студенты-
физики

# Математический анализ
# Ответы

Барон Яков

3 семестр
Бутузов В.Ф.

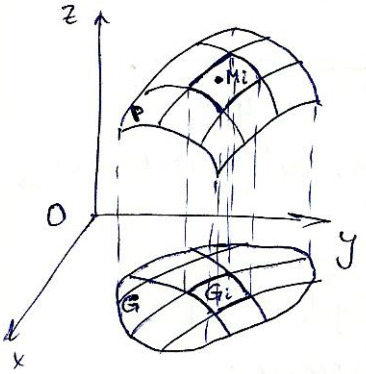
2013

# Поверхностные интегралы.



§1. Пусть пов-ть $P$ задана ур-нием $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$, и пусть ф-ция $f(x,y)$ дифф-ма в обл. $G$. Тогда в каждой точке пов-ти $\exists$ касательная пл-ть и нормаль.

Разобьём пов-ть $P$ с помощью кусочно гладких кривых на $n$ частей: $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. Проекцию $P_i$ на пл-ть $Oxy$ обозначим $G_i$. Тогда $G=\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$.




На каждой части $P_i$ возьмём произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и проведём ч/з неё касательную пл-ть к пов-ти $P$. Пусть $S_i$ — площадь той части касательной пл-ти, проекцией которой на пл-ть $Oxy$ явл. обл. $G_i$.

Составим сумму: $S(P_i, M_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Пусть $d_i$ — диаметр $P_i$, $d=\max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

Опр.: Число $S$ наз. пределом сумм $S(P_i,M_i)$ при $d\to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall$ разбиения пов-ти $P$, у которого $d<\delta$, и $\forall$ выбора точек $M_i$ выполняется нер-во: $|S(P_i,M_i)-S|<\varepsilon$.

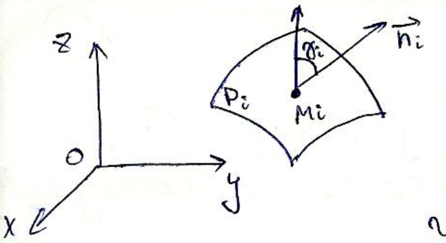
Если $\exists \lim\limits_{d\to 0} S(P_i,M_i)=S$, то число $S$ наз. площадью пов-ти $P$, а сама пов-ть $P$ наз. квадрируемой.

Т. 1: Пусть пов-ть $P$ задана ур-нием $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$, где $G$ — огр. замкн. область, и пусть ф-ция $f(x,y)$ имеет в обл. $G$ непр. частные производные $f_x(x,y)$ и $f_y(x,y)$ (такую пов-ть назовём гладкой).

Тогда пов-ть $P$ квадрируема и её площадь выражается ф-лой:

$$S=\iint\limits_G \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dx\,dy \quad (1).$$

Д-во: разобьём пов-ть $P$ кусочно гладкими кривыми на $n$ частей: $P=\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. При этом обл. $G$ разобьётся на $n$ частей $G_i$ $(i=\overline{1,n})$, где $G_i$ — проекция $P_i$ на пл-ть $Oxy$.



На каждой части $P_i$ возьмём произв. точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $z_i = f(x_i, y_i)$, и проведём ч/з т. $M_i$ касательную пл-ть к пов-ти $P$. (2)

Ур-ние касательной пл-ти имеет вид:

$$z - z_i = f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

Вектор $\vec{n_i} = \{-f_x(x_i, y_i); -f_y(x_i, y_i); 1\}$ явл. вектором нормали к пов-ти $P$ в т. $M_i$. Обозначим ч/з $\gamma_i$ угол м/у вектором $\vec{n_i}$ и осью $Oz$. Тогда:

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}}.$$

Пусть $S_i$ — площадь той части касательной пл-ти, которая проектируется на частичную обл. $G_i$

$$S(G_i) = S_i \cdot \cos\gamma_i \Rightarrow S_i = S(G_i)\sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}.$$

Суммируя величины $S_i$ по $i$ от 1 до $n$, получаем:

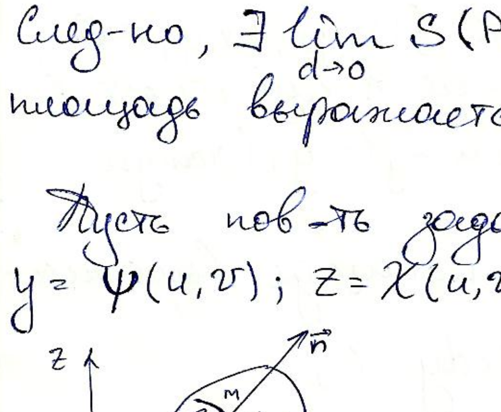
$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(G_i) \quad (2)$$

По опр. $S(P) = \lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i)$, где $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$, $d_i$ — диаметр $P_i$.

Правая часть рав-ва (2) явл. интегральной суммой для двойного интеграла по обл. $G$ от непр. ф-ции $\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$. При $d \to 0$ максимальный диаметр областей $G_i$ также стремится к нулю. Поэтому предел правой части рав-ва (2) при $d \to 0$ существует и равен $\iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dx\, dy$.

След-но, $\exists \lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i)$, т.е. пов-ть $P$ квадрируема и её площадь выражается ф-лой (1). ■

Пусть пов-ть задана параметрически ур-ниями: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$; $z = \chi(u, v)$, $(u, v) \in g$ (3).




$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогда ур-ния (3) можно записать в виде одного векторного ур-ния: $\vec{r} = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k} := \vec{r}(u, v)$

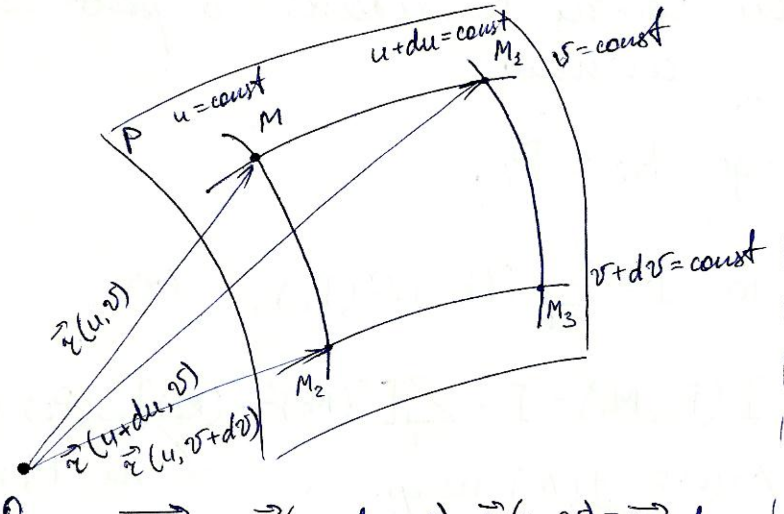
$\vec{r_u} = \varphi_u \vec{i} + \psi_u \vec{j} + \chi_u \vec{k}$; $\vec{r_v} = \varphi_v \vec{i} + \psi_v \vec{j} + \chi_v \vec{k}$

Ясно, что $\vec{r_u}(u, v)$ — касательный вектор к $v = const$; $\vec{r_v}(u, v)$ — касательный вектор к $u = const$ в т. $M$. Поэтому $\vec{r_u}(u, v)$ и $\vec{r_v}(u, v)$ лежат в касательной пл-ти к пов-ти $P$ в т. $M$, и, след-но, вектор $\vec{n} = [\vec{r_u} \times \vec{r_v}]$ явл. вектором нормали к пов-ти

P в т. M.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= A(u,v)\vec{i} + B(u,v)\vec{j} + C(u,v)\vec{k}.$$




$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u\,du$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u,v+dv) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_v\,dv$$

$$dS = |[\vec{r}_u\,du \times \vec{r}_v\,dv]| = |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|\,du\,dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

Суммируя по всем „эл-там" пов-ти P, приходим к ф-ле площади пов-ти, заданной параметрически:

$$S = \iint\limits_g \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \quad (4)$$

---

§2 Пусть P – квадрируемая пов-ть, заданная явным ур-нием или параметрически, и пусть на пов-ти P определена огр. ф-ция $f(M) = f(x,y,z)$. Разобьём пов-ть P на n квадрируемых частей: $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, на каждой части $P_i$ возьмём произв. т. $M_i$ и составим интегральную сумму:

$$I(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S(P_i), \text{ где } S(P_i) - \text{площадь } P_i.$$

Пусть $d_i$ – диаметр $P_i$, $d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$. Если $\exists \lim\limits_{d\to 0} I(P_i, M_i) = I$, то число I наз. **поверхностным интегралом первого рода** от ф-ции $f(M)$ по пов-ти P.

**Т.2**: Пусть: 1) пов-ть P задана ур-нием $z = z(x,y)$, $(x,y) \in G$, где G – квадрируемая замкнутая область, а ф-ция $z(x,y)$ имеет в обл. G непр. частные производные $z_x(x,y)$ и $z_y(x,y)$ (т.е. P – гладкая пов-ть);

2) ф-ция $f(M) = f(x,y,z)$ непр. на пов-ти P.

Тогда поверх. интеграл $1^{го}$ рода от ф-ции $f(M)$ по пов-ти P существует, и справедливо рав-во:

$$\iint\limits_P f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}\,dx\,dy. \quad (1)$$

Д-во: сост. инт. сумму: $S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S(P_i)$ (2) 

Двойной интеграл в правой части рав-ва (1) обозначим буквой $I$ и запишем в виде:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy.$$

Каждое слагаемое в правой части написанного рав-ва преобразуем по ф-ле среднего значения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \iint_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy, \text{ где } K_i \in P_i.$$

Т.к. $\iint_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = S(P_i)$, то $I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) S(P_i)$. (3)

Вычитая (3) из (2), получаем: $I(P_i, M_i) - I = \sum_{i=1}^{n} [f(M_i) - f(K_i)] S(P_i)$ (4)

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. ф-ция $f(M)$ непр. на пов-ти $P$, которая явл. огр. замкн. мн-вом в силу усл. 1) теоремы, то $f(M)$ равномерно непр. на пов-ти $P$. Поэтому $\exists\, \delta > 0$, такое, что если $d_i =$ (диаметр $P_i$) $< \delta$, то для любых двух точек $M_i$ и $K_i$ на пов-ти $P_i$ будет выполнено нер-во: $|f(M_i) - f(K_i)| < \frac{\varepsilon}{S(P)}$

След-но, для любого разбиения пов-ти $P$, у которого $d < \delta$, из рав-ва (4) следует: $|I(P_i, M_i) - I| < \frac{\varepsilon}{S(P)} \cdot \sum_{i=1}^{n} S(P_i) = \varepsilon$.

Это означает, что $\lim_{d\to 0} (I(P_i, M_i) - I) = 0$, т.е. $\exists \lim_{d\to 0} I(P_i, M_i) = I$, а т.к. $\lim_{d\to 0} I(P_i, M_i)$ – это и есть поверх. интеграл $\iint_P f(x,y,z)\,ds$, а $I$ – двойной интеграл из правой части рав-ва (1), то тем самым доказана справедливость рав-ва (1). ■

$\boxed{\S 3}$. **Опр.**: Если для любой т. $M_0$ пов-ти $P$ и для любого замкнутого контура, проходящего по пов-ти $P$ ч/з т. $M_0$, выбранное в т. $M_0$ направление нормали не изменяется после обхода по контуру, то пов-ть $P$ наз. **двусторонней**. В противном случае пов-ть наз. **односторонней**.

Опр.: Под стороной пов-ти будем понимать мн-во всех точек пов-ти с заданными в них векторами нормали $\vec{n}(M)$ так, что совокупность этих векторов образует непр. векторное поле нормалей (т.е. вектор-ф-ция $\vec{n}(M)$, $M \in P$, — непр. ф-ция точки $M$).

Пусть $P$ — гладкая двусторонняя пов-ть. Выберем на ней одну из сторон, т.е. фиксируем непр. поле нормалей $\vec{n}(M)$. Обозначим ч/з $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ углы м/у вектором $\vec{n}(M)$ и осями координат. Если $|\vec{n}(M)| = 1$, то $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Пусть на пов-ти $P$ определены три ф-ции: $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$. ∡ поверх. интегралы $1^{го}$ рода:

$$I_1 = \iint_P P(M)\cos\alpha(M)\,dS;\quad I_2 = \iint_P Q(M)\cos\beta(M)\,dS;\quad I_3 = \iint_P R(M)\cos\gamma(M)\,dS.$$

Они наз. поверх. интегралами $2^{го}$ рода соответственно от ф-ций $P, Q, R$ по выбранной стороне пов-ти $P$. Для них используются также следующие обозначения:

$$I_1 = \iint_P P\,dydz;\quad I_2 = \iint_P Q\,dxdz;\quad I_3 = \iint_P R\,dxdy$$

$I = I_1 + I_2 + I_3 = \iint_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$ — наз. общим поверх. интегралом $2^{го}$ рода.

Если ввести вектор-ф-цию $\vec{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, то общий интеграл $I$ можно записать в виде: $I = \iint_P (\vec{a}, \vec{n})\,dS$. — поток векторного поля $\vec{a}(M)$ ч/з пов-ть $P$ в заданном направлении.

Вычисление поверх. интегралов $2^{го}$ рода:

1) Пусть гладкая пов-ть $P$ задана ур-нием $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$. Выберем, например, верхнюю сторону пов-ти $P$, т.е.:

$\vec{n}(M) = \{-f_x(x,y); -f_y(x,y); 1\}$. Тогда: $\cos\alpha(M) = -\dfrac{f_x(x,y)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$;

$$\cos\beta(M) = -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};\quad \cos\gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Пусть ф-ции $P, Q, R$ непр. на пов-ти $P$. Тогда по ф-ле (1) из §2 получаем:

$$I_1 = \iint_P P(x,y,z)\cos\alpha(M)\,ds = \iint_G P(x,y,f(x,y))\frac{-f_x(x,y)}{\cancel{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}}\cancel{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,dxdy =$$

$$= -\iint_G P(x,y,f(x,y))\,f_x(x,y)\,dxdy;$$

$$I_2 = -\iint_G Q(x,y,f(x,y))\,f_y(x,y)\,dxdy;$$

$$I_3 = \iint_G R(x,y,f(x,y))\,dxdy. \quad (1)$$

2) Пусть гладкая двусторонняя пов-ть $P$ задана параметрически $x=\varphi(u,v)$; $y=\psi(u,v)$; $z=\chi(u,v)$, $(u,v)\in g$.

Выберем ту сторону пов-ти, на которой $\vec{n}=\{A,B,C\}$. Тогда:

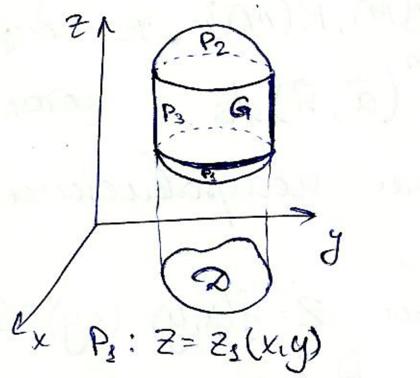
$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$I_1 = \iint_P P\cos\alpha\,ds = \iint_g P(\varphi,\psi,\chi)\cdot\frac{A}{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,dudv =$$

$$= \iint_g P(\varphi,\psi,\chi)\,A(u,v)\,dudv; \quad (2)$$

$$I_2 = \iint_g Q(\varphi,\psi,\chi)\,B(u,v)\,dudv; \quad I_3 = \iint_g R(\varphi,\psi,\chi)\,C(u,v)\,dudv.$$

## $\boxed{\S 4}$. Формула Остроградского-Гаусса.




$P_1: z = z_1(x,y)$

$P_2: z = z_2(x,y)$

$P_3$ – цилиндрическая поверхность (боковая для $G$)

Пусть ф-ции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ опр. и непр. в ограниченной связной замкнутой области $\mathcal{D}$, причём: $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$, $(x,y)\in\mathcal{D}$.

Область $G = \{(x,y,z): (x,y)\in\mathcal{D},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ назовём „$z$-цилиндрической".

Аналогично определяются „$x$-" и „$y$-цилиндрические" области.

Область $G$ наз. простой, если её можно разбить на конечное число „$x$-", „$y$-" или „$z$-цилиндрических" областей.

**Т.3:** Пусть ф-ции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в простой обл. $G$, ограниченной кусочно-гладкой пов-тью $P$. Тогда справедливо рав-во: $$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \quad (1),$$ где поверх. интеграл $2^{го}$ рода берётся по внешней стороне пов-ти $P$.

Д-во: а) ∡ сначала случай, когда $G$ – „$z$-цилиндрическая" область, и д-жем справедливость рав-ва:
$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_P R(x,y,z)\cos\gamma\, ds \quad (2)$$
Сводя тройной интеграл к повторному, получаем:
$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz = \iint\limits_D dxdy\cdot R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} =$$
$$= \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy. \quad (3)$$
Первый из двойных интегралов в правой части (3) выразим ч/з поверх. интеграл по верхней стороне пов-ти $P_2$ $(z=z_2(x,y))$, а второй – ч/з поверх. интеграл по нижней стороне пов-ти $P_1$ $(z=z_1(x,y))$: $$\iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy = \iint\limits_{P_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds,$$
$$\iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy = -\iint\limits_{P_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds.$$
Обозначим ч/з $P_3$ боковую (цилиндрическую) пов-ть области $G$. Т.к. в точках этой пов-ти $\vec{n}\perp Oz$, то $\cos\gamma=0$, и поэтому $\iint\limits_{P_3} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds = 0$. Рав-во (3) можно теперь записать в виде:
$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{P_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds + \iint\limits_{P_1}\ldots + \iint\limits_{P_3}\ldots = \iint\limits_P R(x,y,z)\cos\gamma\, ds,$$ где поверх. интеграл берётся по внешней стороне пов-ти $P$. Тем самым, справедливость рав-ва (2) для „$z$-цилиндрической" области доказана.

