системы:

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s)\, \dot q_\alpha \dot q_\beta - U(q_1, \dots, q_s),$$

где по одинаковым индексам подразумевается суммирование. Диссипации отсутствуют.

Пусть $\exists$ положение равновесия $\{q_\alpha^0\}$, которое находится из $\left.\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right|_{q^0} = 0$.

Найдём закон движения системы, когда отклонения от положения равновесия малы $\xi_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^0$. $\dot\xi_\alpha = \dot q_\alpha$.

Разложим U в ряд Тейлора вблизи точки равновесия:

$$U(q_1, \dots, q_s) = U(q_1^0, \dots, q_s^0) + \left.\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right|_{q^0} \xi_\alpha +$$

$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + \dots$ $U(q^0)$ – можно опустить в ФЛ, т.к. она конст. $\left.\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right|_{q^0} = 0 \Rightarrow$

$$L \cong \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta - \frac{1}{2} U_{q_\alpha q_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

$$a_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) \simeq a_{\alpha\beta}(q_1^0, \dots, q_s^0) + \left.\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\alpha}\right|_{q^0} \xi_\alpha + \dots$$

Оставим только первый член в этом разложении: $a_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) \simeq a_{\alpha\beta}^0$.

$$L \cong \frac{a_{\alpha\beta}^0}{2} \dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta - \frac{1}{2} U_{q_\alpha q_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

$$U_{q_\alpha q_\beta} \equiv U_{\alpha\beta}.$$

$U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$. $\quad L = \frac{a^0_{\alpha\beta}}{2} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} U_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$

УЛ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = 0 \Rightarrow$

$$a^0_{\alpha\beta} \ddot{\xi}_\beta + U_{\alpha\beta} \xi_\beta = 0, \quad \alpha, \beta = \overline{1, s}.$$

Ищем решение в виде $\xi_\alpha = A_\alpha e^{-i\omega t}$, подставив в уравнения получим СЛОУ:

$(U_{\alpha\beta} - a^0_{\alpha\beta}\omega^2) A_\beta = 0$. Эта система имеет нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ $\det \| U_{\alpha\beta} - \omega^2 a^0_{\alpha\beta} \| = 0$ $\quad \Delta = \det \| \, \|$. Все корни ω^2_μ характеристического уравнения вещественны.

Пусть все ω^2_μ – различны.

Рассмотрим один из корней ω^2_μ.

Подставим его в уравнение для A_{β}:

$(U_{\alpha\beta} - \omega^2_\mu a_{\alpha\beta}) A^{(\mu)}_\beta = 0$. Очевидно, одно из уравнений зависимо (s-е). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta^{(\mu)}_s = \det \| U_{\alpha\beta} - \omega^2_\mu a_{\alpha\beta} \| \neq 0$, для $\alpha, \beta = \overline{1, s-1}$.

Перенесём s-е слагаемое вправо;

$$(U_{\alpha\beta} - \omega^2_\mu a_{\alpha\beta}) A^{(\mu)}_\beta = - A^{(\mu)}_s (U_{\alpha s} - \omega^2_\mu a_{\alpha s})$$

$$(U_{\alpha\beta} - \omega_\mu a_{\alpha\beta}) \frac{A^{(\mu)}_\beta}{A^{(\mu)}_s} = -(U_{\alpha s} - \omega^2_\mu a_{\alpha s})$$

Имеем неоднородную СЛАУ с отличным от нуля определителем $\Rightarrow$ можем разрешить её по формулам

Крамера:

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = -\frac{1}{\Delta_s^{(\mu)}} \begin{vmatrix} u_{1s}-\omega_\mu^2 a_{1s} & u_{12}-\omega_\mu^2 a_{12} & \dots & u_{1,s-1}-\omega_\mu^2 a_{1,s-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1,s}-\omega_\mu^2 a_{s-1,s} & u_{s-1,2}-\omega_\mu^2 a_{s-1,2} & \dots & u_{s-1,s-1}-\omega_\mu^2 a_{s-1,s-1} \end{vmatrix}$$

Первый столбец можно перенести в последний, тогда определитель изменит знак и будет равен минору характеристического определителя $\Delta_1^{(\mu)}$ полученного вычёркиванием 1-го столбца и s-й строки.

$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = \frac{\Delta_1^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}}$. В силу произвольности нумерации $\frac{A_1^{(\mu)}}{\Delta_1^{(\mu)}} = \frac{A_2^{(\mu)}}{\Delta_2^{(\mu)}} = \dots = \frac{A_s^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}} \equiv C_\mu \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\alpha^{(\mu)} = \Delta_\alpha^{(\mu)} C_\mu$. Т.о. $\xi_\alpha^{(\mu)} = \mathrm{Re}\left(A_\alpha^{(\mu)} e^{-i\omega_\mu t}\right) =$
$= \Delta_\alpha^{(\mu)} \mathrm{Re}\left(C_\mu e^{-i\omega_\mu t}\right)$.

Общее решение системы уравнений движения является суперпозицией решений для каждой $\omega_\mu \Rightarrow$

$\xi_\alpha = \sum_\mu \mathrm{Re}\{\Delta_\alpha^{(\mu)} C_\mu e^{-i\omega_\mu t}\}$. Из вида решения видно, что система остаётся в положении равновесия если $\omega_\mu^2 > 0$.

$\boxed{26}$. Воспользуемся неоднозначностью в выборе обобщённых координат и введём вместо ξ_α

новые обобщённые координаты по формулам $\xi_\alpha = \sum_\mu \Delta_\alpha^{(\mu)} \theta_\mu \equiv \Delta_{\alpha\mu}\theta_\mu$, где $\theta_\mu = \mathrm{Re}\, c_\mu e^{-i\omega_\mu t}$. Кинетическая энергия в приближении линейных колебаний

$$T = \frac{1}{2} a^0_{\alpha\beta} \dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta = \frac{1}{2} a^0_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\xi} \dot\theta_\mu \dot\theta_\xi \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\xi} \dot\theta_\mu \dot\theta_\xi$$

$\varepsilon_{\mu\xi} = a^0_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\xi}$ – матрица диагональна.

Δ $U_{\alpha\beta}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}\Delta_\beta^{(\mu)} \Rightarrow U_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\xi)}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_\mu^2 a^0_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\xi)}\Delta_\beta^{(\mu)}$.

$\mu \leftrightarrow \xi$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ и учтём что $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$ и $a^0_{\alpha\beta} = a^0_{\beta\alpha} \Rightarrow U_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\xi)}\Delta_\beta^{(\mu)} = a^0_{\alpha\beta}\omega_\xi^2 \Delta_\beta^{(\mu)}\Delta_\alpha^{(\xi)}$ вычтем одно из другого и получим:

$(\omega_\mu^2 - \omega_\xi^2)\varepsilon_{\mu\xi} = 0$ т.к. ω_μ и ω_ξ различны, то $\varepsilon_{\mu\xi} = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\xi}$, здесь нет суммирования по μ и $\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_\mu \dot\theta_\mu^2$ Δ.

$$U = \frac{1}{2} U_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \frac{1}{2}\underbrace{U_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\xi}}_{\omega_\mu^2 \varepsilon_{\mu\xi}}\theta_\mu\theta_\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\mu \omega_\mu^2 \varepsilon_\mu \theta_\mu^2 . \rightarrow$$

ФЛ: $L = \frac{1}{2}\sum_\mu (\varepsilon_\mu \dot\theta_\mu^2 - \omega_\mu^2 \varepsilon_\mu \theta_\mu^2)$

УР:

$$\ddot\theta_\mu \varepsilon_\mu + \omega_\mu^2 \varepsilon_\mu \theta_\mu = 0$$

$$\underline{\ddot\theta_\mu + \omega_\mu^2 \theta_\mu = 0}.$$

$$\theta_\mu = a_\mu \cos(\omega_\mu t + \delta_\mu)$$

27 Если диссипативные силы пропорциональны скорости, то они могут быть заданы при помощи диссипативной функции Релея $D = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \geq 0$.

Физический смысл диссипативной функции заключается в том, что ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. $D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta$, $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}$.

УЛ: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}^\alpha}$

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta - \frac{1}{2} U_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta.$$

$$a_{\alpha\beta} \ddot{\xi}^\beta + U_{\alpha\beta} \xi^\beta = - d_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta$$

$$a_{\alpha\beta} \ddot{\xi}^\beta + d_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta + U_{\alpha\beta} \xi^\beta = 0. \quad \alpha = \overline{1,s}.$$

Линейным преобразованием обобщённых координат эта система не сводится к системе независимых уравнений.

