студенты-
физики

Математический анализ
Ответы

Барон Яков

2 семестр

Бутузов В.Ф.

2013

Математический анализ. | 2 сем. | ①

Тема 6. Неявные ф-ции.

1. Определения:

1) а) $F(x,y)=0$; $\mathcal{D}(F)=\mathcal{X}$.

$y=f(x)$ – неявная ф-ция, определяемая ур-нием $F(x,y)=0$, если $\forall x\in\mathcal{X}: F(x,f(x))=0$.

б) $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$; $\mathcal{D}(F)=\mathcal{X}$.

$y=f(x_1,\dots,x_n)$ – неявная ф-ция, определяемая ур-нием $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$, если $\forall x_1,\dots,x_n\in\mathcal{X}: F(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n))=0$.

2) ∢ систему n ур-ний:
$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0,\\ F_2(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0.\end{cases}$$

Решение этой системы относительно $y_1,y_2,\dots,y_n$:

$y_1=f_1(x_1,\dots,x_m)$,
$y_2=f_2(x_1,\dots,x_m)$,
$\dots\dots\dots$
$y_n=f_n(x_1,\dots,x_m)$,

называется совокупностью (системой) неявных ф-ций, определяемых исходной системой ур-ний.

3), 4) Пусть n ф-ций:
$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_n=f_n(x_1,x_2,\dots,x_m);\end{cases}$$
определены и диф-мы в нек. области $\mathcal{D}\subset E^m$.

Эти ф-ции наз. зависимыми в области $\mathcal{D}$, если одна из них (безразлично, какая) зависит в области $\mathcal{D}$ от остальных ф-ций, т.е.:

$\exists k\in[1,n]: \; y_k=f_k(x_1,x_2,\dots,x_m)=\Phi(y_1,\dots,y_{k-1},y_{k+1},\dots,y_n)$, где Φ – диф-мая ф-ция своих аргументов.

Если же ни одна из этих ф-ций не зависит от остальных, то они наз. независимыми в области D.

2. Основные теоремы (без док-ва):

1) О существовании и непрерывности ф-ции $y=f(x)$, заданной неявно ур-нием $F(x,y)=0$:

„Пусть: а) $F(x,y)$ опр. и непр. в прямоугольнике
$Q=\{(x,y): a<x<b,\ c\leq y\leq d\}$;
б) $\forall x\in(a,b): F(x,c)F(x,d)<0$;
в) $\forall x\in(a,b): F(x,y)$ – строго монотонная ф-ция на $[c,d]$.

Тогда на (a,b) существует единственная неявная ф-ция, определяемая ур-нием $F(x,y)=0$, и эта ф-ция непр. на (a,b)."

2) О диф-ти ф-ции $y=f(x)$, заданной неявно ур-нием $F(x,y)=0$:

„Пусть: а) $F(x,y)$ опр. и непр. (и диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$) в нек. окр-ти ω т. $M_0(x_0,y_0)$;
б) в окр. ω $\exists F_y(x,y)$, непр. в т. $M_0(x_0,y_0)$;
в) $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда неявная ф-ция $y=f(x)$ диф-ма в т. x_0, причём: $f'(x_0)=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}=-\dfrac{F_x(x_0,f(x_0))}{F_y(x_0,f(x_0))}$."

3) О сущ-нии и непр-ти ф-ции $y=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, заданной неявно ур-нием $F(x_1,x_2,\dots,x_m,y)=0$:

„Пусть: а) $F(x_1,\dots,x_m,y)$ опр. и диф-ма в нек. окр-ти ω т. $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0,y^0)$;
б) $F_y(x_1,\dots,x_m,y)$ непр. в т. M_0;
в) $F(x_1^0,\dots,x_m^0,y^0)=0$, $F_y(x_1^0,\dots,x_m^0,y^0)\neq 0$.

Тогда $\exists$ параллелепипед $Q = \{(x_1, \dots, x_m, y) : |x_i - x_i^\circ| < d_i$, ③
$i = \overline{1,n}$; $|y_i - y_i^\circ| \le c$; $d_i > 0$ и $c > 0$ — нек. числа$\} \subset \omega$, в котором ур-ние $F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$ определяет единственную неявную ф-цию вида $y = f(x_1, \dots, x_m)$."

4) О диф-ти ф-ции $y = f(x_1, \dots, x_m)$, заданной неявно ур-нием $F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$:

„Пусть: а) $F(x_1, \dots, x_m, y)$ опр. и непр. в нек. окр-ти ω т. $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ, y^\circ)$;

б) $F_y(x_1, \dots, x_m, y)$ непр. в т. M_0;

в) $F(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ, y^\circ) = 0$; $F_y(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ, y^\circ) \neq 0$.

Тогда ф-ция $y = f(x_1, \dots, x_m)$ диф-ма при $|x_i - x_i^\circ| < d_i$ $(i = \overline{1,n})$ и её частные производные вычисляются по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \left. \frac{F_{x_i}(x_1, \dots, x_m, y)}{F_y(x_1, \dots, x_m, y)} \right|_{y = f(x_1, \dots, x_m)}."$$

5) О сущ-нии и диф-ти ф-ций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой ур-ний $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

„Пусть: а) ф-ции F и G диф-мы в нек. окр-ти т. $M_0(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$;

б) частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial G}{\partial x}$ непр. в т. M_0;

в) $F(M_0) = 0$; $G(M_0) = 0$; $\left. \frac{\mathcal{D}(F, G)}{\mathcal{D}(y, z)} \right|_{M_0} \neq 0$.

Тогда $\exists$ такой параллелепипед $Q = \{(x, y, z) : |x - x^\circ| < d$, $|y - y^\circ| < c_1$, $|z - z^\circ| < c_2$; $c_1, c_2, d > 0\} \subset \omega$, в котором исходная система ур-ний определяет единственную совокупность неявных ф-ций $y = f(x)$, $z = g(x)$, и эти ф-ции диф-мы при $|x - x^\circ| < d$."

6) О достаточных условиях независимости ф-ций:

„Пусть ф-ции $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $n \le m$, дифф-мы в окр. ω т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ и пусть якобиан этих ф-ций по каким-либо переменным не равен нулю в т. M_0. Тогда эти ф-ции независимы в ω."

7) О зависимости и независимости ф-ций:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$ — функциональная матрица ф-ций $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m)$,
$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_m)$,
$\dots\dots$
$y_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$.

„Пусть: а) ф-ции $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$ дифф-мы в окр. ω т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, а частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ непр. в т. M_0;

б) функциональная матрица A имеет минор r-го порядка, не равный нулю в т. M_0;

в) все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A (если такие имеются) равны нулю в ω.

Тогда r ф-ций, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в ω, а каждая из остальных ф-ций зависит в нек. окр-ти т. M_0 от этих r ф-ций."

3. Теоремы с док-вом:

1) О сущ-нии и непр. ф-ции $y = f(x)$, заданной неявно ур-нием $F(x,y) = 0$:

„Пусть: а) $F(x,y)$ опр. и непр. в прямоугольнике $Q = \{(x,y): a < x < b,\ c \le y \le d\}$;

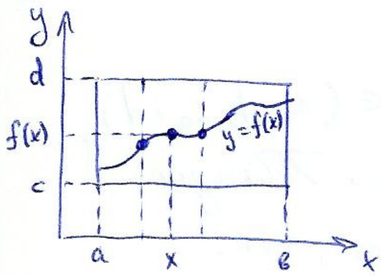
б) $\forall x \in (a,b):\ F(x,c)\,F(x,d) < 0$;

в) $\forall x \in (a,b)$: $F(x,y)$ – строго монотонная ф-ция на $[c,d]$.

Тогда: а) в прямоугольнике Q ур-ние $F(x,y)=0$ определяет единственную неявную ф-цию вида $y=f(x)$, т.е. $\forall x \in (a,b)$ ур-ние $F(x,y)=0$ имеет ! решение отн-но y, лежащее на $[c,d]$;

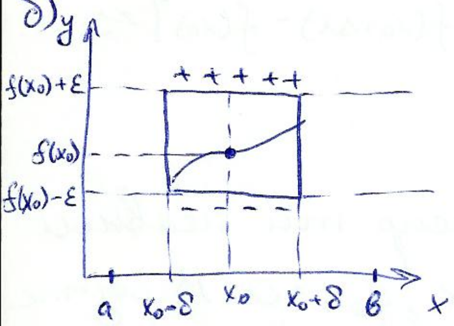
б) ф-ция $y=f(x)$ непр. на (a,b)."

Д-во: а)



Зафиксируем произвольное $x \in (a,b)$ и $\divideontimes$ $F(x,y)$ как ф-цию y на $[c,d]$. Эта ф-ция непр. на $[c,d]$ и имеет на концах сегмента значения разных знаков. След-но, $\exists y \in [c,d]$ такое, что $F(x,y)=0$. В силу строгой монотонности $F(x,y)$ по y такое значение y единственно. Итак, $\forall x \in (a,b)$ ур-ние $F(x,y)=0$ имеет единственное решение отн-но y. Обозначим его $y=f(x)$. Тогда $F(x,f(x))=0 \ \forall x \in (a,b)$.

б)



По опр. непр-ти н.д., что $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$, такое, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и проведём прямые $y=f(x_0)\pm\varepsilon$.

$\divideontimes$ $F(x_0,y)$. Пусть она возрастает на $[c,d]$. Тогда $F(x_0,f(x_0))=0$, $F(x_0,f(x_0)-\varepsilon)<0$, $F(x_0,f(x_0)+\varepsilon)>0$.

$\divideontimes$ теперь $F(x,y)$ на прямых $y=f(x_0)\pm\varepsilon$, т.е. $F(x,f(x_0)-\varepsilon)$ и $F(x,f(x_0)+\varepsilon)$. В силу непр-ти $F(x,y)$ $\exists \delta>0$, такое, что $F(x,f(x_0)-\varepsilon)<0$, $F(x,f(x_0)+\varepsilon)>0$ при $|x-x_0|<\delta$.

Отсюда следует, что $\forall x$ из δ-окр. т. x_0 корень ур-ния $F(x,y)=0$, т.е. значение $y=f(x)$ лежит м/у $f(x_0)-\varepsilon$ и $f(x_0)+\varepsilon$, или $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta \iff |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$.

■

2) О диф-ти ф-ции $y=f(x)$, заданной неявно ур-нием $F(x,y)=0$:

„Пусть: а) $F(x,y)$ опр. и непр. в нек. окр. ω т. $M_0(x_0,y_0)$ и диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$;

б) в окр. ω $\exists F_y(x,y)$, непр. в т. $M_0(x_0,y_0)$;

в) $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

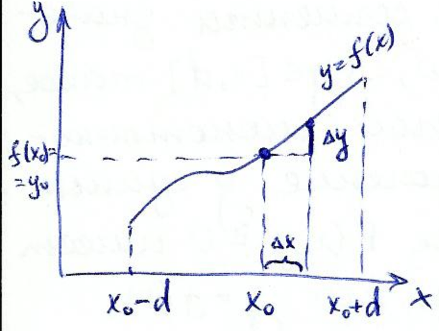
Тогда неявная ф-ция $y=f(x)$ дифф-ма в т. x_0, причём: (6)

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\Big|_{y_0=f(x_0)}.$$

Д-во: т.к. $F(x,y)$ дифф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, то её приращение в т. M_0 можно представить в виде:

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0) = F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

где $\alpha_1,\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.