б) Пусть теперь $G$ — простая область. Разобьём её на конечное число „$z$-цилиндрических" областей $G_i$ с границами $P_i$ ($i=\overline{1,n}$). Запишем для каждой области $G_i$ рав-во (2): $$\iiint\limits_{G_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_i} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Суммируя эти рав-ва по $i$ от $1$ до $n$, получим в левой части $\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$, а в правой части $\iint\limits_{P} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds$, поскольку поверх. интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим обл. $G$ на части $G_i$, берутся дважды, причём один раз по одной стороне каждой такой пов-ти, а другой раз по другой стороне, и поэтому сумма таких двух интегралов равна нулю. Итак, для простой области $G$ справедливо рав-во (2): $$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Аналогично выводятся рав-ва (путём разбиения области $G$ на „$x$-цилиндрические", а затем на „$y$-цилиндрические" области):

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} P(x,y,z)\cos\alpha\,ds \quad (4)$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} Q(x,y,z)\cos\beta\,ds \quad (5)$$

Складывая (2), (4) и (5), приходим к рав-ву (1):

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

■

Если ввести вектор-ф-цию $\vec{a}=\{P, Q, R\}$, то ф-лу Остроградского-Гаусса можно записать в виде: $$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} (\vec{a},\vec{n})\,ds.$$

Следствие: Если ф-ции $P, Q, R$ таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$, то из ф-лы О-Г. получим выражение для объёма обл. $G$ ч/з поверх. интеграл: $$V(G)=\iiint\limits_{G} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

В частности, если $P=\frac{1}{3}x$; $Q=\frac{1}{3}y$; $R=\frac{1}{3}z$, то имеем:

$$V(G)=\frac{1}{3}\iint\limits_{P}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds = \frac{1}{3}\iint\limits_{P} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy,$$ где поверх. интеграл берётся по внешней стороне пов-ти $P$. Эту ф-лу можно

записать в виде: $V(G)=\frac{1}{3}\iint\limits_P(\vec{r},\vec{n})ds$, где $\vec{r}=\{x,y,z\}$.

## §5. Ф-ла Стокса.

**Опр.:** Назовём пов-ть P „xyz-проектируемой", если она взаимно однозначно проектируется на каждую координатную пл-ть м/у системы координат Oxyz.

Такую пов-ть можно задать любым из трёх ур-ний вида:

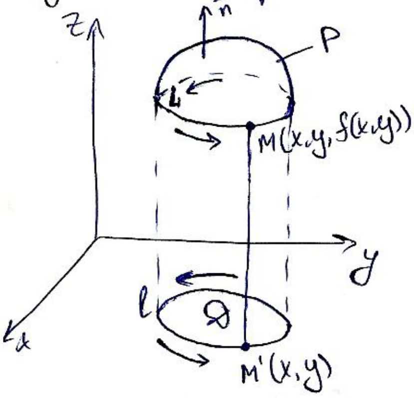
$$z=f_1(x,y),\ (x,y)\in D_1;$$
$$x=f_2(y,z),\ (y,z)\in D_2; \qquad (1)$$
$$y=f_3(x,z),\ (x,z)\in D_3.$$

**Т.4:** Пусть: 1) ф-ции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка непр. в обл. G;
2) гладкая „xyz-проектируемая" пов-ть P, ограниченная контуром L, расположена внутри обл. G. Тогда справедливо рав-во:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_P\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]ds, \quad (2)$$

где $\alpha,\beta,\gamma$ — углы м/у вектором нормали на выбранной стороне пов-ти P и осями Ox, Oy и Oz, а ориентация контура L согласована с ориентацией пов-ти P.

Д-во: Запишем ур-ние пов-ти P в виде $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, где D — проекция пов-ти P на пл-ть Oxy.




Обозначим ч/з $l$ проекцию контура L на пл-ть Oxy. Контур $l$ явл. границей обл. D.

Рассм. кр/и интеграл $\oint\limits_L P(x,y,z)dx$. Преобразуем его в интеграл по пов-ти P по след. схеме:

$$\oint\limits_L \xrightarrow{(1)} \oint\limits_l \xrightarrow{(2)} \iint\limits_D \xrightarrow{(3)} \iint\limits_P.$$

Для определённости будем рассм. верх. сторону пов-ти P.

(1): пусть параметрические ур-ния контура $l$ имеют вид:
$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, и контур $l$ пробегается в положительном направлении при возрастании $t$ от $\alpha$ до $\beta$.

Тогда параметрические ур-ния контура $L$ можно записать (10)
в виде: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=f(\varphi(t),\psi(t))$, $\alpha\le t\le\beta$. Поэтому:

$$\left.\begin{aligned}\oint\limits_L P^{(x,y,z)}dx &= \int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,dt,\\ \oint\limits_l P^{(x,y,f(x,y))}dx &= \int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,dt\end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint\limits_L P(x,y,z)\,dx=\oint\limits_l P(x,y,f(x,y))\,dx.$$

(2): Согласно ф-ле Грина: $\oint\limits_l Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

справедливо рав-во: $\oint\limits_l P(x,y,f(x,y))\,dx=-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,f(x,y))\,dxdy=$

$$=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

(3): Вектор $\vec n=\{-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\}$ явл. вектором нормали на верх. стороне пов-ти $P$, поэтому его координаты пропорциональны координатам единичного вектора нормали $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, в частности: $\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\gamma}$, откуда $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. След-но,

$$-\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=\iint\limits_P\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.$$

Итак: $\oint\limits_L Pdx=\iint\limits_P\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds$ (3).

Аналогично можно д-ть, что:

$$\oint\limits_L Qdy=\iint\limits_P\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds \quad (4)$$

$$\oint\limits_L Rdz=\iint\limits_P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds \quad (5)$$

Складывая рав-ва (3), (4) и (5) приходим к рав-ву (2). ■

Если ввести вектор-ф-цию $\vec a(M)=\{P(M),Q(M),R(M)\}$, то ф-лу Стокса можно записать в виде:

$\oint\limits_L(\vec a,\vec{dl})=\iint\limits_P(\operatorname{rot}\vec a,\vec n)\,ds$ | „Циркуляция векторного поля $\vec a(M)$ вдоль замкнутого контура $L$ равна потоку векторного поля $\operatorname{rot}\vec a(M)$ ч/з пов-ть, натянутую на контур $L$".

§6. Пусть $G$ – обл. в пр-ве $\mathbb{R}^3$, т.е. открытое связное мн-во. (11)
Будем называть обл. $G$ поверхностно односвязной, если для любого замкнутого контура $L$, лежащего в обл. $G$, существует пов-ть, ограниченная контуром $L$ и целиком лежащая в обл. $G$.

Т.5: ① Пусть ф-ции $P, Q, R$ опр. и непр. в обл. $G$. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1) Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $L$, расположенного в обл. $G$, справедливо рав-во:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

2) Для любых двух точек $A$ и $B$ области $G$ кр/л интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в обл. $G$.

3) Выражение $P dx + Q dy + R dz$ явл. полным диф-лом, т.е. в обл. $G$ $\exists$ ф-ция $u = u(x, y, z)$, такая, что: $du = P dx + Q dy + R dz$.

При этом для любой кусочно-гладкой кривой $AB$, лежащей в обл. $G$, имеет место рав-во: $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A)$.

② Если область $G$ – поверхностно односвязная, а ф-ции $P, Q, R$ имеют в обл. $G$ непр. частные производные первого порядка, то каждое из условий 1)-3) эквивалентно условию:

4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$; $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$

Д-во:

1) $$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x,y,h(x,y))\cdot\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\,dx\,dy.$$

$z = h(x,y)$

$(x,y)\in G$

2) $$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

$x = \varphi(u,v)$

$y = \psi(u,v)$

$z = \chi(u,v)$

$(u,v)\in G$

$$A = \begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix};\quad B = \begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix};\quad C = \begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}$$

$$E = \varphi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2;\quad G = \varphi_v^2+\psi_v^2+\chi_v^2;\quad F = \varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v$$

3) $$\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint\limits_G f(x,y,h(x,y))\,dx\,dy$$

$z = h(x,y)$

$(x,y)\in G$

4) $$\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha\,dS = \iint\limits_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,A(u,v)\,du\,dv$$

$x=\varphi(u,v);\ y=\psi(u,v);\ z=\chi(u,v)$ ; $A(u,v) = \begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}$

$(u,v)\in G$

5) $$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint\limits_G \big(P(\varphi,\psi,\chi)A(u,v) + Q(\varphi,\psi,\chi)B(u,v) + R(\varphi,\psi,\chi)C(u,v)\big)\,du\,dv$$

$(u,v)\in G$

6) $$\oint\limits_L (\vec{a},\vec{dl}) = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\,\vec{a},\vec{dS}),$$ где $\vec{a} = \{P,Q,R\}$; $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$; $\vec{n} = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

ф-ла Стокса.

ф-ции $P,Q,R$ и их част. пр-ные $1^{го}$ пор-ка в обл. $G$; гладкая „хор. проектируемая" пов-ть $S$, огр. контуром $L$, расположена внутри $G$.

7) $$\iint\limits_S (\vec{a},\vec{n})\,dS = \iiint\limits_G \mathrm{div}\,\vec{a}\,dV$$ – ф-ла Остроградского-Гаусса.

ф-ции $P,Q,R$ и их частные пр-ные $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в простой обл. $G$, ограниченной кусочно-гладкой пов-тью $S$.

Опр.: Кривую $L$ будем называть гладкой, если ф-ции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из определяющих её параметрических ур-ний ($a \le t \le b$) обладают на сегм. $[a, b]$ непр. производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Опр.: Кривую $L$ будем называть кусочно-гладкой, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.

Опр.: Если различным внутренним и граничным точкам $(u, v) \in g$ соотв. различные точки $(x, y, z)$ поверхности $P$, то эта пов-ть наз. простой.

Опр.: Будем называть пов-ть $P$ гладкой, если для любой её внутр. точки $\exists$ такая окр-ть, которая вырезает часть пов-ти $P$, допускающую явное представление вида $x = f(y, z)$ или $y = f(x, z)$ или $z = f(x, y)$.

Опр.: Пов-ть $P$ будем наз. кусочно-гладкой, если она непр. и может быть разбита на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую пов-ть.

Опр.: Трёхмерная обл. $G$ наз. поверх.-односвязной, если для любого замкнутого контура $L$, лежащего в $G$, внутри области $G$ найдётся пов-ть, ограниченная контуром $L$.

Опр.: Пусть область $G$ явл. объёмно односвязной. Это означает, что если кусочно-гладкая замкн. пов-ть $\Phi$ лежит в обл. $G$, то и область, ограниченная пов-тью $\Phi$, целиком лежит в обл. $G$.

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}(M)\vec{e_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}(M)\vec{e_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}(M)\vec{e_3}$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e_1} & H_2\vec{e_2} & H_3\vec{e_3} \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

# Скалярные и векторные поля.



## §1.

Опр.: Пусть $G$ – обл. в трёхмерном пр-ве или на пл-ти. Если каждой т. $M$ области $G$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$, то говорят, что в области $G$ задано скалярное поле.

Опр.: Если каждой т. $M$ области $G$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области $G$ задано векторное поле.

Опр.: $\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M); \frac{\partial u}{\partial y}(M); \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right\}$; градиент

$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = (\operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{l}) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma$, где $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор заданного направления.

Вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора системы координат, поскольку его направление в данной точке есть направление наибольшего роста ф-ции в этой точке, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста поля $u(M)$ в этой точке.

Опр.: Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ наз. скалярная ф-ция:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Опр.: Ротором векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ наз. векторная ф-ция

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Опр.: Пусть в обл. $G$ задано векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и пусть $\Phi$ – гладкая двусторонняя пов-ть, лежащая в обл. $G$. Выберем одну из сторон пов-ти, зафиксировав непр. векторное поле единичных нормалей $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Поверх. интеграл $2^{го}$ рода по выбранной стороне пов-ти $\Phi$ $\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}, \vec{n})ds$ наз. потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ ч/з выбранную сторону пов-ти $\Phi$.

Т.к. векторы $\vec{a}(M)$ и $\vec{n}(M)$, а также пов-ть $\Phi$, не зависят от выбора системы координат, то и поток векторного поля $\vec{a}(M)$ ч/з выбранную сторону пов-ти не зависит от выбора системы координат.

Пусть $\Phi$ – гладкая замкнутая пов-ть, ограничивающая ②
область $G$, в которой задано векторное поле $\vec{a}=\{P,Q,R\}$, и пусть $\vec{n}(M)=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор внешней нормали к пов-ти $\Phi$ в т. $M$. Запишем ф-лу Остроградского–Гаусса в компактной векторной форме:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \iint\limits_\Phi (\vec{a},\vec{n})\,ds \quad (1)$$

Применим к тройному интегралу в левой части рав-ва (1) ф-лу среднего значения: $\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\iiint\limits_G dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\,V(G)$,
где $M^*$ – некоторая точка области $G$. Рав-во (1) можно теперь записать в виде:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M^*) = \frac{\iint\limits_\Phi (\vec{a},\vec{n})\,ds}{V(G)} \quad (2)$$

Зафиксируем какую-нибудь т. $M$ области $G$ и будем стягивать область $G$ к т. $M$ так, чтобы т. $M$ оставалась точкой сжимающейся области $G$, а стягивающаяся пов-ть $\Phi$ оставалась гладкой. Тогда $V(G)\to 0$, $M^*\to M$, а т.к. $\operatorname{div}\vec{a}$ – непр. ф-ция, то $\operatorname{div}\vec{a}(M^*)\to \operatorname{div}\vec{a}(M)$. Поэтому из рав-ва (2) получим:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in G}} \frac{\iint\limits_\Phi (\vec{a},\vec{n})\,ds}{V(G)} \quad (3)$$

Т.к. поток векторного поля и объём области не зависят от выбора системы координат, то правая часть рав-ва (3) и, след-но, $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат. Таким образом, ф-ла (3) даёт инвариантное определение дивергенции векторного поля.

---

Опр: Пусть в области $G$ задано векторное поле $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ и пусть $AB$ – кусочно-гладкая кривая, лежащая в области $G$. Кр/л интеграл $2^{\text{го}}$ рода $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int\limits_{AB}(\vec{a},\vec{dl})$ наз. циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой $AB$.

Вектор $\vec{dl}=\{dx,dy,dz\}$ направлен по касательной к кривой. Пусть $\vec{t}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – единичный вектор направленной касательной. Тогда $\vec{dl}=\vec{t}\cdot dl$, где $dl=|\vec{dl}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ – элемент длины кривой.

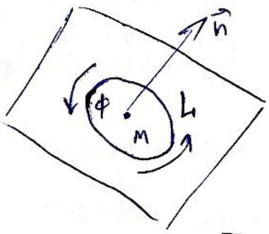
Теперь циркуляцию можно записать в виде кр/л интеграла 1-го рода:

$$\int_{AB}(\vec{a},\vec{dl}) = \int_{AB}(\vec{a},\vec{t})\,dl = \int_{AB}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl.$$

Т.к. векторы $\vec{a}$ и $\vec{t}$, а также кривая $AB$, не зависят от выбора системы координат, то и циркуляция векторного поля вдоль кривой $AB$ не зависит от выбора системы координат.

Пусть $L$ – замкнутый контур, являющийся границей пов-ти $\Phi$, лежащей в области $G$. Запишем ф-лу Стокса применительно к пов-ти $\Phi$ в векторной форме:

$$\oint_L(\vec{a},\vec{dl}) = \iint_\Phi(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,ds \quad (4)$$




Зафиксируем какую-нибудь т. $M$ области $G$, проведём ч/з неё произв. плоскость и $\forall$ гладкий замкнутый контур $L$, лежащий в этой пл-ти и ограничивающий плоскую область $\Phi$, такую, что т. $M$ – точка этой области. Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к пл-ти и выбрано направление обхода контура $L$, соответствующее этому вектору нормали. Запишем ф-лу (4) для области $\Phi$ и применим к поверх. интегралу в правой части рав-ва (4) ф-лу среднего значения:

$\iint_\Phi(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,ds = (\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})_{M^*}\cdot\iint_\Phi ds = (\operatorname{rot}\vec{a}(M^*),\vec{n})\cdot S(\Phi)$, где $M^*$ – некоторая точка области $\Phi$, $S(\Phi)$ – площадь области $\Phi$. Рав-во (4) можно теперь записать в виде: $(\operatorname{rot}\vec{a}(M^*),\vec{n}) = \dfrac{\oint_L(\vec{a},\vec{dl})}{S(\Phi)}$ (5).

Будем стягивать область $\Phi$ к т. $M$ так, чтобы т. $M$ оставалась точкой стягивающейся области $\Phi$, а стягивающийся контур $L$ оставался гладким. Тогда $S(\Phi)\to 0$, $M^*\to M$, а т.к. $\operatorname{rot}\vec{a}$ – непр. ф-ция, то $\operatorname{rot}\vec{a}(M^*)\to\operatorname{rot}\vec{a}(M)$. Поэтому из рав-ва (5) получаем:

$$(\operatorname{rot}\vec{a}(M),\vec{n}) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}}\frac{\oint_L(\vec{a},\vec{dl})}{S(\Phi)} \quad (6)$$

Т.к. циркуляция векторного поля и площадь области не зависят от выбора системы координат, то правая часть рав-ва (6), а, значит, и левая часть, которая представляет собой проекцию вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ на направление, заданное вектором $\vec{n}$, не зависит от выбора системы координат. Таким образом, ф-ла (6) даёт инвариантное определение проекции ротора векторного поля на произвольное направление: 

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\, \text{rot}\,\vec{a}(M) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{l})}{S(\Phi)} \quad (7).$$

§2. Опр.: Векторное поле $\vec{a}(M)$ наз. потенциальным в обл. $G$, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\vec{a}(M) = \text{grad}\, u(M).$$

Ф-ция $u(M)$ наз. скалярным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$.

Если векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ потенциально в области $G$, т.е. $\vec{a} = \text{grad}\, u = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$, то $P = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$; $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. След-но, выражение $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ явл. полным диф-лом ф-ции $u(x,y,z)$ в области $G$. Тем самым выполнено условие 3 теоремы об условиях независимости кр/и интеграла $2^{\text{го}}$ рода от пути интегрирования в пр-ве. Из усл. 3 следует выполнение условий 1, 2 и 4 этой теоремы. Поэтому потенциальное в обл. $G$ векторное поле $\vec{a}(M)$ обладает след. св-вами:

1) $\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$, здесь $L$ - любой замкн. контур, лежащий в обл. $G$;

2) $\forall$ фикс. $A, B \in G$ циркуляция потенц. поля $\vec{a} = \text{grad}\, u$ вдоль кривой $AB$ не зависит от выбора кривой $AB$ и равна разности значений потенциала $u(M)$ в т. $B$ и $A$: $\int_{AB} (\vec{a}, d\vec{l}) = u(B) - u(A)$.

3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$; $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ (8)

Из этих рав-в следует, что $\text{rot}\,\vec{a} = \text{rot}\,\text{grad}\,u = \vec{0}$.

Поставим вопрос:

верно ли обратное, т.е. следует ли из условия $\text{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$, что векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ явл. потенциальным?

?

Ответ зависит от вида области.

а) Если область G, в которой $\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$, явл. поверх. односвязной, то согласно Т.5 („Пов. интегралы“), ∃ ф-ция $u(x,y,z)$, такая, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$; $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, и, след-но, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}\,u$, т.е. векторное поле $\vec{a}(M)$ явл. потенциальным. ⑤

б) Если же область G не явл. поверх. односвязной, то условие $\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$ может быть выполнено во всех точках обл. G, а векторное поле $\vec{a}(M)$ не явл. потенц. в обл. G.