Ищем решение в виде $\xi_\alpha = \mathrm{Re}(A_\alpha e^{-i\omega t})$.

$(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}) A_\beta = 0$. ХУ $\Delta = 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_\alpha$, т.к. все $a_{\alpha\beta}, d_{\alpha\beta}, U_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, то корни ХУ $\lambda = -i\omega$ либо $\in \mathbb{R}$ (т.е. $\omega \in \mathbb{C}$), либо попарно комплексно сопряжённые. Домножим ~~сло~~ СЛАУ на A_α^* и ~~...~~, заменяя $\alpha \leftrightarrow \beta$ и складывая получим:

$$(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta})\underbrace{(A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*)}_{\in \mathbb{R}} = 0.$$

Получим квадратное уравнение для $\lambda = -i\omega$ с вещественными коэфф.

По теореме Виета $\quad -i\omega + i\omega^* = -\dfrac{d_{\alpha\beta}(A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*)}{a_{\mu\nu}(A_\mu^* A_\nu + A_\mu A_\nu^*)}\begin{matrix}\geq 0\\ > 0\end{matrix}$,

правая часть < 0. $\omega \equiv \nu - i\gamma$,

т.к. $-i\omega + i\omega < 0$, то $\gamma > 0$. Предположим, что нам известны корни ХУ "ω", тогда подставляя каждый корень в СЛАУ для A_α получим ур-е. для $A_\alpha^-(\omega_\nu)$, а подставляя ω_ν^*, получим ур-е. для $A_\alpha^+(\omega_\nu^*)$.

Используя формулы Крамера получаем, что $A_\alpha^\pm(\omega_\mu^{(*)}) = c_\mu^\pm \Delta_\alpha(\omega_\mu^{(*)})$. Тогда общее решение: $\xi_\alpha = \operatorname{Re}\sum\limits_{\mu=1}^{2s}(\Delta_\alpha(\omega_\mu)c_\mu^- e^{-i\omega_\mu t} + \Delta_\alpha(\omega_\mu^*)c_\mu^+ e^{i\omega_\mu^* t})$

т.к. $\omega = \nu - i\gamma$, то из решения видно, что колебания будут затухать по закону $e^{-\gamma_\mu t}$.

$\boxed{28}$ Считаем справедливым приближение линейных колебаний и внешнее поле достаточно слабым:

$$L = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}^0 \dot\xi_\alpha \dot\xi_\beta - \frac{1}{2}U_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta + Q_\alpha(t)\xi_\alpha,$$

где $Q_\alpha = -\left.\frac{\partial U^e}{\partial q_\alpha}\right|_{q^0} = Q_\alpha(t)$, $U^e(q,t)$ – внешнее поле. $D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta > 0$.

УЛ: $a_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta + d_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\beta + U_{\alpha\beta}\xi_\beta = Q_\alpha(t)$.

Общее решение данного уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного ~~но~~ решения. Т.к. ~~но~~ решение однородного уравнения мы знаем, то нужно найти частное решение неоднородной системы.

Пусть $Q_\alpha(t)$ – периодические функции, с периодом T. Тогда:

$$Q_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha n} e^{-i\Omega n t}, \quad Q_{\alpha n} = \frac{2}{T}\int_0^T Q_\alpha(t) e^{in\Omega t} dt.$$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Постоянная составляющая при $n=0$ может быть исключена путём сдвига ξ_α на const. $Q_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\alpha n} e^{-in\Omega t}$. Теперь ищем частное решение системы в виде $\xi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n} e^{-in\Omega t}$:

$$(-n^2\Omega^2 a_{\alpha\beta} - in\Omega d_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}) A_{\beta n} = Q_{\alpha n}$$

по формулам Крамера:

$$A_{\alpha n} = \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)}; \quad \xi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n} e^{-in\Omega t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)} e^{-in\Omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)\Delta^*(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)\Delta^*(n\Omega)} e^{-in\Omega t}$$

$\Delta(\lambda) = \det\| \lambda^2 a_{\alpha\beta} + \lambda d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta} \| = 0$ — полином степени $2s \Rightarrow \Delta(\lambda) = const \prod_{\mu=1}^{2s} (\lambda - \lambda_\mu)$, $\lambda = -i\omega$;

$\Delta(\omega) = const \prod_{\mu=1}^{2s} (\omega - \omega_\mu)$; $\Delta(n\Omega) = const \prod_{\mu=1}^{2s} (n\Omega - \omega_\mu)$.

$\Delta(n\Omega)\Delta^*(n\Omega) = const \cdot const^* \prod_{\mu=1}^{2s} (n\Omega - \omega_\mu)(n\Omega - \omega_\mu^*) =$

$= const \cdot const^* \prod_{\mu=1}^{2s} [(n\Omega - \nu_\mu)^2 + \gamma_\mu^2]$. Если γ_μ мало, то большая амплитуда будет соответствовать $\nu_\mu = n\Omega$, в этом случае имеет место резонанс n-го порядка. Общее решение уравнения:

$$\xi_\alpha = Re\Big\{ \sum_{\mu=1}^{2s} \big(\Delta_\alpha(\omega_\mu) c_\mu^- e^{-i\omega_\mu t} + \Delta_\alpha(\omega_\mu^*) c_\mu^+ e^{i\omega_\mu^* t}\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\alpha(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)} e^{-in\Omega t}$$

$\boxed{29.}$ Квадратичная форма, полученная путём разложения потенциальной энергии, может не быть положительно определённой. В этом случае в выражении для частот $u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta} * \Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$ левая часть может равняться нулю при $\Delta_\alpha^{(\mu)} \neq 0$, $\Rightarrow \omega_\mu = 0$. Из уравнений для нормальных колебаний получим $\ddot{\theta}_\mu = 0 \Rightarrow \theta_\mu(t) = C_1 t + C_2$, что соответствует поступательному движению или вращению системы.

Также надо всё случается при движении молекул. Если перейдём в СЦМ, то мы исключим поступательные и вращательные степени свободы.

$\vec{r}_a = \vec{r}_{цм} + \vec{\xi}_a \Rightarrow \sum_a m_a \vec{r}_a = \sum_a m_a \vec{r}_{цм} + \sum_a m_a \vec{\xi}_a$. В СЦМ $\underline{\sum_a m_a \vec{\xi}_a = 0}$.

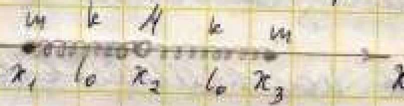
$\sum_a m_a \vec{r}_a = M \vec{r}_{цм}$.

$$\sum_{a=1}^{N} m_a [\vec{r}_a \vec{v}_a] = \sum_a m_a [\vec{r}_{цм} \dot{\vec{\xi}}_a] = \frac{d}{dt} \sum_a m_a [\vec{r}_{цм} \vec{\xi}_a]$$

полагая $\underline{\sum_a m_a [\vec{r}_{цм} \vec{\xi}_a] = 0}$ получаем

два уравнения 1-е для исключения поступательного движения, 2-е для исключения вращательного.

Рассмотрим трёхатомную молекулу:



$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l_0)^2$$

введём ξ_a — отклонение от положения равновесия $\xi_a = x_a - x_{0a}$.

$$x_{02} - x_{01} = l_0 = x_{03} - x_{02}.$$

$$U = \frac{k}{2}(\xi_2 - \xi_1)^2 + \frac{k}{2}(\xi_3 - \xi_2)^2 =$$

$$= \frac{k}{2}(2\xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3)$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{\xi}_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

$$\det \| U - \omega^2 T \| = \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} =$$

$$= (k-\omega^2 m)^2 (2k - \omega^2 M) - 2k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$

$$(k-\omega^2 m)\left((k-\omega^2 m)(2k-\omega^2 M) - 2k^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = 0 \; ; \; \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \; \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2k}{M}\right)}.$$

$\omega_1 = 0$ – соответствует поступательному движению.

$\boxed{30}$ Системы близкие к линейным – системы, описывающиеся уравнением движения:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Основу метода Крылова-Боголюбова составляет предположение о том, что линейные колебания системы являются основным состоянием системы, а нелинейные колебания являются возмущениями этого основного состояния.

При $\varepsilon = 0$ колебания — гармонические, с постоянной амплитудой и равномерно меняющейся фазой $\xi = a\cos\psi$, $\dot a = 0$, $\dot\psi = \omega_0$. При появлении нелинейности в ур-ии появляются кратные гармоники, частота станет зависеть от амплитуды, а сама амплитуда может медленно меняться со временем; $\xi = a\cos\psi + \varepsilon\,\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\,\xi_2(a,\psi) + \ldots$

$\dot a = 0 + \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \ldots$ — будем искать в таком виде.