Возьмём $|\Delta x|<d$, т.е. $x_0+\Delta x \in (x_0-d, x_0+d)$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - y_0$. Тогда:

$\Delta F = F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - F(x_0,y_0) = 0$, т.к. $F(x,f(x)) \equiv 0$ $\forall x \in (x_0-d, x_0+d)$, и, след-но, из выражения для ΔF получаем:

$$F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0,$$

откуда: $$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0,y_0)+\alpha_1}{F_y(x_0,y_0)+\alpha_2}.$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$. В силу непр-ти неявной ф-ции: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \to 0$. Поэтому $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$. В рез-те получим: $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)},$$ т.е.:

$$\exists\, f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}.$$ ■

3) О сущ-нии и непр-ти ф-ции $y=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, заданной неявно ур-нием $F(x_1,\dots,x_m,y)=0$:

„Пусть: а)

б)

в)

Тогда в параллелепипеде $Q=\{(x_1,\dots,x_m,y): |x_i - x_i^0| < d_i,\ i=\overline{1,n};$ $|y_i - y_i^0| \le c;$ $d_i>0$ и $c>0$ - нек. числа $\} \subset \omega$ ур-ние $F(x_1,\dots,x_m,y)=0$ определяет единственную неявную ф-цию вида $y=f(x_1,\dots,x_m)$, Д-во:

4) О сущест-нии и диф-ти ф-ций $y=f(x)$ и $z=g(x)$, заданных неявно системой ур-ний: $\begin{cases} F(x_1,\dots,x_m,y,z)=0, \\ G(x_1,\dots,x_m,y,z)=0. \end{cases}$

„Пусть: а) ф-ции F и G диф-мы в нек. окр. т. $M_0(x^0;y^0;z^0)$, где $x^0=(x_1^0,\dots,x_m^0)$;

б) частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,m})$ непр. в т. $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0,y^0,z^0)$;

в) $F(M_0)=0$ и $G(M_0)=0$; $\left.\frac{\mathcal{D}(F,G)}{\mathcal{D}(y,z)}\right|_{M_0}\neq 0$.

Тогда $\exists$ такой параллелепипед $Q=\{(x_1,\dots,x_m,y,z):$ $|x_i-x_i^0|<d_i$ (где $i=\overline{1,m}$), $|y-y^0|<c_1$, $|z-z^0|<c_2$; $c_1,c_2,d>0\}\subset\omega$, в котором исходная система ур-ний определяет единственную совокупность неявных ф-ций $y=f_1(x)$,

$z = f_2(x)$, и эти ф-ции диф-мы при $|x_i - x_i^0| < d_i$, где $i = \overline{1, m}$. (8)

Д-во:

из системы следует, что $F_1(M_0) = 0$; $G(M_0) = 0$.

$$\Delta\Big|_{M_0} = \frac{D(F, G)}{D(y, z)}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{M_0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что хотя бы одна из частных пр-х $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$ и $\frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ в т. M_0 не равны 0.

пусть $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$. ∡ ур-ние $F(x, y, z) = 0$ в окр. т. M_0, как ур-ние отн-но y: $F(x, y, z) = 0$.

т.к. $F(M_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$, то для $F(x, y, z) = 0$ выполнены все условия теоремы, согласно которой в нек. окр. т. M_0 ур-ние $F(x, y, z) = 0$ имеет ! реш. отн-но y:

$y = f(x, z)$, причём $f(x^0, z^0) = y^0$, $f(x, z)$ – диф-мая ф-ция, в частности: $$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}\Bigg|_{y = f(x, z)}$$

Подставим решение $y = f(x, z)$ во второе ур-ние системы:

$$\underbrace{G(x, f(x, z), z)}_{g(x, z)} = 0 \quad \text{или} \quad g(x, z) = 0.$$

Теперь ∡ это ур-ние в окр. т. $M_0'(x^0, z^0)$ отн-но z. Имеем:

$$g(M_0') = G(x^0, \underbrace{f(x^0, z^0)}_{y^0}, z^0) = G(x^0, y^0, z^0) = G(M_0) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\Delta}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

След-но, $$\frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{M_0'} = \frac{\Delta}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Bigg|_{M_0} \neq 0.$$

Таким образом для ур-ния $g(x, z) = 0$ в окр. т. M_0' выполнены все условия теоремы, согласно которой в нек. окр. т. $M_0'(x^0, z^0)$ ~~имеет~~ это ур-ние имеет ! реш. отн-но z:

$z = f_2(x)$, причём $f_2(x)$ – диф-мая ф-ция. Подставляя это решение в $y = f(x, z)$, получим: (9)

$y = f(x, f_2(x)) \equiv f_1(x)$, причём $f_1(x)$ – диф-мая ф-ция.

Таким образом, в нек. окр-ти т. M_0 исходная система имеет ! реш. отн-но y, z:

$y = f_1(x)$; $z = f_2(x)$, причём $f_1(x), f_2(x)$ – диф. ф-ции. ∎

5) О достаточных условиях независимости ф-ций:

„Пусть ф-ции $y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $n \le m$, диф-мы в окр. ω т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ и пусть якобиан этих ф-ций по каким-либо переменным не равен 0 в т. M_0. Тогда эти ф-ции независимы в ω."

Д-во:

Пусть, например, $\left.\dfrac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Допустим, что ф-ции $y_1, \ldots, y_n$ зависимы в окр. ω. Тогда одна из них, например $y_k = f_k(x_1, \ldots, x_m)$ зависит в ω от всех остальных: $y_k = \Phi(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$, где Φ – диф. ф-ция, т.е. $f_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$.

По правилу диф-ния сложной ф-ции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}; \end{cases}$$

k-я строка якобиана

Х якобиан: $$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Полученные рав-ва показывают, что k-я строка якобиана явл. ЛК остальных строк с коэф. $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0$ в ω, что противоречит условию теоремы. ∎

Тема 7. Условный экстремум.

1. Определения:

1) $\not\exists$ ф-цию $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ при условии, что её аргументы являются не независимыми переменными, а связаны м/у собой k соотношениями ($k < m$):

$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ при $i = \overline{1,k}$. Эти соотношения наз. условиями связи. Пусть координаты т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ удовлетворяют условиям связи.

Говорят, что ф-ция $u = f(M)$ имеет в т. M_0 условный минимум (максимум) при условиях связи $F_i(x_1, \dots, x_m) = 0$, где $i = \overline{1,k}$, если существует такая окр-ть т. M_0, что для любой т. $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($M \neq M_0$) этой окр-ти, координаты которой удовлетворяют условиям связи, выполняется нер-во $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

2) $\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + \dots + \lambda_k F_k(M)$.

Здесь λ_i ($i = \overline{1,k}$) – произвольные числа;

$F_i(M) = 0$ ($i = \overline{1,k}$) – условия связи;

$\Phi(M)$ – ф-ция Лагранжа.

2. Основные теоремы (без док-ва):

1) О необходимых условиях Лагранжа условного экстремума ф-ции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ с условиями связи $F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ при $i = \overline{1,n}$ ($n < m$):

„Пусть: а) ф-ция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, где $i = \overline{1,n}$ ($n < m$);

б) для условий связи в окр. т. M_0 выполнены усл-я:

- $F_1, \dots, F_n$ дифф-мы в окр. т. M_0;
- $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ($i, j = \overline{1,n}$) непр. в т. M_0;
- $F_1(M_0) = 0, \dots, F_n(M_0) = 0$, $\left.\dfrac{\mathcal{D}(F_1, \dots, F_n)}{\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Тогда ∃ ф-ция Лагранжа $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$ (11)
(т.е. ∃ числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$), такая, что все её частные производные в т. M_0 равны нулю:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0) = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0) = 0."$$

3. Теоремы с док-вом:

1) О необходимых условиях экстремума ф-ции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа:

„Пусть: а) $u = u(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x^0, y^0)$ и имеет в этой точке усл. экстремум при условии связи $f(x,y)=0$;

б) $f(x,y)$ диф-ма в окр. т. M_0, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в т. M_0; $f(M_0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \neq 0$

Тогда ∃ ф-ция Лагранжа $\Phi = u(x,y) + \lambda f(x,y)$, такая, что все её частные производные в т. M_0 равны нулю:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0."$$

Д-во:

Пусть ф-ция u, а значит и ф-ция Φ, диф-ма в т. $M_0(x^0, y^0)$, и пусть u, и значит Φ, имеет в т. M_0 условный экстремум при условии связи $f(x,y)=0$. Тогда ф-ция $\tilde{f}(M')$ имеет безусловный экстремум в т. $M_0'(y^0)$. Следовательно: $d\tilde{f}\big|_{M_0'} = 0$. Это рав-во можно записать в виде:
$$d\tilde{f}\big|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)\,dy = 0, \quad \text{т.к. } \tilde{f}(y) = \Phi(\underbrace{\varphi(y)}_{x}, y).$$
Здесь dy - диф-л нез. переменной, а dx - диф-л ф-ции $\varphi(y)$ в т. M_0', т.е. $dx = d\varphi\big|_{M_0'}$. Покажем, что можно выбрать λ так, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0$. Напишем это рав-во в развёрнутом виде:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0.$$
Из этого ур-ния однозначно определяется λ. Значит,

$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)=0}$. Тогда имеем:

$$\left.\begin{array}{l} d\tilde{f}|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)\,dy = 0 \\ dy - \text{диф-л нез. пер.} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0.}$$

г) О необходимых условиях экстремума ф-ции $u=u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа:

„Пусть: а) $u=u(x,y,z)$ диф-ма в т. $M_0(x^0,y^0,z^0)$ и имеет в этой точке усл. экстремум при условии связи $f(x,y,z)=0$;

б) $f(x,y,z)$ диф-ма в окр. т. M_0;

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ непр. в т. M_0; $f(M_0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\neq 0$.

Тогда $\exists$ ф-ция Лагранжа $\Phi = u(x,y,z)+\lambda f(x,y,z)$, такая, что все её частные производные в т. M_0 равны нулю: $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)=0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)=0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)=0$."

Д-во:

Пусть ф-ция u, а значит и ф-ция Φ, диф-ма в т. $M_0(x^0,y^0,z^0)$ и пусть u, и значит и Φ, имеет в т. M_0 усл. экстремум при условии связи $f(x,y,z)=0$.

Тогда ф-ция $\tilde{f}(M')$ имеет безусловный экстремум в т. $M_0'(y^0,z^0)$. След-но: $d\tilde{f}|_{M_0'}=0$. Это рав-во можно записать в виде: $d\tilde{f}|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)\,dz = 0$, т.к. $\tilde{f}(y,z) = \Phi(\underbrace{\varphi(y,z)}_{x},y,z)$

здесь dy, dz - диф-лы нез. переменных, а dx - диф-л ф-ции $\varphi(y,z)$ в т. M_0', т.е. $dx = d\varphi|_{M_0'}$.

Покажем, что можно выбрать λ так, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)=0$.

Напишем это рав-во в развёрнутом виде:

$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0$.

Из этого ур-ния однозначно определяется λ. Значит, $\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)=0}$. Тогда имеем:

$d\tilde{f}|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)dz = 0$
dy, dz – диф-лы нез. переменных $\Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0}$ и $\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0) = 0}$.

■

3) О необходимых условиях экстремума ф-ции $u = u(x,y,z)$ с условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа:

„Пусть: а) $u = u(x,y,z)$ диф-ма в т. $M_0(x^0, y^0, z^0)$ и имеет в этой точке усл. экстремум при условиях связи $f(x,y,z)=0$ и $g(x,y,z)=0$;

б) $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ диф-мы в окр. т. M_0;
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ непр. в т. M_0;
$f(M_0)=0$, $g(M_0)=0$; $\left.\frac{D(f,g)}{D(x,y)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Тогда $\exists$ ф-ция Лагранжа $\Phi = u(x,y,z) + \lambda_1 f(x,y,z) + \lambda_2 g(x,y,z)$, такая, что все её частные производные в т. M_0 равны 0:
$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0) = 0$.