$\boxed{\S 3}$.

Опр.: Векторное поле $\vec{a}(M)$ наз. соленоидальным в обл. G, если во всех точках этой области $\mathrm{div}\,\vec{a} = 0$.

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в обл. G в виде ротора другого векторного поля: $\vec{a}(M) = \mathrm{rot}\,\vec{b}(M)$ (9).

В этом случае вектор-ф-ция $\vec{b}(M)$ наз. векторным потенциалом вект. поля $\vec{a}(M)$.

Пусть обл. G явл. объёмно односвязной. Это означает, что если кусочно гладкая замкн. пов-ть Ф лежит в обл. G, то и область, ограниченная пов-тью Ф, целиком принадлежит области G.

Св-во соленоид. поля:

Поток соленоидального поля ч/з любую кусочно гладкую замкнутую пов-ть, расположенную в этой области, равен нулю. Д-во:

Действительно, пусть кусочно гладкая замкн. пов-ть Ф, расположенная в объёмно односвязной области G, ограничивает область $G_1$. По ф-ле О.-Г. имеем:
$$\iint_\Phi (\vec{a}, \vec{n})\,ds = \iiint_{G_1} \mathrm{div}\,\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$
Т.к. $\mathrm{div}\,\vec{a} = 0$ в обл. G и, след-но, в обл. $G_1$, то правая часть рав-ва равна нулю, поэтому: $\iint_\Phi (\vec{a}, \vec{n})\,ds = 0$. ∎

# Тема 3. Числовые ряды.



1. **Определения:**

1) Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ наз. **частичной суммой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2) Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. **сходящимся**, если сходится посл-ть $\{S_n\}$ его частичных сумм. При этом число $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. **суммой ряда**.

3) Если посл-ть $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то такой ряд наз. **расходящимся**.

! 4) Знакопеременный ряд $A$ ($\sum_{k=1}^{\infty} a_k$) наз. **абсолютно сходящимся**, если сх-ся ряд $|A|$ ($\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$).

5) Знакопеременный ряд $A$ наз. **условно сходящимся**, если он сх-ся, а ряд $|A|$ расх-ся.

2. **Осн. теоремы и ф-лы (без док-ва).**

1) **критерий Коши сх-ти числ. ряда:**

„Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необх. и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$."

2) **необх. условие сх-ти ряда:**

„Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх-ся, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$."

3) **необх. и дост. условие сх-ти ряда с положительными членами:**

„Для сх-ти ряда $\oplus$ необх. и дост., чтобы посл-ть его частичных сумм была ограниченной."

4) **признак сравнения рядов $\oplus$:**

„Пусть даны 2 ряда $\oplus$: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (ряд P) и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ (ряд Q), и пусть $\forall k: p_k \le q_k$. Тогда из сх-ти ряда Q следует сх-ть ряда P, а из расх-ти ряда P следует расх-ть ряда Q."

5) **признак Даламбера сх-ти $\oplus$-ряда:**

„Если $\forall k: \frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся (расх-ся)."

6) **признак Коши сх-ти $\oplus$-ряда:**

„Если $\forall k: \sqrt[k]{p_k} \le q < 1$ $(\sqrt[k]{p_k} \ge 1)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся (расх-ся)."

7) интегральный признак сх-ти ⊕-ряда:

„Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ явл. ⊕-рядом и пусть $\exists$ ф-ция $f(x)$, определённая при $x \geq 1$ и удовлетворяющая условиям: а) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$;
б) $f(x)$ не возрастает при $x \geq 1$;
в) $\forall k: f(k) = p_k$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся т.т.т., когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \int_1^n f(x)dx$."

8) признак Лейбница сх-ти знакочередующегося ряда (±-ряда):

„$\measuredangle$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k$, где $p_k > 0$. Пусть $\{p_k\} \downarrow 0$, т.е. $p_{k+1} \leq p_k$ и $p_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда данный ряд наз. рядом Лейбница. Ряд Лейбница сх-ся."

9) признак Дирихле-Абеля сх-ти ±-ряда:

„Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и пусть выполнены следующие условия:

а) посл-ть $\{b_n\}$ – невозр. и бесконечно малая, т.е. $b_n \to 0$ при $n \to \infty$;

б) посл-ть $\{S_n\}$ огр., т.е. $\exists M > 0$, такое, что $\forall n: |S_n| \leq M$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх-ся."

10) теорема о перестановке членов суммы абс. сходящегося ряда:

„$\measuredangle$ ряд $A\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. После перестановки его членов получается новый ряд $A'\left(\sum_{k=1}^{\infty} a'_k\right)$. Если ряд $A$ сх-ся абсолютно, то ряд $A'$ также сх-ся абсолютно и их суммы равны."

11) теорема Римана о перестановке членов суммы усл. сход-ся ряда:

„Если ряд $A$ сх-ся условно, то для любого числа $S$ можно так переставить члены ряда $A$, что сумма полученного ряда $A'$ будет равна $S$."

3. Теоремы с док-вом:

1) Кр. Коши сх-ти числового ряда:

„Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N, \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$."

Д-во: Сх-ть числового ряда – это сх-ть посл-ти $\{S_n\}$ его частичных сумм, а для сх-ти посл-ти $\{S_n\}$ необх. и дост., чтобы она была фундаментальной, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N, \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N}: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$. ■

2) Необх. условие сх-ти числового ряда:

„Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх-ся, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$."

Д-во:

поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх-ся, то выполнено условие $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Возьмём $p=1$: $|a_{n+1}| < \varepsilon \ \forall n > N$. Это и означает, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. ■

3) Необх. и дост. условие сх-ти ⊕-ряда:

„Для сх-ти ⊕-ряда необх. и дост., чтобы посл-ть его частичных сумм была ограниченной."

Д-во:

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \ (p_k \geq 0 \ \forall k)$ – ⊕-ряд.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} p_n$. Посл-ть $\{S_n\}$, очевидно, неубывающая и поэтому для сх-ти ⊕-ряда н.и д., чтобы посл-ть $\{S_n\}$ была ограниченной. ■

4) Признак сравнения:

„Пусть даны 2 ряда: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (ряд P) и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ (ряд Q) и пусть $\forall k: p_k \leq q_k$. Тогда из сх-ти ряда Q следует сх-ть ряда P, а из расх-ти ряда P следует расх-ть ряда Q."

Д-во:

$$S_n^P := \sum_{k=1}^{n} p_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k =: S_n^Q$$

Если ряд Q сх-ся, то $\{S_n^Q\}$ – огр. $\Rightarrow$ $\{S_n^P\}$ – огр. $\Rightarrow$ ряд P сх-ся.

Если ряд P расх-ся, то $\{S_n^P\}$ – неогр. $\Rightarrow$ $\{S_n^Q\}$ – неогр. $\Rightarrow$ ряд Q расх-ся. ■

5) Признак Даламбера:

„Если $\forall k: \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся (расх-ся)."

Д-во:

а) из условия имеем: $p_{k+1} \leq q p_k \leq q^2 p_{k-1} \leq \ldots \leq q^k p_1$, т.е. $p_k \leq q^{k-1} p_1$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p_1$ сх-ся, т.к. $0<q<1$. Значит, сх-ся и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (по пр. сравнения).

б) если же $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq p_{k-1} \geq \ldots \geq p_1$ $\Rightarrow$ не выполнено необх. условие сх-ти ряда ($p_n \to 0$ при $n \to \infty$) $\Rightarrow$ ряд расх-ся. ■

6) Признак Коши:

„Если $\forall k: \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ $(\sqrt[k]{p_k} \geq 1)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся (расх-ся)."

Д-во: а) $\sqrt[k]{p_k} \le q < 1 \Rightarrow p_k \le q^k$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сх-ся, т.к. $0<q<1$.
Значит, по пр. сравнения, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся.

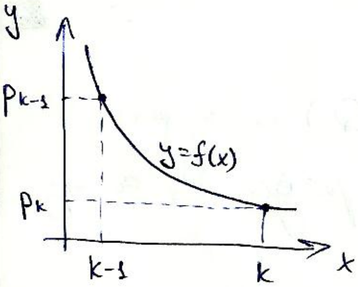
б) $\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Rightarrow p_k \geq 1 \Rightarrow$ не выполнено необх. условие сх-ти ряда ($p_n \to 0$ при $n \to \infty$) $\Rightarrow$ ряд расх-ся. ■

7) Интегральный признак:

„Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ явл. ⊕-рядом и пусть $\exists$ ф-ция $f(x)$, определённая при $x \geq 1$ и удовлетворяющая условиям: а) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$;
б) $f(x)$ не возр. при $x \geq 1$;
в) $\forall k: f(k) = p_k$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся т.т.т., когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \int\limits_1^n f(x)dx$."

Д-во:




$$p_k \le f(x) \le p_{k-1} \text{ при } k-1 \le x \le k$$
$$\int\limits_{k-1}^{k} p_k\,dx \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int\limits_{k-1}^{k} p_{k-1}\,dx$$
$$p_k \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le p_{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} k=2:\ p_2 \le \int\limits_1^2 f(x)dx \le p_1 \\ k=3:\ p_3 \le \int\limits_2^3 f(x)dx \le p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k=n:\ p_n \le \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \le p_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} p_2+p_3+\ldots+p_n \le \int\limits_1^n f(x)dx \le p_1+p_2+\ldots+p_{n-1} \\ S_n - p_1 \le \underbrace{\int\limits_1^n f(x)dx}_{:=a_n} \le S_{n-1} \quad (*) \end{array}$$

Т.к. $f(x) \geq 0$, то $\{a_n\}$ – неуб. посл-ть. Для её сх-ти, т.е. для существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, необх. и дост., чтобы она была ограничена. Для сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ необх. и дост., чтобы посл-ть $\{S_n\}$ его частичных сумм была ограничена. Из нер-ва $(*)$ следует, что $\{S_n\}$ ограничена т.т.т., когда ограничена $\{a_n\}$. След-но, $\{S_n\}$ сх-ся (а значит, сходится и наш ряд) т.т.т., когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

8) Признак Лейбница:

„$\measuredangle$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} p_k$, где $p_k > 0$. Пусть $\{p_k\} \downarrow 0$, т.е. $p_{k+1} \le p_k$ и $p_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда данный ряд наз. рядом Лейбница.
Ряд Лейбница сходится."

Д-во: положим $a_k = (-1)^{k-1}$, $b_k = p_k$. Тогда $\{b_k\} \downarrow 0$ $\substack{\text{при } k\to\infty}$ и посл-ть $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\} = 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ явл. огр. По пр. Дирихле-Абеля ряд Лейбница сх-ся. ■

9) **Признак Дирихле-Абеля**:

„Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и пусть выполнены след. условия:

а) посл-ть $\{b_n\}$ - невозр. и б.м., т.е. $b_n \to 0$ при $n\to\infty$;

б) посл-ть $\{S_n\}$ огр., т.е. $\exists M > 0$, такое, что $\forall n: |S_n| \le M$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх-ся."

Д-во: воспользуемся критерием Коши. ∡ „отрезок" ряда от $k=n+1$ до $k=n+p$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = \sum_{k=n+2}^{n+p+1} b_{k-1} S_{k-1} -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_{k-1} S_{k-1} - b_n S_n - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} (b_{k-1} - b_k).$$

Отметим, что в силу усл. а) теоремы: $b_k \ge 0$, $b_{k-1} - b_k \ge 0$.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\exists N, \forall n > N: 0 \le b_n \le \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M$ - число из усл. б) теоремы. Тем самым $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, используя рав-во $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}(b_{k-1} - b_k)$, получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le b_{n+p} M + b_n M + M(b_n - \cancel{b_{n+1}} + \cancel{b_{n+1}} - \cancel{b_{n+2}} + \ldots + \cancel{b_{n+p-1}} - b_{n+p}) =$$

$$= b_{n+p} M + b_n M + M(b_n - b_{n+p}) = 2b_n M < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ■

10) **Теорема о связи сх-ти и абс. сх-ти ряда**:

„а) Если ряд $A$ сх-ся абсолютно, то ⊕-ряды $P$ и $Q$ сх-ся, причём $S^A = S^P - S^Q$.

б) Если ряд $A$ сх-ся условно, то ⊕-ряды $P$ и $Q$ расх-ся."

Здесь ряд $P$ - ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ - положительные члены ряда $A$, выписанные в том порядке, в котором они стоят в ряде $A$; ряд $Q$ - ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$, где $-q_1, -q_2, \ldots, -q_n, \ldots$ - отрицательные члены ряда $A$.

Д-во:

а) Пусть ряд $A$ сх-ся абсолютно, т.е. сх-ся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$. Тогда $\forall n$:
$S_n^{|A|} = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| = S^{|A|}$. Рассм. $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Обозначим ч/з $S_{n_1}^P$ сумму членов ряда $P$, входящую в $S_n^A$, а ч/з $S_{n_2}^Q$ – сумму членов ряда $Q$, входящую в $S_n^A$ со знаком „минус":
$S_{n_1}^P = \sum\limits_{k=1}^{n_1} p_k$, $S_{n_2}^Q = \sum\limits_{k=1}^{n_2} q_k$, $n_1 + n_2 = n$. Очевидно, что: $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$,
$S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q$.

Из последнего рав-ва и нер-ва $S_n^{|A|} \leq S^{|A|}$ получаем:
$S_{n_1}^P \leq S^{|A|}$, $S_{n_2}^Q \leq S^{|A|}$, откуда вытекает сх-ть рядов $P$ и $Q$ (т.к. частичные суммы этих рядов ограничены), а отсюда следует, что ряды $P$ и $Q$ сх-ся, т.е.: $S_{n_1}^P \to S^P$ и $S_{n_2}^Q \to S^Q$ при $n_1, n_2 \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в рав-ве $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$, получим: $S^A = S^P - S^Q$.

б) Пусть ряд $A$ сх-ся условно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ расх-ся. Д-жем, что ряды $P$ и $Q$ также расх-ся. В самом деле, если бы они сходились, т.е. существовали бы пределы $\lim\limits_{n_1\to\infty} S_{n_1}^P$ и $\lim\limits_{n_2\to\infty} S_{n_2}^Q$, то в силу рав-ва $S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q$ существовал бы и предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{|A|}$, т.е. сходился бы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$, что противоречит условию. След-но, по крайней мере один из рядов $P$ и $Q$ расх-ся. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то в силу рав-ва $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$ расходился бы ряд $A$, а он по условию сходится. Итак, ряды $P$ и $Q$ расх-ся. ■

11) Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда:
„Рассм. ряд $A$ $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k)$. После перестановки его членов получается новый ряд $A'$ $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k)$. Если ряд $A$ сх-ся абсолютно, то ряд $A'$ также сх-ся абсолютно и их суммы равны."

Д-во: а) сначала разберём случай, когда члены $A$ неотрицательны: $a_k \geq 0$. Тогда $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S^A$. Рассм. частичную сумму ряда $A'$:
$S_k^{A'} = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \leq S^A$. Итак, посл-ть частичных сумм ряда $A'$ ограничена, поэтому этот ряд сх-ся. При этом $S^{A'} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k^{A'} \leq S^A$. Поскольку ряд $A$ можно рассм. как ряд, полученный перестановкой членов ряда $A'$, то $S^A \leq S^{A'}$. Отсюда $S^A = S^{A'}$.

б) теперь обратимся к общему случаю, когда члены ряда $A$ явл. числами произвольного знака. По условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сх-ся. По доказанному в п. а) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k'|$, полученный из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ перестановкой членов, также сходится. Это означает, что ряд $A'$, полученный из ряда $A$ перестановкой членов, сх-ся абсолютно. По теореме о связи сх-ти и абс. сх-ти ряда имеем: $S^A = S^P - S^Q$, $S^{A'} = S^{P'} - S^{Q'}$. Т.к. ряд $P'$ получается перестановкой членов ряда $P$, а ряд $Q'$ – перестановкой членов ряда $Q$, то по доказанному в п. а), $S^{P'} = S^P$ и $S^{Q'} = S^Q$. Поэтому $S^A = S^{A'}$. ■

# Тема 4. Функциональные последовательности и ряды.

## 1. Определения:

1) а. Говорят, что посл-ть $\{f_n(x)\}$ равномерно сх-ся к ф-ции $f(x)$ на мн-ве $X$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in X$ выполняется нер-во $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

б. Посл-ть $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно сходящейся к ф-ции $f(x)$ на мн-ве $X$, если числовая посл-ть $\{\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)|\}$ явл. б.м., т.е. $\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)|\to 0$ при $n\to\infty$.

2) Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся к своей сумме $S(x)$ равномерно на мн-ве $X$, если посл-ть $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сх-ся равномерно к $S(x)$ на мн-ве $X$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in X$ выполняется нер-во: $|S(x)-S_n(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)|<\varepsilon$, или $\sup\limits_X |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)|\to 0$ при $n\to\infty$.

3) Посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх-ся неравномерно к ф-ции $f(x)$ на мн-ве $X$, если $\exists \varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N$, такой, что $\forall x\in X$: $|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon$. возможно, заменить $\forall$ на $\exists$

4) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся к своей сумме $S(x)$ неравномерно на мн-ве $X$, если посл-ть $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сх-ся неравномерно к $S(x)$ на мн-ве $X$, т.е. $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N$, такой, что $\forall x\in X$: $|S(x)-S_n(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)|\geq\varepsilon$. ?

5) Пусть все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$, а также ф-ция $f(x)$, интегрируемы на сегменте $[a,b]$. Б.г., что посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх-ся в среднем к ф-ции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, если $\rho^2(f_n,f) = \int\limits_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx\to 0$ при $n\to\infty$.

6) Говорят, что функц. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся в среднем к ф-ции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, если посл-ть $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда сх-ся в среднем к ф-ции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, т.е. если

$$\int\limits_a^b [S(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

7) Функц. посл-ть $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно ограниченной на мн-ве $X$, если $\exists$ число $M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$ выполнено нер-во: $|f_n(x)| \le M$.

8) Функц. посл-ть $\{f_n(x)\}$, заданная на промежутке $X$, наз. равностепенно непрерывной на этом промежутке, если $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, выполняется нер-во: $|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$.

2. Основные теоремы и ф-лы (без док-ва):

1) кр. Коши равн. сх-ти функц. посл-ти:

„Для того, чтобы функц. посл-ть $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на мн-ве $X$, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$, такой, что $\forall n>N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$."

2) кр. Коши равн. сх-ти функц. ряда:

„Для того, чтобы функц. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на мн-ве $X$, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$, такой, что $\forall n>N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon$."

!3) мажорантный признак Вейерштрасса равн. сх-ти функц. ряда:

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ с положительными членами наз. мажорантным для функц. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на мн-ве $X$, если $\forall k$ и $\forall x \in X$ выполнено нер-во: $|u_k(x)| \le p_k$.