$\dot\psi = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \ldots$

a — амплитуда основной гармоники в разложении Фурье. Тогда функции $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \ldots$ не будут содержать членов, пропорциональных $\cos\psi$ и $\sin\psi$ и будут удовлетворять условиям $\int_0^{2\pi}\varepsilon^n\xi_n(a,\psi)\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix} = 0$.

Ограничимся первым порядком.

$$\dot\xi = \dot a\cos\psi - a\dot\psi\sin\psi + \varepsilon\left\{\frac{\partial\xi_1}{\partial a}\dot a + \frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\dot\psi\right\} =$$

$$= -a\omega_0\sin\psi - \varepsilon\omega_1(a)\,a\sin\psi + \varepsilon^2 f_1(a)\frac{\partial\xi_1}{\partial a} + \varepsilon\omega_0\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi} +$$

$$+ \varepsilon f_1(a)\cos\psi$$

$$\ddot{\xi} = -\dot{a}\omega_0 \sin\psi - a\omega_0\dot{\psi}\cos\psi - \varepsilon\frac{\partial\omega_1}{\partial a}\dot{a}a\sin\psi -$$

$$- \varepsilon\omega_1(a)\dot{a}\sin\psi - \dot{\psi}a\varepsilon\omega_1(a)\cos\psi + \varepsilon\omega_0\frac{\partial^2\xi_1}{\partial^2\psi^2}\dot{\psi} + \varepsilon\omega_0\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi\partial a}\dot{a} +$$

$$+ \varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial a}\dot{a}\cos\psi - \varepsilon\dot{\psi}f_1(a)\sin\psi = -\varepsilon f_1(a)\omega_0\sin\psi -$$

$$- a\omega_0^2\cos\psi - \varepsilon a\omega_0\omega_1(a)\cos\psi - \varepsilon a\omega_0\omega_1(a)\cos\psi +$$

$$+ \varepsilon\omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial^2\psi^2} - \varepsilon\omega_0 f_1(a)\sin\psi = -a\omega_0^2\cos\psi -$$

$$- 2\varepsilon\omega_0 f_1(a)\sin\psi - 2\varepsilon a\omega_0\omega_1(a)\cos\psi + \varepsilon\omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial^2\psi^2}$$

$$\ddot{\xi} = -a\omega_0^2\cos\psi + \varepsilon\left\{-2a\omega_0\omega_1\cos\psi - 2\omega_0 f_1\sin\psi + \omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right\}$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = -a\omega_0^2\cos\psi + \varepsilon\left\{-2a\omega_0\omega_1\cos\psi - 2\omega_0 f_1\sin\psi + \omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right\} + \omega_0^2 a\cos\psi + \omega_0^2\varepsilon\xi_1 =$$

$$= \varepsilon\left\{-2a\omega_0\omega_1\cos\psi - 2\omega_0 f_1\sin\psi + \omega_0^2\xi_1 + \omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right\}$$

Раскладываем $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ в „точке"

$a\cos\psi$, $-a\omega_0\sin\psi$ с указанной точностью: $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)$

$$\omega_0^2\left\{\xi_1 + \frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right\} = 2a\omega_0\omega_1\cos\psi + 2\omega_0 f_1\sin\psi +$$

$$+ Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi).$$ $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ — известна.

Представим Q и ξ_1 (по предположению ξ_1 — периодическая) в виде рядов Фурье:

$$Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\beta_n(a)\cos n\psi + \alpha_n\sin n\psi\}$$

$$\xi_1(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\nu_n(a)\cos n\psi + \gamma_n(a)\sin n\psi\}.$$

Согласно нашему требованию $v_1 = \gamma_1 = 0$.

$$\xi_1(a,\psi) = v_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \{ v_n(a)\cos n\psi + \gamma_n(a)\sin n\psi \}.$$

Подставляем в уравнение

$$\omega_0^2 \Big\{ v_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} [v_n(a)\cos n\psi + \gamma_n(a)\sin n\psi] +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{ -n^2 v_n(a)\cos n\psi - n^2 \gamma_n(a)\sin n\psi \} \Big\} =$$

$$= 2\omega_0 a\omega_1 \cos\psi + 2\omega_0 f_1 \sin\psi + \beta_0(a) +$$

$$+ \beta_1(a)\cos\psi + \alpha_1(a)\sin\psi + \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha_n(a)\sin n\psi + \beta_n(a) \times$$

$$\times \cos n\psi]$$

$$\omega_0^2 \Big\{ v_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) [v_n(a)\cos n\psi + \gamma_n(a)\sin n\psi] \Big\} =$$

$$= 2\omega_0\omega_1 a\cos\psi + 2\omega_0 f_1 \sin\psi + \beta_0(a) + \beta_1(a)\cos\psi +$$

$$\alpha_1(a)\sin\psi + \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha_n(a)\sin n\psi + \beta_n(a)\cos n\psi].$$

Приравниваем коэффициенты при равных гармониках.

α_n и β_n известны, так как известна $Q(\xi, \dot{\xi})$.

$$v_0(a) = \frac{\beta_0(a)}{\omega_0^2}.$$

$$\begin{cases} 2\omega_0\omega_1(a) a + \beta_1(a) = 0 & \omega_1 = -\dfrac{\beta_1(a)}{2\omega_0 a} \\ 2\omega_0 f_1 + \alpha_1(a) = 0 & f_1(a) = -\dfrac{\alpha_1(a)}{2\omega_0} \end{cases}$$

$$v_n(a) = \frac{1}{1-n^2} \frac{\beta_n(a)}{\omega_0^2} \;; \quad \gamma_n(a) = \frac{\alpha_n(a)}{\omega_0^2(1-n^2)}$$

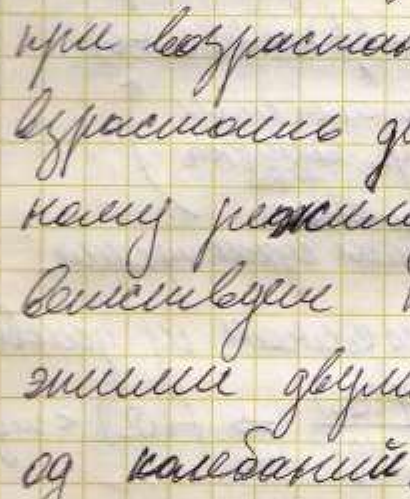
$$\xi = a\cos\psi + \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \{ \beta_n(a)\cos n\psi +$$

$$+ \alpha_n(a)\sin n\psi \}$$

$\dot a = \varepsilon f_1(a) = -\frac{\varepsilon \alpha_1(a)}{2\omega_0}$; $\dot\psi = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) =$
$= \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0} \Rightarrow a(t), \psi(t)$. (ОДУ первого порядка с разд. переменными). $\Rightarrow$
$\Rightarrow \xi = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon\,\xi_1(a(t), \psi(t))$.

$\boxed{31}$ Существуют механические системы, когда для поддержания колебаний не требуется периодических внешних сил. При убывании амплитуды в таких системах энергия начинает увеличиваться за счёт внешних сил, при возрастании энергии начинает возрастать диссипация. Стационарному режиму автоколебаний соответствует точный баланс между этими двумя процессами за период колебаний.

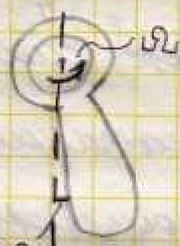
Изобразим фазовую плоскость:



если начальное состояние принадлежит области, где преобладает диссипация, то $\dot\xi(T) < \dot\xi(0)$, если наоборот начальное состояние принадлежит области, в которой энергия возрастают, но $\dot{\xi}(T) > \dot{\xi}(0)$. Границей между двумя такими областями служит предельный цикл, т.е. фазовая кривая автоколебаний. Для многомерных систем это будет поверхность, называемая аттрактором.

Сила, действующая на систему должна быть нелинейной.

Маятник Фроуда: между валом и муфтой $\exists$ силы сухого трения.



$$J\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - \dot{\theta}\lambda + f(\Omega - \dot{\theta})$$

момент силы сопр. воздуха

момент силы сухого трения.

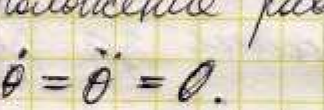
Положение равновесия определяется из условия:

$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. $\sin\theta_{равн} = \frac{f(\Omega)}{mgl} \Rightarrow f(\Omega) < mgl$.