Д-во:

Пусть ф-ция u, а значит и ф-ция Φ, диф-ма в т. $M_0(x^0, y^0, z^0)$, и пусть u, и значит и Φ, имеет в т. M_0 усл. экстремум при условиях связи $f(x,y,z)=0$ и $g(x,y,z)=0$.
Тогда ф-ция $\tilde{f}(M')$ имеет безусловный экстремум в т. $M_0'(z^0)$. След-но: $d\tilde{f}|_{M_0'} = 0$. Это рав-во можно записать в виде: $d\tilde{f}|_{M_0'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)dz = 0$, т.к. $\tilde{f}(z) = \Phi(\underbrace{\varphi(z)}_{x}, \underbrace{\psi(z)}_{y}, z)$

Здесь dz – диф-л нез. переменной, а dx, dy – диф-лы ф-ций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в т. M_0', т.е.:
$dx = d\varphi|_{M_0'}$; $dy = d\psi|_{M_0'}$. Покажем, что можно выбрать λ_1, λ_2 так, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0$. Напишем эти рав-ва в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x}(M_0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial y}(M_0) = 0; \end{cases}$$

Это система $2^х$ ур-ний отн-но λ_1 и λ_2, определитель которой является транспонированным по отношению к якобиану $\left.\frac{D(f,g)}{D(x,y)}\right|_{M_0} \neq 0$. След-но, из этой системы однозначно определяются λ_1 и λ_2. Значит, $\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0}$ и $\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0}$. Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} &d\tilde{f}\big|_{M_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)\, dz = 0 \\ &dz - \text{диф-л нез. переменной} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0) = 0}.$$

■

Тема 8. Кратные интегралы.

1. Определения:

1) Плоской фигурой называют любое ограниченное множество точек плоскости.

Плоская фигура наз. квадрируемой, если точная верхняя грань $\underline{P}$ мн-ва площадей всех вписанных многоугольных фигур равна точной нижней грани $\overline{P}$ мн-ва площадей всех описанных многоугольных фигур.

2) Плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (где $y_1(x) \leq y_2(x)$) и двумя отрезками прямых $x = a$, $x = b$.

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

3) Пусть G – квадрируемая (и, след-но, ограниченная) область на плоскости и пусть в области G определена ограниченная ф-ция $u = f(M) = f(x,y)$. Разобьём область G на n квадрируемых частей G_i ($i = \overline{1,n}$) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части G_i возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму:

$I(G_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь G_i.

Эта сумма называется интегральной суммой ф-ции $f(x,y)$, соответствующей данному разбиению области G на части G_i и данному выбору промежуточных точек M_i.

4) Диаметром огр. мн-ва G точек назовём: $\sup\limits_{\substack{M' \in G \\ M'' \in G}} \rho(M', M'')$. Пусть d_i – диаметр G_i; $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Число I наз. пределом интегральных сумм $I(G_i, M_i)$ при $d \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разб. области G, у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется нер-во: $|I(G_i, M_i) - I| < \varepsilon$.

2. Основные теоремы (без док-ва):

1) О сведении двойного интеграла к повторному:

" Пусть: а) $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$;

б) $\forall x \in [a,b] \; \exists \; I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ – опр. интеграл.

Тогда $\exists$ опр. интеграл $\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ (повторный)

и справедливо рав-во: $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$. "

2) О формуле замены переменных для двойного интеграла:

" Пусть $\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ (u,v) \in g \end{array}\right\}$ отображение области g плоскости (u,v) на область G плоскости (x,y), удовлетворяющее следующим условиям:

I. Отображение взаимно однозначно, т.е. различным точкам (u,v) области g соответствуют различные точки (x,y) области G.

II. Ф-ции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ имеют в области g непр. частные производные первого порядка.

III. Якобиан отображения $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ отличен от нуля во всех точках области g.

Пусть далее g и G – замкнутые квадрируемые области, ф-ция $f(x,y)$ огр. в области G и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого мн-ва точек площади нуль.

Тогда справедливо равенство (ф-ла замены переменных в двойном интеграле):

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv .$$

3) О сведении тройного интеграла к повторному:

» Пусть: а) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$;

б) $\forall x \in [a,b] \ \exists \ I(x) = \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$.

Тогда $\exists$ опр. интеграл $\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$ (повторный)

и справедливо рав-во: $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$.

4) О формуле замены переменных для тройного интеграла.

» Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \\ (u,v,w) \in \tau \end{cases}$ отображение области τ пространства (u,v,w) на область T пространства (x,y,z), удовлетворяющее следующим условиям:

I. Отображение взаимно однозначно.

II. Ф-ции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$ и $\chi(u,v,w)$ имеют в области τ непр. частные производные первого порядка.

III. Якобиан отображения $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ отличен от нуля в области τ.

Пусть далее τ и T – замкнутые кубируемые области, ф-ция $f(x,y,z)$ огр. в области T и непр. всюду, кроме, быть может, некоторого мн-ва точек объёма нуль.

Тогда справедливо равенство (ф-ла замены переменных в тройном интеграле):

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\tau f(\varphi(u,v,\omega),\psi(u,v,\omega),\chi(u,v,\omega))\cdot\left|\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,\omega)}\right| du\,dv\,d\omega.\text{"}$$

5) Ф-лы для массы и координат центра тяжести плоской фигуры (материальной пластины):

" $m = \iint\limits_G \rho(x,y)\,dx\,dy$; $x_0 = \dfrac{M_y}{m}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{m}$, где:

$$M_x = \iint\limits_G y\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$M_y = \iint\limits_G x\rho(x,y)\,dx\,dy.\text{"}$$

6) Ф-лы для моментов инерции плоской фигуры (материальной пластины):

" $I_x = \iint\limits_G y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$; $I_y = \iint\limits_G x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$. "

3. Теоремы с док-вом:

1) О сведении двойного интеграла к повторному:

" Пусть ф-ция $f(x,y)$ опр. в области $G = \{(x,y):\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непр. ф-ции.

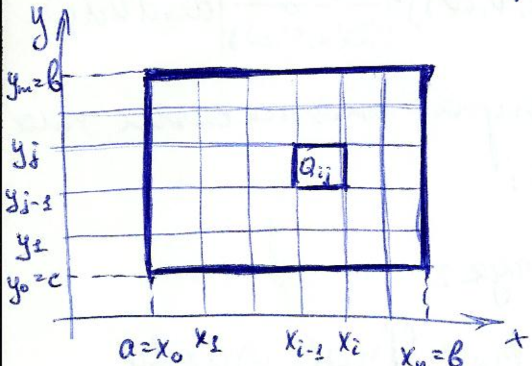
Пусть: а) $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$;

б) $\forall x\in[a,b]\ \exists \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy := I(x)$.

Тогда $\exists$ повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ и справедливо равенство: $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$. "

Д-во: Докажем сначала, что для ф-ции $f(x,y)$, определённой в прямоугольнике $Q = \{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ справедливо равенство $\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

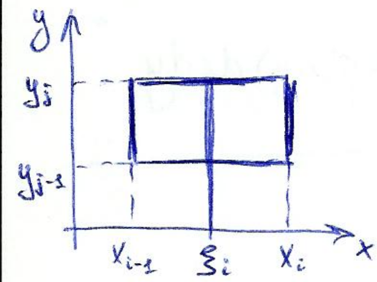
Разобъём сегмент $[a,b]$ на n частичных сегментов точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а сегмент $[c,d]$ — на m частичных сегментов точками $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Проведём ч/з точки разбиения прямые, параллельные осям координат (коорд. линии). Прямоугольник Q разобьётся на mn частичных прямоугольников. 18



$Q_{ij}=\{(x,y): x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j\}$, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Положим $m_{ij}=\inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij}=\sup\limits_{Q_{ij}} f(x,y)$.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, d_{ij} - диаметр Q_{ij}, $d=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} d_{ij}$. Отметим, что $S(Q_{ij})=\Delta x_i \Delta y_j$.



На каждом частичном сегменте $[x_{i-1},x_i]$ возьмём произвольным образом точку ξ_i.

Т.к. $m_{ij}\le f(\xi_i,y)\le M_{ij}$ при $y_{j-1}\le y\le y_j$, то:

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\,dy \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\,dy \quad \text{или} \quad m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy \le M_{ij}\Delta y_j,$$

где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Просуммируем эти нер-ва по j от 1 до m при каждом i:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_c^d f(\xi_i,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j.$$ Заметим, что средняя часть нер-в есть $I(\xi_i)$.

Умножим эти нер-ва на Δx_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j}_{\text{ниж. сумма ф-ции } f(x,y)\text{, соотв. разбиению прямоугольника } Q \text{ на частичные прямоугольники } Q_{ij} \text{ (поскольку } \Delta x_i\Delta y_j=S(Q_{ij}))} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{инт. сумма ф-ции } I(x)\text{, соотв. разбиению сегм. } [a,b] \text{ на частичные сегм. } [x_{i-1},x_i]} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j}_{\text{верх. сумма ф-ции } f(x,y)\text{, соотв. разбиению прямоугольника } Q \text{ на частичные прямоугольники } Q_{ij} \text{ (поскольку } \Delta x_i\Delta y_j=S(Q_{ij}))}$$

Перейдём к пределу при $d\to 0$. Тогда все $\Delta x_i\to 0$. Из условия а) в силу теоремы о том, что если $\exists \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$, то у ф-ции $f(x,y)$ $\underline{I}=\overline{I}$, и леммы Дарбу следует, что пределы левой и правой частей нер-в равны двойному интегралу $\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$. След-но, $\exists$ предел средней части, а это и есть по определению $\int\limits_a^b I(x)\,dx$. В рез-те получаем:

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теперь д-ем основное утверждение.

Обозначим $\mathrm{ч/з}$ R прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий область G, а $\mathrm{ч/з}$

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in G, \\ 0, & (x,y)\in Q\setminus G. \end{cases}$$

Для ф-ции $F(x,y)$ в прямоугольнике R выполнены все условия вспомогательной теоремы, а значит можем воспользоваться для этой ф-ции полученными выше рез-тами:

$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. А с учётом того, что $F(x,y)$ равна нулю вне G и совпадает с $f(x,y)$ в G, получим формулу:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

■

2) Схема док-ва теоремы о замене переменных в двойном интеграле:

„Пусть $\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ (u,v)\in g \end{cases}$ отображение области g плоскости (u,v) на область G плоскости (x,y), удовлетворяющее следующим условиям:

I. Отображение взаимно однозначно.

II. Ф-ции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ имеют в области g непр. частные производные первого порядка.

III. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0\ \forall (u,v)\in g$.

Пусть далее g и G – замкн. квадрируемые области, ф-ция $f(x,y)$ огр. в области G и непр. всюду, кроме, быть может, некоторого мн-ва точек площади нуль.