„Если для функц. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на мн-ве $X$ существует сходящийся мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся равномерно на мн-ве $X$."

4) признак Дирихле-Абеля равн. сх-ти функц. ряда:

„$\ast$ ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$, $x \in X$. Обозначим $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$. Пусть выполнены условия:

а) посл-ть $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in X$ явл. невозр. (т.е. $\forall n$: $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$), и $\{b_n(x)\} \rightrightarrows f(x) = 0$ на мн-ве $X$;

б) посл-ть $\{S_n(x)\}$ равномерно огр. на мн-ве $X$ (т.е. $\exists M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|S_n(x)| \le M$).

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сх-ся равномерно на мн-ве $X$."

5) теорема о непрерывности предела функц. посл-ти:

„Пусть все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ явл. непр. ф-циями на промежутке $X$, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом промежутке. Тогда предельная ф-ция $f(x)$ непр. на промежутке $X$."

6) теорема о непрерывности суммы функц. ряда:

„Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ явл. непр. ф-циями на промежутке $X$, и ряд сх-ся равномерно на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ – непр. ф-ция на промежутке $X$."

7) теорема о переходе к пределу под знаком производной для функц. посл-ти:

„Пусть выполнены условия:

а) все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ имеют непр. производные $f_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

б) $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на сегменте $[a,b]$;

в) $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Тогда ф-ция $f(x)$ диф-ма на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство: $f'(x) = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$."

8) теорема о почленном дифференцировании функц. ряда:

„Пусть выполнены условия:

а) все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеют непр. производные $u_k'(x)$ на $[a,b]$;

б) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $S(x)$;

в) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сх-ся равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\varphi(x)$.

Тогда ф-ция $S(x)$ диф-ма на сегменте $[a,b]$ и справедливо рав-во $S'(x) = \varphi(x)$."

9) теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для функц. посл-ти:

„Пусть все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ явл. непр. ф-циями на сегменте $[a,b]$, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте. Тогда для любых $x_0$ и $x$ из сегмента $[a,b]$ справедливо рав-во:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, причём $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ на сегменте $[a,b]$."

10) теорема о почленном интегрировании функц. ряда:

„Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ явл. непр. ф-циями на сегменте $[a,b]$, и ряд сх-ся равномерно на этом сегменте, то для любых $x_0$ и $x$ из сегмента $[a,b]$ справедливо рав-во:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\Big)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(t)\,dt$$ (т.е. ряд можно интегрировать почленно на любом сегменте $[x_0,x]$, принадлежащем сегменту $[a,b]$),

причём функц. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(t)dt$ сх-ся равномерно на сегменте $[a,b]$."

11) теорема Арцела:

„Если функц. посл-ть равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте, то из неё можно выделить подпосл-ть, равномерно сходящуюся на этом сегменте."

3. Теоремы с доказ-вом:

1) и 3) Кр. Коши равномерной сх-ти функц. посл-ти:

„Для того, чтобы функц. посл-ть $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на мн-ве $X$, необх. и дост., чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ и $\forall x\in X$: $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$."

Д-во: а) необх.: пусть $\{f_n(x)\}\rightrightarrows f(x)$ на мн-ве $X$. Тогда по опр. равн. сх-ти: $\forall\varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in X$ выполняется нер-во $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$, а т.к. $n+p>n$, то $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ и $\forall x\in X$ также выполняется нер-во: $|f_{n+p}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$.

Из этих двух нер-в следует, что $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ и $\forall x\in X$ справедливо нер-во: $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

б) дост.: пусть выполнено условие о том, что:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ и $\forall x\in X$: $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Тогда для любого фикс. значения $x$ из мн-ва $X$ числовая посл-ть $\{f_n(x)\}$ явл. фундаментальной и, след-но, сх-ся. Предел посл-ти $\{f_n(x)\}$ обозначим $f(x)$. Итак, $\{f_n(x)\}\to f(x)$ при $n\to\infty$ на мн-ве $X$.

Отсюда следует, что при любом фикс. $n$: $\{f_{n+p}(x)\}\to f(x)$ при $p\to\infty$ на мн-ве $X$. Перейдём к пределу при $p\to\infty$ в нер-ве $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. Получим: $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, $\forall n>N$ и $\forall x\in X$.

Но это и означает по опр. равн. сх-ти, что $\{f_n(x)\}\rightrightarrows f(x)$ на мн-ве $X$. ∎

2) и 4) Кр. Коши равномерной сх-ти функц. ряда:

„Для того, чтобы функц. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на мн-ве $X$, необх. и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, такой, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$."

Д-во:

пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся равномерно на мн-ве $X$, т.е. $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\} \rightrightarrows S(x)$. Т.к. $\{S_n(x)\} \rightrightarrows S(x)$, то по кр. Коши равн. сх-ти функц. посл-ти: $\underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|} < \varepsilon$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

б) дост.: пусть $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, такой, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$ или $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. По кр. Коши равн. сх-ти функц. посл-ти это означает, что $\{S_n(x)\} \rightrightarrows S(x)$, а, след-но, равн-но сх-ся и функц. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. ■

5) Мажорантный признак Вейерштрасса равн. сх-ти функц. ряда:

„Если для функц. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на мн-ве $X$ существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся равномерно на мн-ве $X$."

Д-во: Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Согласно кр. Коши для числовых рядов, $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon$.

Т.к. $\forall k$ и $\forall x \in X$ справедливо нер-во: $|u_k(x)| \leq p_k$ (в силу усл. теоремы), то $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$, используя нер-во $\sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon$, получаем: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon$.

А значит, по кр. Коши равн. сх-ти функц. ряда, исходный ряд сх-ся равномерно на мн-ве $X$. ■

6) Признак Дирихле-Абеля равн. сх-ти функц. ряда: 

„Пусть выполнены условия:

а) посл-ть $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in X$ явл. невозр. (т.е. $\forall n$: $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$), и $\{b_n(x)\} \rightrightarrows f(x)=0$ на мн-ве $X$;

б) посл-ть $\{S_n(x)\}$ равномерно огр. на мн-ве $X$ (т.е. $\exists M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|S_n(x)| \le M$);

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сх-ся равн-но на мн-ве $X$."

Д-во: восп. кр. Коши равн. сх-ти функц. ряда. Я „отрезок" ряда от $k=n+1$ до $k=n+p$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)(S_k(x) - S_{k-1}(x)) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) S_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) S_{k-1}(x) =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{n+p+1} b_{k-1}(x) S_{k-1}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) S_{k-1}(x) = b_{n+p}(x) S_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_{k-1}(x) S_{k-1}(x) -$$

$$- b_n(x) S_n(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) S_{k-1}(x) = b_{n+p}(x) S_{n+p}(x) - b_n(x) S_n(x) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}(x)(b_{k-1}(x) - b_k(x)).$$

Отметим, что в силу усл. а) теоремы: $b_k(x) \ge 0$, $b_{k-1}(x) - b_k(x) \ge 0$.
Зададим теперь произв. $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{b_n(x)\} \rightrightarrows f(x) = 0$ при $n \to \infty$, то $\exists N, \forall n > N$: $0 \le b_n(x) \le \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M$ - число из усл. б) теоремы.
Тем самым $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, используя рав-во
$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = b_{n+p}(x) S_{n+p}(x) - b_n(x) S_n(x) + \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}(x)(b_{k-1}(x) - b_k(x))$, получаем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| \le b_{n+p}(x) M + b_n(x) M + M(b_n(x) - b_{n+1}(x) + b_{n+1}(x) - b_{n+2}(x) + \ldots +$$

$$+ b_{n+p-1}(x) - b_{n+p}(x)) = 2b_n(x) M < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Значит, по кр. Коши равн. сх-ти функц. ряда, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сх-ся равн-но на мн-ве $X$. ■

7) Теорема о непрерывности предела функцион. посл-ти:

„Пусть все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ явл. непр. ф-циями на промежутке $X$, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом промежутке.
Тогда предельная ф-ция $f(x)$ непрерывна на промежутке $X$."

Д-во: Д-жем непр-ть ф-ции $f(x)$ в произв. т. $x_0$ мн-ва $X$. 

По опр. непр-ти ф-ции нужно д-ть, что:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in X$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на мн-ве $X$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$, в частности, $\forall n > N$: $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$.

Возьмём какую-нибудь ф-цию $f_n(x)$ с номером $n > N$. Для неё выполнены оба полученных нер-ва, а поскольку $f_n(x)$ непр. в т. $x_0$ (по усл. теоремы), то для заданного $\varepsilon$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in X$, то $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$.

Итак: если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in X$, то:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

■

8) Теорема о непр-ти суммы функц. ряда:

„Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ явл. непр. ф-циями на промежутке $X$, и ряд сх-ся равн-но на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ – непр. ф-ция на промежутке $X$."

Д-во:

Т.к. все ф-ции $u_k(x)$ непр. на промежутке $X$, то $\forall n$ частичная сумма $S_n(x)$ явл. непр. ф-цией на промежутке $X$.

По усл. теоремы $\{S_n(x)\} \rightrightarrows S(x)$ на промежутке $X$. Поэтому, согласно теореме о непр-ти предела функц. посл-ти, $S(x)$ – непр. ф-ция на промежутке $X$.

■

9) Теорема о переходе к пределу под знаком производной для функц. посл-ти:

„Пусть выполнены условия:

а) все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ имеют непр. производные $f_n'(x)$ на сегменте $[a, b]$;

б) $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на сегменте $[a, b]$;

в) $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Тогда ф-ция $f(x)$ диф-ма на сегменте $[a, b]$ и справедливо рав-во: $f'(x) = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$."

Д-во:

т.к. $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$, то по теореме о непр-ти предела функц. посл-ти, ф-ция $\varphi(x)$ непр. на сегменте $[a,b]$, а по теореме о переходе к пределу под знаком интеграла для равн-но сходящейся функц. посл-ти, для любых $x$ и $x_0$ из сегмента $[a,b]$ выполняется рав-во:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$$

Поскольку $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(x_0)$, а $\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(x_0)] = f(x)-f(x_0)$, то последнее рав-во можно записать в виде:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt.$$

При фикс. точке $x_0$ — $f(x_0) = const$, а интеграл $\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$ представляет собой интеграл с переменным верхним пределом. Т.к. $\varphi(x)$ — непр. ф-ция, то интеграл с переменным верх. пределом явл. диф-мой ф-цией на сегменте $[a,b]$ и справедливо рав-во:

$$\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\right)' = \varphi(x), \; x\in[a,b].$$

След-но, ф-ция $f(x)$ также диф-ма на сегменте $[a,b]$ и выполняется рав-во $f'(x) = \varphi(x)$. ■

10) Теорема о почленном диф-нии функц. ряда:

„Пусть выполнены условия:

а) все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеют непр. производные $u_k'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

б) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх-ся на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $S(x)$;

в) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сх-ся равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\varphi(x)$.

Тогда ф-ция $S(x)$ диф-ма на сегменте $[a,b]$ и справедливо рав-во: $S'(x) = \varphi(x)$."

Д-во:

∡ посл-ть $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, т.е. $\{S_n(x)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}$. Из условий теоремы следует, что:

а) все члены этой пос-ти имеют непр. производные $S_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

б) $\{S_n(x)\} \to S(x)$ на сегменте $[a,b]$;

в) $\{S_n'(x)\} = \{\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Таким образом, для пос-ти $\{S_n(x)\}$ выполнены все условия теоремы о переходе к пределу под знаком производной для функц. пос-ти. А значит, ф-ция $S(x)$ дифф-ма на сегменте $[a,b]$ и справедливо рав-во $S'(x) = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$.

11) Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для равн-но сходящейся функц. пос-ти:

„Пусть все члены функц. пос-ти $\{f_n(x)\}$ явл. непр. ф-циями на сегменте $[a,b]$, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте. Тогда для любых $x_0$ и $x$ из сегмента $[a,b]$ справедливо рав-во:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (*), \text{ причём } \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на } [a,b]. \quad (**)$$"

Д-во: прежде всего отметим, что в силу теоремы о непр-ти предела функц. пос-ти предельная ф-ция $f(x)$ непр. на сегм. $[a,b]$ и, след-но, интегрируема на этом сегменте.

Чтобы д-ть утв. (**) воспользуемся определением равн. сх-ти функц. пос-ти: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ будет выполнено нер-во:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на сегм. $[a,b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется нер-во:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Используя это нер-во, получаем $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$:

$$\underbrace{\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right|} = \left| \int_{x_0}^{x} [f_n(t) - f(t)]\,dt \right| \le \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \varepsilon \frac{|x-x_0|}{|b-a|} \le \underbrace{\varepsilon}$$

■

12) Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла для функц. посл-ти, сходящейся в среднем:

„Если все члены функц. посл-ти $\{f_n(x)\}$ и ф-ция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх-ся в среднем к ф-ции $f(x)$ на этом сегменте, то $\forall x_0$ и $x$ из сегмента $[a,b]$ справедливо рав-во: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, причём $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на сегм. $[a,b]$."

Д-во: по усл. $\int\limits_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx \to 0$ при $n\to\infty$, а нужно д-ть, что $\forall$ фикс. $x_0$: $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на сегменте $[a,b]$ или, что то же самое, $\int\limits_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]dt \rightrightarrows 0$ на сегм. $[a,b]$.

Восп. нер-вом Коши-Буняковского:

$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx\cdot\int\limits_a^b g^2(x)dx}$ применительно к интегралу $\int\limits_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]dt$. Получим: $\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\cdot 1\,dt\right| \leq \sqrt{\int\limits_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]^2dt\cdot\int\limits_{x_0}^{x}1^2dt} \leq$
$\leq \sqrt{\int\limits_a^b[f_n(t)-f(t)]^2dt\cdot(b-a)}$.

Зададим теперь произв. $\varepsilon>0$. Из условия: $\int\limits_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx\to 0$ при $n\to\infty$, следует, что $\exists N$, такой, что $\forall n>N$ правая часть в последнем нер-ве будет меньше $\varepsilon$. След-но, $\forall n>N$ и $\forall x\in[a,b]$ будет выполнено нер-во $\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]dt\right|<\varepsilon$, а это и означает, что $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на сегменте $[a,b]$. ■

13) Теорема о почленном интегрировании функц. ряда, сходящегося в среднем:

„Если все члены функц. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ и ф-ция $S(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх-ся в среднем к ф-ции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\forall x_0, x\in[a,b]$ справедливо равенство: $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt$, причём функц. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сх-ся к ф-ции $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$ равн-но на $[a,b]$."

Д-во:

по усл. посл-ть $\{S_n(x)\} = \{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\}$ частичных сумм ряда сходится в среднем к ф-ции $S(x)$ на сегм. $[a,b]$. Поэтому согласно теореме о переходе к пределу под знаком интеграла для функц. посл-ти, $\int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$ на $[a,b]$ или, что то же самое, $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$ на сегм. $[a,b]$.

Но это и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сх-ся к ф-ции $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$ равн-но на сегм. $[a,b]$ и справедливо рав-во:

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt.$$

■

# Тема 5. Несобственные интегралы.

## 1. Определения:

1) Пусть ф-ция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < +\infty$ и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int_a^A f(x)dx$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx := \int_a^{+\infty} f(x)dx$ наз. несобственным интегралом первого рода от ф-ции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$.

2) Пусть ф-ция $f(x)$ неогр. на полусегменте $(a, b]$ и ограничена на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$, где $\delta > 0$ и $a+\delta < b$. Отметитим, что на сегменте $[a, b]$ ф-ция $f(x)$ не интегрируема в силу неограниченности, т.е. определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует).

$\lim\limits_{\delta\to+0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$ наз. несобственным интегралом второго рода от ф-ции $f(x)$ по полусегменту $(a, b]$.

## 2 и 3. Осн. теоремы (формулировки и док-ва):

1) Кр. Коши сх-ти несобственного интеграла I рода:

„Для того, чтобы н/с интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходился, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ число $A$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$: $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$."

Д-во: Обозначим $\Phi(A) := \int_a^A f(x)dx$.

По опр. сх-ть н/с интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ означает существование предела $\lim\limits_{A\to\infty} \Phi(A)$. В свою очередь, для того, чтобы существовал этот предел, необх. и дост. (согласно кр. Коши существования предела ф-ции $\Phi(A)$ при $A\to\infty$), чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$: $|\Phi(A'') - \Phi(A')| < \varepsilon$, т.е. $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$. ■

2) Кр. Коши сх-ти несобственного интеграла II рода:

„Для того, чтобы н/с интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по полусегменту $(a, b]$ сходился, необходимо и дост., чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta'$ и $\delta''$, удовлетворяющих условиям $0 < \delta' < \delta$, $0 < \delta'' < \delta$, выполняется нер-во:

$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$."

Д-во: Обозначим $\Phi(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$.

По опр. сх-ть н/с интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ означает существование предела $\lim\limits_{\delta \to +0} \Phi(\delta)$. В свою очередь, для того, чтобы существовал этот предел, необх. и дост. (согласно кр. Коши существования одностороннего предела ф-ции), чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta'$ и $\delta''$, удовлетворяющих условиям $0 < \delta' < \delta$, $0 < \delta'' < \delta$, выполняется нер-во:

$|\Phi(\delta') - \Phi(\delta'')| < \varepsilon$, т.е. $\left| \int\limits_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$. ■

3) Признак сравнения для н/с интегралов I рода:

„Пусть ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $[a, +\infty)$, интегрируемы на любом сегменте $[a, A]$, где $A > a$, и удовлетворяют нер-вам: $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, +\infty)$. Тогда из сх-ти интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ (*) следует сх-ть интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ (**), а из расх-ти интеграла (**) следует расх-ть интеграла (*)."

Д-во: Обозначим: $\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$, $G(A) = \int\limits_a^A g(x)dx$.

Из условий теоремы следует, что $\forall A \ge a$ выполняются нер-ва:
$0 \le \Phi(A) \le G(A)$ (☆)

Если интеграл (*) сх-ся, то ф-ция $G(A)$ огр. на $[a, +\infty)$, поэтому в силу (☆) $\Phi(A)$ также огр., и, значит, интеграл (**) сх-ся.

А если интеграл (**) расх-ся, то ф-ция $\Phi(A)$ будет неогр. на $[a, +\infty)$, поэтому в силу (☆) ф-ция $G(A)$ также будет неогр., и, след-но, интеграл (*) расх-ся. ■

4) Признак сравнения для н/с интегралов II рода:

„Пусть ф-ции $f(x)$ и $g(x)$: а) опр. на полусегменте $(a, b]$, где $a$ — особая точка этих ф-ций, интегрируемы на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $0 < a+\delta < b$, и б) удовлетворяют нер-вам $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in (a, b]$ (1). Тогда из сх-ти интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ (2) следует сх-ть интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (3), а из расх-ти интеграла (3) следует расх-ть интеграла (2)."