Пусть $\xi = \theta - \theta_{равн}$; $\dot{\xi} = \dot{\theta}$.

Разложим в ряд уравнение движения:

$$\ddot{\xi} = -\cancel{\frac{mgl}{J}\sin\theta_{равн}} - \frac{mgl}{J}\cos\theta_p\,\xi + \frac{mgl}{2J}\sin\theta_p\,\xi^2 + \frac{mgl}{6J}\cos\theta_p\,\xi^3 - \frac{\lambda}{J}\dot{\xi} + \cancel{\frac{f(\Omega)}{J}} - \frac{f'(\Omega)}{J}\dot{\xi} + \frac{f''(\Omega)}{2J}\dot{\xi}^2 - \frac{f'''(\Omega)}{6J}\dot{\xi}^3$$



Предположим что мы находимся в

окрестности точки перегиба: $f''(\Omega) = 0$.

$$\omega_0^2 := \frac{mgl}{J}\cos\theta_p\ ;\ \varkappa_1 := -\frac{dl}{J} - \frac{f'(\Omega)}{J}\ ;$$

$$\frac{f'''(\Omega)}{6J} = \varkappa_2. \qquad \ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{mgl}{2J}\sin\theta_p\,\xi^2 + \frac{\omega_0^2}{6}\xi^3 + \varkappa_1\dot{\xi} - \varkappa_2\dot{\xi}^3$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_p\,\xi^2 + \frac{\omega_0^2}{6}\xi^3 + \varkappa_1\dot{\xi} - \varkappa_2\dot{\xi}^3.$$

Применяем метод Крылова – Боголюбова: $\varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) = \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_p\, a^2\cos^2\psi + \frac{\omega_0^2}{6}a^3\cos^3\psi - \varkappa_1 a\omega_0\sin\psi + \varkappa_2 a^3\omega_0^3\sin^3\psi =$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}\operatorname{tg}\theta_p\, a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\psi\right) + \frac{\omega_0^2}{6}a^3\left(\frac{3}{4}\cos\psi + \frac{1}{4}\cos 3\psi\right) -$$

$$- \varkappa_1 a\omega_0\sin\psi + \varkappa_2 a^3\omega_0^3\left(\frac{3}{4}\sin\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi\right).$$

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0};\quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}$$

$$\alpha_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\varkappa_1 a\omega_0\sin^2\psi + \varkappa_2 a^3\omega_0^3\frac{3}{4}\sin^2\psi\right)d\psi =$$

$$= \left(-2\varkappa_1 a\omega_0 + 2\varkappa_2 a^3\omega_0^3\frac{3}{4}\right)$$

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left(\varkappa_1 a\omega_0 - \frac{3}{4}\varkappa_2 a^3\omega_0^3\right) = \varepsilon a\varkappa_1\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}a^2\omega_0^2\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\dot{a} = 0$ то есть возможен режим колебаний с постоянной амплитудой; $\ast$

$$a = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}\cdot\frac{1}{\omega_0}.$$

$\boxed{32}$. Рассмотрим механическую систему, у которой параметры меняются медленно за период колебаний системы. Т.е. $\left|\frac{\dot f T}{f}\right| << 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в таких системах $\exists$ малый параметр „ε". Из-за того факта, что функция f меняется медлено по сравнению с другими функциями, вводится „медленное" время $\tau = \varepsilon t$.

Тогда Ф.Л. системы можно записать:

$$L = \frac{1}{2} c(\tau)\dot\xi^2 - \frac{1}{2} k(\tau)\xi^2 + \varepsilon \chi(\xi, \tau)$$

УЛ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\xi} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = F(\xi, \dot\xi)$

$$\frac{d}{dt}(c(\tau)\dot\xi) + k(\tau)\xi = \varepsilon \tilde Q(\xi, \dot\xi, \tau)$$

$$\ddot\xi + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot\xi, \tau) - \varepsilon \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial \tau}\dot\xi, \text{ где}$$

$\omega_0^2 = \frac{k(\tau)}{c(\tau)}$; $\varepsilon Q = \frac{\varepsilon \tilde Q}{c(\tau)}$

Ищем решение методом Крылова-Боголюбова: $\xi = a\cos\psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi, \tau) + \dots$

$\dot a = \varepsilon f_1(a, \omega_0, \tau) + \dots$

$\dot\psi = \omega_0(\tau) + \varepsilon \omega_1(a, \tau) \Rightarrow$

$$\varepsilon \omega_0^2\left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \xi_1\right) = 2a\omega_0\omega_1\varepsilon\cos\psi + 2\omega_0 f_1 \sin\psi +$$

$$+ \varepsilon Q(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) + \varepsilon a\frac{d\omega_0}{d\tau}\sin\psi +$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{dc}{d\tau} a\omega_0 \sin\psi$$

$$\varepsilon Q(a\cos\psi,\ -a\omega_0\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon\alpha_n\sin n\psi + \varepsilon\beta_n\cos n\psi)$$

$$n=1.\quad \begin{cases} 2\omega_0\varepsilon A_1 + \varepsilon\alpha_1 + \dfrac{\varepsilon a}{c}\dfrac{d}{d\tau}(\omega_0 c) = 0 \\ 2a\omega_0\varepsilon\omega_1 + \varepsilon\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot a = -\dfrac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0} - \dfrac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\dfrac{d}{d\tau}(\omega_0 c) = 0 \\ \dot\psi = \omega_0(\tau) - \dfrac{\varepsilon\beta_1}{2a\omega_0(\tau)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi = a\cos\psi$$

Для таких систем, так же, как и для консервативных, могут быть реализованы физические условия, при которых будет достаточным приближение линейных колебаний. В этом случае отсутствие диссипативных сил $\varepsilon Q = 0 \Rightarrow \varepsilon\alpha_1 = 0;\ \varepsilon\beta_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot a = -\frac{\varepsilon a}{2\omega_0 c}\frac{d}{d\tau}(\omega_0 c) \Rightarrow a^2\omega_0 c = \text{const}.$$

Для систем с медленно меняющимися параметрами энергия не сохраняется. Однако $\exists$ определённые комбинации $a;\psi$ и параметров системы, которые изменяются ещё более медленно, чем сами параметры системы. Поэтому в первом приближении метода К.Б.

производные по времени от них равны нулю. Такие величины называются <u>адиабатическими инвариантами.</u>

$\xi = a\cos\psi$; $\dot\xi = -a\,\omega_0 \sin\psi$;

$$\overline{E} = \frac{1}{2} c(\tau)\dot\xi^2 = \frac{1}{2} c(\tau)\, a^2(\tau)\, \omega_0^2(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{E}(\tau)}{\omega_0(\tau)} = \text{const}.$$

Для математического маятника с медленно меняющейся длиной нити $L = \frac{m l^2(\tau)}{2}\dot\varphi^2 - \frac{1}{2} m g l(\tau)\varphi^2$

$c(\tau) = m l^2(\tau)$

$\omega_0^2(\tau) = \frac{g}{l(\tau)} \Rightarrow a^2 l^{\frac{3}{2}} = \text{const}.$

$\boxed{33}$. Рассмотрим движение частицы в поле $U(q)$ под действием быстроосциллирующей силы $Q(q,t)$; T - период движения в поле $U(q)$.

Под быстроосциллирующим полем будем понимать поле: $\omega \gg \frac{2\pi}{T}$;

$$Q = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\omega t n} Q_n(q)$$

$$m\ddot q = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q,t) \qquad \xi = q - \overline{q}_{\text{ср}} \text{ - мало.}$$

$$\overline{q}(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} q(t+t')\,dt \ ; \ |\xi| \ll \overline{q} \text{ и } q.$$

$$m\ddot{\overline{q}} + m\ddot\xi = -\frac{\partial U}{\partial \overline{q}} - \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{q}^2}\xi + Q(\overline{q},t) + \frac{\partial Q}{\partial \overline{q}}\xi$$

Усредним: $m\ddot{\bar{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{q}} + \langle \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} \xi \rangle$, ограничимся первым порядком, и вычтем:

$m\ddot{\xi} = Q(\bar{q}, t)$, при этом можно считать, что $\bar{q} = const$.

$$\dot{\xi} = \frac{1}{m} \int Q(\bar{q}, \tau) d\tau$$

$$\xi \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} = \frac{d}{dt}\left(\xi \int \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} dt\right) - \dot{\xi} \int \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \xi \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} \rangle = \langle -\dot{\xi} \int \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} dt \rangle = -\langle \frac{1}{m} \int Q dt \int \frac{\partial Q}{\partial \bar{q}} dt \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \langle \left(\int Q dt\right)^2 \rangle \Rightarrow m\ddot{\bar{q}} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \bar{q}}, \text{ где}$$