Тогда справедливо равенство (ф-ла замены переменных в двойном интеграле):

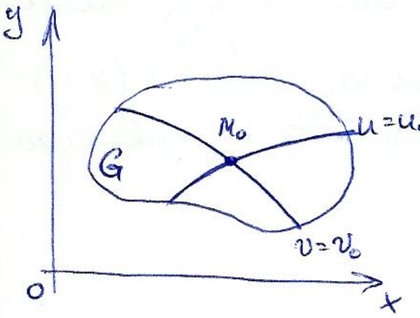
$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv."$$

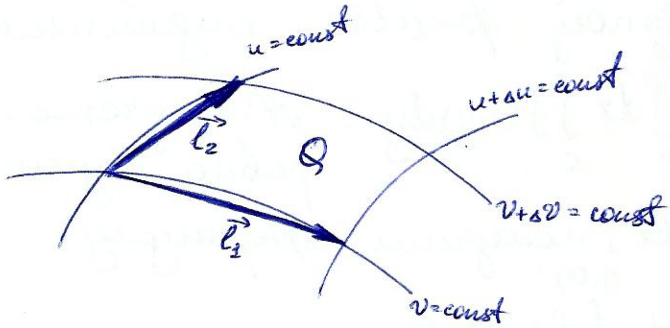
Схема док-ва:

Зафиксируем переменную u, положив $u=u_0=\mathrm{const}$. Тогда из ур-ний отображения получим: $\left.\begin{matrix} x=\varphi(u_0,v) \\ y=\psi(u_0,v)\end{matrix}\right\}(1)$

Ур-ния (1) явл. параметр. ур-ниями кривой, лежащей в обл. G (роль параметра играет v). Аналогично, положив $v = v_0 = const$, получим параметр. ур-ния другой кривой, лежащей в обл. G: $\left.\begin{matrix} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0) \end{matrix}\right\}$ (2), u – параметр.

Кривые (1) и (2) пересекаются в т. $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$.





В силу условия I т. $M_0(x_0, y_0)$ соотв. только одной точке (u_0, v_0) из области g. Таким образом, т. M_0 однозначно определяется парой чисел (u_0, v_0), которую можно ∡ как новые координаты т. M_0 (криволинейные координаты).

∡ две пары близких коорд. линий в области G. Они ограничивают криволинейный $4^х$-угольник Q. Вычислим приближённо его площадь, заменив его параллелограммом, построенным на векторах $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$:

$$\vec{l_1} = \{\varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v),\ \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v)\} = \{\varphi'_u \Delta u,\ \psi'_u \Delta u\}$$

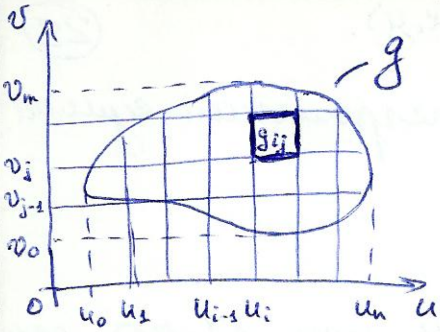
$\vec{l_2} = \{\varphi'_v \Delta v,\ \psi'_v \Delta v\}$, где производные $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v$ берутся в нек. промежуточных точках.

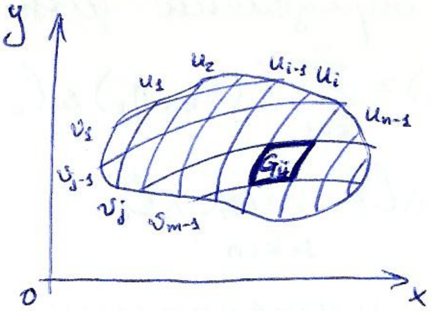
$$S(Q) \approx |[\vec{l_1} \times \vec{l_2}]| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi'_u \Delta u & \psi'_u \Delta u & 0 \\ \varphi'_v \Delta v & \psi'_v \Delta v & 0 \end{vmatrix} \right| = |(\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u)\Delta u \Delta v \vec{k}| \approx$$

$$\approx \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|_{(\tilde{u}, \tilde{v})} \Delta u \Delta v$$ (считаем

$\Delta u > 0, \Delta v > 0$), $(\tilde{u}, \tilde{v})$ – какая-нибудь точка криволин. $4^х$-угольника.

Разобьём область g на частичные области g_{ij} отрезками прямых $u = u_i$ и $v = v_j$ ($i = \overline{0,n}$; $j = \overline{0,m}$). При этом область G разобьётся на частичные области G_{ij} координатными u- и v-линиями: $G = \bigcup\limits_{i,j} G_{ij}$.





Положим $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$, $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$. В каждой частичной области G_{ij} возьмём в кач-ве промежуточной точки точку $K_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$, где $x_{ij} = \varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$, $y_{ij} = \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$, и составим интегральную сумму ф-ции $f(x,y)$ для полученного разбиения области G. Учитывая, что $S(G_{ij}) \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)} \cdot \Delta u_i \Delta v_j$, получаем:

$$I(G_{ij}, K_{ij}) = \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) S(G_{ij}) \approx \sum_{i,j} f(\varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j), \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)) \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)} \cdot \Delta u_i \Delta v_j. \quad (3)$$

Т.к. $\Delta u_i \Delta v_j = S(g_{ij})$, то в правой части рав-ва (3) стоит интегральная сумма для ф-ции $f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$, соотв. разбиению области g на частичные области g_{ij}.

Пусть g и G – замкн. квадрируемые области, а ф-ция $f(x,y)$ непр. в области G всюду, кроме, быть может, мн-ва точек площади нуль. Тогда, переходя в (3) к пределу при $d \to 0$ ($d = \max\limits_{g_{ij}} d_i$), получим:

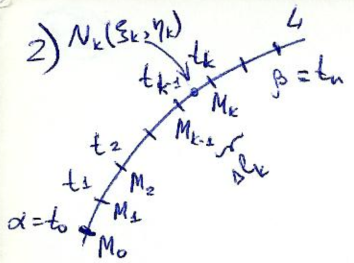
$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv. \blacksquare$$

Тема 9. Криволинейные интегралы.

1. Определения:

1) Число l наз. пределом длин ломаных $l(t_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$, выполняется нер-во $0 \le l - l(t_i) < \varepsilon$. Если $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} l(t_i) = l$, то кривая ℓ наз. спрямляемой, а число l – длиной её дуги.

Здесь $\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}$, $\alpha \le t \le \beta$.

2) 

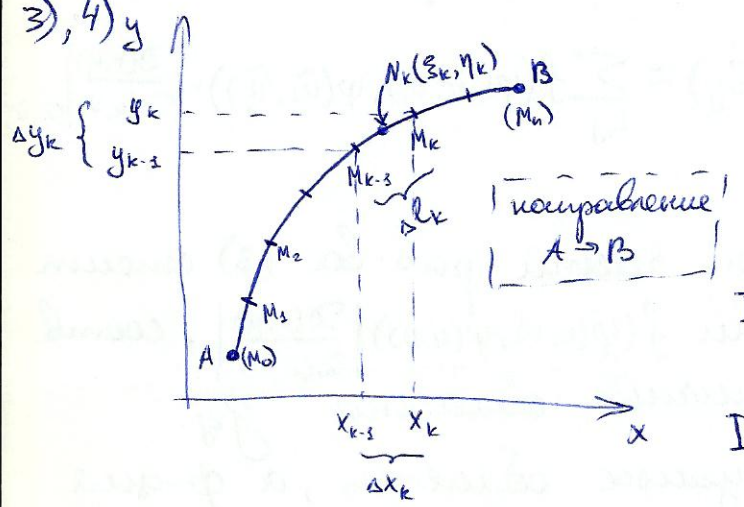
на L определена ф-ция $f(x,y)$.

$I(M_k, N_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$ – интегральная сумма.

пусть $\Delta l = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$.

Число I наз. пределом интегральных сумм при $\Delta l \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек N_k выполняется нер-во: $|I(M_k, N_k) - I| < \varepsilon$.

Если $\exists \lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_k, N_k) = I$, то число I наз. криволинейным интегралом первого рода от ф-ции $f(x,y)$ по кривой L.

3), 4) 

на AB заданы $P(x,y)$ и $Q(x,y)$

$\Delta l = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$. Составим две интегральные суммы:

$I_1(M_k, N_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$

$I_2(M_k, N_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$

Число I_m $(m = 1,2)$ наз. пределом интегральных сумм $I_m(M_k, N_k)$ при $\Delta l \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения кривой AB, у которого $\Delta l < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек N_k выполняется нер-во: $|I_m(M_k, N_k) - I_m| < \varepsilon$.

Если $\exists \lim\limits_{\Delta l \to 0} I_m(M_k, N_k) = I_m$, то он наз. криволинейным интегралом второго рода.

2. Основные теоремы и формулы (без док-ва):

1) Формула длины кривой, заданной:

а) параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt;$$

б) ур-нием $y=f(x)$, $a\le x\le b$: $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

2) О вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ с помощью определённого интеграла:

„Если L – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями: $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ \alpha\le t\le\beta\end{array}\right\}$, и ф-ция $f(x,y)$ кусочно непрерывна вдоль кривой L, то $\exists\int\limits_L f(x,y)\,dl$ и справедливо равенство:

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$"

3),4) О вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx$ с помощью определённого интеграла (и $\int\limits_{AB}Q(x,y)\,dy$):

„Если AB – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями: $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ \alpha\le t\le\beta\end{array}\right\}$, а ф-ции $P=P(x,y)$ и $Q=Q(x,y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB, то $\exists\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx$ и $\exists\int\limits_{AB}Q(x,y)\,dy$ и справедливы равенства:

$$\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt;$$

$$\int\limits_{AB}Q(x,y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt."$$

5) Ф-лы для вычисления массы, координат центра тяжести и моментов инерции материальной плоской кривой с плотностью $\rho(x,y)$: $m=\int\limits_L\rho(x,y)\,dl$;

$x_0=\frac{M_y}{m}$, $y_0=\frac{M_x}{m}$, где $M_x=\int\limits_L y\rho(x,y)\,dl$; $M_y=\int\limits_L x\rho(x,y)\,dl$;

$I_0=\int\limits_L(x^2+y^2)\rho(x,y)\,dl$; $I_x=\int\limits_L y^2\rho(x,y)\,dl$; $I_y=\int\limits_L x^2\rho(x,y)\,dl$.

6) Ф-ла, связывающая криволинейные интегралы первого и второго рода:

Пусть AB - кусочно гладкая кривая, заданная ур-ниями $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ \alpha\le t\le\beta \end{cases}$; ф-ции $P=P(x,y)$ и $Q=Q(x,y)$ кусочно непр. вдоль кривой AB и $\vec{\tau}=\{\cos\alpha;\sin\alpha\}$ - единичный касательный вектор к кривой AB.

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AB}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,dl=\int_{AB}(\vec{a}\,\vec{\tau})\,dl,$$ где

$\vec{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

7) О формуле Грина:

» Пусть ф-ции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непр. в простой области G. Тогда справедливо равенство: $$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$ где криволинейный интеграл берётся по границе L области G в положительном направлении. «

8) Об условиях независимости интеграла второго рода от пути интегрирования:

» Пусть ф-ции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр. в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны:

I. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство: $\oint_L Pdx+Qdy=0$.

II. Для любых двух точек A и B в области G криволинейный интеграл $\int_{AB}Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G.

III. Выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом, т.е. в области G существует ф-ция $u(M)=u(x,y)$ такая, что: $du=Pdx+Qdy$

Пусть G – односвязная область, а ф-ции P и Q имеют в области G непр. частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда каждое из условий I – III эквивалентно след. условию:

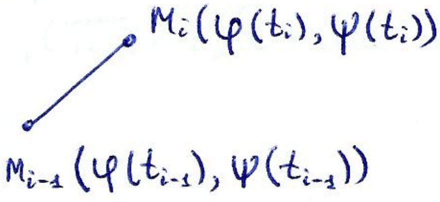
IV. В области G выполняется равенство: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

3. Теоремы с док-вом:

1) О длине дуги кривой, заданной параметрически:

„Пусть простая кривая задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ и пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая спрямляема и длина её дуги выражается формулой: $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$."