Д-во: Обозначим: $\Phi(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$; $G(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} g(x)dx$.

Из усл. теоремы следует, что $\forall 0<a+\delta<b$ выполняются нер-ва:

$$0 \le \Phi(\delta) \le G(\delta) \quad (4)$$

Если интеграл (2) сх-ся, то $\exists \lim\limits_{\delta\to+0} G(\delta)$, поэтому в силу (4) $\exists \lim\limits_{\delta\to+0} \Phi(\delta)$, и, значит, интеграл (3) сх-ся.

Если интеграл (3) расх-ся, то $\nexists \lim\limits_{\delta\to+0} \Phi(\delta)$, поэтому в силу (4) $\nexists \lim\limits_{\delta\to+0} G(\delta)$, и, след-но, интеграл (2) расх-ся. ■

5) Признак Дирихле-Абеля для н/с интеграла I рода:

„Пусть выполнены условия:

а) ф-ция $f(x)$ непр. на полупрямой $[a, +\infty)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$ $(F'(x) = f(x))$;

б) ф-ция $g(x)$ не возрастает на полупрямой $[a, +\infty)$, стремится к нулю при $x\to+\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x)$.

Тогда н/с интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сх-ся."

Д-во: Восп. критерием Коши сх-ти н/с интеграла I рода. С этой целью ∡ интеграл $\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx$, где $A'>a$ и $A''>a$.

Преобразуем его по ф-ле интегрирования по частям, учитывая, что $f(x)dx = dF(x)$:

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = \int\limits_{A'}^{A''} g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} F(x)g'(x)dx \quad (1)$$

Т.к. ф-ция $F(x)$ огр. (по усл.), то $\exists M>0$, такое, что $\forall x\in[a,+\infty)$: $|F(x)|\le M$, а поскольку $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x\to+\infty$, то $g'(x)\le 0$, $g(x)\ge 0$ на полупрямой $[a,+\infty)$.

Пусть (для определённости) $A''>A'$. Тогда из (1) получим:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A'')F(A'')| + |g(A')F(A')| - M\int\limits_{A'}^{A''} g'(x)dx \le$$

$$\le M(g(A'')+g(A')) - M(g(A'')-g(A')) = 2Mg(A').$$

Зададим теперь произв. $\varepsilon>0$. Т.к. $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, то $\exists A>a$, такое, что $\forall A'>A$ выполняется нер-во $g(A')<\frac{\varepsilon}{2M}$.

След-но, $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ получаем: $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le 2Mg(A') < \varepsilon$, а это и означает, согласно кр. Коши, что н/с интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сх-ся. ■

# Тема 6. Интегралы, зависящие от параметра.

## 1. Определения:

1) Н/с интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ наз. сходящимся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, если он сх-ся $\forall y \in Y$ и если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \geq a$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in Y$ выполняется нер-во:

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

2) Н/с интеграл $\int\limits_a^{b} f(x,y)dx$ наз. сходящимся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, если он сх-ся $\forall y \in Y$ и если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta' \in (0, \delta)$ и $\forall y \in Y$ выполняется нер-во:

$$\left| \int\limits_{a}^{a+\delta'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

3) Н/с интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ не явл. сх-ся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, если он сх-ся $\forall y \in Y$, но $\exists \varepsilon > 0\ \forall A \geq a\ \exists A' > A$, такое, что $\forall y \in Y$ выполняется нер-во: $\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)dx \right| \geq \varepsilon$. ?

4) Н/с интеграл $\int\limits_a^{b} f(x,y)dx$ не явл. сх-ся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, если он сх-ся $\forall y \in Y$, но $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0$ $\exists \delta' \in (0, \delta)$, такое, что $\forall y \in Y$ выполняется нер-во: $\left| \int\limits_{a}^{a+\delta'} f(x,y)dx \right| \geq \varepsilon$. ?

## 2. Основные теоремы и формулы (без док-ва):

1) теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра:

„Если ф-ция $f(x,y)$ непр. в прямоугольнике $Q$, то ф-ция $F(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)dx$ непр. на сегменте $[c,d]$. Здесь $Q = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$."

2) теорема об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра:

„Если ф-ция $f(x,y)$ непр. в пр-ке $Q = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, то ф-ция $F(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо рав-во: $\int\limits_c^{d} F(y)dy = \int\limits_c^{d} \left[ \int\limits_a^{b} f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_a^{b} \left[ \int\limits_c^{d} f(x,y)dy \right] dx$."

3) теорема о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр-ны в пр-ке $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. Тогда ф-ция $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ имеет на сегменте $[c,d]$ непр. производную $F'(y)$ и справедливо рав-во: $F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$."

4) кр. Коши равномерной сх-ти н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть н/с интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся при каждом $y$ из промежутка $Y$. Для того, чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon>0$ $\exists A\ge a$, такое, что $\forall A'>A$, $\forall A''>A$ и $\forall y\in Y$ выполняется нер-во:

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$."

5) кр. Коши равномерной сх-ти н/с интеграла II рода, зависящего от параметра:

„Пусть н/с интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сх-ся при каждом $y$ из промежутка $Y$. Для того, чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, необх. и дост., чтобы $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, такое, что $\forall\delta'\in(0,\delta)$, $\forall\delta''\in(0,\delta)$ и $\forall y\in Y$ выполняется нер-во:

$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$."

6) мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сх-ти н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ определена в обл. $G=\{(x,y): x\ge a, y\in Y$, где $Y$ - некоторый промежуток$\}$; $\forall y\in Y$ ф-ция $f(x,y)$ интегрируема по $x$ на любом сегменте вида $[a,A]$; в области $G$ выполняется нер-во $|f(x,y)|\le$ $\le g(x)$, где $g(x)$ - такая ф-ция, что н/с интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сх-ся.

Тогда н/с интегралы $\int_a^\infty f(x,y)dx$ и $\int_a^\infty |f(x,y)|dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$."

7) признак Дирихле-Абеля равномерной сх-ти н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Рассмотрим интеграл вида $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$. Пусть выполнены условия:

а) ф-ция $f(x,y)$ непр. в обл. $G = \{(x,y): x \geq a, y \in Y$, где $Y$ - некоторый промежуток$\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной $x$ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y), |F(x,y)| \leq M, (x,y) \in G\right)$;

б) ф-ция $g(x,y)$ при каждом значении $y$ из промежутка $Y$ является невозр. ф-цией аргумента $x$ на полупрямой $[a, \infty)$; $g(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно отн-но переменной $y \in Y$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a$, такое, что $\forall x > A$ и $\forall y \in Y$: $|g(x,y)| < \varepsilon$); $g(x,y)$ имеет непр. в обл. $G$ частную производную $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$.

Тогда н/с интеграл рассматриваемого вида сходится равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$."

! 8) теорема о непрерывности н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ непр. в полуполосе $\{(x,y): x \geq a, c \leq y \leq d\}$, и пусть н/с интеграл $F(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегменте $[c,d]$.

Тогда ф-ция $F(y)$ непр. на сегменте $[c,d]$."

9) теорема об интегрировании по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ непр. в полуполосе $\{(x,y): x \geq a, c \leq y \leq d\}$, и пусть н/с интеграл $F(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегменте $[c,d]$. Тогда ф-ция $F(y)$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо рав-во: $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx\right]dy = \int\limits_a^{\infty}\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$."

10) теорема о дифференцировании по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть выполнены условия:

а) ф-ция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр-ны в полуполосе $\{(x,y): x \geq a, c \leq y \leq d\}$;

б) н/с интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся $\forall y \in [c,d]$;

в) н/с интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегменте $[c,d]$.

Тогда ф-ция $F(y)$ диф-ма на сегменте $[c,d]$ и справедливо рав-во: $F'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, т.е. $\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$."

3. Теоремы с док-вом:

1) Кр. Коши равномерной сх-ти н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть н/с интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся при каждом $y$ из промежутка $Y$. Для того, чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$, необх. и дост., чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \geq a$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$ выполняется нер-во: $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$."

Д-во: а) необх.: пусть н/с интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$. Тогда (согласно опр. равномерной сх-ти) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A$, такое, что если $A' > A$ и $A'' > A$, то $\forall y \in Y$ будут выполняться нер-ва:

$$\left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \left|\int\limits_{A''}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon/2.$$

Используя эти нер-ва, получаем:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx - \int\limits_{A''}^\infty f(x,y)dx\right| \leq \left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_{A''}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Итак, ~~$\forall A' > A, \forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$~~

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$: $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

б) дост.: пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists A$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$: $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$. Перейдём в этом нер-ве к пределу при $A'' \to \infty$. Получим, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in Y$: $\left|\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$, а это и означает, что н/с интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на промежутке $Y$."

2) Теорема о непр-ти по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ непр. в полуполосе $\{(x,y): x \geq a, c \leq y \leq d\}$, и пусть н/с интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегменте $[c,d]$.

Тогда ф-ция $F(y)$ непр. на сегменте $[c,d]$."

Д-во:

для каждого $n \in \mathbb{N}$ введём ф-цию: $F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$.

Для каждого $n$ ф-ция $F_n(y)$ явл. собственным интегралом, зависящим от параметра $y$. По теореме о непр-ти собств. интеграла, зависящего от параметра, ф-ция $F_n(y)$ непр. на сегменте $[c,d]$.

Я функц. посл-ть $\{F_n(y)\}$ и д-жем, что $\{F_n(y)\} \rightrightarrows F(y)$ на сегм. $[c,d]$. Отсюда (в силу теоремы о непр-ти предела функц. посл-ти) последует, что ф-ция $F(y)$ непр. на сегм. $[c,d]$.

По усл. н/с интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегм. $[c,d]$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c,d]$ выполняется нер-во: $\left| \int_{A'}^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon$.

Возьмём номер $N$ такой, что $a + N \geq A$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall y \in [c,d]$ будет выполнено нер-во: $\left| \int_{a+n}^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon$.

Поскольку $\int_{a+n}^\infty f(x,y)dx$ можно представить в виде $\int_{a+n}^\infty f(x,y)dx =$
$= \int_a^\infty f(x,y)dx - \int_a^{a+n} f(x,y)dx = F(y) - F_n(y)$, то последнее нер-во можно записать так: $|F_n(y) - F(y)| < \varepsilon \;\; \forall n > N$ и $\forall y \in [c,d]$.

Это и означает, что $\{F_n(y)\} \rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$. ■

3) Теорема об интегрировании по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть ф-ция $f(x,y)$ непр. в полуполосе $\{(x,y): x \geq a, c \leq y \leq d\}$, и пусть н/с интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегм. $[c,d]$.

Тогда ф-ция $F(y)$ интегрируема на сегм. $[c,d]$, и справедливо рав-во:

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \Big[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = \int_a^\infty\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx. \text{"} \quad (\star)$$

Д-во: по теореме о непр-ти по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра ф-ция $F(y)$ непр. на сегменте $[c,d]$ и, след-но, интегрируема на этом сегменте. Н/с интеграл в правой части рав-ва $(\star)$ – это предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx$ (по опр. н/с интеграла I рода), а т.к. в повторном интеграле, стоящем под знаком предела, можно изменить порядок интегрирования (в силу теоремы об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра), то для док-ва $(\star)$ нужно д-ть, что:

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\Big[\int_a^A f(x,y)\,dx\Big]dy = \int_c^d\Big[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy$$

или, что то же самое,

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\Big[\int_a^A f(x,y)\,dx - \int_a^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = 0, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\Big[\int_A^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy = 0. \quad (**)$$

Зададим произв. $\varepsilon>0$. Т.к. н/с интеграл $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегменте $[c,d]$, то $\exists A$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in[c,d]$ будет выполнено нер-во: $\Big|\int_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{d-c}$.

Используя это нер-во, получаем, что $\forall A'>A$:

$$\Big|\int_c^d\Big[\int_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\Big]dy\Big| \le \frac{\varepsilon}{d-c}\int_c^d dy = \varepsilon,$$ а это и означает справедливость рав-ва $(**)$. ■

4) Теорема о дифференцировании по параметру н/с интеграла I рода, зависящего от параметра:

„Пусть выполнены условия:

а) ф-ция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр-ны в полуполосе $\{(x,y): x\geq a,\ c\leq y\leq d\}$;

б) н/с интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сх-ся $\forall y\in[c,d]$;

в) н/с интеграл $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сх-ся равномерно по параметру $y$ на сегм. $[c,d]$.

Тогда ф-ция $F(y)$ диф-ма на сегм. $[c,d]$ и справедливо рав-во: $F'(y) = \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, т.е. $\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$."

Д-во: $\measuredangle$ $\{F_n(y)\}$, где $F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$.

В силу усл. б): $\{F_n(y)\} \to F(y)$ при $n\to\infty$ на сегм. $[c,d]$, а по теореме о диф-нии по параметру собств. интеграла, зависящего от параметра, каждая ф-ция $F_n(y)$ имеет непр. производную на сегменте $[c,d]$, причём: $F_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

В силу усл. в): $\{F_n'(y)\} \rightrightarrows \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ на сегменте $[c,d]$ (док-ся также, как в т. 2)).

Итак, для $\{F_n(y)\}$ выполнены все условия теоремы о переходе к пределу под знаком производной для функц. посл-ти. Согласно этой теореме, ф-ция $F(y)$ диф-ма на сегм. $[c,d]$ и имеет место рав-во $F'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n'(y) = \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

■

Тема 7. Кратные несобственные интегралы, зависящие от параметра.



1. Определения:

1) Пусть $G$ – замкн. кубируемая область, $g(P)$ – огр. ф-ция, интегрируемая в обл. $G$, $f(M,P)$ – непр. ф-ция своих аргументов при $P \neq M$, $f(M,P) \to \infty$ при $P \to M$. Пусть $M_0 \in G$. Обозначим ч/з $\Omega^{\delta}_{M_0}$ шар радиуса $\delta$ с центром $M_0$. Н/с интеграл $u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$ наз. сходящимся равномерно отн-но $M$ (по параметру $M$) в т. $M_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что шар $\Omega^{\delta}_{M_0} \subset G$ и $\forall$ кубируемой области $\omega \subset \Omega^{\delta}_{M_0}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega^{\delta}_{M_0}$ выполняется нер-во:

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)dV_P \right| < \varepsilon.$$

2 и 3. Осн. теоремы (формулировки и док-ва):

1) Теорема о достаточных условиях равномерной сх-ти в т. $M_0$ н/с интеграла $\iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$:

„Если $|f(M,P)| \le \frac{c}{r^{\alpha}_{MP}}$, где $c = const > 0$, $0 < \alpha < 3$, то н/с интеграл $u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$ сх-ся равномерно отн-но $M$ в любой внутренней точке $M_0$ области $G$."

Д-во: Пусть $M_0$ – внутр. точка области $G$. Согласно определению равномерной сх-ти отн-но $M$ в т. $M_0$ нужно д-ть, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \omega \subset \Omega^{\delta}_{M_0}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega^{\delta}_{M_0}$ выполняется нер-во:

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)dV_P \right| < \varepsilon. \quad (1)$$

Т.к. $|f(M,P)| \le \frac{c}{r^{\alpha}_{MP}}$ и т.к. $g(P)$ – огр. ф-ция ($|g(P)| \le A$, где $A$ – некоторое число), то: $\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)dV_P \right| \le cA \iiint\limits_{\omega} \frac{1}{r^{\alpha}_{MP}} dV_P$. (2)

Зафиксируем какую-нибудь точку $M$, лежащую внутри шара $\Omega^{\delta}_{M_0}$ (величину $\delta$ уточним ниже). Очевидно, что $\Omega^{\delta}_{M_0} \subset \Omega^{2\delta}_{M_0}$, и поэтому для любой области $\omega \in \Omega^{\delta}_{M_0}$ будет выполнено нер-во:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\, dV_P < \iiint\limits_{\Omega_M^{2\delta}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\, dV_P .$$

Интеграл, стоящий в правой части этого нер-ва, вычислим, перейдя к сферическим координатам с центром в точке $M$:

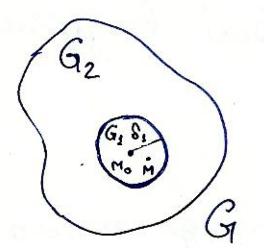
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta , \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} 0 \le r = r_{MP} \le 2\delta, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi . \end{array}\right\}$$ Тогда:

$$\iiint\limits_{\Omega_M^{2\delta}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\, dV_P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\delta} \frac{r^2 \sin\theta}{r^{\alpha}}\, dr = 4\pi \int_0^{2\delta} r^{2-\alpha}\, dr = \frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}.$$

Т.к. $\alpha < 3$, то $3-\alpha > 0$, и поэтому величину $\frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно малое $\delta$. След-но, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что правая часть в нер-ве (2) будет меньше $\varepsilon$, т.е. будет выполнено нер-во (1). ■

2) „Если н/с интеграл $u(M) = \iiint\limits_{G} f(M,P)\, g(P)\, dV_P$ сх-ся равномерно отн-но $M$ в т. $M_0$, то ф-ция $u(M)$ непр. в т. $M_0$."

Д-во: Согласно опр. непр-ти нужно д-ть, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что: $|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon$, если $\rho(M, M_0) < \delta$.




Разобьём обл. $G$ на две части: $G_1 = \Omega_{M_0}^{\delta_1}$ и $G_2 = G - G_1$ (выбор числа $\delta_1$ уточним ниже) и представим ф-цию $u(M)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M), \text{ где } u_1(M) = \iiint\limits_{G_1} f(M,P)\, g(P)\, dV_P ,$$

$$u_2(M) = \iiint\limits_{G_2} f(M,P)\, g(P)\, dV_P .$$

Отметим, что если т. $M$ лежит внутри области $G_1$, то т. $P$, пробегающая область $G_2$, не может совпасть с т. $M$, т.е. для точек $M$, лежащих внутри $G_1$, ф-ция $u_2(M)$ явл. собственным интегралом и потому непр. ф-цией.