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2m} \langle \left(\int Q dt\right)^2 \rangle.$$

$\boxed{34}$ Пусть известна ФЛ системы $L = L(q, \dot{q}, t)$. Введём вместо ($\dot{q} = \{q_\sigma\}$, $\sigma = \overline{1, s}$.) $\dot{q}_\sigma$ новые функции $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, q_1, \ldots, q_s, t)$ и будем рассматривать $\varphi_\alpha(t)$ как независимые координаты вместе с $q_\sigma(t)$. Будем считать что якобиан преобразования для $\varphi_\alpha(t)$ отличен от нуля. Полученные уравнения, где ~~вместо~~ $\dot{q}_\sigma = \dot{q}(\varphi_\alpha, q_\alpha, t)$, эти ур-я вместе с преобразованными УЛ составляют $2s$ уравнений движения 1-го порядка. Пусть $\varphi_\alpha \equiv p_\alpha$ — обобщ. импульсы. $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha(q, \dot{q}, t)$. Обратные преобразования $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$.

$$dL(q,\dot q,t) = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} d\dot q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_\alpha \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{\dot p_\alpha - Q_\alpha^d \text{ - из УЛ}} dq_\alpha + \sum_\alpha p_\alpha d\dot q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$p_\alpha d\dot q_\alpha = d(p_\alpha \dot q_\alpha) - \dot q_\alpha dp_\alpha$$

$$dL(q,\dot q,t) = (\dot p_\alpha - Q_\alpha^d) dq_\alpha + d(p_\alpha \dot q_\alpha) - \dot q_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$+d\{-p_\alpha \dot q_\alpha + L\} = (\dot p_\alpha - Q_\alpha^d) dq_\alpha - \dot q_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Обозначим за $-dH = d\{L - p_\alpha \dot q_\alpha\}$.

$$-dH = (\dot p_i - Q_\alpha^d) dq_\alpha - \dot q_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H = H(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \Rightarrow$$

$$\dot p_\alpha - Q_\alpha^d = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

$$-\dot q_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\begin{cases} \dot q_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^d \end{cases}$$ — канонические уравнения Гамильтона.

$H = H(p,q,t)$ — функция Гамильтона.

$\boxed{35}$ Рассмотрим функционал:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\beta} p_\beta dq_\beta - H dt \right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta p_\beta dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right\} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) \delta p + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt \right\} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) \delta p + \underbrace{p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \delta q =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) \delta p - \int_{t_1}^{t_2} \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \delta q = 0$$

В силу произвольности δp и δq получаем:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt \quad ; \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}.$$

$\boxed{36}$ Полная энергия системы, гамильтониан, момент импульса, канонические переменные p, q – примеры динамических функций. Динамическая функция – это вещественная функция $2s$ канонических переменных и времени: $f = f(q, p, t)$. $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} =$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^d \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Определим скобку Пуассона как

$$[g,h] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right) g =$$

$= [h]g$ – ЛО действующий на g.

$h = q^\sigma$, $h = p_\sigma$

$$\dot{f} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} Q_\alpha^d + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

$$[g, q_\sigma] = -\frac{\partial g}{\partial p_\sigma} \; ; \; [g, p_\sigma] = \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{f} = [f, H] + [f, p_\alpha] Q_\alpha^d + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

$f = p_\sigma$, $f = q_\sigma$

$$\begin{cases} \dot{p}_\sigma = [p_\sigma, H] + [p_\sigma, p_\alpha] Q_\alpha^d + \frac{\partial p_\sigma}{\partial t} \\ \dot{q}_\sigma = [q_\sigma, H] + [q_\sigma, p_\alpha] Q_\alpha^d + \frac{\partial q_\sigma}{\partial t} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} [q_\alpha, q_\sigma] = 0 \\ [p_\alpha, p_\sigma] = 0 \\ [q^\alpha p^\sigma] = \delta_{\alpha\sigma} \end{array}\right\} \text{ – фундаментальные скобки Пуассона.}$$

Любой паре динамических функций f и g СП ставит в соответствие новую динамическую функцию, поэтому СП является специальной алгебраической операцией.

Свойства СП.

1. $[fg] = -[gf]$
2. $[fc] = 0$, $c = const$.
3. Тождество Якоби: $[[fg]h] + [[gh]f] + [[hf]g] = 0$ Δ расписать по определению СП $\blacktriangle$.

Любая операция, обладающая указанными свойствами называется скобкой Ли.

Из определения СП $\Rightarrow [f_1+f_2, g] = [f_1, g]+[f_2, g]$;
$[cf, g] = c[f, g]$, $c = const$; $[f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + f_2[f_1, g]$.

Таким образом при помощи 3-х операций: сложения, умножения и СП можно комбинировать любые элементы множества динамических функций, не выходя за пределы этого множества — такое множество называется алгеброй Ли.

Теорема Пуассона.

Если f и g — интегралы движения, то
$\{f, g\} = h$ — интеграл движения.

Δ Пусть: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$.

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0$$

Так как f и g — интегралы движения, то $\{Hf\} = \{Hg\} = 0$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{H\{fg\}\} = 0 \Rightarrow \{fg\}$ — интеграл движения.

Если $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ и $\frac{\partial g}{\partial t} \neq 0$, то

$\{fg\} \equiv h$

$$\frac{d}{dt}h = \frac{\partial h}{\partial t} + \{H h\}$$

$$\frac{d\{fg\}}{dt} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{H\{fg\}\}$$

$$\{H\{fg\}\} = -\{f\{gH\}\} - \{g\{Hf\}\}$$

$$\frac{d\{fg\}}{dt} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} = 0$$

$\boxed{37}$ Центральная задача Гамильтоновой механики: найти динамическую функцию $f(q,p,t) = f(t)$, если известно её значение при $t=0$ и уравнение эволюции во времени $\dot{f} = [f H]$. При $f = q_\alpha$ и $f = p_\alpha$ получим уравнения Гамильтона $\frac{\partial}{\partial t} H = 0$.

Преобразуем ур-е к интегральному:

$f(q(t), p(t)) = f(p,q) + \int_0^t [f(q(t'), p(t')) H(q(t'), p(t')] dt'$, что можно решать методом итераций, т.е. искать решение в виде $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ предполагая интегральный член малым. (это можно сделать при малом t).

$$f_0 = f(p,q)\ ;\quad f_1 = \int_0^t [f_0 H(p,q)]\, dt' = t[f,H] = t[H]f$$

$$f_2 = \int_0^t [t'[f(p,q), H(p,q)], H(q,p)]\, dt' =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 [[f,H],H] = \frac{t^2}{2}[H]^2 f$$

Суммируя мы получаем ряд:

$$f(p(t), q(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n [H]^n f(p,q) = e^{t[H]} f(p,q) =$$
$$= \hat{U}(f(p,q)) \quad \hat{U} - \text{пропагатор}.$$

$$\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1+t_2)$$

$$\hat{U}(0) = 1 \quad \hat{U}(-t) = \hat{U}^{-1}(t)$$

множество таких преобразований — однопараметрическая (непр.) группа — группа Ли. Сумма двух динамических функций — в преобразуется в сумму, произведение — в произведение, а СП — в СП. Вследствии непрерывности группы для доказательства достаточно использовать инфинитезимальное преобразования: $f(\delta t) = f + \delta t [f, H]$

$$[f(\delta t), g(\delta t)] = [f + \delta t [f,H], g + \delta t [g,H]] =$$
$$= [f,g] + \delta t \{[f,[g H]] + [[f H] g]\} + \bar{o}(\delta t) =$$
$$= [f,g] + \delta t [[f g], H] = \hat{U}([f,g]) \Rightarrow \hat{U}$$ оставляет инвариантной всю алгебраическую структуру множества динамических функций. $\hat{U}$ — преобразование, сохраняющее алгебру — автоморфизм

$\boxed{38}$. Найдём правила получения канонических преобразований

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) \end{cases}.$$

Пусть $\dfrac{\partial D(Q_\alpha, P_\alpha)}{D(q_\alpha, p_\alpha)} \neq 0$

Если в старых переменных

$$\begin{cases} \dot q_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$ то и в новых должно быть:

$$\begin{cases} \dot Q_\alpha = \dfrac{\partial H'}{\partial P_\alpha} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \end{cases} \qquad H' = H'(Q_\alpha, P_\alpha, t). \qquad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

УГ следуют из вариационного принципа.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_\alpha \dot q_\alpha - H(q, p, t)]\, dt = 0 \Rightarrow$$ в новых переменных:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P_\alpha \dot Q_\alpha - H'(Q, P, t)]\, dt = 0$$

Но эти два принципа эквивалентны, только если их подынтегральные выражения отличаются лишь на полный дифференциал произвольной функции F координат, импульсов и времени. Тогда разность между обоими интегралами будет несущественной при варьировании постоянной (разность значений F на пределах интегрирования).