Д-во: Н.д., что $\lim\limits_{\Delta \to 0} l(t_i) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ (1)



Длина i-го звена ломаной равна: $\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$, а длина $l(t_i)$ всей ломаной выражается равенством: $l(t_i) = \sum\limits_{i=1}^n \Delta l_i = \sum\limits_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$.

По формуле Лагранжа конечных приращений имеем:

$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$,

$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i^*)\Delta t_i$, $\xi_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Следовательно:

$l(t_i) = \sum\limits_{i=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i^*))^2}\, \Delta t_i$.

Введём ф-цию $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$. Она непрерывна и, следно, интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Интегральная сумма этой ф-ции, соотв. разбиению $[\alpha, \beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$ и выбору точек ξ_i в кач-ве промежуточных, имеет вид:

$I(t_i, \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i.$

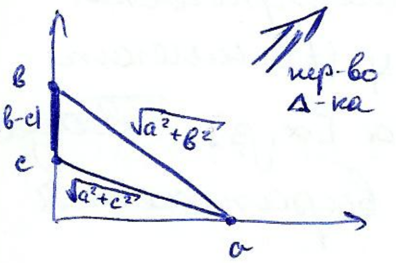
По определению определённого интеграла:

$$\lim_{\Delta \to 0} I(t_i, \xi_i) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \quad (2)$$

В силу (2) для док-ва (1) достаточно д-ть, что:

$$\lim_{\Delta \to 0} (l(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0.$$

Для этого понадобится вспомогательное алгебраическое нер-во: $|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \le |b-c| \quad (3)$



Используя нер-во (3), а также выражение для $l(t_i)$ и $I(t_i, \xi_i)$, получаем:

$$|l(t_i) - I(t_i, \xi_i)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(\varphi'(\xi_i^*))^2 + (\psi'(\xi_i^*))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2}\right)\Delta t_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)|\Delta t_i$$

Зададим теперь произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. $\psi'(t)$ непр. на $[\alpha, \beta]$, то $\exists \delta > 0$ такое, что при $\Delta t_i < \delta$ будет выполняться нер-во: $|\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$. След-но при $\Delta t_i < \delta \ (i = \overline{1, n})$, т.е. при $\Delta < \delta$, выполняется нер-во:

$|l(t_i) - I(t_i, \xi_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{\Delta \to 0} (l(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0.$$

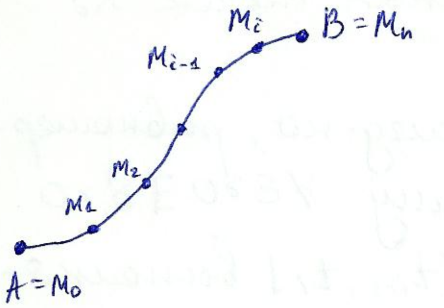
■

2) О вычислении криволинейного интеграла $1^{го}$ рода с помощью определённого интеграла:

„Если L - кусочно гладкая кривая, заданная параметрически ур-ниями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$, и ф-ция $f(x,y)$ кусочно непрерывна вдоль кривой L, то $\exists \int_L f(x,y)\,dl$ и справедливо равенство:

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.“$$

Д-во:



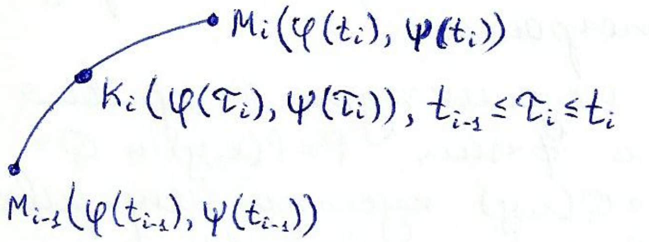
Разобьём $[\alpha,\beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьётся на частичные дуги точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$, где $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Введём обозначения:

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}\,,\quad \Delta t = \max_{1\le i\le n} \Delta t_i\,,$$

$$\Delta l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$ – длина i-й частичной дуги.

$$\Delta l = \max_{1\le i\le n} \Delta l_i.$$

Отметим, что $\Delta l \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (это очевидно), и обратно, $\Delta t \to 0$ при $\Delta l \to 0$ (это следует из того, что $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \geqslant \min\limits_{[\alpha,\beta]} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = m > 0$, и поэтому $\Delta l_i \geqslant m \Delta t_i$, след-но, $\Delta t_i \le \frac{\Delta l_i}{m}$ и $\Delta t \le \frac{\Delta l}{m}$).



На каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмём произвольным образом точку $K_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))$ и составим интегральную сумму:

$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Требуется д-ть, что $\lim I(M_i, K_i)$ при $\Delta l \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta t \to 0$) существует и равен определённому интегралу $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$. Представим интеграл I в виде: $I = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ и $\measuredangle$ разность

$$I(M_i, K_i) - I = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left[f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \right] \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \quad (1)$$

Нам н.д., что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (I(M_i, K_i) - I) = 0$, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек K_i выполняется нер-во: $|I(M_i, K_i) - I| < \varepsilon$.

Ф-ция $f(\varphi(t), \psi(t))$ непр. на $[\alpha, \beta]$ и, след-но, равномерно непр. на этом сегменте. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если $\Delta t < \delta$, то $\forall \tau_i$ и $t \in [t_{i-1}, t_i]$ выполняется нер-во: $|f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{l}$, где

$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ – длина кривой L. Тогда из (1) получаем, что если $\Delta t < \delta$, то:

$$|I(M_i, K_i) - I| < \frac{\varepsilon}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt}_{l} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

3) О вычислении криволинейного интеграла 2-го рода с помощью определённого интеграла:

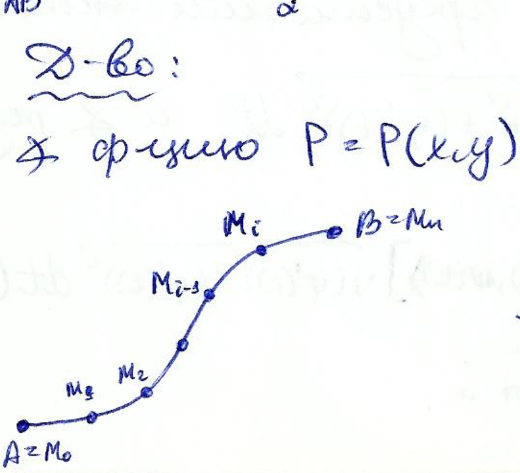
„Если AB – кусочно гладкая незамкнутая кривая, заданная ур-ниями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$, а ф-ции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB, то $\exists \int\limits_{AB} P(x,y)\, dx$ и $\exists \int\limits_{AB} Q(x,y)\, dy$ и справедливы рав-ва:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, dt."$$

Д-во:

Д. ф-цию $P = P(x, y)$:



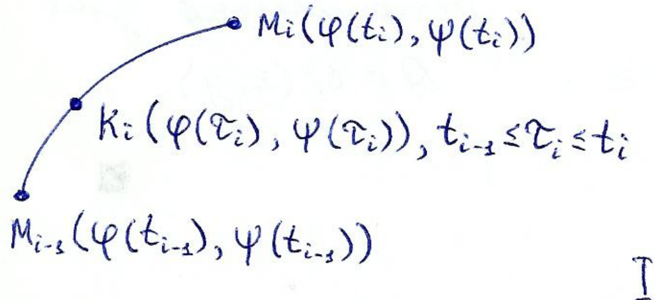
Разобьём $[\alpha, \beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При этом кривая AB разобьётся на частичные дуги точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$, где $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$.

Введём обозначения: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$; $\Delta t = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$,

$\Delta l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ – длина i-й частичной дуги.

$\Delta l = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

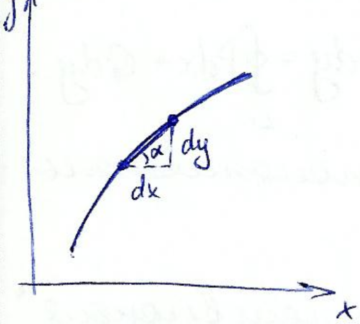
Отметим, что $\Delta l \to 0$ при $\Delta t \to 0$, и обратно, $\Delta t \to 0$ при $\Delta l \to 0$.



На каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмём произвольным образом т. $K_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))$ и составим интегральную сумму:

$$I(M_i K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\Delta l_i \cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cos\alpha \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\psi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}$$

Значит, $I(M_i, K_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\varphi'(t)\, dt$

Требуется д-ть, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} I(M_i, K_i)$ существует и равен определённому интегралу $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot$
$\cdot\, \varphi'(t)\, dt$. Представим интеграл I в виде:

$I = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\, dt$ и $\measuredangle$ разность $I(M_i, K_i) - I =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\,\varphi'(t)\, dt \quad (1).$$

Нам н.д., что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (I(M_i, K_i) - I) = 0$, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек K_i выполняется нер-во: $|I(M_i, K_i) - I| < \varepsilon$.

Ф-ция $f(\varphi(t),\psi(t))$ непр. на $[\alpha,\beta]$ и, след-но, равномерно непр. на этом сегменте. Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что если $\Delta t<\delta$, то $\forall\tau_i$ и $t\in[t_{i-1},t_i]$ выполняется нер-во: $|f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t))| < \frac{\varepsilon}{\Delta x}$, где

$\Delta x = \int\limits_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt$. Тогда из (1) получаем, что если $\Delta t<\delta$, то:

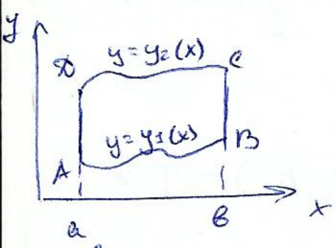
$$|I(M_i,K_i)-I| < \frac{\varepsilon}{\Delta x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)\,dt}_{\Delta x} = \varepsilon.$$

Аналогично для $Q=Q(x,y)$. ■

4) О формуле Грина:

„Пусть ф-ции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непр. в простой области G с кусочно-гладкой границей L. Тогда: $\iint\limits_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy$, где интеграл по границе L берётся в положительном направлении.

Д-во: а) $\measuredangle$ сначала случай, когда G — "y-трапециевидная" область, и д-жем, что: $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_L P\,dx$ (1)



Сводя двойной интеграл к повторному, получаем: $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_a^b dx\cdot P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,dx \qquad (2)$$

$$\int\limits_a^b P(x,y_2(x))\,dx = \int\limits_{DC} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{CD} P(x,y)\,dx$$

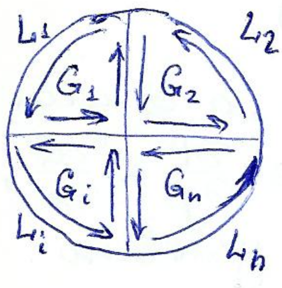
$$\int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$$

Используя полученные рав-ва, а также р-ва $\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx = 0$ и $\int\limits_{DA} P(x,y)\,dx = 0$, запишем (2) в виде:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = -\int_{CD} P dx - \int_{DA} P dx - \int_{AB} P dx - \int_{BC} P dx = -\oint_L P dx.$$

Тем самым справедливость рав-ва (1) доказана для „y-трапециевидной" области.