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. н/с интеграл $u(M)$ сх-ся равномерно отн-но $M$ в т. $M_0$, то $\exists \delta_1$, такое, что $\forall M \in \Omega_{M_0}^{\delta_1}$ выполняется нер-во: $|u_1(M)| < \varepsilon/3$, в частности, $|u_1(M_0)| < \varepsilon/3$. (1)

Ф-ция $u_2(M)$, как уже было отмечено, непр. в т. $M_0$. Поэтому $\exists \delta_2 > 0$, такое, что: $|u_2(M) - u_2(M_0)| < \varepsilon/3$, если $\rho(M, M_0) < \delta_2$. (2)

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда, если $\rho(M, M_0) < \delta$, то $M \in G_1$ и, след-но, выполнены нер-ва (1), а также нер-во (2), используя которые, получаем:

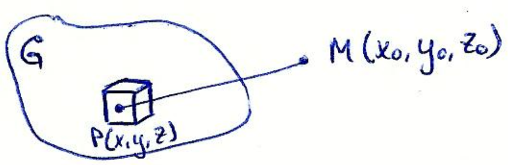
$$|u(M) - u(M_0)| = |(u_1(M) + u_2(M)) - (u_1(M_0) + u_2(M_0))| \leqslant |u_1(M)| + |u_1(M_0)| + |u_2(M) - u_2(M_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, $|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon$, если $\rho(M, M_0) < \delta$. ∎

---

<u>Ньютонов потенциал:</u>

$$u(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}} \, dV_P,$$ где $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — расстояние м/у точками $M(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$




Это потенциал гравитационного поля, создаваемого в т. $M(x_0, y_0, z_0)$ телом $G$ с плотностью массы $\rho(P)$ в точке $P(x, y, z)$.

Если т. $M$ лежит вне обл. $G$, то $r_{MP} \neq 0 \ \forall P \in G$, поэтому $f(M, P) = \frac{1}{r_{MP}}$ явл. непр. (и также любое число раз диф-мой) ф-цией, а $u(M)$ представляет собой собств. тройной интеграл, зависящий от параметров $x_0, y_0, z_0$ — координат точки $M$. Если при этом $\rho(P)$ — интегрируемая (например, непр.) ф-ция, то ф-ция $u(M)$ диф-ма любое число раз в т. $M$ и её частные производные любого порядка можно вычислять путём диф-ния под знаком интеграла. Например:

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(P) \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dV_P = \iiint\limits_G \rho(x, y, z) \cdot \frac{x - x_0}{r_{MP}^3} \, dx\,dy\,dz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(x, y, z) \cdot \frac{y - y_0}{r_{MP}^3} \, dx\,dy\,dz; \quad \frac{\partial u}{\partial z_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(x, y, z) \cdot \frac{z - z_0}{r_{MP}^3} \, dx\,dy\,dz.$$

# Тема 8. Ряды Фурье.



1. Определения:

1) Ф-ция $f(x)$ наз. кусочно-непрерывной на сегменте $[a,b]$, если она определена и непрерывна во всех точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы $1^{го}$ рода.

2) Кусочно-непрерывную на сегменте $[a,b]$ ф-цию $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой на этом сегменте, если её производная $f'(x)$ существует и непрерывна во всех точках сегмента $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, ~~(где $f'(x)$~~ а в этих точках (где $f'(x)$ не существует или разрывна) существуют левый и правый пределы $f'(x)$, т.е. $\exists f'(x-0)$ и $f'(x+0)$.

3) Последовательность ф-ций: $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots$ называется тригонометрической системой ф-ций на отрезке $[-l; l]$.

4) Если $\{\varphi_n(x)\}$ – тригонометрическая система ф-ций на отрезке $[-l; l]$, то ряд $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ называется тригонометрическим рядом Фурье ф-ции $f(x)$ по триг. системе ф-ций на отрезке $[-l; l]$.

5) Линейное пространство наз. бесконечномерным евклидовым пространством, если в нём имеется любое (сколь угодно большое) число линейно независимых элементов и если в нём введено скалярное произведение элементов.

6) Евклидово пр-во ~~всех~~ кусочно-непрерывных ф-ций $Q[a,b]$: это мн-во всех кусоч/непр. ф-ций на сегм. $[a,b]$, таких, что значение любой ф-ции $f(x)$ в т. $x_0$ разрыва равно $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Это мн-во становится лин. пр-вом, если ввести обычным образом операции сложения $2^х$ ф-ций и умножения ф-ции на вещественное число. Это лин. пр-во бесконечномерное ($\forall n$ ф-ции $1, x, x^2, \dots, x^n$ – лин. независимы). Скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ введём по ф-ле: $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

7) **Лин. пр-во** наз. **нормированным**, если каждому эл-ту $f$ этого пр-ва поставлено в соответствие неотрицательное число (оно наз. нормой эл-та $f$ и обозн. $\|f\|$) так, что при этом выполнены условия: а) $\|f\|>0$, если $f \neq \theta$ ($\theta$ - нул. эл-т пр-ва);
$\|f\|=0$, если $f=\theta$;
б) $\forall$ эл-та $f$ и $\forall$ числа $\alpha$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;
в) $\forall$ эл-тов $f$ и $g$: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (нер-во $\Delta$-ка или нер-во Минковского).

8) Посл-ть $\{\psi_n\} = \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ эл-тов бесконечномерного евклидова пр-ва наз. **ортогональной системой**, если её элементы попарно ортогональны (т.е. $(\psi_i, \psi_j) = 0$ при $i \neq j$).

Ортогональная система $\{\psi_n\}$ наз. **ортонормированной**, если норма каждого её элемента равна 1.

9) Пусть $\{\psi_n\}$ - ортогональная система в бесконечномерном евклидовом пр-ве, $f$ - какой-то элемент этого пр-ва. Составим ряд:
$f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + \ldots + f_n\psi_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n$, где $f_n$ - числа, определяемые рав-вом: $f_n = \dfrac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Этот ряд наз. **рядом Фурье эл-та $f$ по ортогональной системе $\{\psi_n\}$**, а числа $f_n$ наз. коэф-тами Фурье эл-та $f$.

10) Говорят, что **ряд Фурье** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n$ **сх-ся к эл-ту $f$** **по норме данного пр-ва**, если $\|S_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ - $n^a$ частичная сумма ряда Фурье.

11) **Ортогональная система** $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пр-ве наз-ся **замкнутой**, если любой элемент этого пр-ва можно приблизить с произвольной точностью по норме данного пр-ва с помощью конечной линейной комбинации эл-тов системы $\{\psi_n\}$, т.е. $\forall$ эл-та $f$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ лин. комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k$, такая, что:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\| < \varepsilon.$$

12) Ортогональная (в частности, ортонормированная) система $\{\varphi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пр-ве наз-ся полной, если единственным эл-том, ортогональным ко всем эл-там $\varphi_n$ данной системы, является нулевой эл-т.

2. Осн. теоремы и ф-лы (без док-ва):

1) ряд Фурье ф-ции $f(x)$ по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выражения для коэф-тов этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ где } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \ k=1,2,\dots; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx, \ k=1,2,\dots.$$

2) ряд Фурье ф-ции $f(x)$ по тригонометрической системе на отрезке $[-l, l]$ и выражения для коэф-тов этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ где } a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx, \ k=1,2,\dots; \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx, \ k=1,2,\dots.$$

3) тригонометрический ряд Фурье ф-ции $f(x)$ в комплексной форме на отрезке $[-l; l]$ и выражения для коэф-тов этого ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx.$$

4) теорема о поточечной сх-ти и сумме тригонометр. ряда Фурье:

„Пусть $f(x)$ – кусочно-гладкая ф-ция на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье ф-ции $f(x)$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, и для его суммы $S(x)$ справедливы рав-ва:

а) $\forall x \in (-\pi, \pi): S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$; в частности $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;

б) $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right)$."

5) ряд Фурье эл-та $f$ бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе эл-тов этого пр-ва и выражения для коэф-тов этого ряда: (34)

пусть $\{\psi_n\}$ – ортогональная система в бесконечномерном евклидовом пр-ве; $f$ – какой-то эл-т этого пр-ва.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n$ наз. рядом Фурье эл-та $f$ по ортогональной системе $\{\psi_n\}$, а числа $f_n = \dfrac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – коэф-ты этого ряда.

6) теорема об экстремальном св-ве частичных сумм ряда Фурье эл-та $f$ $\infty$-мерного евклидова пр-ва по ортонормированной системе элементов этого пр-ва:

„При фиксированном $n$ из всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ наименьшее отклонение от эл-та $f$ по норме данного евклидова пр-ва имеет $n$-я частичная сумма ряда Фурье этого элемента, т.е. сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k \psi_k$, где $f_k$ – коэф-ты Фурье эл-та $f$."

7) тождество Бесселя для эл-та $f$ $\infty$-мерного евклидова пр-ва:

„Если $\{\psi_n\}$ – ортонормированная система, то $\forall$ эл-та $f$ и $\forall n$ выполняется рав-во: $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$."

8) нер-во Бесселя для эл-та $f$ $\infty$-мерного евклидова пр-ва:

„Если $\{\psi_n\}$ – ортонормированная система, то $\forall$ эл-та $f$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ (где $f_k = (f, \psi_k)$ – коэф-ты Фурье эл-та $f$) сх-ся и его сумма удовлетворяет нер-ву: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2$."

9) нер-во Бесселя для коэф-тов ряда Фурье ф-ции $f(x)$ по тригонометрической системе ф-ций на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$ здесь $f(x)$ – кусочно-непр. ф-ция.

10) теорема о необх. и дост. условии замкнутости ортонормированной системы в $\infty$-мерном евклидовом пр-ве:

„Для того, чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необх. и дост., чтобы $\forall$ эл-та $f$ выполнялось рав-во:

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, где $f_k = (f, \psi_k)$ – коэф-ты Фурье эл-та $f$ по системе $\{\psi_n\}$. Это рав-во наз. рав-вом Парсеваля."

11) теорема о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в $\infty$-мерном евклидовом пр-ве:

„Любая замкнутая система является полной."

12) теорема о равномерной сх-ти тригонометрического ряда Фурье ф-ции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

„Пусть $f(x)$ – непр. кусочно-гладкая ф-ция на сегменте $[-\pi, \pi]$ и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье ф-ции $f(x)$ сх-ся равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi, \pi]$."

13) теорема об $m$-кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье ф-ции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

„Пусть выполнены условия: а) ф-ция $f(x)$ и её производные до $m$-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$;

б) производная $(m+1)$-го порядка $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на сегм. $[-\pi, \pi]$;

в) $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, ..., $f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье ф-ции $f(x)$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ можно $m$ раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$, т.е. $\forall k = 1, 2, \ldots, m$ и $\forall x \in [-\pi, \pi]$ справедливо рав-во:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n n^k \cos\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right) + b_n n^k \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)\right]."$$

14) теорема об аппроксимации непр. на сегменте $[-l; l]$ ф-ции тригонометрическим многочленом:

„Если ф-ция $f(x)$ опр. и непр. на сегменте $[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, то эту ф-цию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-l, l]$ тригонометрическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-l, l]$ выполняется нер-во: $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$."

15) теорема об аппроксимации непр. на сегменте $[a,b]$ ф-ции алгебраическим многочленом: 

„Если ф-ция $f(x)$ опр. и непр. на сегменте $[a,b]$, то её можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется нер-во: $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$."

16) теорема о замкнутости тригонометрической системы ф-ций:

„Тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, n=1,2,\dots\}$ явл. замкнутой в пр-ве $Q[-\pi,\pi]$."

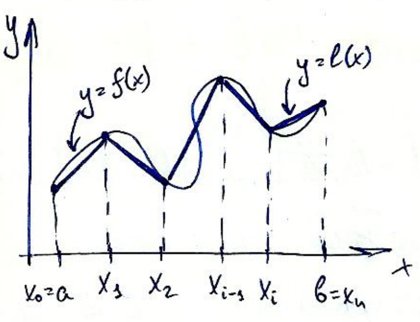
3. Теоремы с док-вом:

1) Теорема об аппроксимации непр. на сегменте ф-ции непрерывной кусочно-гладкой ф-цией:

„Пусть ф-ция $f(x)$ непр. на сегменте $[a,b]$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists$ непр. кусочно-гладкая ф-ция $l(x)$, такая, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется нер-во: $|f(x)-l(x)|<\varepsilon$ и, кроме того, $l(a)=f(a)$, $l(b)=f(b)$."

Д-во: Т.к. $f(x)$ равн/непр. на сегменте $[a,b]$, то (по т. Кантора) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что $\forall x',x''\in[a,b]\ (|x'-x''|<\delta): |f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$.

Разобьём сегмент $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1},x_i]$ $(i=\overline{1,n})$, такие, что $|x_i-x_{i-1}|<\delta$, и построим ломаную, состоящую из $n$ звеньев, причём $i$-тое звено ломаной соединяет точки $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ и $(x_i,f(x_i))$, $i=\overline{1,n}$.




Ур-ние ломаной будем записывать в виде $y=l(x)$, $a\le x\le b$. Тогда $l(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$. Возьмём любое $x\in[a,b]$. Пусть $x\in[x_{i-1},x_i]$. Т.к. $|f(x)-l(x)|=|f(x)-f(x_i)+l(x_i)-l(x)|\le$

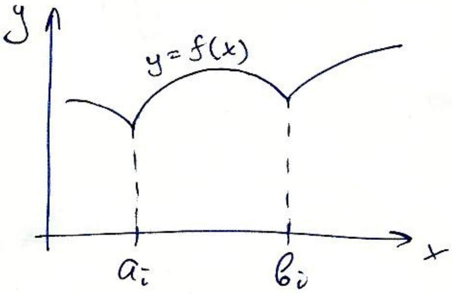
$\le|f(x)-f(x_i)|+|l(x_i)-l(x)|$, и т.к. $|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon/2$ (поскольку $|x-x_i|<\delta$), и $|l(x_i)-l(x)|\le|l(x_i)-l(x_{i-1})|=|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon/2$ (в силу нер-ва $|x_i-x_{i-1}|<\delta$), то $|f(x)-l(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, причём это нер-во выполняется $\forall x\in[a,b]$. Заметим также, что $l(a)=l(x_0)=f(x_0)=f(a)$ и $l(b)=f(b)$.

2) „Если $f(x)$ – кусочно-непрерывная ф-ция на сегменте $[a,b]$, то $I_1 = \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda \to \infty$ (1),

$I_2 = \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda\to\infty$ (2)."

Д-во: 1) д-жем сначала справедливость (1), если $f(x)$ – кусочно-гладкая ф-ция на сегм. $[a,b]$:

Разобъём сегмент $[a,b]$ на конечное число частичных сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна. Это можно сделать, поскольку производная кусочно-гладкой ф-ции $f(x)$ имеет не более, чем конечное число точек разрыва 1го рода. Пусть число таких частичных сегментов равно $n$, и пусть $[a_i, b_i]$ – один из этих сегментов. В граничных точках $a_i$ и $b_i$ производная $f'(x)$ равна соответствующим предельным значениям: $f'(a_i) = f'(a_i+0)$, $f'(b_i) = f'(b_i-0)$.




Применяя ф-лу интегрирования по частям, получаем: $\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda} f(x)\sin\lambda x\Big|_{a_i}^{b_i} - \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i} f'(x)\sin\lambda x\,dx$, откуда следует нер-во:

$$\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\big(|f(b_i)| + |f(a_i)|\big) + \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\,dx = \frac{M_i}{\lambda},$$

где $M_i = |f(b_i)| + |f(a_i)| + \int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\,dx$ – некоторое число. След-но:

$$|I_1(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Правая часть в полученном нер-ве стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. Поэтому и $I_1(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$.

2) пусть теперь $f(x)$ – кусочно-непр. ф-ция на сегм. $[a,b]$. Разобъём сегм. $[a,b]$ на конечное число частичных сегментов $[a_i, b_i]$ $(i=\overline{1,n})$, на каждом из которых ф-ция $f(x)$ непр. Пусть $[a_i,b_i]$ один из этих частичных сегментов.

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Согласно т. об аппроксимации непр. на сегменте ф-ции непр-ной кусочно-гладкой ф-цией, существует непр. кусочно-гладкая ф-ция $l(x)$, такая, что $\forall x\in[a_i, b_i]$ выполнено нер-во:

$|f(x)-\ell(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b_i-a_i)}$. Представим интеграл $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx$ (88)

в виде суммы $I_1+I_2$, где $I_1=\int\limits_{a_i}^{b_i}[f(x)-\ell(x)]\cos\lambda x\,dx$;

$I_2=\int\limits_{a_i}^{b_i}\ell(x)\cos\lambda x\,dx$. Для интеграла $I_1$ имеем оценку:

$$|I_1|\leq\left|\int\limits_{a_i}^{b_i}|f(x)-\ell(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}\quad \left(\text{т.к. } |f(x)-\ell(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b_i-a_i)}\right)\right.,$$ а поскольку $\ell(x)$ – непр. кусочно-гладкая ф-ция, то согласно доказанному в п. 1), $I_2\to 0$ при $\lambda\to\infty$. След-но, для заданного $\varepsilon>0$ $\exists$ $\lambda_0$, такое, что если $\lambda>\lambda_0$, то $|I_2|<\varepsilon/2$.

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists\lambda_0$, такое, что если $\lambda>\lambda_0$, то:

$$\left|\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right|\leq|I_1|+|I_2|<\varepsilon.$$

Это означает, что $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0$ при $\lambda\to\infty$, и поэтому:

$$\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty.$$

Аналогично д-ся справедливость (2). ■

3) Теорема о поточечной сх-ти тригонометрического ряда Фурье:

„Пусть $f(x)$ – кусочно-гладкая ф-ция на сегменте $[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье ф-ции $f(x)$ $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ сх-ся в каждой точке $x\in[-\pi,\pi]$, и для его суммы $S(x)$ справедливы рав-ва:

(1) $\forall x\in(-\pi,\pi)$: $S(x)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$; в частности, $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;

(2) $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$."