Т.е. $\sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - H(q,p,t)\,dt = \sum_\alpha P_\alpha dQ_\alpha - H'dt + dF(q,p,Q,P,t)$. Преобразования, удовлетворяющие такому требованию называются каноническими. Всякое каноническое преобразование характеризуется своей производящей функцией F.

Перепишем в виде:

1) $dF_1 = \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha dQ_\alpha + (H'-H)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha};\ P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha};\ H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$

$Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t) \Rightarrow p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t)$

$F_1(q,Q,t)$.

Полученные формулы определяют КП при условии $\det\left\|\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_\alpha \partial Q_\alpha}\right\| \neq 0$. - Гессиан

2) $dF(q,p,Q,P,t) = p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H'-H)dt$

Пусть $\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q,p,t) \end{cases}$

~~$P_\alpha(q,Q,t)$~~

Пусть $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$, тогда $p_\alpha = p_\alpha(q, P, t)$

$\frac{D(P)}{D(p)} \neq 0$

$$d(F_2 - P_\alpha Q_\alpha) = p_\alpha dq_\alpha - Q_\alpha dP_\alpha + (H' - H)dt$$

$$dF_2 = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H' - H)dt \Rightarrow$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}; \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t).$$

3) Пусть $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$, $q_\alpha = q_\alpha(p, Q, t)$, если

$\frac{D(Q)}{D(q)} \neq 0.$ $\quad d(F_3 + p_\alpha q_\alpha)$

Тогда $dF_3(p, Q, t) = -q_\alpha dp_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H' - H)dt \Rightarrow$

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}; \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha} \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

4) Пусть $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) \to q_\alpha = q_\alpha(p, P, t)$.

$$dF_4(p, P, t) = -q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H' - H)dt \Rightarrow$$

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}; \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}; \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

$\det \left\| \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_\alpha \partial P_\alpha} \right\| \neq 0.$ Заметим, что

$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \neq 0 \Rightarrow \frac{D(Q)}{D(q)}; \frac{D(Q)}{D(p)}; \frac{D(P)}{D(q)}; \frac{D(P)}{D(p)}$ –

не равны одновременно нулю, поэтому

всегда существует производящая функция.

$\boxed{39}$ Пусть у имеем КП Q_α и P_α:

$H' = 0$ т.е. $\dot{Q}_\alpha = 0$; $\dot{P}_\alpha = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $Q_\alpha = \beta_\alpha$; $P_\alpha = \alpha_\alpha$ – const.

Если задан H, то $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Естественно, что H должен быть записан в тех же переменных, что и F.

Будем искать производящую функцию в классе $F_2(q, P, t)$.

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \; ; \; p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} \; ; \; Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}$$

$$\det \left\| \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \right\| \neq 0. \quad H P_\mu = \alpha_\mu. \quad F_2\Big|_{P_\mu = \alpha_\mu} \equiv S(q, \alpha, t).$$

$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Нужно преобразовать $H(q, p, t)$ к переменным q, P, t, при $P_\mu = \alpha_\mu$, заменим:

$$p_\alpha = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_\alpha} \; ; \; \beta_\mu = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_\mu} \; \Rightarrow$$

$H(q, p, t) = H(q, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t)$ $\Rightarrow$ получаем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\underline{\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0}.$$

Решение уравнения Г-Я, содержащее s произвольных постоянных α_μ называется полным интегралом.

Если S известно, то

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha(q, \alpha, t)$$

$$\beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu(q, \alpha, t).$$

Эти уравнения можно разрешить относительно q и p.

<u>Теорема Якоби:</u> Если известен полный интеграл УГ-Я, то решение канонических уравнений Гамильтона даётся формулами $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q_\mu}$; $\beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu}$.

Δ Пусть известна $S(q, \alpha, t)$, тогда, подставляя её в ур-е Г-Я получим:

$$\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q}, t\right) = 0,$$

это тождество можно почленно дифференцировать. (по α_μ) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} = 0.$$

С другой стороны $\dot\beta_\mu = \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \alpha_\mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} \dot q_\sigma = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \dot q_\sigma\right) \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} = 0.$$

Так как Гессиан $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} \right\| \neq 0$, то

$$\dot q_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}.$$

(по q_σ): $\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial t} + \dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \dfrac{\partial H}{\partial p_\mu} \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} = 0$

$$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q_\sigma} \Rightarrow \dot{p}_\sigma = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \dot{q}_\mu =$$

$$= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}.$$

$\boxed{40.}$ Для консервативных систем $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ и $Q^d = 0 \Rightarrow H = E = const. \Rightarrow \dfrac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) = -E = const. \Rightarrow S = -Et + F(q, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$.

F – укороченное действие. $\Rightarrow H\left(q_1, \dots, q_s, \dfrac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \dfrac{\partial F}{\partial q_s}\right) = E$.

Решения
$$\begin{cases} \beta_0 = \dfrac{\partial S}{\partial E} = -t + \dfrac{\partial F}{\partial E} \\ \beta_\mu = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_\mu} \quad \mu = \overline{1, s-1}. \\ p_\nu = \dfrac{\partial S}{\partial q_\nu} = \dfrac{\partial F}{\partial q_\nu} \quad \nu = \overline{1, s}. \end{cases}$$

Метод разделения переменных.

Пусть $H = H\left(\varphi_1\left(q_1, \dfrac{\partial S}{\partial q_1}\right), \dots, \varphi_m\left(q_m, \dfrac{\partial S}{\partial q_m}\right), q_{m+1}, \dots, q_s, \dfrac{\partial S}{\partial q_{m+1}}, \dots, \dfrac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$.

Ищем решение в виде $S = \sum\limits_{n=1}^{m} S_n(q_n) + S^*(q_{m+1}, \dots, q_s, t) \Rightarrow \dfrac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(\varphi_1\left(q_1, \dfrac{\partial S_1}{\partial q_1}\right), \dots, \varphi_m\left(q_m, \dfrac{\partial S_m}{\partial q_m}\right), q_{m+1}, \dots, q_s, \dfrac{\partial S^*}{\partial q_{m+1}}, \dots, \dfrac{\partial S^*}{\partial q_s}, t\right) = 0$.

Уравнение удовлетворяется во всей области изменения q, только если $\varphi_i = const$.

Задача сводится к интегрированию m диф. ур-й 1-го порядка, и отысканию полного интеграла

$$\frac{\partial S^*}{\partial t}+H\left(\alpha_1,\dots,\alpha_m,q_{m+1},\dots,q_s;\frac{\partial S^*}{\partial q_{m+1}},\dots,\frac{\partial S^*}{\partial q_s},t\right).$$

Если q_l – циклическая, то

$$\frac{\partial S}{\partial q_l}=p_l=\alpha_l \Rightarrow S=q_l\alpha_l+F(q_1,\dots,q_{l-1},q_{l+1},\dots,q_s,$$
$$\alpha_1,\dots,\alpha_{l-1},\alpha_{l+1},\dots,\alpha_s,t).$$

<u>Пример.</u> Движение частицы в однородном электрическом поле.

$$H=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-eEq_3$$

q_1 и q_2 – циклические, $\Rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2\right\}-eEq_3=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Rightarrow S=-Et+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2+f_3(q_3)$$

$$-E+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{1}{2m}+\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)^2-eEq_3}_{\alpha_3}=0$$

$$E=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{1}{2m}+\alpha_3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_3}=\pm\sqrt{2m(\alpha_3+eEq_3)} \Rightarrow f_3=\pm\int\sqrt{2m(\alpha_3+eEq_3)}\,dq_3.$$

$$S=-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{1}{2m}t-\alpha_3t+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2\pm$$
$$\pm\int\sqrt{2m(\alpha_3+eEq_3)}\,dq_3.$$

Решение: $p_1=\alpha_1$; $p_2=\alpha_2$; $p_3=\pm\sqrt{2m(\alpha_3+eEq_3)}$

$$\beta_1=-\frac{\alpha_1}{m}t+q_1;\ \beta_2=-\frac{\alpha_2}{m}t+q_2;\ \beta_3=-t\pm$$
$$\pm\int\frac{m\,dq_3}{\sqrt{2m(\alpha_3+eEq_3)}}.$$

$\boxed{41}$. Т.к. периодическое движение система может совершать, если имеет место сохранение энергии, то $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Кроме того будем считать, что $\exists$ по крайней мере один набор канонических переменных в которых ур-е Г-Я допускает полное разделение переменных $H(\psi_1(q_1, p_1), \ldots, \psi_s(q_s, p_s)) = E$. $\Rightarrow$ Полный интеграл ГЯ: $S = -Et + \sum_{\alpha=1}^{s} f_\alpha(q_\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$,

$$\alpha_\sigma = \psi_\sigma\left(q_\sigma; \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\sigma}\right), \quad H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = E.$$

Согласно теореме Якоби $p_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\sigma} = p_\sigma(q, \alpha)$. Будем говорить, что система совершает условно-периодическое движение, если каждая из переменных p_σ, q_σ меняется периодически с течением времени, либо каждый импульс p_σ является периодической функцией q_σ. В первом случае имеет место либрация, во втором — вращение. Состояние системы будет меняться периодически только, если частоты изменений q_σ относятся друг к другу как целые числа.