б) Пусть теперь G-простая область. Разобьём её на конечное число „y-трапец." областей G_i ($i=\overline{1,n}$): $G=\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$



Напишем для каждой области G_i рав-во(1):

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = -\oint_{L_i} P dx.$$

Суммируя эти рав-ва по i от 1 до n, получим в левой части $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy$, а в правой части получим $-\oint\limits_L P dx$, т.к. криволинейный интеграл по каждой внутренней разделительной линии берётся дважды, причём в противоположных направлениях, и потому сумма таких интегралов равна нулю. Итак, для простой области G справедливо рав-во:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = -\oint_L P dx. \quad (3)$$

Аналогично можно д-ть, используя разбиение G на „x-трапец." области, что: $$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy = \oint_L Q dy. \quad (4)$$

Вычитая (3) из (4), получаем: $$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_L P dx + Q dy.$$ ■

5) Об условиях независимости криволинейного интеграла $2^{го}$ рода от пути интегрирования:

» ① Пусть ф-ции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр. в обл. G. Тогда следующие 3 условия эквивалентны:

I. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура $L \subset G$: $\oint\limits_L P dx + Q dy = 0$.

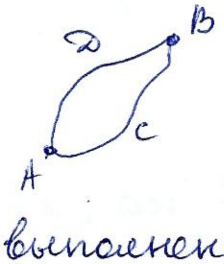
II. Для любых двух фиксированных точек $(A$ и $B) \in G$ криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования.

III. Выражение $Pdx + Qdy$ является полным диф-лом, т.е. $\exists$ ф-ция $u(x,y) = u(M)$ такая, что $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. При этом для любой кусочно гладкой кривой $AB \subset G$ выполняется рав-во: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$. (1)

② Если, кроме того, область G – односвязная, а ф-ции P и Q имеют в области G непр. производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то каждое из условий I–III эквивалентно условию: IV. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G."

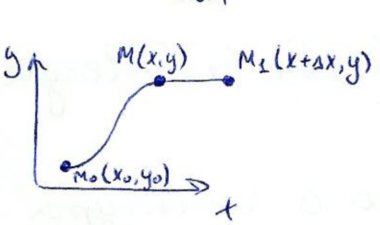
Д-во: проведём по схеме: ① $\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III} \to \mathrm{I}$; ② $\mathrm{III} \to \mathrm{IV} \to \mathrm{I}$

① а) $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$: пусть выполнено усл. I. $\forall$ 2 произв. точки $(A$ и $B) \in G$ и 2 произв. кривые, соединяющие эти точки: ACB и ADB.



В силу усл. I: $\int\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0$, т.е. $\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = 0$, откуда $\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy$, т.е. выполнено усл. II.

б) $\mathrm{II} \to \mathrm{III}$: пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фикс. точка $\in G$, $M(x,y)$ – произв. точка $\in G$. В силу усл. II интеграл $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$ не зависит от выбора кривой M_0M, а зависит только от т. $M(x,y)$, т.е. явл. ф-цией от x и y. Обозначим эту ф-цию $u(x,y)$: $u(x,y) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$.



Зафиксируем т. $M(x,y)$ и дадим приращение Δx переменной x. Ф-ция $u(x,y)$ получит частное приращение:

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{M_0M_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy =$$

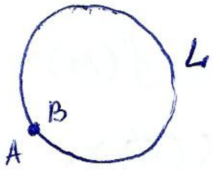
$= \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy = \int\limits_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx \underset{\text{ф-ла ср. значения}}{=} P(\xi, y)\Delta x$, где $\xi \in [x, x+\Delta x]$.

Отсюда следует, что: $\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\xi, y) \to P(x,y)$ при $\Delta x \to 0$, т.е. ф-ция $u(x,y)$ имеет в т. $M(x,y)$ частную производную по переменной x и $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Отсюда, т.к. P и Q – непр. ф-ции, то $u(x,y)$ – диф. ф-ция, причём $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, т.е. выражение $Pdx + Qdy$ явл. полным диф-лом.

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_0} Pdx + Qdy + \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy = \underbrace{\int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy}_{u(B)} - \underbrace{\int\limits_{M_0A} Pdx + Qdy}_{u(A)} =$$

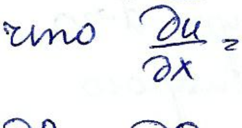
$= u(B) - u(A)$.

в) III → I: Пусть выполнено усл. III и, след-но, верна формула (1). Возьмём произвольный замкн. контур $L \subset G$. По ф-ле (1): $\oint\limits_L Pdx + Qdy = u(B) - u(A) = 0$, т.е. выполнено усл. I.



② г) III → IV: Пусть выполнено усл. III, т.е. $\exists\, u(x,y)$ такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Т.к. $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непр. ф-ции, то $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ выполн. усл. IV.

д) IV → I: Пусть вып. усл. IV, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в обл. G и G – односвязная обл. Возьмём произв. замкн. контур $L \subset G$. В силу односвязности обл. G область $\mathcal{D}$, ограниченная контуром L, целиком принадлежит области G.



По ф-ле Грина: $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$, т.е. вып. усл. I.

Тема 10. Поверхностные интегралы.

1. Определения:

1) Пусть Φ - гладкая огр. поверхность. Разобьём её с помощью кусочно гладких кривых на конечное число n частей Φ_i $(i=\overline{1,n})$ так, чтобы каждая часть Φ_i однозначно проектировалась на кас. пл-ть, проведённую в любой точке этой части. На каждой части Φ_i возьмём произв. т. M_i и проведём ч/з неё кас. пл-ть к пов-ти. Обозн. ч/з S_i площадь проекции Φ_i на кас. пл-ть. Составим сумму:

$S(\Phi_i, M_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$. Пусть d_i - диаметр Φ_i, $d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

Число S наз. пределом сумм $S(\Phi_i, M_i)$ при $d\to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для любого разб. пов-ти Φ, у которого $d<\delta$, и для любого выбора точек M_i выполняется нер-во: $|S(\Phi_i, M_i) - S| < \varepsilon$.

Если $\exists \lim\limits_{d\to 0} S(\Phi_i, M_i) = S$, то пов-ть Φ наз. квадрируемой, а число S - площадью пов-ти Φ.

2) Пусть на квадрируемой пов-ти Φ опр. ф-ция $f(M) = f(x,y,z)$. Сост. инт. сумму: $I(\Phi_i, M_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) S(\Phi_i)$.

Пусть d_i - диаметр Φ_i, $d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

Число I наз. пределом инт. сумм $I(\Phi_i, M_i)$ при $d\to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall$ разбиения Φ, у которого $d<\delta$, и $\forall$ выбора точек M_i выполняется нер-во:

$|I(\Phi_i, M_i) - I| < \varepsilon$.

Предел I инт. сумм наз. поверх. интегралом первого рода от ф-ции $f(M)$ по пов-ти Φ.

3) Под стороной пов-ти будем понимать мн-во всех точек пов-ти с заданными в них векторами нормали $\vec{n}(M)$ так, что совокупность этих векторов образует непрерывное векторное поле нормалей (т.е. вектор-ф-ция $\vec{n}(M)$, $M\in P$, где P - пов-ть, - непр. ф-ция точки M).

4) Пусть Φ – гладкая или кусочно гладкая огр. пов-ть. Выберем одну из её сторон, определяемую полем нормалей $\vec{N}(M)$. Пусть $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ – углы, которые вектор $\vec{N}(M)$ составляет с осями координат, и пусть на пов-ти Φ заданы три ф-ции $P(M), Q(M)$ и $R(M)$.

Поверхностные интегралы первого рода $I_1 = \iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha \, dS$; $I_2 = \iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos\beta \, dS$; $I_3 = \iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma \, dS$ наз. поверхностными интегралами второго рода соответственно от ф-ций P, Q, R по выбранной стороне пов-ти Φ.

2. Основные теоремы и формулы (без док-ва):

1) Ф-ла площади пов-ти, заданной ур-нием $z = h(x, y)$, $(x, y) \in D$:

„Если область D огр. и замкнута; её границей является кусочно гладкая кривая без самопересечений, а ф-ция $h(x, y)$ непрерывно диф-ма в области D, то площадь пов-ти вычисляется по ф-ле:

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + h_x^2(x, y) + h_y^2(x, y)} \, dx\, dy."$$

2) Ф-ла площади пов-ти, заданной параметрически:

„Гладкая пов-ть, заданная параметрически ур-ниями $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \\ (u, v) \in g \end{cases}$, не имеющая особых точек, квадрируема и её площадь S выражается ф-лой:

$$S = \iint\limits_{g} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du\, dv, \text{ где } \begin{cases} A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, \\ B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, \\ C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}. \end{cases}"$$

3) Ф-ла для вычисления пов. интеграла 1го рода $\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, d\sigma$ при условии, что пов-ть S задана ур-нием $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, G – обл. на плоскости (x, y):

" $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$."

4) Ф-ла для вычисления пов. интеграла 1го рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$ при условии, что пов-ть S задана в параметрической форме:

" $\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$, где

$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \\ (u,v)\in g \end{array}\right\}$ — пар. ур-ния пов-ти S | $A=\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}$; $B=\begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix}$;

$C=\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}$."

5) Ф-ла для вычисления пов. интеграла 2го рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,ds$ при условии, что пов-ть S задана в виде $z=z(x,y)$, $(x,y)\in G$:

" $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,ds = \pm\iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$, где „+" — верхняя сторона пов-ти S, „−" — нижняя сторона пов-ти S."

6) Ф-ла для вычисления пов. интеграла 2го рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha\,ds$ при условии, что пов-ть S задана в параметрической форме, α — угол м/у нормалью к выбранной стороне пов-ти и осью Ox:

" $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha\,ds = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,A(u,v)\,du\,dv$, где

$A=\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}$, $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \\ (u,v)\in g \end{array}\right\}$ — пар. ур-ния пов-ти S | Пов-ть S не имеет особых точек и выбирается та сторона пов-ти, на которой $\vec{N}(M)=\{A,B,C\}$."

7) Ф-ла для вычисления пов. интеграла второго рода $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ при условии, что пов-ть S задана в параметрической форме:

„ $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_g [P(\varphi,\psi,\chi)A + Q(\varphi,\psi,\chi)B + R(\varphi,\psi,\chi)C]\,du\,dv$,

где $\varphi = \varphi(u,v)$, $\chi = \chi(u,v)$, $\psi = \psi(u,v)$."

3. Теоремы с док-вом:

1) О вычислении площади пов-ти, заданной ур-нием $z = h(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}$, с помощью двойного интеграла:

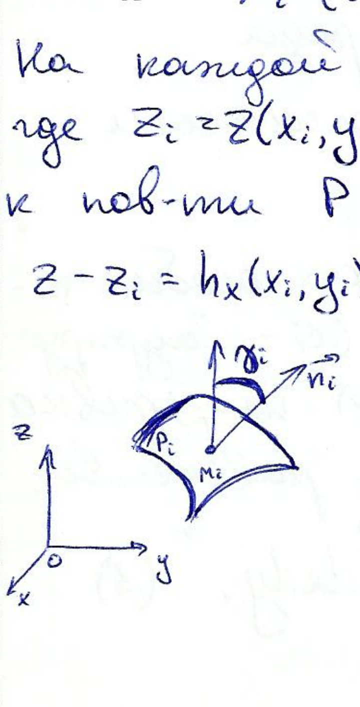
„ Если область $\mathcal{D}$ огр. и замкнута; её границей является кусочно гладкая кривая без самопересечений, а ф-ция $h(x,y)$ непрерывно диф-ма в области $\mathcal{D}$, то пов-ть P, заданная ур-нием $z = h(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}$, квадрируема и её площадь выражается ф-лой:

$$S = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y)}\,dx\,dy.$$ "

Д-во: Разобьём пов-ть P кусочно гладкими кривыми на n частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. При этом обл. $\mathcal{D}$ разобьётся на n частей $\mathcal{D}_i$ $(i = \overline{1,n})$, где $\mathcal{D}_i$ - проекция P_i на пл-ть Oxy.