Д-во: продолжим ф-цию $f(x)$ на всю числовую прямую периодически с периодом $2\pi$ и $\measuredangle$ частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье в произвольной точке $x\in[-\pi,\pi]$:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Для док-ва справедливости рав-ва (1) нужно д-ть, что $S_n(x)\to\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ при $n\to\infty$. Используя ф-лы для коэффициентов Фурье:

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$ ; $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$, преобразуем выражение для $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)dt := \int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(t-x)f(t)dt, \text{ где}$$

$$\mathcal{D}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right] - \text{ядро Дирихле порядка } n. \quad (\bigstar)$$

Сделав в интеграле замену переменной $t = x+\xi$, получим:

$$S_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x}\mathcal{D}_n(\xi)f(x+\xi)d\xi.$$

Т.к. $\mathcal{D}_n(\xi)$ и $f(x+\xi)$ – периодические ф-ции аргумента $\xi$ с периодом $2\pi$, то, согласно утверждению о том, что интеграл от периодической ф-ции по любому сегменту длиной в период имеет одно и то же значение, пределы интегрирования можно заменить на $-\pi$ и $\pi$:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(\xi)f(x+\xi)d\xi.$$

Разобьём это выражение на сумму двух слагаемых:

$$S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x), \text{ где } S_n^-(x) = \int_{-\pi}^{0}\mathcal{D}_n(\xi)f(x+\xi)d\xi,$$

$$S_n^+(x) = \int_{0}^{\pi}\mathcal{D}_n(\xi)f(x+\xi)d\xi \qquad (3)$$

Вычислив интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(\xi)d\xi$ (он равен $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right]d\xi = 1$) и учитывая, что $\mathcal{D}_n(\xi)$ – чётная ф-ция, приходим к рав-вам:

$$\int_{-\pi}^{0}\mathcal{D}_n(\xi)d\xi = \int_{0}^{\pi}\mathcal{D}_n(\xi)d\xi = \frac{1}{2}.$$

Умножив второе из этих рав-в на $f(x+0)$ и вычтя из второго рав-ва (3), получим:

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \int_{0}^{\pi}\left[f(x+\xi) - f(x+0)\right]\mathcal{D}_n(\xi)d\xi \qquad (4)$$

Преобразуем выражение $(\bigstar)$ для $\mathcal{D}_n(\xi)$. С этой целью умножим рав-во $(\bigstar)$ на $\sin\frac{\xi}{2}$ и воспользуемся ф-лой $\sin\frac{\xi}{2}\cdot\cos k\xi = \frac{1}{2}\left[\sin(k\xi+\frac{\xi}{2}) - \sin(k\xi-\frac{\xi}{2})\right]$. Используя эту ф-лу, получаем:

$$\mathcal{D}_n(\xi)\sin\xi/2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\xi}{2} - \sin\frac{3\xi}{2}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sin(n+\tfrac{1}{2})\xi - \sin(n-\tfrac{1}{2})\xi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\sin(n+\tfrac{1}{2})\xi.$$

След-но, $D_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{\sin \xi/2}$ при $\xi \neq 0$, а при $\xi = 0$ из (*) имеем: $D_n(0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+n\right) = \lim\limits_{\xi\to 0} D_n(\xi)$.

Подставляя полученное выражение для $D_n(\xi)$ в (4), приходим к рав-вам: $S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x+\xi)-f(x+0)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{2\sin(\xi/2)}d\xi =$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\cdot\frac{\xi/2}{\sin \xi/2}\right\}\sin(n+\frac{1}{2})\xi\, d\xi := J(x,n)$.

Ф-ция, стоящая в фигурных скобках под знаком интеграла, является, очевидно, кусочно-гладкой на полусегменте $(0<\xi\leq\frac{\pi}{2})$, а поскольку предел $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ существует (и равен $f'(x+0)$) ~~в силу~~ и также существует $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{\xi/2}{\sin\xi/2} = 1$, то заключённая в фигурные скобки ф-ция является кусочно-непрерывной на сегменте $[0\leq\xi\leq\frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, согласно теореме 2) из Гл. 8 (п. 3 „Т-мы с док-вом"), $J(x,n)\to 0$ при $n\to\infty$ (роль параметра $\lambda$ играет здесь $n+\frac{1}{2}$). Итак,

$S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) \to 0$ при $n\to\infty$.

В точности также доказывается, что $S_n^-(x) - \frac{1}{2}f(x-0)\to 0$ при $n\to\infty$, а т.к. $S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x)$, то $S_n(x) - \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)) \to 0$ при $n\to\infty$, т.е. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. Тем самым доказана справедливость рав-ва (1).

В частности, если $x$ – точка непр-ти $f(x)$, то $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ и $S(x) = f(x)$.

Для точек $x=-\pi$ и $x=\pi$, учитывая периодическое продолжение ф-ции $f(x)$, имеем: $f(-\pi+0) = f(\pi+0)$, $f(-\pi-0) = f(\pi-0)$, поэтому

$S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi-0)+f(-\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right)$,

$S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0)+f(\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right)$. ■

4) Теорема об экстремальном св-ве частичных сумм ряда Фурье эл-та $f$ $\infty$-мерного евклидова пр-ва по ортонормированной системе эл-тов этого пр-ва (+ обоснование тождества и нер-ва Бесселя).

„При фиксированном $n$ из всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ наи- (№11)
меньшее отклонение от эл-та $f$ по норме данного евклидова пр-ва имеет $n$-я частичная сумма ряда Фурье этого эл-та, т.е. сумма $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$, где $f_k$ — коэф-ты Фурье эл-та $f$."

Д-во: Используя ортогональность системы $\{\psi_n\}$, получаем:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f, \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2(\psi_k,\psi_k) -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} c_k(f,\psi_k) + (f,f) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\psi_k\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(c_k - f_k)^2\|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2\|\psi_k\|^2 \quad (1)$$

Из вида правой части рав-ва следует, что норма $\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\|$ имеет наименьшее значение, если $c_k = f_k$, т.е. наименьшее отклонение от эл-та $f$ по норме данного пр-ва даёт $\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ — $n$-я частичная сумма ряда Фурье эл-та $f$. ■

а) из (1) следует при $c_k = f_k$ и $\|\psi_k\| = 1$, что если $\{\psi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — ортонормированная система, то $\forall$ эл-та $f$ и $\forall n$ выполняется рав-во:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$ — тождество Бесселя.

б) Если $\{\psi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — ортонормированная система, то $\forall$ эл-та $f$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ (где $f_k = (f, \psi_k)$ — коэф-т Фурье эл-та $f$) сх-ся и его сумма удовлетворяет нер-ву: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$. — нер-во Бесселя.

Д-во: из тождества Бесселя следует, что $\forall n$ выполняется нер-во $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$. Оно показывает, что посл-ть частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$, члены которого — неотриц. числа, ограничена числом $\|f\|^2$. Поэтому этот ряд сх-ся, и его сумма также не превосходит числа $\|f\|^2$. ■

5) Теорема о необх. и дост. условии замкнутости ортонормированной системы в $\infty$-мерном евклидовом пр-ве:

„Для того, чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необх. и дост., чтобы $\forall$ эл-та $f$ выполнялось рав-во:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, где $f_k = (f, \psi_k)$ – коэф-ты Фурье эл-та $f$ по системе $\{\psi_n\}$."

(рав-во Парсеваля)

Д-во: Воспользуемся тождеством Бесселя:

$\|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$.

а) необх.: пусть система $\{\psi_n\}$ – замкнутая. Тогда, согласно определению замкнутости, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что левая часть тождества будет меньше $\varepsilon$ при $n = N$. Отсюда следует, что правая часть тождества будет меньше $\varepsilon$ при $n \geqslant N$: $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим нер-во $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \varepsilon$, а т.к. левая часть этого нер-ва неотрицательна (в силу нер-ва Бесселя) и $\varepsilon$ – любое положительное число, то $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$, т.е. выполняется рав-во Парсеваля.

б) дост.: пусть рав-во Парсеваля выполнено, т.е. сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ равна $\|f\|^2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n$, такое, что $n$-я частичная сумма ряда будет отличаться от суммы ряда меньше, чем на $\varepsilon$: $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$.

След-но, и левая часть тождества Бесселя меньше $\varepsilon$, а это и означает, что система $\{\psi_n\}$ – замкнутая. ■

6) „Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ – замкнутая, то $\forall$ эл-та $f$ его ряд Фурье по системе $\{\psi_n\}$ сх-ся к этому эл-ту по норме данного пр-ва, т.е. $\|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\| \to 0$ при $n \to \infty$. И такое разложение единственно."

Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то $\forall$ эл-та $f$ выполняется рав-во Парсеваля: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, а это означает, что $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу тождества Бесселя следует, что $\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Д-жем единственность такого разложения:

П: какой-то эл-т $f$ имеет 2 разложения в ряд по замкнутой (ортонормированной) системе $\{\psi_n\}$: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k$ (ряд Фурье) и $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'\psi_k$ (второе разложение), причём оба ряда сх-ся к эл-ту $f$ по норме пр-ва. Тогда, согласно определению сх-ти ряда, $\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\| \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|\sum_{k=1}^{n} f_k'\psi_k - f\| \to 0$ при $n \to \infty$, а т.к.:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - \sum_{k=1}^{n} f_k'\psi_k\Big\| \leq \Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k'\psi_k - f\Big\|, \text{ то}$$

(нер-во $\Delta$-ка для нормы)

$\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - \sum_{k=1}^{n} f_k'\psi_k\| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\|\sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k')\psi_k\| = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k')^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, очевидно, следует, что $\forall k$: $(f_k - f_k')^2 = 0$, т.е. $f_k = f_k'$, что и доказывает единственность разложения. ∎

7) Теорема о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в $\infty$-мерном евклидовом пр-ве:

„Любая замкнутая система явл. полной".

Д-во: Пусть $\{\psi_n\}$ — замкн. система и пусть эл-т $f$ ортогонален всем эл-там системы $\{\psi_n\}$. Согласно опр. полной системы требуется д-ть, что $f$ — нулевой эл-т.

Т.к. $(f, \psi_n) = 0$ $\forall n$, то все коэф-ты Фурье эл-та $f$, т.е. числа $f_n = \frac{(f,\psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$ равны нулю. Отсюда в силу рав-ва Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2$ следует, что $\|f\| = 0$, поэтому (согласно св-ву нормы) $f$ — нулевой эл-т. ∎

8) Теорема о равномерной сх-ти триг. ряда Фурье ф-ции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

„Пусть $f(x)$ – непр. кусочно-гладкая ф-ция на сегменте $[-\pi, \pi]$ и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда триг. ряд Фурье ф-ции $f(x)$ сх-ся равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi, \pi]$."

Д-во: Согласно пр. Вейерштрасса для док-ва равномерной сх-ти на сегменте $[-\pi, \pi]$ ряда Фурье ф-ции $f(x)$ $\underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx}_{(1)}$ достаточно д-ть сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ (2)

Одновременно отсюда последует, что ряд (1) сх-ся абсолютно.

Обозначим ч/з $\alpha_n$ и $\beta_n$ коэф-ты Фурье ф-ции $f'(x)$, которая в силу условия теоремы явл. кусочно-непр. на сегменте $[-\pi, \pi]$:

$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx$, $\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$.

Непр. кусочно-гладкая ф-ция $f(x)$ явл. первообразной для кусочно-непр. ф-ции $f'(x)$. Учитывая это и применяя ф-лу интегрирования по частям, получаем: $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Первое слагаемое в правой части рав-ва равно нулю, т.к. $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$, а второе слагаемое равно $n b_n$, где $b_n$ – коэф-т Фурье ф-ции $f(x)$. Итак, $\alpha_n = n b_n$, откуда следует, что $|b_n| = \frac{1}{n} |\alpha_n|$. Аналогично получается рав-во $|a_n| = \frac{1}{n} |\beta_n|$, где $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$. Таким образом, ряд (2) можно записать в виде: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\alpha_n| + |\beta_n|)$ (3)

Воспользуемся известным нер-вом $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, в силу которого $\frac{1}{n} |\alpha_n| \le \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + \alpha_n^2 \right)$, $\frac{1}{n} |\beta_n| \le \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + \beta_n^2 \right)$ и, след-но:

$$\frac{1}{n} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сх-ся и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ тоже сх-ся (поскольку его члены — квадраты коэф-тов Фурье кусочно-непр. ф-ции $f'(x)$), то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right]$ сх-ся, а поэтому, 

согласно признаку сравнения, сх-ся ряд (3), т.е. сх-ся ряд (2), что и требовалось доказать. ■

9) Теорема об $m$-кратном почленном дифференцировании триг. ряда Фурье ф-ции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$:

„Пусть выполнены условия:

а) ф-ция $f(x)$ и её производные до $m$-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi,\pi]$;

б) производная $(m+1)$-го порядка $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$;

в) $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, ..., $f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)$.

Тогда триг. ряд Фурье ф-ции $f(x)$ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ можно $m$ раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall k=\overline{1,m}$ и $\forall x\in[-\pi,\pi]$ справедливо рав-во:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n n^k\cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n n^k\sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)\right].\text{“}$$

Д-во: Обозначим ч/з $\alpha_n$ и $\beta_n$ коэф-ты Фурье кусочно-непрерывной ф-ции $f^{(m+1)}(x)$: $\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx$, $\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx$.

Интегрируя по частям $(m+1)$ раз и учитывая условие в) теоремы, получаем рав-во (аналогично теореме 8)): $|\alpha_n|+|\beta_n|=n^{m+1}(|a_n|+|b_n|)$, где $a_n$ и $b_n$ – коэф-ты ряда Фурье ф-ции $f(x)$. Из этого рав-ва следует, что: $n^m(|a_n|+|b_n|)=\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$, и т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$ сх-ся (это д-ется так же, как в теореме 8)), то сх-ся ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}n^m(|a_n|+|b_n|)$.

Обратимся теперь к ряду Фурье ф-ции $f(x)$, т.е. ряду $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Если этот ряд продифференцировать почленно $k$ раз, то получится ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^k \left(a_n \cos\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

$\forall k = \overline{0,m}$ этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n^m (|a_n| + |b_n|)$, поэтому $\forall k = \overline{0,m}$ он сх-ся равномерно на сегм. $[-\pi,\pi]$ (по пр. Вейерштрасса).

Отсюда следует, согласно теореме о почленном диф-нии функционального ряда, что ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ можно диф-ть почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ $m$ раз.

■

10) Теорема об аппроксимации непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ ф-ции тригонометрическим многочленом:

„Если ф-ция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то эту ф-цию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ триг. многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ триг. многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-\pi,\pi]$ выполняется нер-во: $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$."

Д-во: Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Согласно теореме об аппроксимации непрерывной на сегменте ф-ции непрерывной кусочно-гладкой ф-цией, существует непр. кус.-гладкая ф-ция $l(x)$, такая, что: $\forall x \in [-\pi,\pi]: |f(x) - l(x)| < \varepsilon/2$ (1), и, кроме того, $l(-\pi) = l(\pi)$.

По т. о равномерной сх-ти ряда Фурье, ряд Фурье $l(x)$ сх-ся к этой ф-ции равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$. Поэтому для заданного $\varepsilon$ $\exists$ номер $n$, такой, что: $\forall x \in [-\pi,\pi]: |l(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2$ (2),

где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье ф-ции $l(x)$ и, тем самым, $S_n(x)$ – тригонометрический многочлен ($T(x)$).

Из нер-в (1) и (2) следует, что:

$$\forall x \in [-\pi,\pi] : |f(x) - \underset{T(x)}{\underset{\shortparallel}{S_n(x)}}| < \varepsilon.$$

■

11) Теорема об аппроксимации непр. на сегменте $[a, b]$ ф-ции алгебраическим многочленом:

„Если ф-ция $f(x)$ определена и непр. на сегм. $[a, b]$, то её можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ алг. многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [a, b]$ выполняется нер-во: $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$."

Д-во: 1) Х сначала произв. ф-цию $f(x)$, непр. на сегм. $[-l, l]$ и уд. условию $f(-l) = f(l)$, где $l > 0$ – какое-то число. Эту ф-цию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегм. $[-l, l]$ триг. многочленом вида:

$T(x) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(A_k \cos \frac{\pi k x}{l} + B_k \sin \frac{\pi k x}{l}\right)$, т.е. $\forall x \in [-l, l]$ $\exists T(x)$, такой, что: $|f(x) - T(x)| < \varepsilon/2$ (1).

Разложим каждую из ф-ций $A_k \cos \frac{\pi k x}{l}$ и $B_k \sin \frac{\pi k x}{l}$ по ф-ле Маклорена и возьмём в разложении каждой ф-ции многочлен Тейлора такой степени, чтобы остаточный член ф-лы Тейлора был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$ на всём сегм. $[-l, l]$.

Объединяя все эти многочлены Тейлора и прибавляя слагаемое $A_0$, входящее в $T(x)$, получим многочлен $P_n(x)$, такой, что:

$\forall x \in [-l, l]$: $|T(x) - P_n(x)| < 2m \cdot \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Из (1) и (2) следует, что: $\forall x \in [-l, l]: |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

2) пусть теперь $f(x)$ опр. и непр. на сегм. $[a, b]$. Возьмём такое число $l$, что $[a, b] \subset [-l, l]$, и продолжим ф-цию $f(x)$ на сегмент $[-l, l]$ непрерывным образом. Получим ф-цию $F(x)$, непр. на сегм. $[-l, l]$ и совпадающую с $f(x)$ на сегм. $[a, b]$. Очевидно, ф-цию $F(x)$ можно выбрать так, что $F(-l) = F(l)$.

Согласно доказанному в п. 1), $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ алг. многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [-l, l]$ выполняется нер-во $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. На сегм. $[a, b]$ это нер-во принимает вид $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

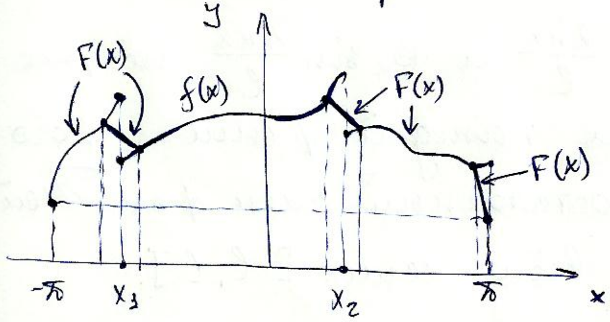
12) Теорема о замкнутости триг. системы ф-ций в пр-ве $Q[-\pi,\pi]$:

„Триг. система $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}$ явл. замкнутой в пр-ве $Q[-\pi,\pi]$."

Д-во: Согласно опр. замкнутости системы нужно д-ть, что любую кус.-непр. на сегм. $[-\pi,\pi]$ ф-цию $f(x)$ можно приблизить с произв. точностью по норме пр-ва $Q[-\pi,\pi]$ с помощью конечной лин. комбинации ф-ций триг. системы, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ триг. многочлен $T(x)$, такой, что:

$$\|f(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx} < \varepsilon.$$

Прежде всего заметим, что для любой кус.-непр. на сегм. $[-\pi,\pi]$ ф-ции $f(x)$ можно построить такую непр. ф-цию $F(x)$, которая совпадает с $f(x)$ всюду, кроме малых окрестностей точек разрыва $f(x)$ и, возможно, малой окр-ти точки $x=\pi$, а в этих окр-тях ф-ция $F(x)$ явл. лин. ф-цией и, кроме того, она уд. условию $F(-\pi) = F(\pi)$ (см. рис.).




В малых окр-тях точек $x_1$ и $x_2$ (это точки разрыва $f(x)$) и также в малой полуокр-ти точки $x=\pi$ ф-ция $f(x)$ заменена на линейную ф-цию $F(x)$.