$p_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\sigma}$.

Введём $I_\sigma = \frac{1}{2\pi}\oint p_\sigma dq_\sigma = I_\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, интеграл берётся по периоду изменения p_σ. I_σ называют переменной действием.

$I_\sigma = I_\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ — независимые, и можно разрешить относительно α: $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(I_1, \dots, I_s)$. Подставляя в полный интеграл получим $F(q, I)$.

$H(I_1, \dots, I_s) = E$. Новые координаты, канонически сопряжённые импульсам I_σ, связанные через производящую функцию: $\theta_\sigma = \frac{\partial F}{\partial I_\sigma} = \theta_\sigma(q, I)$ — переменная угол. И связаны с УГ: $\dot\theta_\sigma = \frac{\partial H'}{\partial I_\sigma} = \nu_\sigma(I_1, \dots, I_s) = const \Rightarrow \theta_\sigma = \nu_\sigma t + \theta_\sigma^0$,

$\dot I_\sigma = -\frac{\partial H'}{\partial \theta_\sigma} = 0$. (т.к. новый Гамильтониан зависит только от I_σ).

Заметим, что $\dot\theta_\sigma$ — частота изменения импульса p_σ.

Итак, для вычисления частоты ω_σ нужно определить функции

$$p_\sigma = p_\sigma(q, \alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

затем найти переменные действия как функции α, определить гамильтониан как функцию переменных действия и, наконец, найти

$$\omega_j = \frac{\partial H(q_1, \dots, q_s)}{\partial q_j}.$$

$\boxed{42}$ Состояние системы с s степенями свободы геометрически изображается точкой в $2s$-мерном ФП. Рассмотрим множество различных состояний с одним и тем же гамильтонианом H. Получим область Γ состояний в ФП. Объём области $\int\limits_\Gamma dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$.

Найдём как меняется объём Γ при канонических преобразованиях P_j, Q_j.

$$\int\limits_\Gamma \mathcal{D} dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int\limits_\Gamma dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s,$$

где $\mathcal{D} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}$ - якобиан преобразования. Разделим числитель и знаменатель на $\partial(q, P)$.

$$\mathcal{D} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} \Big/ \partial(q,p)/\partial(q,P)$$ Из свойств якобиана получаем

$$\mathcal{D} = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}\Big|_{P=const} \Big/ \frac{\partial(p)}{\partial(P)}\Big|_{q=const}$$

Рассмотрим якобиан в числителе. Представим КП с помощью ПФ $F(q, P)$ $\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial P_i}$; $\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot_k}$. Знаменатель: $\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_k}$ $\Rightarrow$ что оба определителя отличаются только тем, что они взаимно транспонированы, а значит равны друг другу. $\Rightarrow D = 1$.

В этом заключается утверждение теоремы Лиувилля, что при КП объём ФП не меняется.

$$\int_{\Gamma} dq_1 \dots dq_s \, dp_1 \dots dp_s = \int_{\Gamma} dQ_1 \dots dQ_s \, dP_1 \dots dP_s$$

$\boxed{43}$ $\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta(\vec{r})} \sum_{i=1}^{n(\vec{r},t)} m_i = \frac{1}{\Delta(\vec{r})} \int_{\Delta(\vec{r})} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \times$
$\times dV$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} + \vec{\xi} - \vec{r}_i(t)) = \frac{\partial \delta}{\partial x_\alpha} (-\dot{x}_{i\alpha}(t)) = -\vec{v}_i(t) \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}}$$

$$\delta(\vec{r} + \vec{\xi} - \vec{r}_i(t)) = \delta_i(\vec{r} + \vec{\xi}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\vec{r})} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \delta_i(\vec{r} + \vec{\xi}, t) \vec{v}_i(t) \, d\vec{\xi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \Big\{ \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\vec{r})} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i(\vec{r} + \vec{\xi}, t) \vec{v}_i(t) \, d\vec{\xi} \Big\} = 0$$

$\vec{j}_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i(\vec{r} + \vec{\xi}, t) \vec{v}_i(t) \, d\vec{\xi}$ – плотность импульса.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$ — ур-е. непрерывности.

Скорость Ц. М. всех частиц в области $\Delta(\vec{r})$:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{N(\vec{r},t)} m_a \vec{v}_a(t) \equiv \vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t) = \vec{j}_m(\vec{r},t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0. \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\right)\rho = 0$$ — условие несжимаемости.

$\boxed{44}$.

$$\vec{j}_m = \frac{1}{\Delta}\sum_i m_a \vec{v}_a(t) = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec{r})}\sum_a m_a \vec{v}_a(t) \times$$

$$\times\, \delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} j_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec{r})}\sum_a m_a v_{a\alpha}(t)(-v_{a\beta})\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec{r})}\sum_a m_a \dot{v}_{a\alpha}(t)\, \delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi}$$

$$\Pi_{\beta\alpha} = \Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_a m_a v_{a\alpha}(t)\, v_{a\beta}\, \delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_a p_{a\alpha} v_{a\beta}\, \delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi}$$ — тензор плотности потока импульса.

$$m_a \dot{v}_{a\alpha} = F_{a\alpha} - \frac{\partial U_{a\kappa}}{\partial x_{a\alpha}}(|\vec{r}_a - \vec{r}_\kappa|) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec{r})}\sum_a F_{a\alpha}(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,\delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} +$$

$$+ \Phi_\alpha(\vec{r},t),$$ где

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{a\kappa=1}^{N}\frac{\partial U_{a\kappa}}{\partial x_{a\alpha}}(|\vec{r}_a - \vec{r}_\kappa|)\,\delta_a(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i(t)\,\delta_i(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi} = \vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\vec{r})}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i(t)\,\delta_i(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi} = 0, \text{ где}$$

$\vec{u}_i = \vec{v}_i(t) - \vec{v}(\vec{r},t)$ — скорость теплового движения частицы.

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(v_\alpha v_\beta + v_\alpha u_{i\beta} + v_\beta u_{i\alpha} + u_{i\alpha}u_{i\beta}\right)\times$$

$$\times\,\delta(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi} = \rho v_\alpha v_\beta + P_{\alpha\beta}(\vec{r},t), \text{ где}$$

$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta}\sum_{i=1}^{N} m_i u_{i\alpha}u_{i\beta}\,\delta(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}$ — тензор кинетического давления.

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\alpha v_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta}\sum_i F_{i\alpha}\,\delta_i\,d\vec{\xi} +}$$

$\underline{+\ \Phi_\alpha.}$ — ур-е. баланса импульса.

$\boxed{45}$ Рассмотрим случай короткодействующего потенциала U_{ik}.