На каждой части P_i возьмём произв. точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $z_i = z(x_i, y_i)$, и проведём ч/з т. M_i касательную пл-ть к пов-ти P. Ур-ние касательной пл-ти имеет вид:

$$z - z_i = h_x(x_i,y_i)(x - x_i) + h_y(x_i,y_i)(y - y_i).$$



Вектор $\vec{n}_i = \{-h_x(x_i,y_i), -h_y(x_i,y_i), 1\}$ явл. вектором нормали к пов-ти P в т. M_i. Обозначим ч/з γ_i угол м/у вектором $\vec{n}_i$ и осью Oz.

Тогда: $\cos\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(x_i,y_i) + h_y^2(x_i,y_i)}}$

Пусть S_i – площадь той части касательной пл-ти, которая проектируется на частичную область D_i. Воспользуемся тем, что площадь $S(D_i)$ области D_i и площадь S_i связаны рав-вом: $S(D_i) = S_i \cos \gamma_i$, откуда следует, что $S_i = \sqrt{1 + h_x^2(x_i, y_i) + h_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(D_i)$.

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + h_x^2(x_i, y_i) + h_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(D_i) \quad (1)$$

По опр. площадь пов-ти P – это предел сумм $S(P_i, M_i)$ при $d \to 0$, где $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$, d_i – диаметр P_i.

Правая часть в рав-ве (1) явл. инт. суммой для двойного интеграла по обл. D от непр. ф-ции $\sqrt{1 + h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y)}$.

При $d \to 0$ максимальный диаметр областей D_i также стремится к нулю. Поэтому предел правой части рав-ва (1) при $d \to 0$ $\exists$ и равен $\iint\limits_G \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\, dx\,dy$. След-но, $\exists \lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i)$, т.е. пов-ть P квадрируема и её площадь выражается ф-лой: $S = \iint\limits_G \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\, dx\,dy$. ■

2) О вычислении пов. интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$ с помощью двойного интеграла, если пов-ть S задана ур-нием $z = z(x,y)$:

„Пусть S – гладкая пов-ть, не имеющая особых точек, заданная ур-нием $z = z(x,y)$, $(x,y) \in G$ (G – квадрируемая замкнутая область), и пусть $f(x,y,z)$ непрерывна на S. Тогда $\exists \iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$, и справедливо равенство:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}\, dx\,dy." \quad (1)$$

Д-во: Разобьём пов-ть S на квадрируемые части: $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Пусть G_i — проекция S_i на пл-ть Oxy, так что $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Выберем на каждой части S_i произвольным образом точку M_i и составим инт. сумму:

$$I(S_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, S(S_i) \quad (2)$$

Двойной интеграл в правой части рав-ва (1) обозначим буквой I и запишем в виде:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy.$$

Каждое слагаемое в правой части написанного рав-ва преобразуем по ф-ле среднего значения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \iint\limits_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy, \text{ где } K_i \in S_i.$$

Т.к. $\iint\limits_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = S(S_i)$, то $I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i)\, S(S_i)$. (3)

Вычитая (3) из (2), получаем:

$$I(S_i, M_i) - I = \sum_{i=1}^{n} [f(M_i) - f(K_i)]\, S(S_i) \quad (4)$$

Зададим произв. $\varepsilon > 0$. Т.к. ф-ция $f(M)$ непр. на пов-ти S, которая явл. огр. замкн. мн-вом в силу своей гладкости, то $f(M)$ равномерно непр. на пов-ти S. Поэтому $\exists\, \delta > 0$ такое, что если d_i (диаметр S_i) $< \delta$, то $\forall$ двух точек M_i и K_i на пов-ти S_i будет выполнено нер-во:

$$|f(M_i) - f(K_i)| < \frac{\varepsilon}{S(S)}, \text{ где } S(S) \text{ — площадь пов-ти } S.$$

След-но, $\forall$ разбиения пов-ти S, у которого $d < \delta$, из рав-ва (4) следует: $|I(S_i, M_i) - I| < \frac{\varepsilon}{S(S)} \cdot \sum_{i=1}^{n} S(S_i) = \varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{d \to 0}(I(S_i, M_i) - I) = 0$, т.е. $\exists \lim\limits_{d\to 0} I(S_i, M_i) = I$, а т.к. $\lim\limits_{d \to 0} I(S_i, M_i) \equiv \iint\limits_{S} f(x,y,z)\,ds$, а I — дв. инт. в правой части рав-ва (1), то тем самым доказана справедливость рав-ва (1). ∎

3) О существовании пов. интеграла $2^{го}$ рода $\iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, d\sigma$, если ф-ция $P(x,y,z)$ непр. на пов-ти S:

„Пусть S – гладкая пов-ть, не имеющая особых точек, заданная ур-нием $z = z(x,y)$, $(x,y) \in G$ (G – квадрируемая замкнутая область), и пусть $P(x,y,z)$ непр. на S. Тогда $\exists \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, d\sigma$, где $\cos\alpha$ – косинус угла, который вектор нормали $\vec{N}(M)$ составляет с осью Ox."

Д-во:

по усл. теоремы: $\exists \iint\limits_S P(x,y,z)\, d\sigma$

Выберем ту сторону пов-ти, на которой $\vec{N}(M) = \{-z_x(x,y), -z_y(x,y), 1\}$ (верх. сторона). Тогда:

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\, d\sigma \cos\alpha = -\iint\limits_G P(x,y,z) \cdot \frac{z_x}{\cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}} \cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\, dxdy =$$

$$= -\iint\limits_G P(x,y,z)\, z_x\, dxdy.$$

■

Тема 11. Кривые на плоскости.

1. Определения:

1) Если 2 кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке – общую касательную, то говорят, что кривые касаются (соприкасаются) в точке M_0.

2) Пусть кривые L_1 и L_2 явл. графиками ф-ций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ соответственно, и пусть они касаются в т. $M_0(x_0, f_1(x_0))$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в т. M_0 равен n, если $\exists$ отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{|f_2(x) - f_1(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}$.

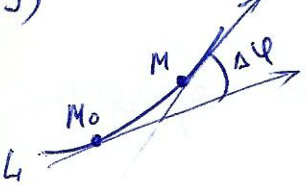
3) а) плоская кривая задана ур-нием $F(x,y)=0$:
Точка $M_0(x_0, y_0)$ кривой L, для которой $F_x^2(x_0,y_0) + F_y^2(x_0,y_0) = 0$, называется особой точкой этой кривой.

б) плоская кривая задана параметрически ур-ниями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$:
Точка $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ кривой L, для которой $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 = 0$, называется особой точкой этой кривой.

4) Совокупность всех кривых, описываемых ур-нием $F(x,y,a)=0$, наз. однопараметрическим семейством кривых.

Кривая, которая в каждой своей точке касается и притом только одной кривой данного семейства и в различных точках касается различных кривых семейства, называется огибающей данного семейства кривых.

5)



Пусть $\Delta l = |\smile M_0M|$. Обозначим: $k_{M_0M} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Кривизной кривой L в т. M_0 наз. $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} k_{M_0M}$.

Кривизна есть мера искривлённости плоской кривой.

2. Основные теоремы и формулы (без док-ва):

1) Ф-ла для вычисления в данной точке радиуса кривизны кривой, заданной ур-нием $y=f(x)$:

$$„ R = \frac{1}{k(M_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} k_{M_0M}}, \text{ где } k(M_0) = \frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}} “$$

3. Теоремы с док-вом:

1) О необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух плоских кривых в данной точке был равен n:

» Пусть ф-ции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $(n+1)$ раз диф-мы в т. x_0. Тогда: а) если $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$, ..., $f_1^{(n)}(x_0)=f_2^{(n)}(x_0)$, $f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$, то порядок касания кривых L_1 и L_2 в т. $M_0(x_0, f_1(x_0))$ равен n.

б) обратно: если порядок касания кривых L_1 и L_2 в т. M_0 равен n, то $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$, ..., $f_1^{(n)}(x_0)=f_2^{(n)}(x_0)$, $f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$. «

Д-во: а) пусть выполнены условия а. По ф-ле Тейлора:

$$f_2(x)-f_1(x)=\Big[f_2(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}f_2^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f_2^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+$$

$$+o((x-x_0)^{n+1})\Big]-\Big[f_1(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f_1^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+$$

$$+o((x-x_0)^{n+1})\Big]=\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\Big[f_2^{(n+1)}(x_0)-f_1^{(n+1)}(x_0)\Big]}_{A\neq 0}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}).$$

Отсюда получаем: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f_2(x)-f_1(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}=|A|\neq 0$, т.е. порядок касания равен n.

б) пусть порядок касания равен n.

Π_1: цепочка рав-в а) нарушается при нек. $k\leq n$. Тогда порядок касания равен $k-1<n$.

Π_2: цепочка рав-в а) выполняется полностью и, кроме того, $f_1^{(n+1)}(x_0)=f_2^{(n+1)}(x_0)$. Тогда порядок касания выше n.

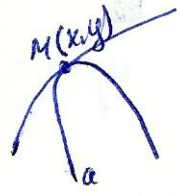
Оба вывода противоречат условию. След-но, выполняются соотношения $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$, ..., $f_1^{(n)}(x_0)=f_2^{(n)}(x_0)$, $f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$. ∎

г) О необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых:

„Пусть однопараметрическое семейство кривых, заданное ур-нием $F(x,y,a)=0$, имеет огибающую. Тогда огибающая удовлетворяет системе ур-ний:

$$\begin{cases} F(x,y,a)=0, \\ F_a(x,y,a)=0. \end{cases}$$

Д-во:



$\forall$ т. $M(x,y)$ на огибающей. Т.к. в этой точке огибающая касается некоторой кривой семейства, а этой кривой семейства соотв. определённое значение параметра a, то, тем самым, $\forall M(x,y)$ огибающей соотв. определённому значению a, причём различные точки огибающей соотв. различным значениям a (в силу опр. огибающей). Таким образом, координаты точки $M(x,y)$ огибающей являются ф-циями параметра a. Обозначим их так:
$x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$.

Эти ур-ния явл. парам. ур-ниями огибающей. Будем считать, что $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ – диф. ф-ции, и выведем систему ур-ний, решением которой явл. эти ф-ции.