Очевидно, что $\forall \varepsilon > 0$ указанные окр-ти точек разрыва ф-ции $f(x)$ и точки $x=\pi$ можно выбрать столь малыми, что будет выполнено нер-во:

$$\|f(x)-F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx} < \varepsilon/2 \quad (1).$$

Согласно теореме об аппроксимации непр. на сегм. ф-ции триг. многочленом, для построенной непр. ф-ции $F(x)$ по заданному $\varepsilon$ найдётся триг. многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-\pi,\pi]$ будет выполнено нер-во $|F(x)-T(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, и поэтому $\|F(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-T(x)]^2dx} < \varepsilon/2 \quad (2)$

Из (1) и (2) следует, что:

$$\|f(x)-T(x)\| \leqslant \|f(x)-F(x)\| + \|F(x)-T(x)\| < \varepsilon.$$

■

# Тема 9. Интеграл Фурье.

## 1. Осн. теоремы и формулы (без док-ва):

1) Если ф-ция $f(x)$ опр. на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой (т.е. н/с интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сх-ся), то для любого X ф-ция $f(x)$ представима в виде интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

2) Интеграл Фурье ф-ции $f(x)$ в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt.$$

3) Преобразование Фурье ф-ции $f(x)$:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt,$$ где $\hat{f}(\lambda)$ – образ Фурье ф-ции $f(x)$.

переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\lambda)$ наз. преобразованием Фурье ф-ции $f(x)$.

4) Синус-преобразование Фурье:

если $f(x)$ – нечётная ф-ция, то $\hat{f}_S(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt.$

5) Косинус-преобразование Фурье:

если $f(x)$ – чётная ф-ция, то $\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt.$

6) Обратное преобразование Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

7) Обратное синус-преобразование Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\hat{f}_S(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda.$$

8) Обратное косинус-преобразование Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda.$$

2. Теоремы с док-вом:



1) Теорема о представлении ф-ции в виде интеграла Фурье:

„Если ф-ция $f(x)$ опр. на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой (т.е. н/с интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сх-ся), то для любого $x$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] \quad (1)$$

в частности, в точках непр-ти $f(x)$ правая часть рав-ва (1) равна $f(x)$."

Д-во: н/с интеграл в левой части (1) – это (по опр.) предел: $\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^A\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda$.

Введём обозначение, $S_A(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^A\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda$.

Нужно д-ть, что $\lim\limits_{A\to\infty}S_A(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]$.

Внутренний интеграл в выражении для $S_A(x)$ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$ (2) явл. н/с интегралом, зависящим от параметра $\lambda\in[0,A]$.
Т.к. $|f(t)\cos\lambda(t-x)|\leq|f(t)|$ и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ сх-ся (по усл. теоремы), то по пр. Вейерштрасса н/с интеграл (2) сх-ся равномерно по параметру $\lambda$ на сегменте $[0,A]$. Отсюда в силу теоремы об интегрировании н/с интеграла по параметру следует, что в выражении для $S_A(x)$ можно изменить порядок интегрирования, т.е.:

$$S_A(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\int_0^A\cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right]dt.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется:

$$\int_0^A\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\begin{cases}\dfrac{\sin A(t-x)}{t-x}, & \text{если } t\neq x,\\ A, & \text{если } t=x.\end{cases}$$

Для упрощения записи будем записывать эту ф-цию в виде $\frac{\sin A(t-x)}{t-x}$, подразумевая, что при $t=x$ она равна $A$.

Сделав в н/с интеграле замену переменной $t = x+\xi$, приходим к рав-ву:

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi = S_A^-(x) + S_A^+(x), \text{ где}$$

$$S_A^-(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi \ ; \ S_A^+(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi .$$

Воспользуемся рав-вом $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}$ при $A>0$. Умножив его на $\frac{1}{\pi}f(x+0)$ и внося $f(x+0)$ под знак интеграла, получим:

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x+0)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi .$$

Вычитая это рав-во из рав-ва, определяющего $S_A^+(x)$, приходим к рав-ву: $S_A^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin A\xi\, d\xi := \mathcal{J}(x,A)$.

Д-тем, что $\mathcal{J}(x,A)\to 0$ при $A\to+\infty$. В нашем случае ф-ция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ кусочно-непрерывна (в силу того, что ф-ция $f(x)$ — кусочно-гладкая по условию теоремы). Представим $\mathcal{J}(x,A)$ в виде суммы трёх слагаемых: $\mathcal{J}(x,A) = \mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3$, где

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{B}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin A\xi\, d\xi \ ; \ \mathcal{J}_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi \ ; \ \mathcal{J}_3 = -\frac{1}{\pi}f(x+0)\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi,$$

здесь $B>0$ — число, которое выберем ниже.

Зададим произв. $\varepsilon>0$ и возьмём число $B$ столь большим, чтобы выполнялось нер-во: $|\mathcal{J}_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty}|f(x+\xi)|\cdot\left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right|d\xi < \varepsilon/3$.

Такой выбор числа $B$ возможен, поскольку $\left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right| \le 1$, если $\xi \ge B \ge 1$, и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(x+\xi)|d\xi$ сх-ся по усл. теоремы.

Зафиксируем выбранное значение числа $B$.

В силу утв. о том, что „если $f(x)$ – кус.-непр. ф-ция на сегм. $[a, b]$, то $J_I = \int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda\to\infty$, $J_{II} = \int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda\to\infty$", для нашего значения $B$ интеграл $J_1 \to 0$ при $A\to+\infty$, поэтому $\exists A_1$, такое, что: $|J_1| < \varepsilon/3$ при $A > A_1$. Обратимся к интегралу $J_3$. Сделав замену переменной $\xi = \frac{t}{A}$, получим:

$$|J_3| \le \frac{1}{\pi}|f(x+0)|\cdot\left|\int\limits_{AB}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right|.$$

Т.к. интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ сх-ся, то $\exists A_2$, такое, что $|J_3| < \varepsilon/3$ при $A > A_2$.

Итак, если $A > \max(A_1, A_2)$, то $|J(x,A)| \le |J_1| + |J_2| + |J_3| < \varepsilon$, а это и означает, что $J(x,A)\to 0$ при $A\to+\infty$.

Отсюда следует, что $S_A^+(x) \to \frac{1}{2}f(x+0)$ при $A\to+\infty$. Аналогично доказывается, что $S_A^-(x) \to \frac{1}{2}f(x-0)$ при $A\to+\infty$. Таким образом:

$$S_A(x) = S_A^-(x) + S_A^+(x) \to \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] \text{ при } A\to+\infty.$$

■

# Тема 10. Обобщённые функции.

## 1. Определения:

1) Мн-вом основных ф-ций (мн-во $\mathcal{D}$) наз. мн-во всех финитных ($\forall \varphi(x)\ \exists$ интервал, вне которого $\varphi(x)=0$) бесконечно дифференцируемых ф-ций $\varphi(x)$ (имеют производные всех порядков на всей числовой прямой, т.е. $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$).

Обозначим ч/з $X_\varphi$ мн-во всех точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а ч/з $\overline{X_\varphi}$ – замыкание мн-ва $X_\varphi$, т.е. $\overline{X_\varphi}$ явл. объединением мн-ва $X_\varphi$ и всех его предельных точек. Мн-во $\overline{X_\varphi}$ наз. носителем ф-ции $\varphi(x)$ и обозначается $\operatorname{supp}\varphi(x)$.

2) Б.г., что посл-ть $\{\varphi_n(x)\}$ основных ф-ций сх-ся к ф-ции $\varphi(x)$ из мн-ва $\mathcal{D}$, если: а) $\exists$ интервал $(-a, a)$, такой, что $\forall n$:

$\operatorname{supp}\varphi_n(x) \in (-a, a)$;

б) $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ посл-ть $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сх-ся равномерно к $\varphi^{(k)}(x)$ на всей прямой $\mathbb{R}$ (это равносильно равн. сх-ти на интервале $(-a, a)$).

3) Мн-во $\mathcal{D}$ основных ф-ций с введённым понятием сходимости наз. пространством основных ф-ций (также обозначим $\mathcal{D}$). Отметим, что $\mathcal{D}$ – лин. пр-во с обычными операциями сложения 2х ф-ций и умножения ф-ции на число (при этом $\mathcal{D}$ не явл. метрическим пр-вом и введённая сх-ть – это сх-ть не в метрике пр-ва).

4) Б.г., что на пр-ве $\mathcal{D}$ задан функционал, если указано правило, по которому каждой ф-ции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ ставится в соответствие определённое число $u(\varphi)$. Функционал также будем обозначать $u(\varphi)$.

Функционал $u(\varphi)$ наз. линейным, если $\forall \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{D}$ и $\forall \alpha, \beta$ выполняется рав-во: $u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$.

5) Функционал $f$, определённый на пр-ве $\mathcal{D}$ основных ф-ций, наз. непрерывным, если $\forall$ посл-ти $\{\varphi_n(x)\}$ основных ф-ций, сходящейся в $\mathcal{D}$ к ф-ции $\varphi(x)$, числовая посл-ть $(f, \varphi_n)$ сх-ся к $(f, \varphi)$.

6) Обобщённой ф-цией наз. любой линейный непрерывный функционал, определённый на пр-ве основных ф-ций. 2

7) Суммой 2ˣ обобщённых ф-ций $f$ и $g$ назовём функционал (обозначим его $f+g$), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Произведением обобщённой ф-ции $f$ на число $\alpha$ назовём функционал (обозначим его $\alpha f$), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (\alpha f, \varphi) = \alpha (f, \varphi).$$

8) Б.г., что посл-ть $\{f_n\}$ обобщённых ф-ций сх-ся к обобщённой ф-ции $f$, если $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$ числовая посл-ть $(f_n, \varphi)$ сх-ся к $(f, \varphi)$.

9) Лин. пр-во обобщённых ф-ций с введённым понятием сх-ти обозначается $\mathcal{D}'$ и наз. пр-вом обобщённых ф-ций.

10) Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая ф-ция. Она порождает линейный непр. функционал $\hat{f}$ на пр-ве $\mathcal{D}$, т.е. порождает обобщённую ф-цию, определённую ф-лой $(\hat{f}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$. Такая обобщённая ф-ция наз. регулярной.

Обобщённые ф-ции, не являющиеся регулярными, называются сингулярными.

11) Примером сингулярной обобщённой ф-ции явл. $\delta$-ф-ция, которая определяется след. образом: $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

12) Произведением обобщённой ф-ции $f$ на бесконечно дифф-мую ф-цию $a(x)$ наз. обобщённая ф-ция (обозначим её $af$), действующая по правилу: $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (af, \varphi) = (f, a\varphi)$.

13) Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая ф-ция, $a$ и $b$ – произв. числа $(a \neq 0)$. Расс. ф-цию $f(ax+b)$ и порождаемую ей регулярную обобщённую ф-цию, которую обозначим $\hat{f}(ax+b)$.

$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем: $(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx = \{t = ax+b\} = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

Значит, $\forall$ регулярной обобщённой ф-ции $\hat{f}(x)$ и $\forall a \neq 0$ и $b$ справедливо:

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$ – линейная замена переменных в обобщённых ф-циях.

14) Производной обобщённой ф-ции $f$ наз. обобщённая ф-ция $\mathcal{D}f$, действующая по правилу:

$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (\mathcal{D}f, \varphi) = -(f, \mathcal{D}\varphi)$.

15) Производной $k$-го порядка обобщённой ф-ции $f$ наз. обобщённая ф-ция $\mathcal{D}^k f$, действующая по правилу:

$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (\mathcal{D}^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \mathcal{D}^k \varphi)$, $k = 1, 2, \ldots$.

16) Объединение всех интервалов, на которых обобщённая ф-ция $f$ равна нулю, наз. нулевым мн-вом обобщённой ф-ции $f$. Обозначим его $O_f$. Дополнение $O_f$ до всей числовой прямой наз. носителем обобщённой ф-ции $f$ ($\operatorname{supp} f$). Очевидно, $\operatorname{supp} f = \mathbb{R} - O_f$.

2. Осн. теоремы и формулы:

1) „$\delta$-ф-ция явл. непрерывным линейным функционалом."

Д-во: д-жем сначала, что $\delta$-ф-ция — лин. функционал. В самом деле, $\forall \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{D}$ и $\forall \alpha, \beta$ имеем (согласно опр. $\delta$-ф-ции): $(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha(\delta, \varphi_1) + \beta(\delta, \varphi_2)$, а это и означает, что $\delta$-ф-ция — лин. функционал.

Д-жем теперь, что $\delta$-ф-ция — непр. функционал. Для этого, согласно определению непр. функционала, нужно д-ть, что $\forall$ посл-ти $\{\varphi_n(x)\}$ основных ф-ций, сходящейся в $\mathcal{D}$ к ф-ции $\varphi(x)$, соответствующая числовая посл-ть $(\delta, \varphi_n)$ сх-ся к $(\delta, \varphi)$. Но $(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0)$, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ (по опр. $\delta$-ф-ции), поэтому нужно д-ть, что если $\{\varphi_n(x)\} \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}$, то $\{\varphi_n(0)\} \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$.

Из того, что $\{\varphi_n(x)\} \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}$ по опр. сх-ти в пр-ве $\mathcal{D}$ следует, что $\{\varphi_n(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на всей числовой прямой, в частности, $\{\varphi_n(0)\} \to \varphi(0)$. ■

2) „$\delta$-ф-ция явл. сингулярной обобщённой ф-цией."

Д-во: $\boxed{\Pi}$: $\delta$-ф-ция явл. регулярной обобщённой ф-цией. Тогда $\exists$ локально интегрируемая ф-ция $f(x)$, такая, что $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$: $(\delta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$.

Возьмём в кач-ве $\varphi(x)$ „шапочку" $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$

Для неё выполнены соотношения $0 \leq \omega_\varepsilon(x) \leq e^{-1}$, $\omega_\varepsilon(0) = e^{-1}$.
По опр. $\delta$-ф-ции $(\delta, \omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}$, а согласно нашему предположению: $(\delta, \omega_\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ должно выполняться рав-во:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx = e^{-1} \quad (1)$$

Т.к. ф-ция $f(x)$ локально интегрируема, то она ограничена на любом отрезке, поэтому: $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Но это противоречит рав-ву (1) и, след-но, наше предположение неверно, а, значит, $\delta$-ф-ция явл. сингулярной обобщённой ф-цией.

3) „$\delta$-ф-цию можно представить как предел в пр-ве $\mathcal{D}'$ посл-ти регулярных обобщённых ф-ций."

Д-во: $\forall \varepsilon > 0$ введём ф-цию: $\delta_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \cdot \omega_\varepsilon(x)$, где $\omega_\varepsilon(x)$ — „шапочка", а $C_\varepsilon$ — такое число, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = C_\varepsilon \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}dx = 1$. (1)

Сделав замену переменной $x = \varepsilon t$, получим:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}dx = \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}dt.$$

Определённый интеграл в правой части рав-ва равен некоторому положительному числу, которое обозначим буквой $k$ и положим $m = 1/k$. Отметим, что число $m$ не зависит от $\varepsilon$.
Из второго рав-ва в (1) получаем: $C_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon}$ и, след-но,

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{m}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Регулярную обобщённую ф-цию, порождаемую ф-цией $\delta_\varepsilon(x)$, обозначим $\hat{\delta}_\varepsilon$ и д-жем, что семейство обобщённых ф-ций $\hat{\delta}_\varepsilon(x)$, зависящих от непрерывно изменяющегося положительного параметра $\varepsilon$, стремится к $\delta$-ф-ции при $\varepsilon \to +0$, т.е.

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to +0 \quad (3)$$

Из (3), очевидно, следует утверждение теоремы.

Для д-ва (3) нужно д-ть, что $\forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что:

$|(\hat{\delta_\varepsilon}, \varphi) - (\delta, \varphi)| < \gamma$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. (4)

Т.к. $\varphi(x)$ - непр. ф-ция во всех точках и, в частности, в точке $x=0$, то $\forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что: $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \gamma$ при $|x| < \varepsilon_0$.

След-но, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то, учитывая рав-ва (1) и (2), получаем: $|(\hat{\delta_\varepsilon}, \varphi) - (\delta, \varphi)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_\varepsilon(x)dx\right| \leq$

$\leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx < \gamma\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_\varepsilon(x)dx = \gamma$.

■

4) Ф-ла, определяющая произведение обобщённой ф-ции и бесконечно диф-мой ф-ции:

Пусть $f(x)$ - локально интегрируемая ф-ция, $\hat{f}$ - порождаемая ф-цией $f(x)$ регулярная обобщённая ф-ция, $a(x)$ - бесконечно диф-мая ф-ция на всей прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$). Тогда $a(x)f(x)$ - локально интегрируемая ф-ция и $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$ ф-ция $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Поэтому для обобщённой ф-ции $\hat{af}$, порождаемой ф-цией $a(x)f(x)$, получаем рав-во: $(\hat{af}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(x)f(x)\varphi(x)dx = (\hat{f}, a\varphi)$.

Итак, для любой регулярной обобщённой ф-ции $\hat{f}$ и для любой ф-ции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливо рав-во:

$(\hat{af}, \varphi) = (\hat{f}, a\varphi)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}$.

■

5) Ф-ла, определяющая лин. замену переменных в обобщённых ф-циях:

Пусть $f(x)$ - локально интегрируемая ф-ция, $a$ и $b$ - произв. числа, $a \neq 0$. Х ф-цию $f(ax+b)$ и порождаемую ею регулярную обобщённую ф-цию, которую обозначим $\hat{f}(ax+b)$. Для любой ф-ции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем рав-во: $(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)dx$ (1)

Сделаем в интеграле замену переменной $t = ax+b$. Тогда $dx = \frac{1}{a}dt$, $x = \frac{t-b}{a}$ и мы приходим к рав-вам:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$.

Из (1) и (2) следует, что для любой регулярной обобщённой ф-ции $\hat{f}(x)$ и любых чисел $a \neq 0$ и $b$ справедливо: $(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$.

■

6) Ф-ла, определяющая производную обобщённой ф-ции: $\textcircled{6}$

Пусть $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Операцию диф-ния будем обозначать $\mathcal{D}$. Ф-ция $\mathcal{D}f(x)$ порождает регулярную обобщённую ф-цию $\widehat{\mathcal{D}f}$, действие которой на произвольную ф-цию $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ выражается рав-вом: $(\widehat{\mathcal{D}f}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$.

Учитывая, что первое слагаемое в правой части рав-ва равно нулю, поскольку $\varphi(x)$ — финитная ф-ция, а второе слагаемое можно записать в виде $-(\hat{f}, \mathcal{D}\varphi)$, приходим к рав-ву:

$$(\widehat{\mathcal{D}f}, \varphi) = -(\hat{f}, \mathcal{D}\varphi).$$

■

7) „Любая обобщённая ф-ция имеет производные всех порядков."

Д-во:

путём $k$-кратного применения ф-лы интегрирования по частям к рав-ву: $(\widehat{\mathcal{D}f}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$, получим:

$$(\widehat{\mathcal{D}^k f}, \varphi) = (-1)^k(\hat{f}, \mathcal{D}^k\varphi).$$

Заметим, что для любой обобщённой ф-ции $f$ правая часть рав-ва определена $\forall k = 1, 2, \ldots$ . Это означает, что любая обобщённая ф-ция бесконечно диф-ма, т.е. имеет производные всех порядков.

■