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right)v_\alpha + \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \rho \vec{f} + \Phi_\alpha$$

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta} d\vec{\xi}\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)\,\delta(\vec{r}+\vec{\xi},t),d$$

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{\Delta} d\vec{\xi}\sum_{i,k}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}}\left[\delta(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{r}_i) - \delta(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{r}_k)\right]$$

$\vec{R}_{ik} = \frac{1}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_k) \qquad \vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k. \Rightarrow \vec{r}_i = \vec{R}_{ik} + \frac{1}{2}\vec{r}_{ik}$

$\vec{r}_k = \vec{R}_{ik} - \frac{1}{2}\vec{r}_{ik}.$

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{2\Delta}\int_\Delta d\vec{\xi} \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_{j\alpha}}(|\vec{r}_{jk}|)\left[\delta\left(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{R}_{jk}-\frac{1}{2}\vec{r}_{jk}\right)-\right.$$

$$\left.-\delta\left(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{R}_{jk}+\frac{1}{2}\vec{r}_{jk}\right)\right]. \qquad |\vec{r}_{jk}| \ll \Delta^{1/3}$$

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{2\Delta}\int_{\Delta(\vec{\xi})} d\vec{\xi} \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_j^\alpha}(|\vec{r}_j-\vec{r}_k|)\left[-\frac{1}{2}(x_j^\sigma - x_k^\sigma)\frac{\partial}{\partial x^\sigma}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(x_j^\sigma - x_k^\sigma)\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right]\delta(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{R}_{jk}).$$

$$\Phi_\alpha = \left(-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\left\{-\frac{1}{2\Delta}\int_\Delta d\vec{\xi}\sum \frac{d u_{jk}}{d|\vec{r}_{jk}|}\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_k|}\times\right.$$

$$\times\,\delta(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{R}_{jk}). \qquad \Phi_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_{\alpha\beta}\,; \quad \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\Delta}\int_\Delta d\vec{\xi}\,\times$$

$$\times\sum_{j,k=1}^{N} u'_{jk}\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_k|}\delta(\vec{r}+\vec{\xi}-\vec{R}_{jk}).$$

$\sigma_{\alpha\beta}$ – тензор напряжений.

Ур-е баланса импульса:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\right)v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(P_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta}) = \rho f_\alpha$$

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}.$$

Для жидкостей главный вклад вносит $P_{\alpha\beta}$, для газов – $\sigma_{\alpha\beta}$.

$\boxed{46}$

$$e = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j \vec{v}_j^{\,2}}{2} = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_j \frac{m_j v_j^2}{2}\delta_j(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{j=1}^{N}\frac{m_j v_j^2}{2} v_{j\alpha}\,\delta_j(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_j m_j v_{j\gamma}\,\dot{v}_{j\gamma}\,\delta_j(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}$$

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{j=1}^{N}\frac{m_j v_j^2}{2} v_{j\alpha}\,\delta_j(\vec{r}+\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}$$ – плотность потока кинетической энергии.

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}(\vec{r},t) + \vec{u}_\nu.$$

$$e = \frac{1}{\Delta}\int \sum_\nu \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} \delta_\nu(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} = \rho\frac{\vec{v}^2}{2} + \rho\varepsilon_k,$$

где $$\rho\varepsilon_k = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_\nu \frac{m_\nu \vec{u}_\nu^{\,2}}{2} \delta_\nu(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} -$$

– плотность кинетической энергии теплового движения.

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta(\vec{r})} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}(\vec{v}+\vec{u}_\nu)^2 (v_\alpha + u_{\nu\alpha})\, \delta_\nu\, d\vec{\xi} =$$

$$= \rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon_k v_\alpha + v_\sigma p_{\alpha\sigma} + q_\alpha,$$ где

$$q_\alpha = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\vec{u}_\nu^{\,2}}{2} u_{\nu\alpha}\, \delta_\nu(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi} -$$

– плотность потока тепла. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pi_\alpha = \rho v_\alpha\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon_k\right) + p_{\alpha\sigma} v_\sigma + q_\alpha.$$

Получим:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon_k\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho v_\alpha\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon_k\right) +\right.$$

$$\left. + p_{\alpha\sigma} v_\sigma + q_\alpha\right) = \rho v_\alpha \left\{\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\sigma \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\sigma}\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{p_{\alpha\sigma} v_\sigma\} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} + \rho\left\{\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + v_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\varepsilon_k\right\}$$

Домножим уравнение баланса импульса на v_α и просуммируем: (вычтем).

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\right)\varepsilon_k + p_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu u_{\nu\gamma}\, \dot{v}_{\nu\gamma}\, \delta_\nu(\vec{r}+\vec{\xi},t)\, d\vec{\xi}.$$

47 Для достаточно медленных движений разумно предположить, что в каждой $\Delta(\vec{r})$ окрестности частицы находятся в равновесном состоянии, которое характеризуется отсутствием потоков. Оно не меняется, если обратить $\vec{v}_0 \to -\vec{v}_0$. Это состояние локального термодинамического равновесия. Тогда

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_{i=1}^{N} m_0 u_0^\alpha u_0^\beta \, \delta_0 \, d\vec{q} = 0, \ \alpha \neq \beta.$$

$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} \neq 0.$

В состоянии равновесия

$$p_{xx} = p_{yy} = P_{zz} = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta \sum_i m_0 u_{0x} u_{0x} \, \delta_0 \, d\vec{q} =$$

$$= \frac{1}{3\Delta}\int_\Delta \sum_i m_0 \vec{u}_0^{\,2} \, \delta_0 \, d\vec{q} = p(\vec{r}, t), \ p = \frac{2}{3}\rho \varepsilon_{к.} = nT$$

$$p_{\alpha\beta} = p(\vec{r}, t)\, \delta_{\alpha\beta}.$$

Рассматриваем такую среду, для которой $\sigma_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha \neq \beta$. $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \neq 0$.
Для идеальной жидкости $P_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} = p(\vec{r}, t)\, \delta_{\alpha\beta}$.

Тогда уравнения баланса импульса:

$$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\right\} v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} P_{\alpha\sigma} = \rho f_\alpha \quad \text{или в}$$

векторном виде:

$$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\right\}\vec{v}+\vec{\nabla}\vec{P}=\rho\vec{f}$$ – уравнение Эйлера.

$\boxed{48}$. Заметим, что $\mathrm{grad}\frac{v^2}{2}=$
$=(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}+[\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}]$

Уравнение Эйлера в этом случае:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-[\vec{v},\mathrm{rot}\,\vec{v}]=-\vec{\nabla}\frac{v^2}{2}-\vec{\nabla}\frac{p}{\rho}-\vec{\nabla}U,$$

$\vec{f}\equiv-\vec{\nabla}U.$

Для идеальной жидкости:

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\varepsilon\right)+p\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{p}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{v}$$

Согласно уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0 \text{ или } \frac{d\rho}{dt}=-\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}=-p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)=p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$$

$\varepsilon+\frac{p}{\rho}=h$ – энтальпия.

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dp}=\frac{1}{\rho}$$

Тогда $\vec{\nabla} h(p) = \frac{dh}{dp} \vec{\nabla} p = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$

Поэтому уравнение Эйлера можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}\, \mathrm{rot}\, \vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + U + h\right)$$

Пусть поток стационарный $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. Введем $\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v}$ - касательный к линии тока. Домножим уравнение на $\vec{l}$, получим

$$(\vec{l}\,\vec{\nabla})\left(\frac{v^2}{2} + U + h\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2} + h + U\right) = 0$$

Вдоль линии тока величина

$$\frac{v^2}{2} + h + U = \mathrm{const}$$ - интеграл

Бернулли. Для несжимаемой жидкости $h = \frac{p}{\rho}$.

$\boxed{49}$ Для идеальной жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}\, \mathrm{rot}\, \vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + U + h\right)$$

$\mathrm{rot}\, \vec{v} = 0. \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U + h\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U + h = \mathrm{const}$$ - интеграл

Лагранжа - Коши.

$\boxed{50}$ Преобразуем тензор давлений к виду $P_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} - \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$. Если $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$, то жидкость идеальная.

$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений. ~~Сила~~, ~~для~~ Возникают силы внутреннего трения.

Тогда $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ — функция только градиентов скорости $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$.

В линейном приближении $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$ раскладывается в ряд Тейлора до линейных членов. $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{\beta\alpha}$. $\Rightarrow$ ~~можно представить~~ он зависит только от симметричной комбинации градиентов скоростей.

Любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы трёх тензоров: симметричного с равным нулю следом, антисимметричного и диагонального.

$$\Delta\quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v} =$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right\}+\frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

Поэтому $\sigma'_{\alpha\beta}=\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)+\zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}$.

η – сдвиговая вязкость, ζ – объёмная вязкость

Уравнение баланса импульса тогда:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}v_\alpha\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\rho f_\alpha+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)+\zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right\}$$

Если $\eta,\zeta=$ const, то запишем в векторном виде.

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}+\eta\Delta\vec{v}+$$
$$+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{v}.$$ – ур-е Навье–Стокса.

$\boxed{51}$ $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{j}=0$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}+\eta\Delta\vec{v}+$$
$$+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{v};\quad \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\right)\varepsilon+p_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$p_{\alpha\beta}=p\delta_{\alpha\beta}-\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)+\zeta\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

$\vec{q}=-\varkappa\frac{\partial T}{\partial \vec{r}}$ – закон Фурье.