Т.к. т. $M(\varphi(a),\psi(a))$ огибающей лежит также на кривой семейства, отвечающей данному значению пар. a, то её координаты уд. ур-нию $F(x,y,a)=0$:

$$F(\varphi(a),\psi(a),a)=0. \quad (1)$$

Рав-во (1) выполняется $\forall a$, т.е. явл. тождеством. Продифференцируем его по a:

$$F_x\cdot\varphi'(a)+F_y\,\psi'(a)+F_a=0 \quad \text{при } \begin{matrix} x=\varphi(a) \\ y=\psi(a). \end{matrix} \quad (2)$$

Т.к. огибающая и кривая семейства касаются в т. $M(\varphi(a),\psi(a))$, то у них в этой точке общая касательная, и, значит, одинаковые угловые коэф-ты касательной:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}=-\left.\frac{F_x(x,y,a)}{F_y(x,y,a)}\right|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}},$$ откуда получаем:

$$F_x\,\varphi'(a)+F_y\,\psi'(a)=0 \quad \text{при } \begin{matrix} x=\varphi(a), \\ y=\psi(a). \end{matrix} \quad (3)$$

В силу (3) и (2) имеем: $F_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$ (4)

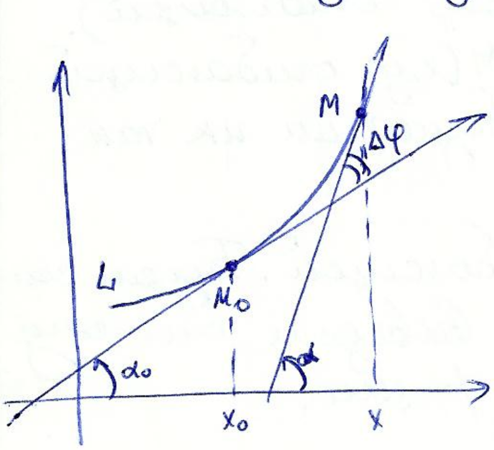
Итак, если огибающая $\exists$, то ф-ции $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$, описывающие огибающую, удовлетворяют рав-вам (1) и (4), т.е. эти ф-ции явл. решением системы ур-ний:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0, \\ F_a(x, y, a) = 0. \end{cases}$$

■

3) Вывод ф-лы для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной ур-нием $y = f(x)$:

Пусть кривая L задана явным ур-нием $y = f(x)$, причём $f(x)$ – дважды диф-мая ф-ция.



Обозначим ч/з α угол м/у направленной касательной в т. $M \in L$ (при движении в сторону возрастания x) и осью Ox. Тогда $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Положим $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, тогда $\Delta\varphi = |\Delta\alpha|$ –

$$k_{M_0M} = \frac{|\Delta\alpha|}{\Delta l} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|, \text{ где } \Delta l = |\smile M_0M|$$

$$k(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in L}} k_{M_0M} = \lim_{\Delta l \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x = x_0}.$$

α и l являются ф-циями x, а именно:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x), \quad \alpha = \operatorname{arctg} f'(x), \quad d\alpha\big|_{x=x_0} = \frac{f''(x_0)}{1 + (f'(x_0))^2}\,dx$$

$$l = l_{M_0M} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(s))^2}\,ds, \quad dl\big|_{x=x_0} = \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}\,dx$$

Поэтому: $\boxed{k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x=x_0} = \frac{|f''(x_0)|}{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}}$ – кривизна кривой $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, f(x_0))$.

■

4) Вывод ф-лы для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной в параметрической форме:

Пусть кривая L задана параметрически:
$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in$ нек. промежутку.

Тогда $dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$.

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ тогда:}$$

$$d\alpha = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

Пусть т. M_0 имеет координаты $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Тогда:

$$\boxed{k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{t=t_0} = \frac{|\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{3/2}}}$$ – кривизна кривой $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ в точке $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$.

■

Определения.

Тема 1. Множества точек пространства $\mathbb{R}^m$.

1) $\{M: \rho(M,A) < \varepsilon\}$ – ε-окр. т. A, где:
$\rho(M,A) = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2}$.

2) $\{M(x_1,\ldots,x_m): |x_1-a_1| \le d_1, \ldots, |x_m-a_m| \le d_m, d_1,\ldots,d_m > 0\}$ – m-мерный параллелепипед с центром в т. $A(a_1,\ldots,a_m)$.

3) $\{M: \rho(M,A) < R\}$ – окрестность т. A.

4) $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$

A – внутр. точка мн-ва $\{M\}$, если $\exists$ шар с центром в т. A, целиком принадлежащий мн-ву $\{M\}$.

5) т. A наз. изолированной точкой мн-ва $\{M\}$, если она принадлежит этому мн-ву и $\exists$ шар с центром в т. A, в котором нет других точек из мн-ва $\{M\}$, кроме т. A.

6) т. A наз. граничной точкой мн-ва $\{M\}$, если в любой ε-окр. т. A имеются как точки, принадлежащие $\{M\}$, так и

точки, не принадлежащие этому мн-ву.

7) Мн-во всех граничных точек мн-ва $\{M\}$ наз. его границей.

8) $\{M\}$ – открытое мн-во, если все его точки внутренние.

9) $\{M\}$ – замкнутое мн-во, если оно содержит все свои граничные точки.

10) т. A наз. предельной точкой мн-ва $D \subset \mathbb{R}^m$, если в любой ε-окр. т. A содержатся точки из мн-ва D, отличные от A.

11) $\{M\}$ – связное мн-во, если любые две его точки можно соединить непр. кривой, целиком принадлежащей этому мн-ву.

12) $\{M(x_1, \dots, x_m): x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, \dots, x_m = x_m^0 + \alpha_m t, -\infty < t < +\infty\}$, где $x_1^0, \dots, x_m^0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ – числа. Такое мн-во наз. m-мерной прямой пр-ва $\mathbb{R}^m$.

13) $\{M(x_1, \dots, x_m): x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \le t \le \beta\}$, где $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ – непр. на $[\alpha, \beta]$. Такое мн-во наз. непрерывной кривой в пр-ве $\mathbb{R}^m$.

Тема 2. Последовательности точек пространства $\mathbb{R}^m$.

1) $\{M_n\}$ – огр., если $\exists A > 0\ \forall M_n: \rho(0, M_n) = \sqrt{(x_1^{(n)})^2 + \dots + (x_m^{(n)})^2} \le A$.

2) $\{M_n\}$ – неогр., если $\forall A > 0\ \exists M_n: \rho(0, M_n) = \sqrt{(x_1^{(n)})^2 + \dots + (x_m^{(n)})^2} > A$.

3) т. A наз. пределом посл-ти $\{M_n\}$, если $\rho(M_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$.

4) Если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} M_n = A$, то $\{M_n\}$ – сходящаяся посл-ть.

5) $\{M_n\}$ – фунд., если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}: \rho(M_n, M_{n+p}) < \varepsilon$.

6) т. A наз. предельной точкой посл-ти $\{M_n\} \subset \mathbb{R}^m$, если в любой ε-окр. т. A содержится бесконечно много членов этой посл-ти.

Тема 3. Функции, предел, непрерывность.

1) Ф-ция $u(M)$ наз. огр. сверху на мн-ве $D \subset \mathbb{R}^m$, если: $\exists A\ \forall M \in D: u(M) \le A$.

2) Ф-ция $u(M)$ наз. неогр. сверху на мн-ве $D \subset \mathbb{R}^m$, если: $\forall A\ \exists M \in D: u(M) > A$.

3) Ф-ция $u(M)$ наз. огр. снизу на мн-ве $D \subset \mathbb{R}^m$, если: $\exists a\ \forall M \in D: u(M) \ge a$.

4) Ф-ция $u(M)$ наз. неогр. снизу на мн-ве $D \subset \mathbb{R}^m$, если: $\forall a \exists M \in D: u(M) < a$.

5) A наз. верх. гранью ф-ции $u(M)$, где $M = M(x_1, \dots, x_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall M \in D: u(M) \leq A$. Наим. из верх. граней огр. сверху ф-ции наз. её точной верх. гранью.

6) a наз. ниж. гранью ф-ции $u(M)$, где $M = M(x_1, \dots, x_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall M \in D: u(M) \geq a$. Наиб. из ниж. граней огр. снизу ф-ции наз. её точной ниж. гранью.

7) $\lim\limits_{M \to M_0} u(M) = b$ (K), если: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M (0 < \rho(M, M_0) < \delta): |u(M) - b| < \varepsilon$.

8) $\lim\limits_{M \to M_0} u(M) = b$ (Г), если: $\forall \{M_n\} \to M_0 (M_n \in \{M\}, M_n \neq M_0): \{f(M_n)\} \to b$.

9) $\lim\limits_{M \to \infty} u(M) = b$ (Г), если: $\forall \{M_n\} (M_n \in \{M\}) \wedge \lim\limits_{n \to \infty} M_n = \infty: \{f(M_n)\} \xrightarrow[n \to \infty]{} b$

10) $\lim\limits_{M \to \infty} u(M) = b$ (K), если: $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall M (\rho(0, M) > A): |u(M) - b| < \varepsilon$.

11) Ф-ция $u = u(x, y)$ наз. непр. в т. $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, где $\Delta x = x - x_0$.

12) Ф-ция $u = u(x, y)$ наз. непр. в т. $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных, если $\lim\limits_{M \to M_0} u(M) = u(M_0)$.

13) Ф-ция $u(M)$ наз. непр. на мн-ве $\{M\}$, если она непр. в каждой точке этого мн-ва.

Тема 4. Дифференцируемые ф-ции.

1) Частной производной ф-ции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументу x_k в т. $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ наз. $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ (если он существует).

2) Ф-ция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ наз. диф-мой в т. $M(x_1, \dots, x_m)$, если её полное приращение $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$ в этой точке можно представить в виде:

$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$, где A_i – нек. числа, α_i – б.м. ф-ции ар-тов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$: $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0$

$\alpha_i = 0$ при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$.

3) Первым диф-лом ф-ции $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ в т. M наз. линейная ф-ция аргументов $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m.$$

4) Пл-ть P, проходящая ч/з т. $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ пов-ти $S=\{(x,y,f(x,y)),(x,y)\in G\}$, наз. касательной пл-тью к пов-ти S в этой точке, если при $M\to M_0$ $(M\in S)$ величина $\rho(M,M_1)$ (здесь M_1 - основание перпендикуляра, проведённого из т. M к пл-ти P) явл. б.м. более высокого порядка, чем $\rho(M,M_0)$, т.е.: $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in S}}\frac{\rho(M,M_1)}{\rho(M,M_0)}=0.$

5) Ф-ция $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ наз. n раз диф-мой в т. M_0, если все её частные производные $(n-1)$-го порядка диф-мы в этой точке.

6) Второй диф-л ф-ции $u(x_1,\ldots,x_m)$ в т. M_0 определяется как диф-л в т. M_0 от первого диф-ла du при след. условиях:
 а) du $\not$-ся как ф-ция только независимых переменных $x_1,\ldots,x_m$;
 б) при вычислении диф-лов от $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_m)$ приращения независимых переменных $x_1,\ldots,x_m$ берутся такими же, как и в выражении для du (т.е. равными $dx_1,\ldots,dx_m$).

7) Диф-л $d^n u$ произвольного n-го порядка ф-ции $u(x_1,\ldots,x_m)$ определяется индуктивно по ф-ле: $d^n u=d(d^{n-1}u)$ при тех же усл-ях, что и $d^2 u$.

8) Пусть ф-ция $u=f(x,y,z)$ опр. в нек. окр. т. $M_0(x^0,y^0,z^0)$. Если $\exists\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\(M\in L)}}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}=\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$, то он наз. производной ф-ции $u=f(M)$ в т. M_0 по напр. $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

9) Градиентом диф-мой ф-ции $f(x,y,z)$ в т. $M(x_0,y_0,z_0)$ наз. вектор: $\operatorname{grad}u(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}$.

Тема 5. Локальный экстремум.

1) Говорят, что ф-ция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окр-ть т. M_0, в которой при $M \neq M_0$ выполняется нер-во $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Если ф-ция имеет в т. M_0 лок. максимум или минимум, то говорят также, что она имеет в этой точке лок. экстремум.